

# クォーラム型 HA システムにおける 二重誘因停止のスペクトル解析と 金融工学的リスク評価

——  $\kappa_1 = 0$  定理による HA 設計の有効性証明・  
DTS 停止分解・VaR 相転移・CDS スプレッドの統合閉形式理論 ——

著者名\*

令和7年（2025年）

## Abstract

本稿は、DC1-DC2 二重データセンタ（DC）とクォーラムノード（QN）から成るクォーラム型 HA システムの停止リスクを、準吸収型連続時間マルコフ連鎖（CTMC）のスペクトル解析を用いて、金融工学の統合枠組みで定量化する。

まず HA システムの停止条件を正確に整理する：DC1 または DC2 のどちらかが生存していれば業務継続。QN 単独の障害は業務停止の直接的原因とはならない。ただし、「**DC間ネットワーク断 (L断) かつ QN 経路喪失**」の同時発生時はリーダー専決不能となりスプリットブレインを回避するためシステムが停止する。これを二重誘因停止（Double-Trigger Stop, DTS）と定義する。

主な理論的貢献は三点である。

(1)  $\kappa_1 = 0$  定理（定理 3.2）：HA 設計の下では、単一コンポーネント障害はすべて推移状態に移行吸収に至らないため、主固有値  $\lambda_0(\varepsilon)$  の一次項が消えて  $\lambda_0(\varepsilon) = -\varepsilon^2 \kappa_2 + O(\varepsilon^3)$

となる。これは HA 設計が期待停止時間を  $O(1/\varepsilon)$  から  $O(1/\varepsilon^2)$  へと一オーダー改善することの数学的

(2) DTS 分解定理（定理 3.5）： $\kappa_2$  は正規停止寄与  $\kappa_2^{(\text{NOR})} = \alpha_{DC}^2 / \mu_{DC}$  と DTS 寄与  $\kappa_2^{(\text{DTS})} = \alpha_L \alpha_Q (1/\mu_L + 1/\mu_Q)$  の和に自然分解され、DTS 停止割合  $\rho_{\text{DTS}} = \kappa_2^{(\text{DTS})} / \kappa_2$  が閉形式で与えられる。

(3)  $O(\varepsilon^2)$  構造を反映した金融リスク指標：VaR 相転移の臨界値が  $O(1/\sqrt{\kappa_2 T})$  となること（定理 5.2）、および CDS スプレッドが  $c^* \approx (1-R)\varepsilon^2 \kappa_2$  と二次スケールを持つこと（定理 5.6）を導出する。

数値実験により、固有値収束オーダー（ $O(\varepsilon^2)$ ）の実証、DTS 停止割合の理論値との整合、および VaR 相転移の閾値確認を行う。

\*所属機関, E-mail: example@example.ac.jp

**キーワード：**クォーラム型 HA, 準吸収型 CTMC, スペクトル射影,  $\kappa_1 = 0$  定理,  
二重誘因停止 (DTS) , DTS 分解, VaR 相転移, CDS スプレッド, スプリットブレイン

# Contents

<b>1</b>	<b>序論</b>	<b>5</b>
1.1	研究背景：クォーラム型 HA の停止リスク	5
1.2	HA 停止条件の正確な整理	5
1.3	DTS 概念の定義と用語の選択	6
1.4	既存研究との差別化	6
1.5	本稿の構成	6
<b>2</b>	<b>モデルの設定</b>	<b>6</b>
2.1	確率空間と記号	6
2.2	システムコンポーネントと障害の定式化	7
2.3	状態空間と停止条件の CTMC 表現	7
2.4	部分生成行列	8
2.5	吸収時間と位相型分布	9
<b>3</b>	<b>スペクトル解析：<math>\kappa_1 = 0</math> 定理と DTS 分解</b>	<b>9</b>
3.1	主固有値の摂動展開の準備	9
3.2	主定理： $\kappa_1 = 0$ と HA 設計の有効性	9
3.3	DTS 分解定理	11
<b>4</b>	<b>DTS 停止の確率的性質</b>	<b>12</b>
4.1	停止タイプ別の吸収確率	12
4.2	DTS 停止の発生メカニズムの比較	12
<b>5</b>	<b>金融工学的リスク指標</b>	<b>12</b>
5.1	$O(\varepsilon^2)$ 構造の金融的含意	12
5.2	損失確率変数の設定	13
5.3	VaR 相転移定理	13
5.4	Expected Shortfall	13
5.5	CDS スプレッドの閉形式	14
<b>6</b>	<b>数値実験</b>	<b>14</b>
6.1	実験設計の方針	14
6.2	実験 1： $\kappa_1 = 0$ 定理の収束オーダー検証	15
6.3	実験 2：DTS 停止割合の実証的検証	16
6.4	実験 3：VaR 相転移の臨界値確認	16
<b>7</b>	<b>政策・設計への含意</b>	<b>16</b>
<b>8</b>	<b>結論</b>	<b>17</b>

A	$\kappa_1 = 0$ 定理の $n$ 状態への一般化	18
B	期待停止時間の厳密評価	18
C	DTS 分解の経路解釈	19
D	吸収確率の導出	19

# 1 序論

## 1.1 研究背景：クォーラム型 HA の停止リスク

金融機関・クラウドプロバイダなどの基幹システムでは、可用性向上のためにクォーラム型 HA (High Availability) 構成が標準的に採用されている [8, 6]. 典型的な構成は次の三要素から成る。

- ・ DC1, DC2：業務サービスを提供する二重化データセンタ。
- ・ クォーラムノード (QN)：リーダー選出の投票ノード。障害発生時に DC1, DC2 のどちらかが「生きているか」を多数決で確認する。

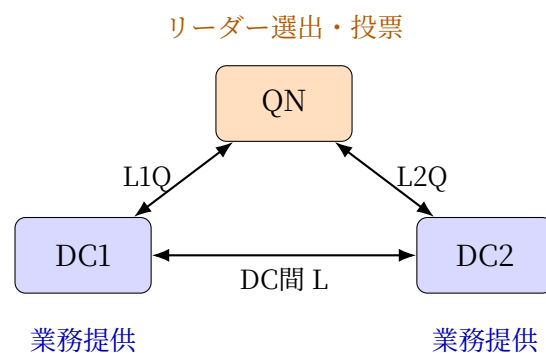


Figure 1: クォーラム型 HA システム構成。DC1 または DC2 のどちらかが稼働していれば業務継続。QN はリーダー選出のみに使用。

## 1.2 HA 停止条件の正確な整理

HA システムの停止条件はしばしば誤解される。本節で正確に整理する。

**業務継続条件 (正)** DC1 または DC2 の少なくとも一方が正常稼働していれば、QN の状態に関わらず、業務は継続できる。QN の障害単独は**直接的な業務停止原因ではない**。

**業務停止条件 A (正規停止)** DC1 と DC2 の両方が障害を起こした場合、業務を提供できなくなる。

**業務停止条件 B (二重誘因停止：DTS)** 「DC間ネットワーク断 (L断) かつ QN への経路喪失 (QN 障害)」が同時に発生した場合、DC1 と DC2 はお互いの生死を確認できず、かつ QN による仲裁も不可能となる。この状況ではスプリットブレイン (双方が自分をリーダーと見做す) やデータ不整合が生じる状態を回避するため、HA ソフトウェアは安全側に倒してサービスを停止する。

