PT对称光学系统及其在增强传感领域的应用

小组成员与分工：

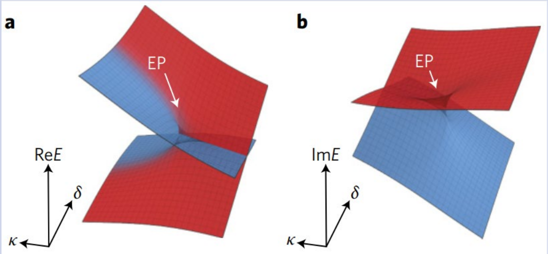
王艺铭： PT对称与非厄米系统

刘润泽： 如何利用光学微腔构建PT对称系统

钱镜宇： 在传感器方面的应用及优势

1. PT对称与非厄米系统

非厄米系统：存在与外界**能量交换**的系统，哈密顿量**非厄米**，即 $\hat{H} \neq \hat{H}^{\dagger}$，可具有复能谱，光学中通常与**增益**与**损耗**有关

双正交性	例外点（Exceptional Point）	宇称-时间反演（Parity-Time, PT）对称系统
$H\lvert\Psi_n^R> = E_n\lvert\Psi_n^R>$ $H^{\dagger}\lvert\Psi_n^L> = E_n^*\lvert\Psi_n^L>$ 有左右矢的**双正交关系** $\sum_n \lvert\widetilde{\Psi_n^L}><\widetilde{\Psi_n^R}\rvert = 1$ $<\widetilde{\Psi_n^L}\lvert\widetilde{\Psi_n^R}> = \delta_{mn}$ 但**左矢之间不正交，右矢之间不正交**	非厄米系统参数空间的**简并点**，本征值简并的同时还有**本征向量**的**合并**（coalesce）。表现出与厄米系统简并点不同的拓扑特征  	PT变换$\mathcal{PT}$：$\vec{r} \to -\vec{r}$，$t \to -t$，$i \to -i$ 系统哈密顿量H若与$\mathcal{PT}$对易，则称系统具有**PT对称性**，这是一类**特殊的非厄米系统**。 **非厄米**系统若具有**PT对称性**，则哈密顿算子可以具有**实能谱** 易于物理实现

1, PT对称系统简要介绍

现实中广泛存在的非厄米系统，从光学、力学、经典电路甚至到软物质等领域

Table 1. A wide variety of classical and quantum systems described by non-Hermitian matrices/operators together with their physical origins of non-Hermiticity, presented in order of appearance in the present review.

Systems / Processes	Physical origin of non-Hermiticity	Theoretical methods
Photonics	Gain and loss of photons	Maxwell equations [12, 13]
Mechanics	Friction	Newton equation [14, 15]
Electrical circuits	Joule heating	Circuit equation [16]
Stochastic processes	Nonreciprocity of state transitions	Fokker-Planck equation [17, 18]
Soft matter and fluid	Nonlinear instability	Linearized hydrodynamics [19–21]
Nuclear reactions	Radiative decays	Projection methods [4–6]
Mesoscopic systems	Finite lifetimes of resonances	Scattering theory [22, 23]
Open quantum systems	Dissipation	Master equation [24, 25]
Quantum measurement	Measurement backaction	Quantum trajectory approach [26–31]

Ashida, Y., Gong, Z., & Ueda, M. (2020). Non-Hermitian physics. Advances in Physics, 69(3), 249–435. https://doi.org/10.1080/00018732.2021.1876991

1. PT对称与非厄米系统

PT对称中P和T算符分别为空间反演和时间反演算符:

$$P:\hat{x}\to-\hat{x},\hat{p}\to-\hat{p},i\to i$$

$$T:\hat{x}\to\hat{x},\hat{p}\to-\hat{p},i\to-i.$$

则对于**PT变换**: $\hat{x}\to-\hat{x},\hat{p}\to-\hat{p},i\to-i$

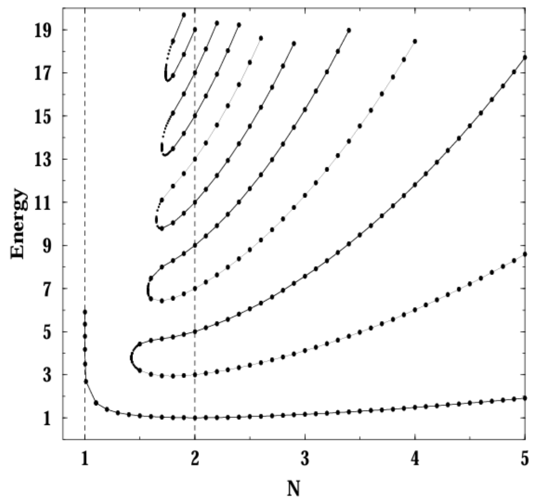
如果PT算符与哈密顿量算符H**对易**: $[H,PT]=0$,那么这个哈密顿量是**PT对称**的。

