Institut for Matematik, DTU: Gymnasieopgave

Arealmomenter

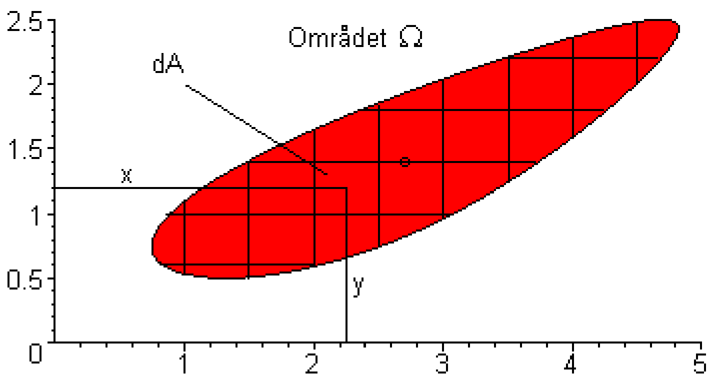
Teori: Se lærebøgerne i faget Statiske konstruktionsmodeller og EDB .
Se også H&OL bind 2, § 12.2 , samt bind 2 appendix 12.3 , side 262.

Indledning.

Vi skal nu indføre begrebet arealmoment. Arealmomentet benyttes i mekanikken til beregning af massecentret for et legeme. Vi skal vende tilbage til massecentret i fysikundervisningen.
I statikken benyttes arealmomenter blandt andet i forbindelse med beregning af nedbøjninger og spændinger i bjælker, der belastes til bøjning. I næste lektion skal vi lave et lille projekt, hvor vi skal finde nedbøjningen af en træbjælke, der belastes med en kraft på midten. Her får vi brug for at kunne beregne et arealmoment.

Definition af arealmomenter.

Vi betragter et plant område Ω i xy-planen. Vi inddeler Ω i mange små infinitesimale delarealer dA , se figur 3 .



Figur 3 . Arealmoment af dA med hensyn til x- og y-aksen.

Det samlede areal af området Ω bliver summen af delarealerne dA , der i grænsen bliver til integralet

(1) $$A = \int_\Omega dA$$

Arealmomentet af delarealet dA med hensyn til x-aksen er arealets afstand y til x-aksen ganget med dA, altså $y \cdot dA$. Det samlede arealmoment af 1. orden af Ω med hensyn til x-aksen bliver

(2) $$I_x = \int_\Omega y\, dA$$, arealmoment af 1. orden m.h.t. x-aksen

Arealmomentet af delarealet dA med hensyn til y-aksen er arealets afstand x til y-aksen ganget med dA, altså $x \cdot dA$.

Det samlede arealmoment af 1. orden af Ω med hensyn til y-aksen bliver

(3) $I_y = \int_\Omega x \, dA$, arealmoment af 1. orden m.h.t. y-aksen

Ved beregning af arelamomenter af 2. orden med hensyn til x- og y- aksen indgår kvadratet på afstandene til de to akser. Arealmomentet af 2. orden af det lille delareal dA med hensyn til x- aksen er således $y^2 \cdot dA$. Det samlede arealmoment af 2. orden af Ω med hensyn til x-aksen bliver

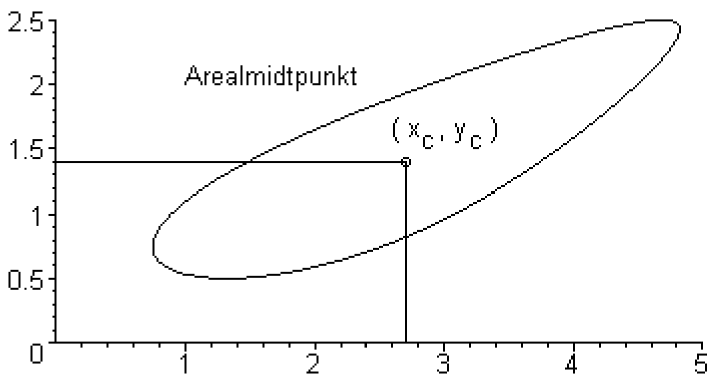
(4) $I_{xx} = \int_\Omega y^2 \, dA$, arealmoment af 2. orden m.h.t. x-aksen

Tilsvarende bliver det samlede arealmoment af 2. orden af Ω med hensyn til y-aksen

(5) $I_{yy} = \int_\Omega x^2 \, dA$, arealmoment af 2. orden m.h.t. y-aksen

Definition af arealmidtpunkt og massecenter.