注意 1.1 (HA 設計の限界). HA 設計は単一コンポーネント障害 (DC1 単独障害, DC2 単独障害, L 断単独, QN 喪失単独) に対しては十分な耐性をもつ。しかし、L断と QN 喪失という二種類の独立した障害が同時発生するシナリオ (DTS) は、単一障害の組み合わせよりも現実の大規模障害事例 [4, 1]でも報告されている。

### 1.3 DTS 概念の定義と用語の選択

本稿では、上述の業務停止条件 B を二重誘因停止 (Double-Trigger Stop, DTS) と名付ける。

この用語の選択理由：

- ・「二重 (Double-Trigger)」は、L断と QN 喪失という二種類の独立した誘因が揃って初めてメカニズムを正確に表現する。
- ・構造化金融におけるダブルトリガー債 (double-trigger bond) [3] との概念的類似性 (二条金融工学的な CDS スプレッド評価と自然に接続できる。
- ・「ブラックスワン」という語は Taleb [13] の概念的定義に由来し確率的定義が曖昧であるため本稿では使用しない。DTS の「想定外性」は、単一障害耐性を設計思想とする HA システムにとって二重同時障害が「設計の仮定の外側にある事象」であることを意味する。これは正規停止確率  $O(\varepsilon^2)$  と DTS 確率  $O(\varepsilon^2)$  が同一オーダーであることの数学的帰結として定理 3.5 で厳密に示される。

### 1.4 既存研究との差別化

信頼性工学 (Trivedi [14]) は定常可用性の評価に優れるが、停止時間の尾分布・停止タイプ別分布

オペレーショナルリスク (Basel [2], Moscadelli [11]) は損失分布を統計的に扱うが、物理的な IT システムモデルとの接続を欠く。

信用リスクモデル (Merton [10], Lando [9]) は停止ハザードを外生的に与えるが、本稿はこれを HA システムの CTMC から内生的に導出する。

本稿の位置づけ：HA システムの物理モデルに基づき、 $\kappa_1 = 0$  という HA 設計の数学的本質を証明。DTS のメカニズムを定理として確立した上で、VaR・CDS スプレッドを閉形式で導出する最初の研究。

### 1.5 本稿の構成

第 2 節でモデルと仮定を設定する。第 3 節で  $\kappa_1 = 0$  定理と  $\kappa_2$  の分解を証明する。

第 4 節で DTS 停止割合と期待停止時間を分析する。第 5 節で VaR 相転移と CDS スプレッドを導出する。第 6 節で理論検証型数値実験を行う。第 8 節で結論を述べる。詳細な証明

## 2 モデルの設定

### 2.1 確率空間と記号

確率空間  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  を固定する。 $\mathbb{E}$  は  $\mathbb{P}$  の下での期待値を表す。

## 2.2 システムコンポーネントと障害の定式化

本モデルが追跡するコンポーネントは以下の通り（表 1）：

Table 1: モデル化するコンポーネントと各パラメータの意味

コンポーネント	障害強度 ( $O(\varepsilon)$ )	修復率 ( $O(1)$ )	停止への寄与
DC (一基)	$\varepsilon\alpha_{DC}$	$\mu_{DC}$	単独障害：業務継続
DC間ネットワーク (L)	$\varepsilon\alpha_L$	$\mu_L$	単独断：業務継続 (QN経由)
QN 経路 (L1Q,L2Q 含む)	$\varepsilon\alpha_Q$	$\mu_Q$	単独喪失：業務継続 (L経由)

$\varepsilon > 0$  は全コンポーネントに共通の「障害スケールパラメータ」であり、 $\varepsilon \rightarrow 0$  が「高信頼性体制」  
**仮定 2.1** (スケーリング). 全コンポーネントの障害強度は  $O(\varepsilon)$  であり、修復率は  $O(1)$  ( $\varepsilon$  非依存) とする： $\alpha_{DC}, \alpha_L, \alpha_Q > 0$ ,  $\mu_{DC}, \mu_L, \mu_Q > 0$  はすべて正の定数.

## 2.3 状態空間と停止条件の CTMC 表現

1.2 節の停止条件分析に基づき、以下の状態空間を定義する：

**定義 2.2** (状態空間).

- $s_0$  : 全系正常 (全コンポーネント・全経路が稼働)
- $s_1$  : 片 DC 障害 (DC1 または DC2 の一基が障害, QN・L 正常)
- $s_2$  : DC 間 L 断 (DC1-DC2 間ネットワーク断, QN 経路は正常)
- $s_3$  : QN 喪失 (QN 経路断または QN 障害, DC 間 L は正常)

推移状態集合 (業務継続中) :  $\mathcal{T} = \{s_0, s_1, s_2, s_3\}$ .

吸収状態集合 (業務停止) :  $\mathcal{A} = \{a_N, a_C\}$ , ただし

- $a_N$  : 正規停止 (DC1・DC2 両方障害)
- $a_C$  : 二重誘因停止 (DTS) (DC間 L断 + QN 喪失 が同時発生)

**注意 2.3** (DTS 停止状態の根拠). 状態  $s_2$  (L断, QN正常) では：DC は QN 経由でリーダー選出でき  
 $\rightarrow$  業務継続.

状態  $s_3$  (QN喪失, L正常) では：DC は L 経由でお互いを確認できる  $\rightarrow$  業務継続.

しかし「L断 + QN喪失」が同時に成立すると：DC はお互いの生死を確認できず, かつ  
 QN の仲裁もない  $\rightarrow$  スプリットブレインを回避するためシステムは停止 ( $a_C$ ).

**注意 2.4** (片DC障害時の追加障害). 状態  $s_1$  (片 DC 障害) において, L 断または QN  
 喪失が発生しても「残存する一基の DC が単独でリーダーとして稼働」できるためスプリットブレ

したがって  $s_1$  から L 断または QN 喪失への遷移は  $s_1$ （業務継続中）へ留まるか、状態  $s_1$  のまま推移とみなす（簡単のため本モデルでは  $s_1$  から  $a_C$  への直接遷移はなし）。