1997年Bender等人提出了一类**非厄米哈密顿量**:

$$H = p^2 + m^2x^2 - (ix)^N$$

当m=0，时解如右图

$$-\frac{d^2\phi}{dx^2}-(ix)^N\phi = E\phi$$



N<1，无实数解。
1<N<2，有有限实数解
2<N，有无穷多实数解。

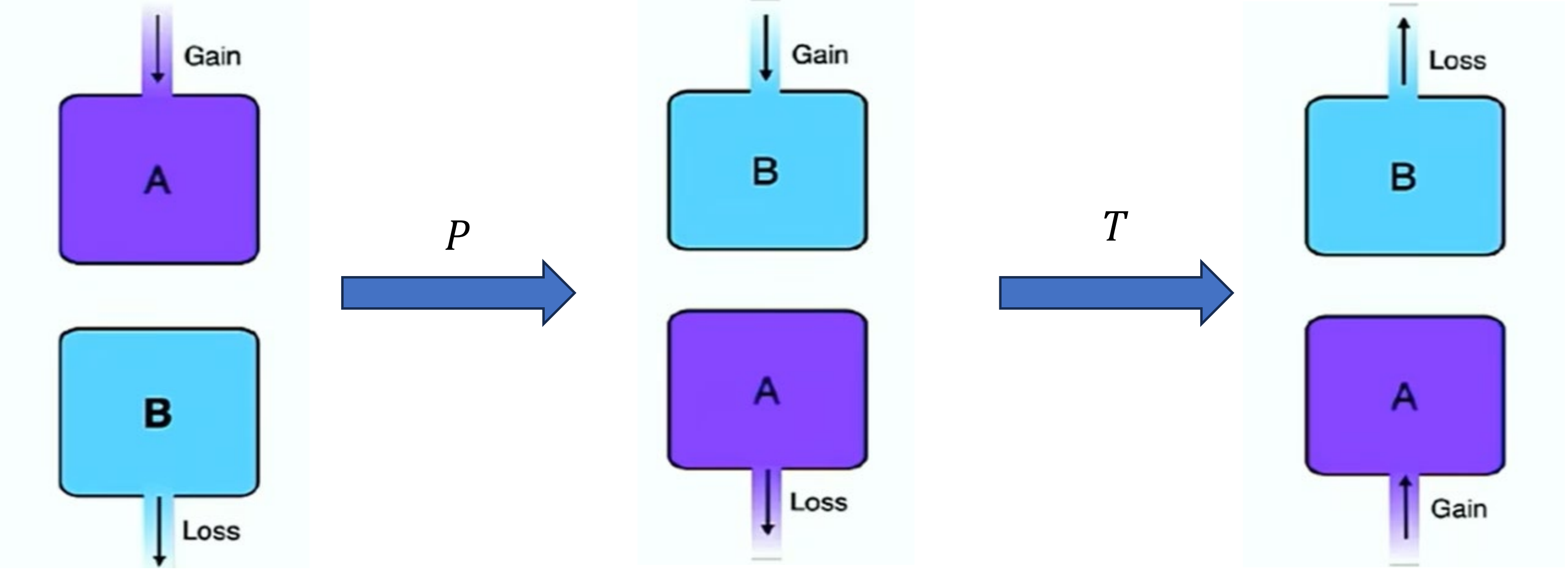
Bender, Carl M. and Stefan Boettcher. “Real Spectra in Non-Hermitian Hamiltonians Having PT Symmetry.” *Physical Review Letters* 80 (1997): 5243-5246.

