Exercice 1 - *corrigé*

On s'intéresse au problème d'optimisation linéaire suivant : maximiser $f(x,y) = 4x + 8y$, sous les contraintes

$$\begin{aligned} -3x + 2y &\leq 10 & (1) \\ x - 2y &\geq -12 & (2) \\ 3x + 4y &\leq 44 & (3) \\ x, y &\geqslant 0 \end{aligned}$$

On initialise avec le sommet $S_0 = (0,0)$:

1. **Création du sommet S_1 :**
   (a) Choisissez-vous de commencer par augmenter x, ou y ? Pourquoi ?
   On commence par faire augmenter y, car le coefficient de y dans f, 8, est plus grand que le coefficient de x.
   (b) Jusqu'à quelle valeur peut-on augmenter cette variable en restant dans les contraintes ? Quelle est l'équation la plus contraignante ? Quelles sont les coordonnées de S_1 ?

   On remplace x par 0 dans le système de contraintes :

   $$\begin{aligned} 2y &\leq 10 & (1) \qquad & y \leq 5 & (1) \\ -2y &\geq -12 & (2) \qquad & y \leq 6 & (2) \\ 4y &\leq 44 & (3) \qquad & y \leq 11 & (3) \\ y &\geqslant 0 & \qquad & y \geqslant 0 \end{aligned}$$

   On peut donc augmenter y jusqu'à 5. L'équation la plus contraignante est l'équation (1). On obtient $S_1 = (0,5)$.

2. **Création du sommet S_2 :**
   (a) Si on quitte S_1 pour un autre sommet, selon quelle direction se déplacera-t-on ?
   L'équation la plus contraignante à l'étape précédente étant la (1), on suivra la direction de la droite $D_1 : y = 5 + 1.5x$. Comme on a augmenté y en premier, on suivra cette direction en augmentant x.
   (b) Quitter S_1 selon cette direction fera-t-il augmenter f ?
   Si on suit cette direction en augmentant x, f vaudra :

   $$f(x,y) = 4x + 8 \times (5 + 1.5x) = 4x + 40 + 12x = 16x + 40.$$

   Comme $16 > 0$, f augmentera alors.
   (c) Si oui, en allant le plus loin possible dans cette direction, que trouvez-vous comme sommet S_2 ?

   On remplace y par $5 + 1.5x$ dans le système de contraintes :

   $$\begin{aligned} -3x + 2 \times (5 + 1.5x) &\leq 10 \qquad & 10 &\leq 10 \qquad & 10 &\leq 10 & (1) \\ x - 2 \times (5 + 1.5x) &\geq -12 \qquad & -2x &\geq -2 \qquad & x &\leq 1 & (2) \\ 3x + 4 \times (5 + 1.5x) &\leq 44 \qquad & 9x &\leq 24 \qquad & x &\leq 2.66 & (3) \\ y &\geqslant 0 \qquad & y &\geqslant 0 \qquad & y &\geqslant 0 \end{aligned}$$

   On peut donc aller jusqu'à $x = 1$, l'équation la plus contraignante étant la (2).

3. **Création du sommet S_3 :**
   (a) Si on quitte S_2 pour un autre sommet, selon quelle direction se déplacera-t-on ?
   Comme l'équation la plus contraignante est la (2), on se déplacera le long de la droite $D_2 : y = 6 + 0.5x$, en augmentant x.
   (b) Quitter S_2 selon cette direction fera-t-il augmenter f ?
   Le long de la direction D_2, la valeur de f est
   $$f(x, y) = 4x + 8 \times (6 + 0.5x) = 4x + 48 + 4x = 8x + 48.$$
   Et cette valeur augmente lorsque x augmente car $8 > 0$.
   (c) Si oui, en allant le plus loin possible dans cette direction, que trouvez-vous comme sommet S_3 ?

   On remplace y par $(6 + 0.5x)$ dans le système de contraintes
   $$\begin{array}{rclcrclcrcll}
   -3x + 2 \times (6 + 0.5x) & \leq & 10 & & 12 - 2x & \leq & 10 & & 1 & \leq & x & (1) \\
   x - 2 \times (6 + 0.5x) & \geq & -12 & & -12 & \geq & -12 & & -12 & \leq & -12 & (2) \\
   3x + 4 \times (6 + 0.5x) & \leq & 44 & & 5x + 24 & \leq & 44 & & x & \leq & 4 & (3) \\
   y & \geqslant & 0 & & y & \geqslant & 0 & & y & \geqslant & 0 &
   \end{array}$$
   On augmenter x jusqu'à $x = 4$, l'équation la plus contraignante étant la (3). On obtient $S_3 = (4, 8)$.

4. **Création du sommet S_4 :**
   (a) Si on quitte S_3 pour un autre sommet, selon quelle direction se déplacera-t-on ?
   L'équation la plus contraignante à l'étape précédente étant la (3), on se déplacera selon $D_3 : y = 11 - 0.75x$ en augmentant x.
   (b) Quitter S_3 selon cette direction fera-t-il augmenter f ?
   Selon cette direction f vaut
   $$f(x, y) = 4x + 8 \times (11 - 0.75x) = 4x + 88 - 6x = 88 - 2x.$$
   Comme x augmente et -2 négatif, on voit que f diminue si on se déplace dans cette direction. Il ne faut donc pas partir du point S_3.

   S_3 est donc le sommet de l'ensemble admissible en lequel f réalise son maximum.