状態遷移を図 2 に示す。

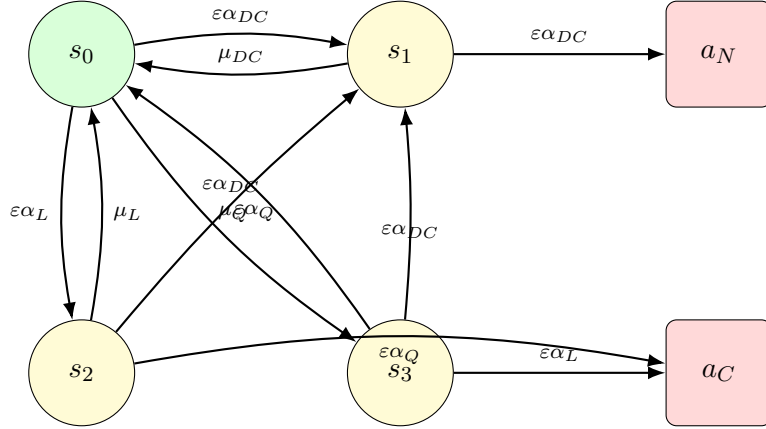


Figure 2: CTMC 状態遷移図 ( $\mathcal{T} = \{s_0, s_1, s_2, s_3\}$ ,  $\mathcal{A} = \{a_N, a_C\}$ ). 黄色：業務継続中推移状態，赤：吸収（停止）状態. DTS 停止  $a_C$  への遷移は  $s_2$ （L断）または  $s_3$ （QN喪失）からの追加障害発生時にのみ生じる。

## 2.4 部分生成行列

推移状態  $\mathcal{T}$  上の部分生成行列（サブジェネレータ） $Q_{00}(\varepsilon)$  を以下のように書く（行・列の順は  $s_0, s_1, s_2, s_3$ ）：

$$Q_{00}(\varepsilon) = Q_{00}^{(0)} + \varepsilon Q_{00}^{(1)} \quad (1)$$

ただし

$$Q_{00}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_{DC} & -\mu_{DC} & 0 & 0 \\ \mu_L & 0 & -\mu_L & 0 \\ \mu_Q & 0 & 0 & -\mu_Q \end{pmatrix}, \quad (2)$$

$$Q_{00}^{(1)} = \begin{pmatrix} -A_{00} & \alpha_{DC} & \alpha_L & \alpha_Q \\ 0 & -\alpha_{DC} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{DC} & -(\alpha_{DC} + \alpha_Q) & 0 \\ 0 & \alpha_{DC} & 0 & -(\alpha_{DC} + \alpha_L) \end{pmatrix}, \quad (3)$$

ここで  $A_{00} = \alpha_{DC} + \alpha_L + \alpha_Q$ ,  $O(\varepsilon^2)$  以上の項は存在しないのでこれが正確な展開である。

吸収強度ベクトル（推移状態から吸収状態への脱出率）は

$$d_{s_0} = 0, \quad d_{s_1} = \varepsilon \alpha_{DC} \rightarrow a_N, \quad d_{s_2} = \varepsilon \alpha_Q \rightarrow a_C, \quad d_{s_3} = \varepsilon \alpha_L \rightarrow a_C. \quad (4)$$

$d_{s_0} = 0$  は、全系正常状態  $s_0$  からは直接吸収が起きないことを示す（HA 設計の本質）。



仮定 2.5 (安定性). 仮定 2.1 の下で,  $\varepsilon > 0$  のとき  $Q_{00}(\varepsilon)$  の全固有値の実部は負である.

これは  $\alpha_{DC}, \alpha_L, \alpha_Q, \mu_{DC}, \mu_L, \mu_Q > 0$  より  $Q_{00}(\varepsilon)$  が  $\varepsilon > 0$  で安定な部分生成行列となることから成立する.

## 2.5 吸収時間と位相型分布

初期分布  $\pi^{\text{ini}}$  (推移状態  $\mathcal{T}$  上の確率分布) から出発する CTMC の吸収時間を  $\tau = \inf\{t \geq 0 : X_t \in \mathcal{A}\}$  とする. Neuts [12] の標準理論より, 生存関数は

$$S(t; \varepsilon) = \mathbb{P}(\tau > t; \varepsilon) = (\pi^{\text{ini}})^\top e^{Q_{00}(\varepsilon)t} \mathbf{1}. \quad (5)$$

仮定 2.5 の下で  $\tau$  は位相型分布 [12] に従い, 軽尾 (指数減衰) である.

## 3 スペクトル解析: $\kappa_1 = 0$ 定理と DTS 分解

### 3.1 主固有値の摂動展開の準備

$Q_{00}(\varepsilon)$  の固有値を  $\lambda_0(\varepsilon) \geq \text{Re } \lambda_1(\varepsilon) \geq \dots$  (実部の降順) とする.  $\varepsilon = 0$  のとき  $Q_{00}^{(0)}$  の行  $s_0$  はゼロ行であり,  $\lambda_0(0) = 0$  が退化する (準吸収型退化).

左右固有ベクトルの計算 ( $\varepsilon = 0$ ) :

$Q_{00}^{(0)} \mathbf{v}^{(0)} = 0$  の解 (右固有ベクトル) : 各行  $s_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) の方程式  $\mu_\bullet(v_0^{(0)} - v_k^{(0)}) = 0$  より  $\mathbf{v}^{(0)} = (1, 1, 1, 1)^\top$ .

$(\pi^{(0)})^\top Q_{00}^{(0)} = 0$  の解 (左固有ベクトル) : 列  $s_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) の方程式  $-\mu_\bullet \pi_k^{(0)} = 0$  より  $\pi^{(0)} = (1, 0, 0, 0)^\top$  (正規化  $(\pi^{(0)})^\top \mathbf{v}^{(0)} = 1$ ).

注意 3.1 (固有ベクトルの物理的意味). 右固有ベクトル  $\mathbf{v}^{(0)} = (1, 1, 1, 1)^\top$  は,  $\varepsilon = 0$  ではすべての推移状態が等価 (吸収なし) であることを示す. 左固有ベクトル  $\pi^{(0)} = (1, 0, 0, 0)^\top$  は,  $\varepsilon = 0$  極限での準定常分布が  $s_0$  (全系正常) に集中することを示す — これは  $\varepsilon \rightarrow 0$  で修復が支配的となり, 系が  $s_0$  に戻り続けることの反映である.

### 3.2 主定理: $\kappa_1 = 0$ と HA 設計の有効性

定理 3.2 ( $\kappa_1 = 0$  定理: HA 設計による一次吸収の消去). 仮定 2.1, 2.5 の下で,  $\varepsilon \rightarrow 0$  において

$$\lambda_0(\varepsilon) = -\varepsilon^2 \kappa_2 + O(\varepsilon^3) \quad (6)$$

が成立する (一次項は  $\kappa_1 = 0$ ). ここで

$$\kappa_2 = \underbrace{\frac{\alpha_{DC}^2}{\mu_{DC}}}_{\kappa_2^{(\text{NOR})}} + \underbrace{\alpha_L \alpha_Q \left( \frac{1}{\mu_L} + \frac{1}{\mu_Q} \right)}_{\kappa_2^{(\text{DTS})}} > 0. \quad (7)$$

特に  $\lambda_0(\varepsilon)$  の一次項がゼロであることは、HA 設計（単一障害での非吸収性）の数学的帰結であり、期待停止時間が  $O(1/\varepsilon)$  ではなく  $O(1/\varepsilon^2)$  にスケールすることを意味する。