1.PT对称与非厄米系统

理解PT对称的一种简单图像（ref：**2021凝聚态理论前沿暑假讲习班 寇谡鹏 非厄米物理学简介**）

两个独立的“水池”构成的系统

一个注水
一个放水



与开始的系统完全一致，这个系统是PT对称的

$$H = \begin{bmatrix} a+ib & 0 \\ 0 & a-ib \end{bmatrix}$$

非平衡物理系统

先施加宇称反演变换P

再施加时间反演变换T

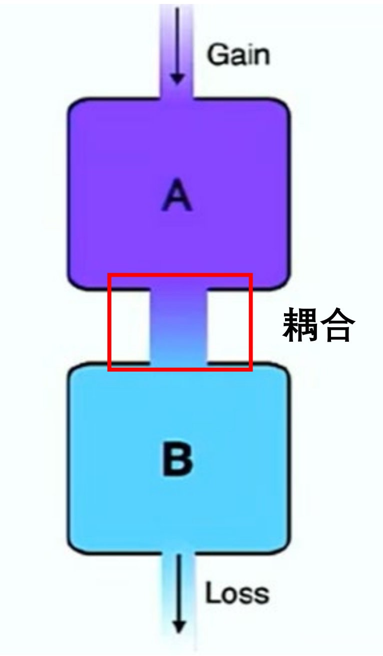
1.PT对称与非厄米系统

理解PT对称的一种简单图像（ref：**2021凝聚态理论前沿暑假讲习班 寇谡鹏 非厄米物理学简介**）

两个耦合的“水池”构成的系统

一个注水

一个放水



$$H = \begin{bmatrix} a+ib & \boxed{g} \\ \boxed{g} & a-ib \end{bmatrix}$$

这个系统也是PT对称的

计算本征谱

$$det(H-EI) = a^2+b^2-2aE+E^2-g^2$$

$$E_{\pm} = a \pm \sqrt{g^2-b^2}$$

如何理解？

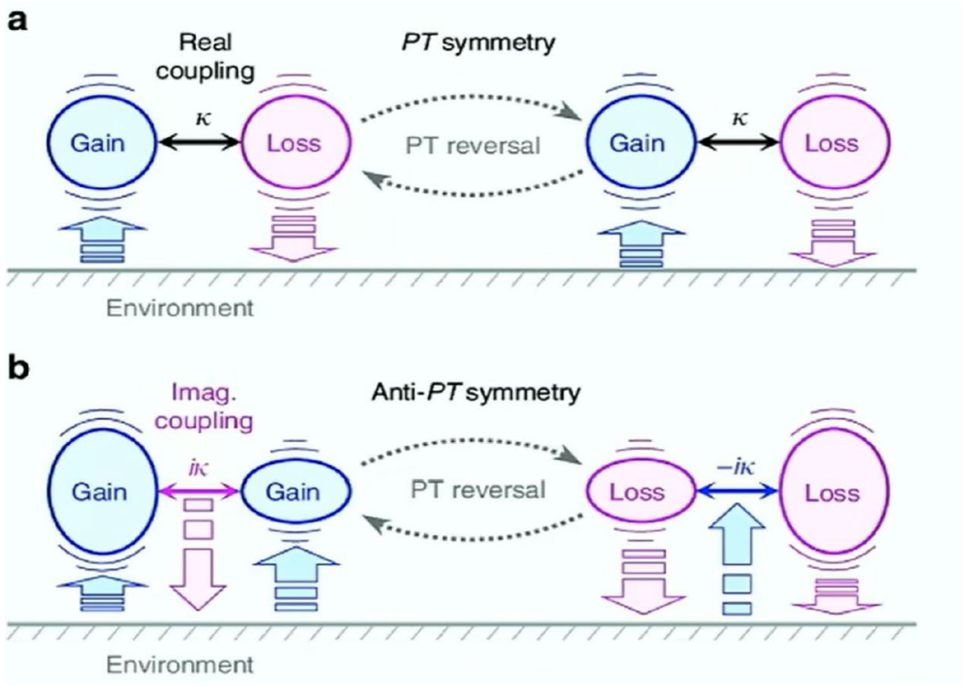
A从外界**获取**能量，B向外界**输出**能量，A将获取的能量都**耦合**进B里面，当gain/loss与耦合相平衡时达到**动态平衡**，也就对应着上面本征能量中根号内$g=b$，即达到**简并点**Exceptional Point(**EP**)

①$g>b$：两个相隔$2\sqrt{g^2-b^2}$的实能谱，**PT对称相**

②$g<b$：两个相互共轭的复能谱，**PT对称破缺相**

1.PT对称与非厄米系统

理解PT对称的一种简单图像（ref：**2021凝聚态理论前沿暑假讲习班 寇谡鹏 非厄米物理学简介**）



PT系统与反PT系统

PT与反PT很多时候性质是相似的，对于**反PT**来说只需要两个子系统的**增益/损耗不同**即可，这在物理系统中实现会**更加容易**，只要增益/损耗不同并加以子系统之间的耦合

2.一些实现PT对称系统的光学方案

比较薛定谔方程与光学傍轴方程，二者具有**相似的结构**

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}\psi(x,t)}{\mathrm{d}t}+\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\psi(x,t)}{\mathrm{d}x^2}-V(x)\psi(x,t)=0$$

对比

$$i\frac{\mathrm{d}E(x,z)}{\mathrm{d}z}+\frac{1}{2k}\frac{\mathrm{d}^2E(x,z)}{\mathrm{d}x^2}+k_0[n_r(x)+in_i(x)]E(x,z)=0$$

作PT变换

$P: i\rightarrow i,\ \hat{x}\rightarrow-\hat{x},\ \hat{p}\rightarrow-\hat{p}$

$T: i\rightarrow -i,\ \hat{x}\rightarrow\hat{x},\ \hat{p}\rightarrow-\hat{p}$

$$\xrightarrow{PT} i\hbar\frac{\mathrm{d}\psi^*(-x,-t)}{\mathrm{d}t}+\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\psi^*(-x,-t)}{\mathrm{d}x^2}-V^*(-x)\psi^*(-x,-t)=0$$

若$\psi(x,t)$是薛定谔方程的解，那么只要$V(x)=V^*(-x)$则$\psi^*(-x,-t)$也是解，即**PT对称**

$Re[V]$为**偶**函数

$Im[V]$为**奇**函数

类比到光学

$Re[n]$为**偶**函数

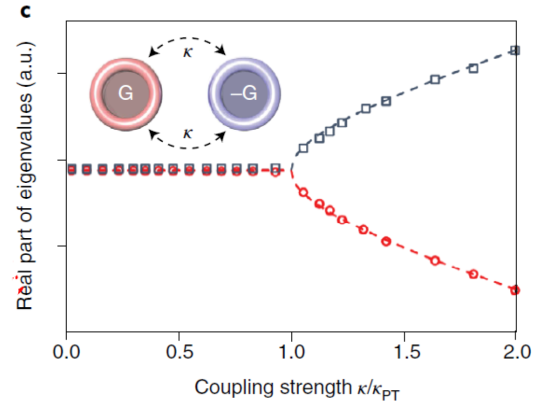
$Im[n]$为**奇**函数

折射率此处可视为“光学势”

光学的折射率虚部描述了增益/损耗

Özdemir, Ş. K., Rotter, S., Nori, F. & Yang, L. Parity–time symmetry and exceptional points in photonics. *Nat. Mater.* **18**, 783–798 (2019).