Vi forestiller os nu, at vi med en sav udskærer en figur i en krydsfinérplade, der har samme form som vores område Ω . Massecentret eller arealmidtpunktet bestemmer vi ved at holde en pegefinger under pladen og så flytte fingeren, indtil vi finder balancepunktet for pladen, når den påvirkes af tyngdekraften. Punktet kaldes derfor også for tyngdepunktet. Prøv selv med en pegefinger at finde massecentret eller tyngdepunktet for nogle ting du har på bordet foran dig, f.eks. en trekant-lineal, en bog o.s.v.



Figur 2. Arealmidtpunktet (x_c , y_c) .

Vi definerer koordinaterne (x_c , y_c) til arealmidtpunktet eller massecentret for et plant homogent legeme , se figur 2 , ved hjælp af de tidligere indførte arealmomenterne af 1. orden

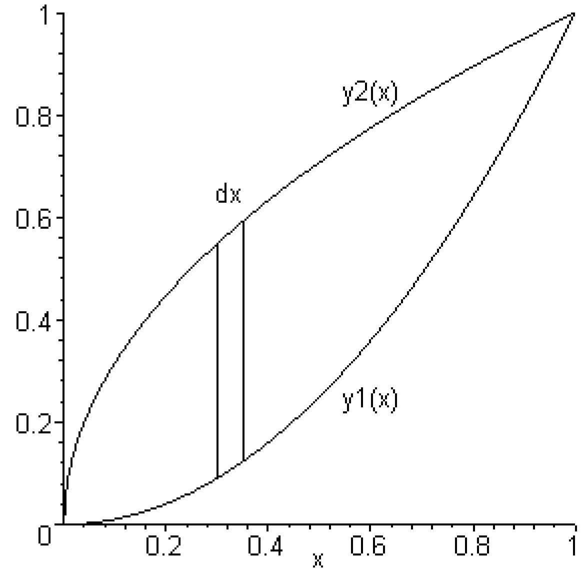
(6) $x_c = \dfrac{I_y}{A} = \dfrac{1}{A} \int_\Omega x \, dA$,

arealmidtpunktet (x_c , y_c)

(7) $$y_c = \frac{I_x}{A} = \frac{1}{A} \int_\Omega y \; dA \quad ,$$

hvor A er arealet af figuren. Vi skal i næste afsnit se, hvordan man i praksis beregner (x_c , y_c).

Bestemmelse af arealer og arealmidtpunkter.



Figur 3. Bestemmelse af arealet imellem to kurver $y1(x) = x^2$ og $y2(x) = x^{½}$.

Vi vil bestemme arealet A af og koordinaten til området vist i figur 3, der er beliggende imellem de 2 kurver y1(x) og y2(x) , $x \in [x_1 , x_2]$. Vi opdeler arealet i et passende antal lodrette (infinitesimale) rektangler med højden y2(x) -y1(x) og bredden dx . Arealet dA af vores rektangel bliver

$$dA = (y2(x) - y1(x)) \, dx \quad .$$

Bidraget til arealmomentet af 1. orden af strimlen dA med hensyn til y-aksen er

$$dI_y = x \, dA ,$$

da alle dele af rektanglet dA , har samme afstanden x fra y-aksen. Det samlede areal og arealmomenterne I_y og I_{yy} finder vi ved at integrere , se formlerne (1) , (3) og (5)

(8) $$A = \int_\Omega dA = \int_{x_1}^{x_2} \left(y2(x) - y1(x) \right) dx \quad .$$

(9) $$I_y = \int_\Omega x dA = \int_{x_1}^{x_2} x \left(y2(x) - y1(x) \right) dx \quad .$$

(10) $$I_{yy} = \int_\Omega x^2 dA = \int_{x_1}^{x_2} x^2 \left(y2(x) - y1(x) \right) dx \quad .$$

Eksempel 1.

Find arealet imellem kurverne $y1(x) = x^2$ og $y2(x) = x^{½}$, $x \in [0 , 1]$, som vist i figur 3 .