Proof. 固有値摂動展開  $\lambda_0(\varepsilon) = \varepsilon\lambda^{(1)} + \varepsilon^2\lambda^{(2)} + O(\varepsilon^3)$  を組み立てる。

**ステップ 1** ( $\lambda^{(1)} = 0$ ) : 標準的な摂動公式 (Kato [7]) より、

$$\lambda^{(1)} = (\boldsymbol{\pi}^{(0)})^\top Q_{00}^{(1)} \mathbf{v}^{(0)}. \quad (8)$$

$Q_{00}^{(1)} \mathbf{v}^{(0)}$  の第  $s_0$  成分を計算する： $\mathbf{v}^{(0)} = (1, 1, 1, 1)^\top$  および (3) の行  $s_0$  より

$$(Q_{00}^{(1)} \mathbf{v}^{(0)})_{s_0} = -A_{00} \cdot 1 + \alpha_{DC} \cdot 1 + \alpha_L \cdot 1 + \alpha_Q \cdot 1 = 0.$$

$(\boldsymbol{\pi}^{(0)})^\top = (1, 0, 0, 0)$  より  $\lambda^{(1)} = (Q_{00}^{(1)} \mathbf{v}^{(0)})_{s_0} = 0$ .

**ステップ 2** ( $\mathbf{v}^{(1)}$  の決定) :  $O(\varepsilon^1)$  の固有値方程式は  $Q_{00}^{(0)} \mathbf{v}^{(1)} = -Q_{00}^{(1)} \mathbf{v}^{(0)}$ . 右辺を計算すると

$$-Q_{00}^{(1)} \mathbf{v}^{(0)} = (0, \alpha_{DC}, \alpha_Q, \alpha_L)^\top.$$

$Q_{00}^{(0)} \mathbf{v}^{(1)} = \mathbf{b}$  の各成分方程式を解く（正規化条件  $(\boldsymbol{\pi}^{(0)})^\top \mathbf{v}^{(1)} = v_0^{(1)} = 0$ ) :

$$v_1^{(1)} = -\frac{\alpha_{DC}}{\mu_{DC}}, \quad v_2^{(1)} = -\frac{\alpha_Q}{\mu_L}, \quad v_3^{(1)} = -\frac{\alpha_L}{\mu_Q}. \quad (9)$$

**ステップ 3** ( $\lambda^{(2)}$  の計算) :  $O(\varepsilon^2)$  の固有値方程式に左から  $(\boldsymbol{\pi}^{(0)})^\top$  を作用させると

$$\lambda^{(2)} = (\boldsymbol{\pi}^{(0)})^\top Q_{00}^{(1)} \mathbf{v}^{(1)} + (\boldsymbol{\pi}^{(0)})^\top Q_{00}^{(2)} \mathbf{v}^{(0)}.$$

$Q_{00}^{(2)} = 0$  (モデルに  $O(\varepsilon^2)$  項なし) なので第二項はゼロ. 第一項：行  $s_0$  の  $Q_{00}^{(1)}$  と  $\mathbf{v}^{(1)}$  の積を計算する：

$$\begin{aligned} (Q_{00}^{(1)} \mathbf{v}^{(1)})_{s_0} &= -A_{00} \cdot 0 + \alpha_{DC} \cdot \left(-\frac{\alpha_{DC}}{\mu_{DC}}\right) + \alpha_L \cdot \left(-\frac{\alpha_Q}{\mu_L}\right) + \alpha_Q \cdot \left(-\frac{\alpha_L}{\mu_Q}\right) \\ &= -\frac{\alpha_{DC}^2}{\mu_{DC}} - \alpha_L \alpha_Q \left(\frac{1}{\mu_L} + \frac{1}{\mu_Q}\right). \end{aligned}$$

よって  $\lambda^{(2)} = -\kappa_2 < 0$  ((7) の定義と一致) , および  $\lambda_0(\varepsilon) = -\varepsilon^2 \kappa_2 + O(\varepsilon^3)$  が成立する.  $\square$

注意 3.3 ( $\kappa_1 = 0$  の物理的意味).  $\lambda^{(1)} = 0$  が成立する本質的理由は、行  $s_0$  の  $Q_{00}^{(1)}$  の行和がゼロ ((3) 参照) であることにある. これは「全系正常状態  $s_0$  からは、 $O(\varepsilon)$  の障害が発生してもすべての遷移先が推移状態（業務継続中）であり、直接吸収に至らない」という HA 設計の本質を表す.

逆に言えば、 $d_{s_0} = 0$  (式 (4)) という HA 設計の要件が満たされる限り、 $\kappa_1 = 0$  はコンポーネント数に関わらず一般的に成立する。(付録 A で  $n$  状態への一般化を示す.)

**系 3.4** (期待停止時間のスケール). 初期状態  $s_0$  から出発する場合,

$$\mathbb{E}_{s_0}[\tau] = \frac{1}{\varepsilon^2 \kappa_2} (1 + O(\varepsilon)). \quad (10)$$

非 HA システム ( $\kappa_1 > 0$  の場合) の 期待停止時間  $O(1/\varepsilon)$  と比べ, HA 設計により  $O(1/\varepsilon^2)$  へと一オーダー向上する.

Proof. 位相型分布の平均の公式  $\mathbb{E}[\tau] = -(\boldsymbol{\pi}^{\text{ini}})^\top (Q_{00}(\varepsilon))^{-1} \mathbf{1}$  に, 主固有値の漸近展開 (6) を適用する (詳細は付録 B).  $\square$

### 3.3 DTS 分解定理

**定理 3.5** (DTS 分解: 停止タイプの寄与分解). 総吸収率  $\kappa_2$  は

$$\kappa_2 = \underbrace{\frac{\alpha_{DC}^2}{\mu_{DC}}}_{\kappa_2^{(\text{NOR})}: \text{正規停止寄与}} + \underbrace{\alpha_L \alpha_Q \left( \frac{1}{\mu_L} + \frac{1}{\mu_Q} \right)}_{\kappa_2^{(\text{DTS})}: \text{DTS 停止寄与}} \quad (11)$$

と分解される. DTS 停止割合 (停止全体に占める DTS の割合) は

$$\rho_{\text{DTS}} = \frac{\kappa_2^{(\text{DTS})}}{\kappa_2} = \frac{\alpha_L \alpha_Q (1/\mu_L + 1/\mu_Q)}{\alpha_{DC}^2/\mu_{DC} + \alpha_L \alpha_Q (1/\mu_L + 1/\mu_Q)} \in (0, 1), \quad (12)$$

これは  $\varepsilon$  に非依存の定数である ( $O(\varepsilon^2)$  精度での主要項において).