2, 非厄米PT对称哈密顿量及EP附近的特征

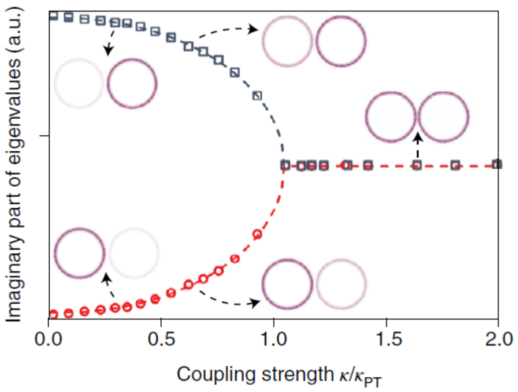


耦合增益-损耗谐振环哈密顿量

$$H' = \begin{bmatrix} \omega' - i\gamma & \kappa \\ \kappa & \omega' + i\gamma \end{bmatrix}$$

$$\omega'_{\pm} = \omega' \pm \sqrt{\kappa^2 - \gamma^2}$$

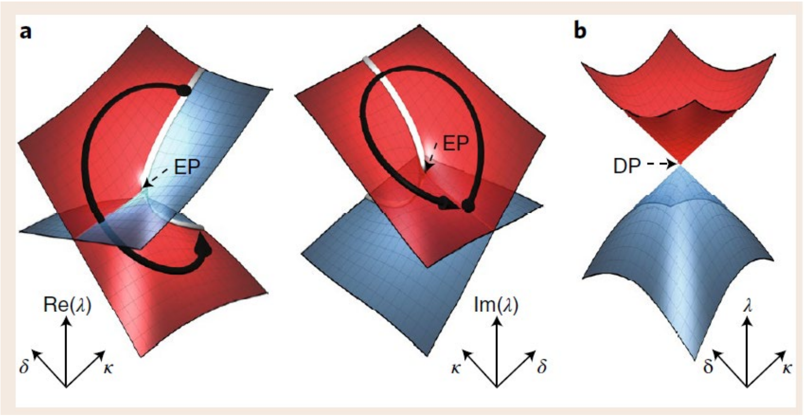
EP分隔了PT对称与对称破缺相，通过**改变耦合强度**κ可以实现二者之间的转换。



耦合强度-能谱实部/虚部图

①$\kappa > \kappa_{PT}$： 两个分离的**实能谱**，**PT对称相，强耦合**

②$\kappa < \kappa_{PT}$： 两个相互共轭的**复能谱**，**PT对称破缺相，弱耦合**

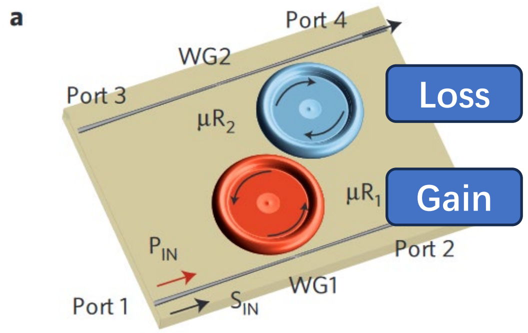


黑色箭头表示参数空间**围绕着EP**一周在黎曼面上**只转了半周**，表现为本征向量的**交换**，这与厄米系统简并点的拓扑是不一样的

Özdemir, Ş. K., Rotter, S., Nori, F. & Yang, L. Parity–time symmetry and exceptional points in photonics. *Nat. Mater.* **18**, 783–798 (2019).

2.一些实现PT对称系统的光学方案

$\omega_{1,2}$：WGM谐振频率；
$\gamma_{1,2,c}$：本征增益/损耗，1对taper的损耗；
κ：耦合系数



耦合双回音壁微腔系统构造

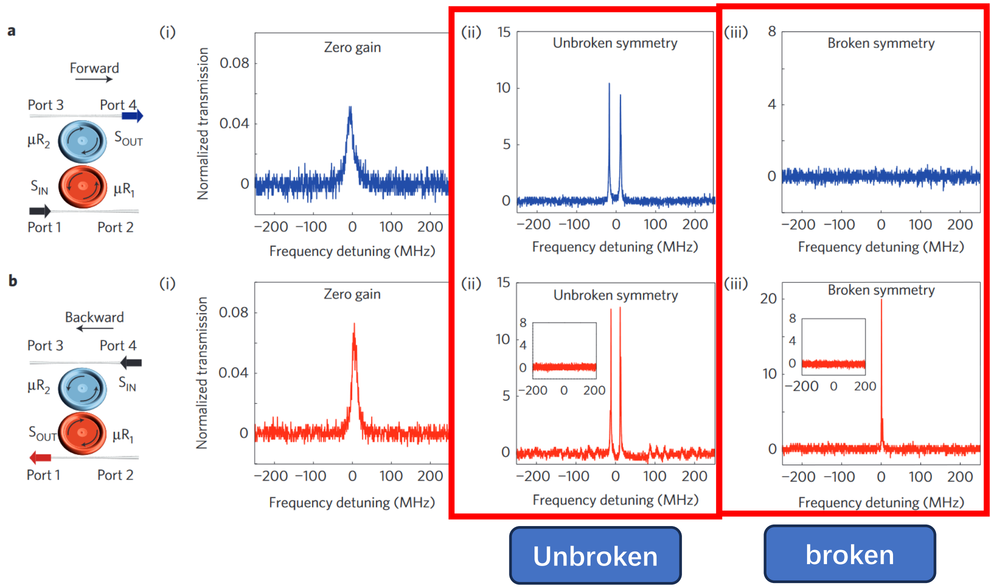
根据耦合双回音壁(WGM)微腔哈密顿量写出动力学方程

$$\frac{da_1}{dt} = -i\omega_1 a_1 - \frac{\gamma_1+\gamma_c}{2}a_1 - i\kappa a_2 - \sqrt{\gamma_c}a_{in}$$

$$\frac{da_2}{dt} = -i\omega_2 a_2 - \frac{\gamma_2}{2}a_2 - i\kappa a_1$$

特征频率

$$\omega_{\pm} = \left[\omega_0 - \frac{i}{4}(\gamma_1+\gamma_c+\gamma_2)\right] \pm \frac{1}{4}\sqrt{16\kappa^2 - (\gamma_1+\gamma_c-\gamma_2)^2}$$



