Exercice 1

On s'intéresse au problème d'optimisation linéaire suivant : maximiser $f(x,y) = 4x + 8y$, sous les contraintes

$$\begin{aligned} -3x + 2y &\leq 10 \quad (1)\\ x - 2y &\geq -12 \quad (2)\\ 3x + 4y &\leq 44 \quad (3)\\ x, y &\geqslant 0 \end{aligned}$$

L'objectif des questions suivantes est de vous guider pour résoudre ce problème par la méthode du parcours optimal des sommets.

On initialise avec le sommet $S_0 = (0,0)$:

1. Création du sommet S_1 :
   (a) Commencez-vous par augmenter x, ou y ? Pourquoi ?
   (b) Jusqu'à quelle valeur peut-on augmenter cette variable en restant dans les contraintes ? Quelle est l'équation la plus contraignante ? Quelles sont les coordonnées de S_1 ?
2. Création du sommet S_2 :
   (a) Si on quitte S_1 pour un autre sommet, selon quelle direction se déplacera-t-on ?
   (b) Quitter S_1 selon cette direction fera-t-il augmenter f ?
   (c) Si oui, en allant le plus loin possible dans cette direction, que trouvez-vous comme sommet S_2 ?
3. Création du sommet S_3 :
   (a) Si on quitte S_2 pour un autre sommet, selon quelle direction se déplacera-t-on ?
   (b) Quitter S_2 selon cette direction fera-t-il augmenter f ?
   (c) Si oui, en allant le plus loin possible dans cette direction, que trouvez-vous comme sommet S_3 ?

4. Création du sommet S_4 :
   (a) Si on quitte S_3 pour un autre sommet, selon quelle direction se déplacera-t-on ?
   (b) Quitter S_3 selon cette direction fera-t-il augmenter f ?
   (c) Si oui, en allant le plus loin possible dans cette direction, que trouvez-vous comme sommet S_4 ?

Exercice 2

Une entreprise fabrique deux produits : A et B.

Chaque produit A vendu rapporte à l'entreprise un bénéfice de 120€et chaque produit B un bénéfice de de 500€.

A ce stade on dirait qu'il suffit de ne produire que du produit de type B. Mais à cause de considérations bassement matérielles, on ne peut pas produire plus de 200 produits A et plus de 300 produits B par mois. De plus, on ne peut pas produire plus de 400 produits (quels que soient leurs types) en tout, à cause de la force de travail limitée.

1. L'entreprise souhaitant maximiser ses bénéfices, proposer une modélisation sous forme d'un problème d'optimisation linéaire.
2. Résoudre ce problème d'optimisation par la méthode du parcours optimal des sommets (si besoin, reprendre les questions de l'exercice précédent comme guide).

Exercice 3

La fabrique RadioIn fabrique deux types de radios : A et B.

Chaque radio produite est le fruit des efforts conjoints de 3 spécialistes : Pauline, Camille et Jean. Pauline travaille au plus 24 heures par semaine. Camille travaille au plus 45 heures par semaine. Jean travaille au plus 30 heures par semaine. Les ressources nécessaires pour construire chaque type de radio ainsi que leurs prix de vente sont donnés dans le tableau ci-dessous :

	Radio A	Radio B
Pauline	1h	2h
Camille	2h	1h
Jean	1h	3h
Prix de vente	15€	10€

On suppose que l'entreprise n'a aucun problème à vendre sa production, quelle qu'elle soit. RadioIn cherche un plan de production hebdomadaire pour maximiser son chiffe d'affaire.

1. Modéliser ce problème sous la forme d'un problème d'optimisation linéaire d'inconnues x et y.
2. Résoudre ce problème d'optimisation par la méthode du parcours optimal des sommets (si besoin, reprendre les questions de l'exercice 1 comme guide).

. Exercices supplémentaires

Exercice 4

On s'intéresse au problème d'optimisation linéaire suivant : maximiser $f(x, y) = 6x + y$, sous les contraintes

$$\begin{array}{rcl} x + 4y & \leq & 2 \\ -x - y & \leq & -1 \\ 6x + y & \leq & 2 \\ x, y & \geqslant & 0 \end{array}$$

Résoudre ce problème par la méthode des lignes de niveaux.

Exercice 5 - *Barres de céréales*

On s'intéresse au problème d'optimisation posé dans l'**exercice 4 du TD1** (problème des barres de céréales).

1. Si ce problème a une solution à coût minimal, quelle serait cette solution d'après le Théorème du Cours 2 ?
2. La solution du (a) est-elle bien la solution à coût minimal ? On pourra utiliser la méthode des lignes de niveau.
3. Si on cherchait maintenant, non plus à avoir un coût minimal en suivant ce régime, mais à être le plus nourri possible (c'est-à-dire le plus grand nombre de calories), quelle serait la fonction à maximiser ?
4. Que pourriez-vous dire de la solution optimale ? Pouvez-vous le démontrer ?
5. Peut-on appliquer la méthode du parcours optimal des sommets au problème de minimisation du coût ? Au problème de maximisation des calories ?