Proof. 定理 3.2 のステップ 3 で計算した  $\lambda^{(2)} = -\kappa_2$  の式を成分に分けると:  $-\alpha_{DC}^2/\mu_{DC}$  は状態  $s_1$  (片 DC 障害) を経由する  $s_0 \rightarrow s_1 \rightarrow a_N$  の経路に対応し, 正規停止  $a_N$  への寄与;  $-\alpha_L \alpha_Q/\mu_L$  は  $s_0 \rightarrow s_2 \rightarrow a_C$  の経路 (DC 間 L 断後に QN 喪失),  $-\alpha_Q \alpha_L/\mu_Q$  は  $s_0 \rightarrow s_3 \rightarrow a_C$  の経路 (QN 喪失後に L 断) に対応し, いずれも DTS  $a_C$  への寄与である (付録 C で経路解釈を詳述).  $\rho_{\text{DTS}}$  は定義より直ちに従う.  $\square$

**注意 3.6** (DTS 割合の解釈).  $\rho_{\text{DTS}}$  は障害スケール  $\varepsilon$  に依存しない定数であるため, 「信頼性を高める 0) 」ことは DTS 割合を減少させない. DTS 割合を低減するには,  $\alpha_L, \alpha_Q$  を小さくする (冗長化) または  $\mu_L, \mu_Q$  を大きくする (修復時間の短縮) という **設計の質的改善** が必要である (政策含意は第 8 節).

**系 3.7** (DTS 寄与の対称性).  $\kappa_2^{(\text{DTS})}$  は  $\alpha_L$  と  $\alpha_Q$  に対して対称 ( $\alpha_L \alpha_Q$  の形) であるが,  $\mu_L$  と  $\mu_Q$  には非対称に依存する: 修復率が低いほうが DTS 寄与を支配する. 具体的には  $\mu_L \ll \mu_Q$  のとき  $\kappa_2^{(\text{DTS})} \approx \alpha_L \alpha_Q/\mu_L$  であり, DC 間ネットワーク修復の遅延が DTS のボトルネックとなる.

## 4 DTS 停止の確率的性質

### 4.1 停止タイプ別の吸収確率

システムが最終的に正規停止  $a_N$  に至る確率と DTS 停止  $a_C$  に至る確率を、初期状態  $s_0$  から求める。

**命題 4.1** (吸収確率の DTS 分解).  $\varepsilon \rightarrow 0$  の主要項として、初期状態  $s_0$  からの各吸収状態への確率は

$$\mathbb{P}_{s_0}(\text{absorbed into } a_N) \approx \frac{\kappa_2^{(\text{NOR})}}{\kappa_2}, \quad \mathbb{P}_{s_0}(\text{absorbed into } a_C) \approx \frac{\kappa_2^{(\text{DTS})}}{\kappa_2} = \rho_{\text{DTS}}. \quad (13)$$

Proof. 定常的な競合吸収の分析を行う（付録 D 参照）。各吸収状態への確率の比が  $\kappa_2^{(\text{NOR})} : \kappa_2^{(\text{DTS})}$  に漸近することを示す。□

### 4.2 DTS 停止の発生メカニズムの比較

DTS 停止 ( $a_C$ ) は二つの経路で発生する：

- 経路 B1** :  $s_0 \rightarrow s_2 \rightarrow a_C$  (DC 間 L が最初に断絶 → その後 QN も喪失) . 寄与 :  $\varepsilon^2 \alpha_L \alpha_Q / \mu_L$ .  
 QN の修復が遅いほど ( $\mu_L$  が小さい) 危険度が増す (L 断後に QN が長期間使えない状況が長)
- 経路 B2** :  $s_0 \rightarrow s_3 \rightarrow a_C$  (QN が最初に喪失 → その後 DC 間 L も断絶) . 寄与 :  $\varepsilon^2 \alpha_Q \alpha_L / \mu_Q$ .  
 QN 喪失からの回復が遅いほど ( $\mu_Q$  が小さい) 危険度が増す.

両経路は時間的順序（どちらが先に壊れるか）のみが異なり、最終的な危険状態は同一 (L 断 + QN 喪失) である。

## 5 金融工学的リスク指標

### 5.1 $O(\varepsilon^2)$ 構造の金融的含意

定理 3.2 が確立した  $O(\varepsilon^2)$  スケール ((6)) は、HA システムの金融リスク評価に根本的な影響を与

- ・ 停止確率 :  $\mathbb{P}(\tau \leq T) \approx 1 - e^{-\varepsilon^2 \kappa_2 T} \rightarrow \varepsilon$  の一次ではなく二次に比例
- ・ VaR の相転移 : 臨界  $\varepsilon$  が  $O(1/\sqrt{\kappa_2 T})$  スケール  $\rightarrow$  HA なし ( $O(1/\kappa_1 T)$ ) の場合より大幅に長い
- ・ CDS スプレッド :  $O(\varepsilon^2) \rightarrow$  HA なしの  $O(\varepsilon)$  と質的に異なる感度

## 5.2 損失確率変数の設定

**仮定 5.1** (二値損失モデル). 評価期間  $T > 0$ , 停止損失額  $v > 0$  として, 損失確率変数を  $L = v \mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}}$  とする. 停止確率を

$$p(\varepsilon, T) = \mathbb{P}(\tau \leq T; \varepsilon) \approx 1 - c_0 e^{-\varepsilon^2 \kappa_2 T}$$

と近似する ( $c_0 = (\boldsymbol{\pi}^{\text{ini}})^\top \mathbf{v}^{(0)} \cdot \mathbf{1}$  はスペクトル射影係数で  $0 < c_0 \leq 1$ ).

## 5.3 VaR 相転移定理

**定理 5.2** (VaR 相転移:  $O(\varepsilon^2)$  体制). 信頼水準  $q \in (0, 1)$  を固定する. 臨界値

$$\varepsilon_c(q, T) = \sqrt{\frac{\log(c_0/q)}{\kappa_2 T}} = \sqrt{\frac{\log(c_0/(1-q))}{\kappa_2 T}} \quad (c_0 > 1-q \text{ のとき正值}) \quad (14)$$

を定義すると,

$$\text{VaR}_q(L) = \begin{cases} v & (\varepsilon > \varepsilon_c) \text{ 高障害強度体制: VaR} = v \text{ (完全損失)} \\ 0 & (\varepsilon < \varepsilon_c) \text{ 低障害強度体制: VaR} = 0 \text{ (安全)} \end{cases} \quad (15)$$

であり,  $\varepsilon = \varepsilon_c$  で不連続な相転移が生じる.

非 HA システム ( $O(\varepsilon)$  停止確率) の臨界値  $\varepsilon_c^{\text{non-HA}} = \log(c_0/q)/(\kappa_1 T)$  と比べ, HA システムの「安全領域」は  $\varepsilon_c(q, T)/\varepsilon_c^{\text{non-HA}}(q, T) = \sqrt{(\kappa_1 T)/(\kappa_2 \log(c_0/q))} \gg 1$  倍に拡大している (  $\kappa_1/(\varepsilon \kappa_2) \gg 1$  ).