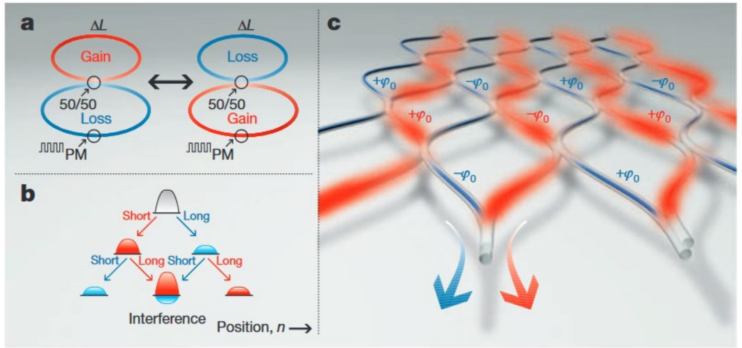
PT对称未发生破缺时，系统处于线性区，具有互易性。而在**PT对称破缺**时，系统**非线性性**被显著增强，进而有**非互易现象**的产生，即Port1输入时Port4无输出，而反过来却有相应的谐振峰。

PT对称耦合光学谐振腔的非互易性

基于增益-损耗微腔的方案

B. Peng *et al.*, "Parity–time-symmetric whispering-gallery microcavities," *Nature Phys*, vol. 10, no. 5, pp. 394–398, May 2014, doi: 10.1038/nphys2927.

2.一些实现PT对称系统的光学方案



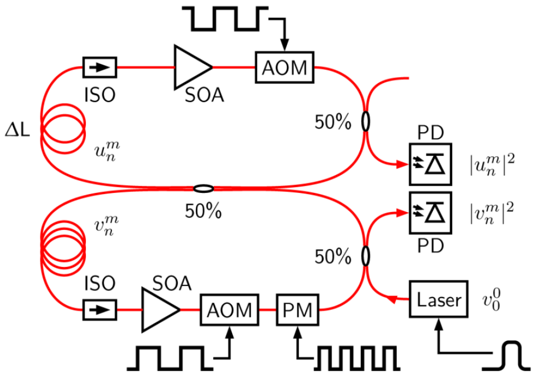
PT对称的等效光纤网络

时域演化方程
的递归形式

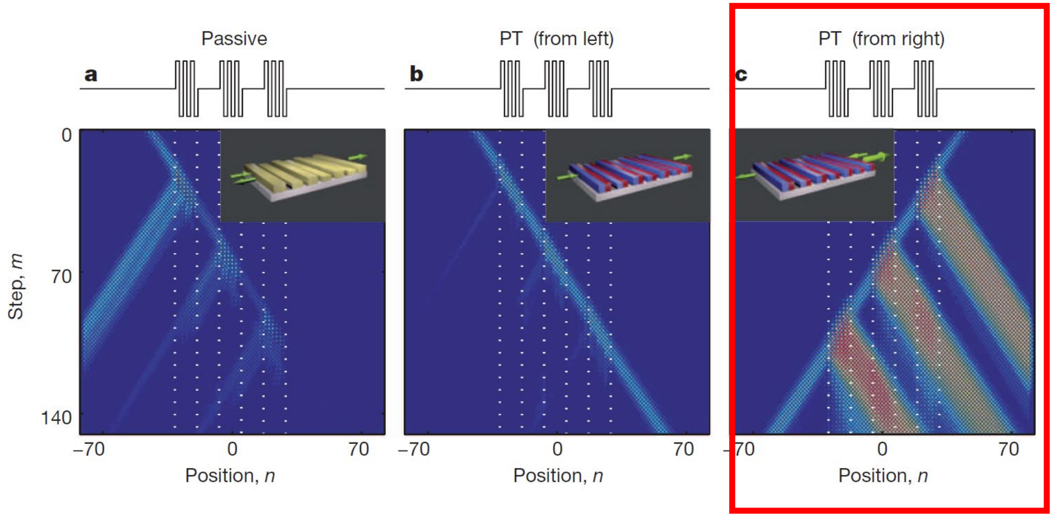
$$u_n^{m+1} = \frac{G^{\pm 1/2}}{\sqrt{2}}\left(u_{n+1}^m + i v_{n+1}^m\right)$$

$$v_n^{m+1} = \frac{G^{\mp 1/2}}{\sqrt{2}}\left(i u_{n-1}^m + v_{n-1}^m\right)e^{i\varphi(n)}$$

