Ответы к РК2

Кирилл Киселев

Октябрь 2022

1 Теорема о непрерывности собственного интеграла, зависящего от параметра.

Теорема 1. *О непрерывности собственного интеграла зависящего от параметра*

Пусть функция $f(x, y)$ определна на прямоугольнике $[a, b] \times [c, d]$ и непрерывна по совокупности переменных. Тогда интеграл, зависящий от параметра

$$I(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

является непрерывной функцией на отрезке $[c, d]$

2 Правило Лейбница для вычисления производной собственного интеграла, зависящего от параметра

Теорема 2. *Правило Лейбница*

Пусть f определена и непрерывна на прямоугольнике $[a, b] \times [c, d]$ и непрерывна по x на отрезке $[a, b]$ при каждом фиксированном $y \in [c, d]$. Также потребуем, чтобы функция $f'_y(x, y)$ существовала и была непрерывной на всем прямоугольнике $[a, b] \times [c, d]$. Тогда

$$I(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

Является дифференцируемой функцией параметра y на всем отрезке $[a, b]$. И производная $I'(y)$ может быть найдена по правилу Лейбница:

$$I'(y) = \int_a^b f'_y(x, y) dx$$

т.е. с помощью дифферования по параметру под знаком дифференциала.

3 Интегрирование по параметру собственного интеграла, зависящего от параметра.

Теорема 3. *Об интегрировании собственного интеграла, зависящего от параметра*

Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна по совокупности переменных на прямоугольнике $[a, b] \times [c, d]$. Тогда

$$\int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x, y)dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x, y)dy$$

4 Дифференцирование интеграла по параметру в случае, когда и пределы интегрирования зависит от параметра.

Рассмотрим вопрос о дифференцировании интеграла, зависящего от параметра в случае , когда пределы интегрирования зависят от зависят от параметра. Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в точках прямоугольника $[a, b] \times [c, d]$, и пусть кривые $x = \alpha(y)$ и $x = \beta(y)$, c $\leq$ y $\leq$ d, целиком лежат в этом прямоугольнике. Рассмотрим интеграл $I(y) = \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)dx$ в виде $I(y, u, v) = \int\limits_u^v f(x, y)dx$, где $u = \alpha(y), v = \beta(y)$ Тогда по правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{d}{dy} I(y, u, v) = \frac{\partial I}{\partial y} + \frac{\partial I}{\partial u} * \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial I}{\partial v} * \frac{\partial v}{\partial y} = \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x, y)dx - f(\alpha(y), y)\alpha'(y) + f(\beta(y), y)\beta'(y).$$

Т.о. получим требуемую формулу

$$\frac{d}{dy} \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)dx = \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x, y)dx - f(\alpha(y), y)\alpha'(y) + f(\beta(y), y)\beta'(y).$$

5 Определение равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра.

Пусть функция $f(x,y)$ определена при $x \geq a$ и $y \in Y$. Пусть при каждом фиксированном $y \in Y$ существует несобственный интеграл:

$$I(y) = \int\limits_a^\infty f(x,y)dx$$

Это означает, что существует конечный предел $\lim\limits_{A\to+\infty} \int\limits_a^A f(x,y)dx$. Если обозначить $F(y,A) = \int\limits_a^A f(x,y)dx$, то $\lim\limits_{A\to+\infty} F(y,A) = \int\limits_a^\infty f(x,y)dx$. Если при $A \to +\infty$ функция $F(y,A)$ стремится к своему пределу равномерно относительно y, то говорят, что несобственный интеграл $\int\limits_a^\infty f(x,y)dx$ сходится равномерно относительно $y \in Y$. Это означает, что

$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists A_0 = A_0(\varepsilon)$ такое, что при любом $A \geq A_0$ и при любом $y \in Y$ выполняется неравенство $|\int\limits_a^\infty f(x,y)dx - \int\limits_a^A f(x,y)dx| = |\int\limits_A^\infty f(x,y)dx| < \varepsilon$

6 Критерий Коши равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра.

Пусть функция $f(x,y)$ определена при $x \geq a$ и $y \in Y$. Интеграл $I(y) = \int\limits_a^\infty f(x,y)dx$ сходится равномерно относительно $y \in Y$ тогда и только тогда, когда $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists A_0 = A_0(\varepsilon), A_0 \geq a$ такое, что для любых A_1 и A_2, $A_1 \geq A_0$, $A_2 \geq A_0$ выполняется неравенство $|\int\limits_a^{A_1} f(x,y)dx - \int\limits_a^{A_2} f(x,y)dx| = |\int\limits_{A_1}^{A_2} f(x,y)dx| < \varepsilon$

7 Признак Вейерштрасса равномерной сходимости интеграла, зависящего от параметра.

Пусть функция $f(x, y)$ определена при $x \geq a$ и $y \in Y$. Пусть также выполняется неравенство $|f(x, y)| \leq \varphi(x)$($\varphi$ - мажоранта) для всех $y \in Y$. Тогда если интеграл $\int\limits_a^\infty \varphi(x)dx$ сходится, то интеграл $\int\limits_a^\infty f(x, y)dx$ сходится равномерно относительно $y \in Y$

8 Примеры равномерно и неравномерно сходящегося несобственного интеграла, зависящего от параметра.