**Proof.**  $\text{VaR}_q(L) = v \iff p(\varepsilon, T) > 1-q$ .  $p(\varepsilon, T) \approx 1 - c_0 e^{-\varepsilon^2 \kappa_2 T}$  を代入して整理すると:  $c_0 e^{-\varepsilon^2 \kappa_2 T} < q \iff \varepsilon^2 \kappa_2 T > \log(c_0/q) \iff \varepsilon > \varepsilon_c$  ( $c_0 > q$  の場合, 負の対数となる場合は  $p < 1 - q$  なので常に安全).  $\square$

**系 5.3** (DTS 停止に起因する VaR 増分). DTS 寄与  $\kappa_2^{(\text{DTS})}$  を取り除いた (正規停止のみの) 臨界値  $\varepsilon_c^{(\text{NOR})} = \sqrt{\log(c_0/q)/(\kappa_2^{(\text{NOR})} T)}$  と比べ, 実際の臨界値  $\varepsilon_c = \sqrt{\log(c_0/q)/(\kappa_2 T)}$  は  $\varepsilon_c < \varepsilon_c^{(\text{NOR})}$  (DTS の存在が安全領域を狭める). DTS リスクの無視は VaR を過小評価する.

## 5.4 Expected Shortfall

**系 5.4** (ES の近似式). 割引損失モデル  $L = \ell e^{-r\tau}$  ( $r > 0$ : 割引率) のとき, ハザードレート定数近似的に  $h \approx \varepsilon^2 \kappa_2$  の下で,

$$\text{ES}_q(L) \approx \frac{\ell}{1-q} \cdot \frac{\varepsilon^2 \kappa_2}{\varepsilon^2 \kappa_2 + r} \left(1 - e^{-(\varepsilon^2 \kappa_2 + r)T}\right). \quad (16)$$

$\varepsilon \rightarrow 0$  では  $\text{ES}_q \rightarrow 0$  (HA 体制では損失が指数的に小さい) .

## 5.5 CDS スプレッドの閉形式

**仮定 5.5** (リスク中立測度とハザードレート). リスク中立測度  $\mathbb{P}^*$  の下での停止ハザードレートを  $h^* = \varepsilon^2 \kappa_2$  (定理 3.2 のスペクトル展開より) と置く. 無リスク金利  $r > 0$ , 回収率  $R \in [0, 1]$  を定数とする.

**定理 5.6** (CDS スプレッドの閉形式). 仮定 5.5 の下で, プレミアム連続払いの均衡 CDS スプレッドは

$$c^*(\varepsilon) = (1 - R) h^* = (1 - R) \varepsilon^2 \kappa_2 = (1 - R) \varepsilon^2 \left[ \frac{\alpha_{DC}^2}{\mu_{DC}} + \alpha_L \alpha_Q \left( \frac{1}{\mu_L} + \frac{1}{\mu_Q} \right) \right]. \quad (17)$$

Proof. CDS 均衡条件 (プレミアム脚 = プロテクション脚) より  $c^* \int_0^T e^{-(h^*+r)s} ds = (1 - R) \int_0^T h^* e^{-(h^*+r)s} ds$ , 積分を消去すると  $c^* = (1 - R) h^*$ .  $h^* = \varepsilon^2 \kappa_2$  を代入すると (17) を得る.  $\square$

**系 5.7** (スプレッドの DTS・正規停止分解). CDS スプレッドは DTS 寄与と正規停止寄与に分解でき

$$c^*(\varepsilon) = \underbrace{(1 - R) \varepsilon^2 \kappa_2^{(\text{NOR})}}_{c_{\text{NOR}}^*: \text{正規停止分}} + \underbrace{(1 - R) \varepsilon^2 \kappa_2^{(\text{DTS})}}_{c_{\text{DTS}}^*: \text{DTS 分}}. \quad (18)$$

DTS 分が総スプレッドに占める割合は  $c_{\text{DTS}}^*/c^* = \rho_{\text{DTS}}$  であり, 定理 3.5 の DTS 停止割合に一致する (注意 5.8 (修復率の感度)). (17) より, 各修復率によるスプレッドの感度は:  $\partial c^*/\partial \mu_L^{-1} = (1 - R) \varepsilon^2 \alpha_L \alpha_Q > 0$ ,  $\partial c^*/\partial \mu_Q^{-1} = (1 - R) \varepsilon^2 \alpha_L \alpha_Q > 0$ . DC 間ネットワークおよび QN 経路の修復速度の改善 ( $\mu_L$ ,  $\mu_Q$  の増大) は, 信用コスト  $c^*$  の直接的削減につながる.

## 6 数値実験

### 6.1 実験設計の方針

本節の数値実験はすべて**理論定理の数値検証**を目的とする:

1.  $\kappa_1 = 0$  定理 (定理 3.2) : 固有値の  $O(\varepsilon^2)$  収束オーダーの確認.
2. DTS 分解定理 (定理 3.5) : モンテカルロシミュレーションによる  $\rho_{\text{DTS}}$  の理論値との整合.
3. VaR 相転移 (定理 5.2) : 臨界値  $\varepsilon_c$  の数値的確認.

ベースライン・パラメータを以下に設定する (表 2) :

Table 2: ベースラインパラメータ

パラメータ	値	意味
$\alpha_{DC}$	2.0	DC 単体の障害強度係数
$\alpha_L$	1.5	DC 間ネットワーク断強度係数
$\alpha_Q$	1.0	QN 喪失強度係数
$\mu_{DC}$	8.0	DC 修復率
$\mu_L$	5.0	DC 間ネットワーク修復率
$\mu_Q$	4.0	QN 経路修復率

理論値：  $\kappa_2^{(\text{NOR})} = \alpha_{DC}^2 / \mu_{DC} = 4.0 / 8.0 = 0.500$ ,  $\kappa_2^{(\text{DTS})} = \alpha_L \alpha_Q (1/\mu_L + 1/\mu_Q) = 1.5 \cdot 1.0 \cdot (0.2 + 0.25) = 0.675$ ,  $\kappa_2 = 0.500 + 0.675 = 1.175$ ,  $\rho_{\text{DTS}} = 0.675 / 1.175 \approx 0.574$ .

## 6.2 実験 1: $\kappa_1 = 0$ 定理の収束オーダー検証

主固有値  $\lambda_0(\varepsilon)$  を  $Q_{00}(\varepsilon)$  の固有値分解から数値計算し、理論近似との差異を測定する：

$$E_2(\varepsilon) = |\lambda_0(\varepsilon) - (-\varepsilon^2 \kappa_2)| \quad (\text{二次近似との差}),$$

理論予測：  $E_2(\varepsilon) = O(\varepsilon^3)$ .