$\varphi(n)$作为对称的相位差提供PT“光学势”的**实部**，而G则作为反对称的增益/损耗提供了**虚部**



实验配置



非互易传输现象

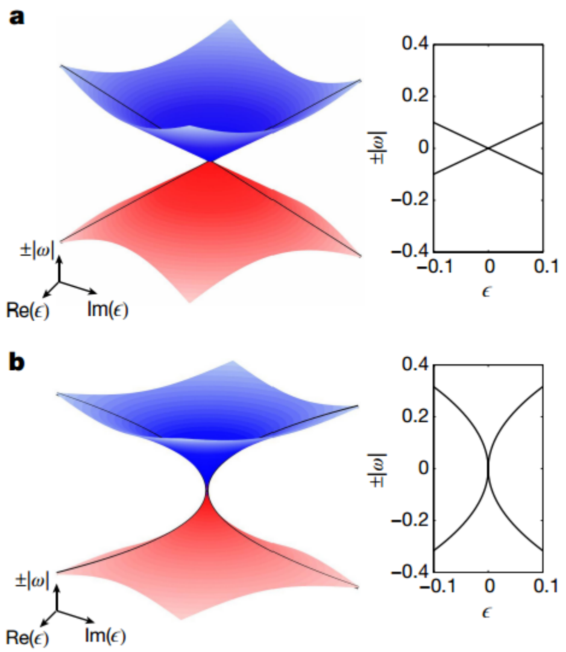
基于增益-损耗光波导的方案

Regensburger, A. *et al.* Parity–time synthetic photonic lattices. *Nature* **488**, 167–171 (2012).