Benytter vi formel (8) , finder vi for det samlede areal

$$A = \int_0^1 \left(x^{½} - x^2 \right) dx = \left[2/3\, x^{3/2} - 1/3\, x^3 \right]_0^1 = 1/3$$

Arealmomentet af 1. orden med hensyn til y-aksen finder vi med formel (9)

$$I_y = \int_0^1 x \left(x^{½} - x^2 \right) dx = \left[2/5\, x^{5/2} - 1/4\, x^4 \right]_0^1 = 3/20$$

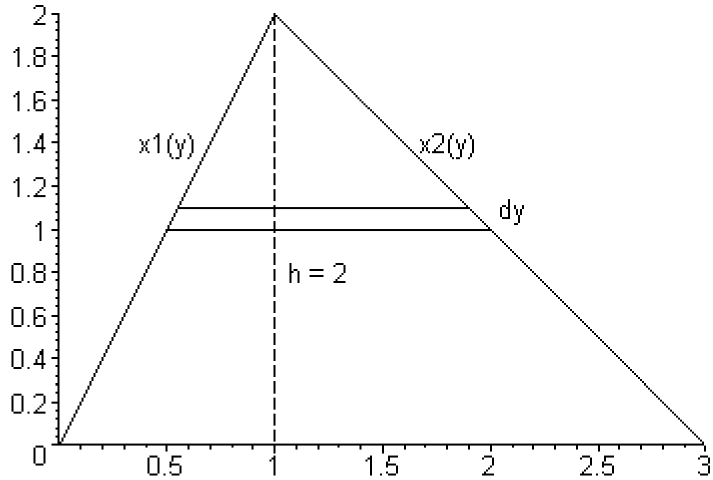
Herefter kan vi finde x-koordinaten til massecentret x_c som

$$x_c = \frac{I_y}{A} = 9/20 .$$

Arealmomentet af 2. orden med hensyn til y-aksen bliver, se formel formel (10)

$$I_{yy} = \int_0^1 x^2 \left(x^{½} - x^2 \right) dx = \left[2/7\, x^{7/2} - 1/5\, x^5 \right]_0^1 = 3/35$$

I stedet for at indele vores areal i lodrette rektangler kunne vi lige så godt have brugt små vandrette rektangler med højden dy. Hvis y1(x) og y2(x) har de omvendte funktioner x1(y) og



Figur 4. Bestemmelse af arealet imellem to kurver $x1(y) = ½\, y$ og $x2(y) = 3 - y$.

x2(y) i intervallet $[y_1 , y_2]$, se figur 2 , bliver bredden af et vandret areal (x2(y) -x1(y)) , og arealet dA af vores infinite-simale rektangel bliver

$$dA = (x2(y) - x1(y))\, dy \quad .$$

Bidraget til arealmomentet af 1. orden af strimlen dA med hensyn til x-aksen er

$$dI_x = y\, dA\ ,$$

da alle dele af rektanglet dA , har samme afstanden y fra x-aksen. Det samlede areal og arealmomenterne I_x og I_{xx} finder vi ved at integrere , se formlerne (1) , (3) og (5)

(11) $$A = \int_\Omega dA = \int_{y_1}^{y_2} \big(x2(y) - x1(y) \big)\, dy \quad .$$

(12) $$I_x = \int_\Omega y\, dA = \int_{y_1}^{y_2} y \big(x2(y) - x1(y) \big)\, dy \quad .$$

(13) $$I_{xx} = \int_\Omega y^2 dA = \int_{y_1}^{y_2} y^2 \big(x2(y) - x1(y) \big)\, dy \quad .$$

Eksempel 2.

Find arealet imellem kurverne x1(y) = ½ y og x2(y) = 3 - y og x-aksen , som vist i figur 4 .

Benytter vi formel (11) , finder vi for det samlede areal for $y \in [\,0\,,\,2\,]$

$$A = \int_0^2 \big((3 - y) - \tfrac{1}{2} y \big)\, dy = \Big[\, 3\,y - 3/4\ y^2 \,\Big]_0^2 = 3$$

Dette stemmer med at trekantens arel er en ½·h·a , hvor højde h = 2 og grundlinien a = 3 , altså

$$A = ½·h·a = ½·2·3 = 3\ .$$

Arealmomentet af 1. orden med hensyn til x-aksen finder vi med formel (12)

$$I_x = \int_0^2 y \big((3 - y) - \tfrac{1}{2} y \big)\, dy = \Big[\, 3/2\ y^2 - 1/2\ y^3 \,\Big]_0^2 = 2$$

Herefter kan vi finde y-koordinaten til massecentret y_c som

$$y_c = \frac{I_x}{A} = 2/3\ .$$

Dette stemmer med den generelle regel, at massecentret for en trekant, ligger på medianernes skæringspunkt. En median er en linie fra en vinkelspids til midtpunktet på den modsatte side. Skæringspunktet deler medianerne i forholdet 1 : 2 .

Arealmomentet af 2. orden med hensyn til x-aksen bliver, se formel formel (13)

$$I_{xx} = \int_0^2 y^2 \big((3 - y) - \tfrac{1}{2} y \big)\, dy = \Big[\, y^3 - 3/8\ y^4 \,\Big]_0^2 = 2$$