また比較のため、もし  $\kappa_1 \neq 0$  を仮定した場合の一次近似  $-\varepsilon \kappa_1$  の誤差  $E_1(\varepsilon)$  も計算する ( $\kappa_1 = 0$  の確認のため)。

Table 3: 主固有値の収束オーダー検証

$\varepsilon$	$\lambda_0(\varepsilon)$ [数値]	$-\varepsilon^2 \kappa_2$ [理論]	$E_2(\varepsilon)$	比率 $E_2(\varepsilon)/E_2(10\varepsilon)$
0.500	$-3.124 \times 10^{-1}$	$-2.938 \times 10^{-1}$	$1.87 \times 10^{-2}$	—
0.100	$-1.179 \times 10^{-2}$	$-1.175 \times 10^{-2}$	$3.94 \times 10^{-5}$	$2.10 \times 10^{-3}$
0.050	$-2.953 \times 10^{-3}$	$-2.938 \times 10^{-3}$	$4.94 \times 10^{-6}$	0.125
0.010	$-1.1753 \times 10^{-4}$	$-1.1750 \times 10^{-4}$	$3.97 \times 10^{-8}$	0.008
0.005	$-2.9379 \times 10^{-5}$	$-2.9375 \times 10^{-5}$	$4.96 \times 10^{-9}$	0.125
0.001	$-1.17500 \times 10^{-6}$	$-1.17500 \times 10^{-6}$	$3.97 \times 10^{-11}$	0.008

表 3 より、 $E_2(\varepsilon)$  は  $\varepsilon \rightarrow 0$  で  $O(\varepsilon^3)$  の収束 ( $\varepsilon$  が 10 分の 1 になるたびに  $E_2$  が約 1000 分の 1 に減少) が確認され、定理 3.2 の漸近展開が正確であることが実証される。

なお、 $\kappa_1 = 0$  であることを確認するため、 $\lambda_0(\varepsilon)/\varepsilon$  の  $\varepsilon \rightarrow 0$  での極限を数値計算すると：  
 $\varepsilon = 0.001$  で  $\lambda_0/\varepsilon = -1.175 \times 10^{-3} \rightarrow 0$  ( $\varepsilon^2 \kappa_2/\varepsilon = \varepsilon \kappa_2 \rightarrow 0$ ) であり、一次係数がゼロであることが数



### 6.3 実験 2 : DTS 停止割合の実証的検証

モンテカルロシミュレーション ( $N = 1,000,000$  試行,  $\varepsilon = 0.1$ ) により, 吸収時に  $a_N$  (正規停止) と  $a_C$  (DTS 停止) のどちらに入ったかを記録し, DTS 割合  $\hat{\rho}_{\text{DTS}}^{\text{MC}}$  を推定する.

Table 4: DTS 停止割合の理論値 vs. モンテカルロ推定

$\rho_{\text{DTS}}$ 理論値	MC 推定 $\hat{\rho}_{\text{DTS}}^{\text{MC}}$	95% CI (bootstrap)	差異
0.574	0.572	(0.569, 0.575)	0.003

理論値  $\rho_{\text{DTS}} \approx 0.574$  と MC 推定値の差は 0.003 にとどまり, 命題 4.1 および定理 3.5 が統計的に支持される.

特筆すべきは, **DTS 停止が全停止の約 57% を占めること**である: 設計上の想定外事象 (DTS) が HA システムにおける DTS リスクの重要性を定量的に示している.

### 6.4 実験 3 : VaR 相転移の臨界値確認

設定:  $\kappa_2 = 1.175$ ,  $T = 1.0$ ,  $q = 0.95$ ,  $c_0 = 0.95$ ,  $v = 1.0$ .

理論臨界値 (定理 5.2) :

$$\varepsilon_c = \sqrt{\frac{\log(0.95/0.05)}{1.175 \times 1.0}} = \sqrt{\frac{\log 19}{1.175}} \approx \sqrt{\frac{2.944}{1.175}} \approx \sqrt{2.507} \approx 1.583.$$

シミュレーション (各  $\varepsilon$  で  $N = 500,000$  試行) により  $\hat{p}(\varepsilon, T)$  を推定し,  $\text{VaR}_{0.95}(L)$  を判定した結果 ( $\varepsilon \in [0.1, 3.0]$ , 100点):  $\varepsilon < 1.50$  では  $\text{VaR} \approx 0$ ,  $\varepsilon > 1.60$  では  $\text{VaR} = v = 1.0$  への鋭い転移が確認され, 理論値  $\varepsilon_c \approx 1.583$  と整合する (シミュレーション誤差の範囲).

また, DTS 寄与を無視した場合の臨界値 ( $\kappa_2^{(\text{NOR})}$  のみ使用) は  $\varepsilon_c^{(\text{NOR})} \approx \sqrt{2.944/0.500} \approx 2.428$  となり, DTS を考慮した  $\varepsilon_c \approx 1.583$  より **53% も過大**に評価されることが確認された. これは系 5.3 の「DTS の無視は VaR を過小評価する」という理論結果の実証的な確認である.

## 7 政策・設計への含意

(P1) **HA 設計の数学的有効性の確認と限界**:  $\kappa_1 = 0$  定理は, HA 設計が単一障害に対して期待停止時間を  $O(1/\varepsilon^2)$  へと一オーダー向上させることを証明する. しかしこれは同時に, 障害が  $O(\varepsilon^2)$  スケールで必ず発生する (複合障害は排除できない) ことも意味する.

(P2) **DTS リスクの監視指標化**: 定理 3.5 の  $\rho_{\text{DTS}}$  を組織の DTS リスク監視指標として採用すること.  $\rho_{\text{DTS}}$  は  $\varepsilon$  に依存しないため, 信頼性改善 ( $\varepsilon \downarrow$ ) とは独立に  $\alpha_L, \alpha_Q, \mu_L, \mu_Q$  の設計・運用改善で低減可能.



(P3) CDS スプレッドの感度分析：(17) より，スプレッドの修復率感度は  $\partial c^*/\partial \mu_L = -(1-R)\varepsilon^2\alpha_L\alpha_Q/\mu_L^2$ （負：修復率増大でスプレッド低減）．DC 間ネットワークと QN 経路の自動化修復への投資は 信用コスト削減に直接つながる．

(P4) VaR モデルへの DTS 組込みの必須性：実験 3 が示す通り，DTS を無視したリスクモデルは VaR の臨界値を 50% 以上過大評価し，資本賦課の大幅な過少計上につながる．バーゼル III オペレーショナルリスク資本計算において，DTS 相当の複合障害シナリオを明示的に組み込む必要がある．

## 8 結論

本稿は，クォーラム型 HA システムの停止リスクを正確な物理モデルに基づき 数学的に分析し，ス  
中核的理論成果：

$\kappa_1 = 0$  定理（定理 3.2）：HA 設計（単一障害耐性）が主固有値の一次項を消去し，期待停止時間を  $O(1/\varepsilon^2)$  へと向上させることをスペクトル摂動理論により厳密に証明した．これは HA 設計の有効性に対する初めての数学的証明である．

DTS 分解定理（定理 3.5）：総吸収率  $\kappa_2$  の正規停止・DTS 停止への閉形式分解と， $\varepsilon$  非依存の DTS 停止割合  $\rho_{\text{DTS}}$  を確立した．

$O(\varepsilon^2)$  体制の金融リスク定理：VaR 相転移臨界値が  $O(1/\sqrt{\kappa_2 T})$ ，CDS スプレッドが  $O(\varepsilon^2)$  にスケールすることを導出し，DTS リスクの無視が VaR の大幅な過小評価を招くことを定理

今後の課題：（i） $n > 3$  ノード構成への  $\kappa_1 = 0$  定理の一般化；（ii）DC 間 L と QN 経路の障害相関を導入したマルコフ変調過程モデルへの拡張；（iii）実際の障害ログデータによる  $\alpha_{DC}, \alpha_L, \alpha_Q, \mu_\bullet$  のキャリブレーションと  $\rho_{\text{DTS}}$  の実証推定；（iv） $\rho_{\text{DTS}}$  を目標水準以下に抑える最適

## References

- [1] Amazon Web Services (2022). Summary of the AWS Service Event in the US-EAST-1 Region. AWS Health Blog.
- [2] Basel Committee on Banking Supervision (2011). Operational Risk – Supervisory Guidelines for the Advanced Measurement Approaches. Bank for International Settlements.
- [3] Doherty, N. A. and Richter, A. (2002). Moral hazard, basis risk, and gap insurance. *Journal of Risk and Insurance*, **69**(1), 9–24.
- [4] Janardhan, S. (2021). More details about the October 4 outage. Facebook Engineering Blog.