3. PT对称光学微腔系统在传感方面的应用

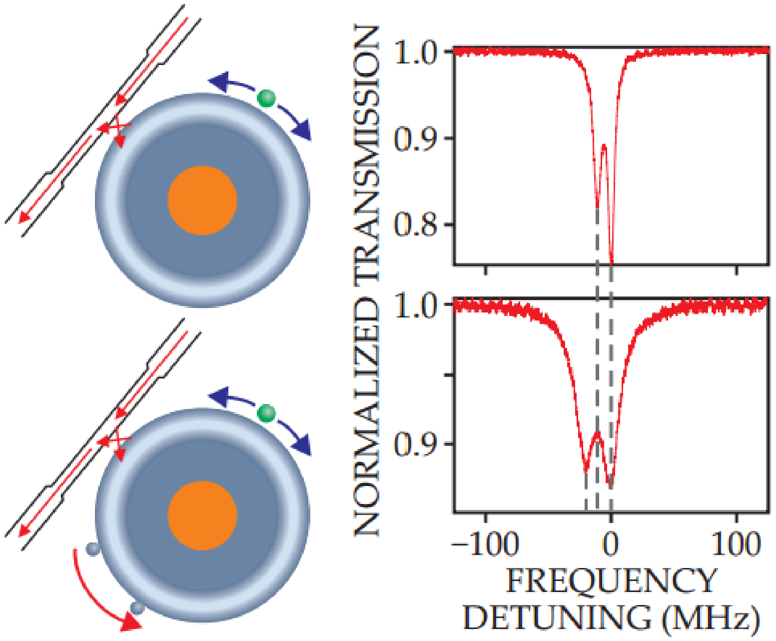
超高灵敏度

可以用Wyle微扰理论解释



DP点附近：复频率ω变化与微扰**ε**成正比

EP点附近：复频率ω变化与微扰$\boldsymbol{\varepsilon}^{1/2}$成正比



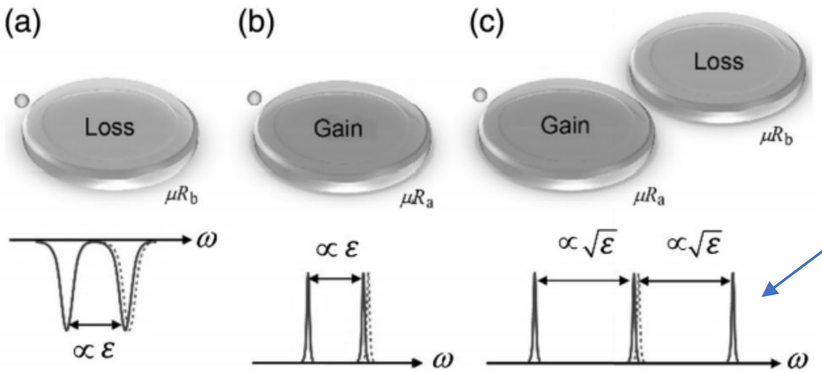
显然非厄米系统简并点EP相比厄米系统简并点DP**对微扰更加敏感**

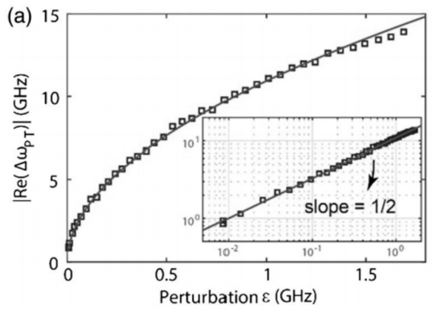
简并点（DP点与EP点）附近工作的传感器的透射光谱

W. Chen et al, Nature 548, 192 (2017).

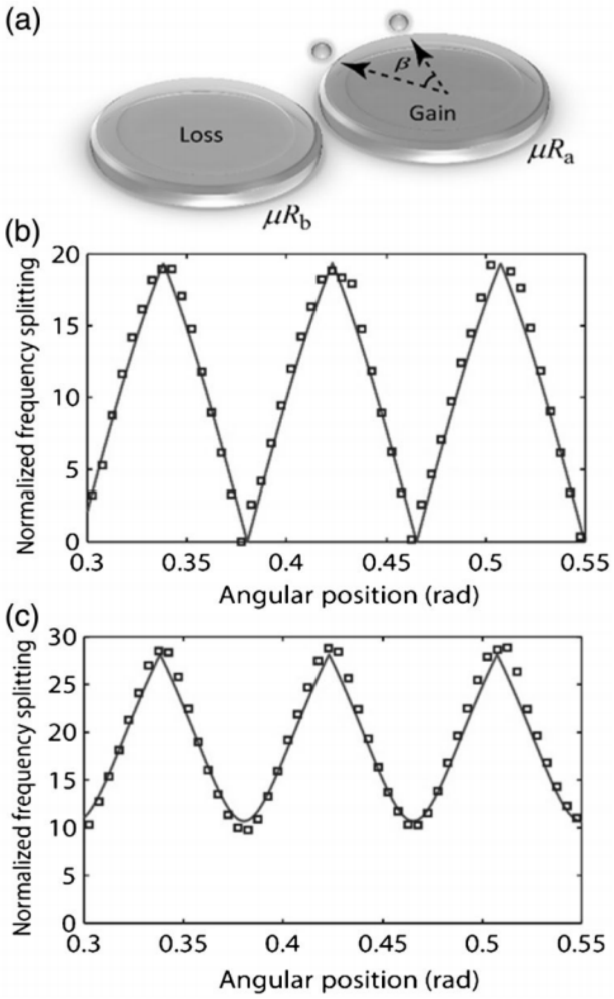
3. PT对称光学微腔系统在传感方面的应用

①PT对称的回音壁（WGM）模式谐振器





WGM纳米颗粒传感器原理：(a)单个无源谐振器（损耗）(b)单个有源谐振器（增益）(c)平衡增益和损耗的PT对称谐振器。



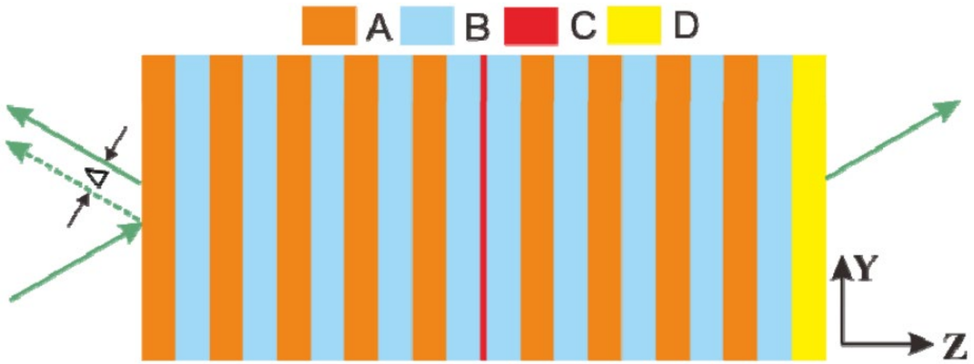
双纳米颗粒检测

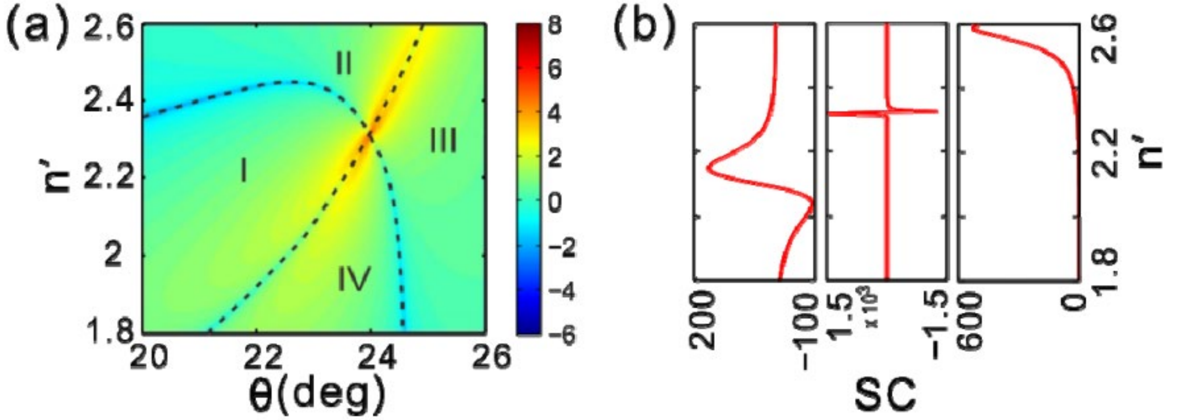
CHEN W, ZHANG J, PENG B, et al. Parity-time-symmetric whispering-gallery mode nanoparticle sensor[J]. Photonics Research, 2018, 6(5): A23-A30.

3. PT对称光学微腔系统在传感方面的应用

②多层介质折射率传感器

n：介质折射率 θ：入射角 SC：GH位移变化随介质折射率的微分





多层堆叠形成具有布拉格光栅的FP腔

A层和B层为不同折射率的介电体，沿z轴交替排列，形成两侧光子晶体缺陷的**布拉格光栅**，单层石墨烯C嵌入在腔体的中间。

将PC的右端层替换为介质D，从而打破了几何对称性，D层的介质折射率是可调的。

(a)（以左侧注入为例）在EP点附近，区域被虚线分为四个部分。第一部分和第三部分为正，第二部分和第四部分为负(b) 不同折射角下的SC：分别位于EP点对应入射角的两侧。

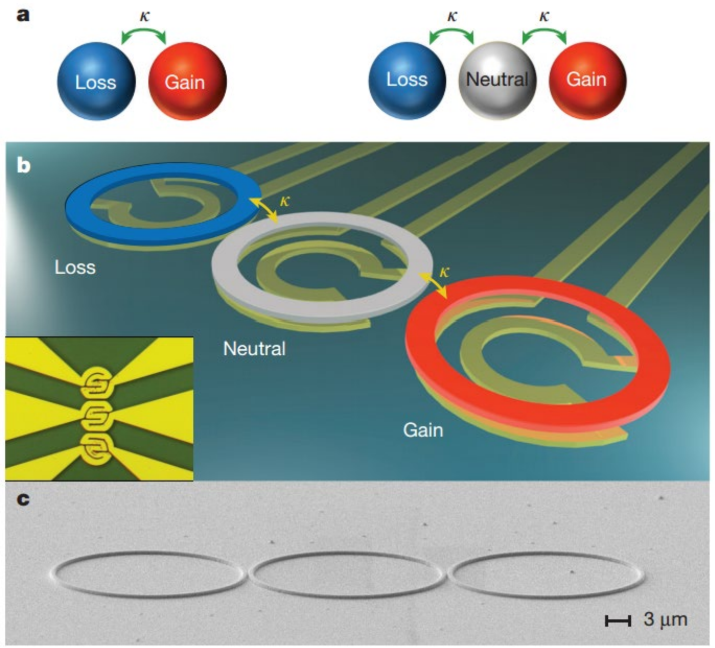
EP处的Goos-Hanchen位移具有方向依赖性并且对微小折射率变化非常敏感

ZHAO D, KE S, LIU Q, et al. Giant Goos-Hänchen shifts in non-Hermitian dielectric multilayers incorporated with graphene[J]. Optics Express, 2018, 26(3): 2817-2828.

3. PT对称光学微腔系统在传感方面的应用

③高阶EP点的温度传感器

高阶EP具有更高的灵敏度



二阶（左）和三阶（右）EP点示意图

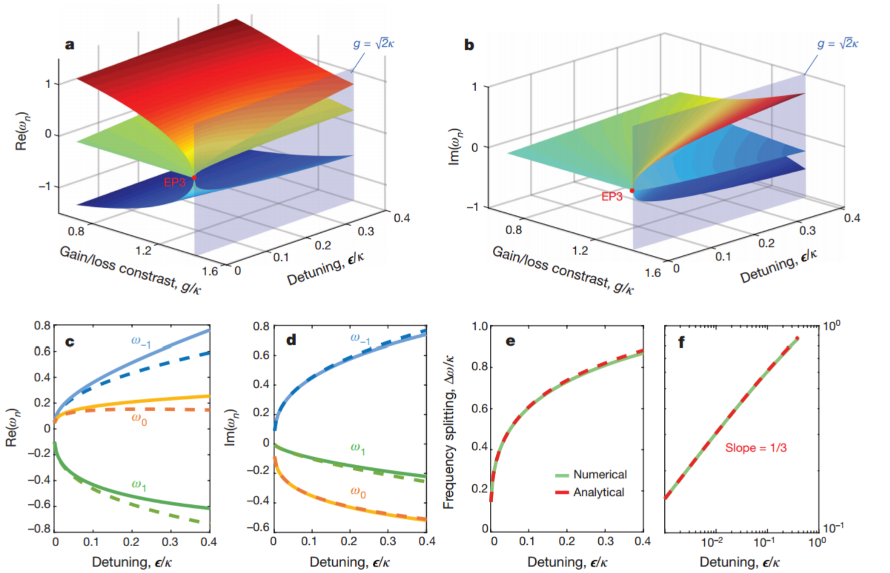


Figure 2 | Bifurcations of complex eigenfrequencies around a third-order exceptional point. a, The real parts of the eigenfrequencies ($\mathrm{Re}(\omega_n)$) of the ternary parity–time-symmetric system as a function of the normalized gain/loss contrast g/κ and the detuning ϵ/κ. The third-order exceptional point (EP3) occurs at $g=\sqrt{2}\kappa$ (blue plane) and $\epsilon=0$. **b,** The imaginary parts of the eigenfrequencies ($\mathrm{Im}(\omega_n)$). **c, d,** Analytical (dashed lines) and numerical (solid lines) solutions for the real (**c**) and imaginary (**d**) parts of the eigenfrequencies, for $g=\sqrt{2}\kappa$. **e,** Analytical (dashed red line) and numerical (solid green line) results for $\mathrm{Re}(\omega_0-\omega_1)/\kappa=\Delta\omega/\kappa$, demonstrating cube-root behaviour as a function of the detuning. **f,** The results from **e** on a logarithmic scale. The slope of 1/3 confirms the cube-root response.

频率分裂尺度对应为扰动强度的立方根

HODAEI H, HASSAN A U, Wittek S, et al. Enhanced sensitivity at higher-order exceptional points[J]. Nature, 2017, 548(7666): 187-191.