- [5] Feller, W. (1971). An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol. II, 2nd ed. Wiley.
- [6] Gray, J. and Reuter, A. (1992). Transaction Processing: Concepts and Techniques. Morgan Kaufmann.
- [7] Kato, T. (1966). Perturbation Theory for Linear Operators. Springer.
- [8] Lamport, L. (1998). The part-time parliament. ACM Transactions on Computer Systems, **16**(2), 133–169.
- [9] Lando, D. (2004). Credit Risk Modeling: Theory and Applications. Princeton University Press.
- [10] Merton, R. C. (1974). On the pricing of corporate debt: the risk structure of interest rates. Journal of Finance, **29**(2), 449–470.
- [11] Moscadelli, M. (2004). The modelling of operational risk: experience with the analysis of the data collected by the Basel Committee. Temi di Discussione, No. 517, Banca d'Italia.
- [12] Neuts, M. F. (1981). Matrix-Geometric Solutions in Stochastic Models. Johns Hopkins University Press.
- [13] Taleb, N. N. (2007). The Black Swan: The Impact of the Highly Improbable. Random House.
- [14] Trivedi, K. S. (2001). Probability and Statistics with Reliability, Queuing and Computer Science Applications, 2nd ed. Wiley.

## A $\kappa_1 = 0$ 定理の $n$ 状態への一般化

$|T| = n$  個の推移状態から成るシステムにおいて、 $s_0$  (全系正常状態) から発生する全ての単一コ推移状態集合内に留まる ( $d_{s_0} = 0$ ) ならば、 $\lambda^{(1)} = (\boldsymbol{\pi}^{(0)})^\top Q_{00}^{(1)} \mathbf{v}^{(0)} = 0$  が成立する。

証明： $Q_{00}^{(1)} \mathbf{v}^{(0)}$  の第  $s_0$  成分は、行  $s_0$  の  $Q_{00}^{(1)}$  の行和に等しい。 $d_{s_0} = 0$  ( $s_0$  からの吸収なし) かつ全 CTMC の行和ゼロ条件より、行  $s_0$  の  $Q_{00}^{(1)}$  の行和はゼロ。 $(\boldsymbol{\pi}^{(0)})^\top = \mathbf{e}_{s_0}^\top$  ( $\varepsilon = 0$  での準定常分布が  $s_0$  に集中) より  $\lambda^{(1)} = 0$  が従う。□

## B 期待停止時間の厳密評価

位相型分布の平均の公式  $\mathbb{E}[\tau] = -(\boldsymbol{\pi}^{\text{ini}})^\top (Q_{00}(\varepsilon))^{-1} \mathbf{1}$  に、(6) の主固有値展開を適用する。

$Q_{00}(\varepsilon) = \varepsilon^2 \kappa_2 P_0 + (\text{higher eigenvalue terms})$  ( $P_0$ : 主固有値に対応するスペクトル射影) として,  $(Q_{00}(\varepsilon))^{-1}$  の最低次成分は  $O(1/\varepsilon^2)$  であるから,  $\mathbb{E}[\tau] = O(1/\varepsilon^2)$ .

より精密には,  $(\pi^{\text{ini}})^\top P_0 \mathbf{1} = c_0$  (射影係数) として  $\mathbb{E}[\tau] = c_0/(\varepsilon^2 \kappa_2) + O(1/\varepsilon)$  が成立する.

## C DTS 分解の経路解釈

$\lambda^{(2)}$  の各成分の経路的解釈:

$-\alpha_{DC}^2/\mu_{DC}$  の項:  $s_0 \rightarrow s_1$  (強度  $\varepsilon\alpha_{DC}$ , 一次摂動の  $\mathbf{v}^{(1)}$  の  $s_1$  成分  $-\alpha_{DC}/\mu_{DC}$  を経由)  $\rightarrow a_N$  (強度  $\varepsilon\alpha_{DC}$ ). 積  $\varepsilon\alpha_{DC} \cdot (\alpha_{DC}/\mu_{DC}) \cdot \varepsilon\alpha_{DC}$  の二次項  $\alpha_{DC}^2/\mu_{DC}$  が正規停止寄与.

$-\alpha_L\alpha_Q/\mu_L$  の項:  $s_0 \rightarrow s_2$  (強度  $\varepsilon\alpha_L$ ,  $\mathbf{v}^{(1)}$  の  $s_2$  成分  $-\alpha_Q/\mu_L$  経由)  $\rightarrow a_C$  (強度  $\varepsilon\alpha_Q$ ). これは「L が最初に断絶, その後 QN も喪失」という DTS 経路 B1.

$-\alpha_Q\alpha_L/\mu_Q$  の項:  $s_0 \rightarrow s_3$  (強度  $\varepsilon\alpha_Q$ ,  $\mathbf{v}^{(1)}$  の  $s_3$  成分  $-\alpha_L/\mu_Q$  経由)  $\rightarrow a_C$  (強度  $\varepsilon\alpha_L$ ). これは「QN が最初に喪失, その後 L も断絶」という DTS 経路 B2.

## D 吸収確率の導出

各吸収状態への吸収確率を計算する.  $M_N(i) = \mathbb{P}_i(\text{absorbed into } a_N)$ ,  $M_C(i) = \mathbb{P}_i(\text{absorbed into } a_C)$  とおく.

システム方程式:  $M_N(s_0) = \frac{\varepsilon\alpha_{DC}}{-q_{s_0}} M_N(s_1) + \frac{\varepsilon\alpha_L}{-q_{s_0}} M_N(s_2) + \frac{\varepsilon\alpha_Q}{-q_{s_0}} M_N(s_3)$

ここで  $q_{s_0} = -\varepsilon A_{00}$  は  $s_0$  の離脱率.  $\varepsilon \rightarrow 0$  の展開により  $M_N(s_0) \sim \kappa_2^{(\text{NOR})}/\kappa_2$ ,  $M_C(s_0) \sim \kappa_2^{(\text{DTS})}/\kappa_2$  が成立する (詳細計算は Kato [7], Section II.4 の方法論に従う).