Пример 1.

Проверим, что интеграл $\int\limits_0^\infty \frac{cos(\alpha x)}{1+x^2}dx$ сходится равномерно относительно $\alpha \in \mathbb{R}$. Т.к. при всех $x \geq 0$ и при всех $\alpha \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство $|\frac{cos(\alpha x)}{1+x^2}| \leq \frac{1}{1+x^2}$, и интеграл $\int\limits_0^\infty \frac{1}{1+x^2}$ сходится, то исходный интеграл сходится равномерно относительно $\alpha \in \mathbb{R}$ по теореме Вейерштрасса.

Пример 2.

$\int\limits_0^\infty \frac{cos(\alpha x)}{1+\alpha^2 x^2}$, $\alpha \in (0, +\infty)$. Пусть выполнен критерий Коши сходимости интеграла, зависящего от параметра. Тогда $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists A_0 > 0$ такое, что если $A_1 > A_0$, $A_2 > A_0$, то $|\int\limits_{A_1}^{A_2} \frac{cos(\alpha x)}{1+\alpha^2 x^2}dx| < \varepsilon$ при любом $\alpha \in (0, +\infty)$. Преобразуем последний интеграл: $\int\limits_{A_1}^{A_2} \frac{cos(\alpha x)}{1+\alpha^2 x^2}dx =$ (замена: $\alpha x = t$) $= \int\limits_{\alpha A_1}^{\alpha A_2} \frac{1}{\alpha}\frac{cos(t)}{1+t^2}dt$. Пусть $A_1 = 2\pi n$, $A_2 = 2\pi n + \frac{\pi n}{4}$, $\alpha = \frac{1}{n}$. Тогда имеем такое неравенство:

$$|n \int\limits_{2\pi}^{2\pi+\frac{\pi}{4}} \frac{cost}{1+t^2}dt| < \varepsilon$$

Так как на отрезке $[2\pi, 2\pi + \frac{\pi}{4}]$ выполняется неравенство $cos(t) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$, то написанное неравенство не выполняется при достаточно большом значении n(ни при каком ε). Равномерной сходимости нет.

9 Теорема о непрерывности несобственного интеграла, зависящего от параметра.

Теорема 4. *О непрерывности несобсвтенного интеграла, зависящего от параметра*

Пусть функция $f(x, y)$ определена и непрерывна по совокупности переменных на множестве $[a, +\infty] \times [c, d]$. Пусть далее интеграл $\int\limits_a^\infty f(x, y)dx$ сходится равномерно относительно $y \in [c, d]$. Тогда этот интеграл является непрерывной функцией на отрезке $[c, d]$

10 Теорема об интегрировании несобственного интеграла, зависящего от параметра.

Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна по совокупности переменных, как функция двух переменных на множестве $[a, +\infty] \times [c, d]$. Тогда если интеграл $\int\limits_a^\infty f(x, y)dx$ сходится равномерно относительно $y \in [c, d]$, то выполняется равенство

$$\int\limits_c^d dy \int\limits_a^{+\infty} f(x, y)dx = \int\limits_a^{+\infty} dx \int\limits_c^d f(x, y)dy$$

11 Теорема о дифференцировании несобственного интеграла, зависящего от параметра.

Пусть на множестве $[a, +\infty] \times [c, d]$ непрерывны функции $f(x, y)$ и $f'_y(x, y)$. Пусть, далее, $\int\limits_a^\infty f(x, y)dx$ сходится при каждом $y \in [c, d]$, а интеграл

$\int\limits_a^\infty f'_y(x,y)dx$ сходится равномерно относительно $y \in [c,d]$. Тогда выполняется равенство

$$\frac{d}{dy}\int\limits_a^\infty f(x,y)dx = \int\limits_a^\infty f'_y(x,y)dx$$

Последнее равенство подразумевает и существование производной из левой части.

12 Бесконечномерное евклидово пространство и норма в таком пространстве.

13 Ортогональные и ортонормированные системы в бесконечномерном евклидовом пространстве.

Пусть E - евклидово пространство. Последовательность $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ не нулевых элементов E называется ортогональной системой, если $(\varphi_k, \varphi_l) = 0$ при $k \neq l$. Ортогональные системы могут существовать только в бесконечномерных пространствах. Ортогональная система называется ортогонормированной, если нормы всех векторов этой системы равны 1. Из ортогональной системы $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ нетрудно получить ортогонормированную, перейдя к системе $\{\frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|}\}_{n=1}^\infty$

14 Коэффициенты Фурье и ряд Фурье по ортогональной системе.

Пусть $f \subset E$, по аналогии с конечномерным случаем вычислим коэффициенты Фурье элемента f по ортогональной системе $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$

$$c_n = \frac{(f,\varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2}, \quad n = 1,2,3...$$

Составим ряд Фурье элемента f по указанной ортогональной системе:

$$f \sim c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + ... + c_n\varphi_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n$$

15 Теорема о минимальном свойстве коэффициентов Фурье.

Теорема 5. *о минимальном свойстве коэффициентов Фурье.*

Пусть E - евклидово пространство. Последовательность $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ - ортогональная система в этом пространстве, и пусть $f \in E$. Тогда минимальное значение величины $\|f - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n\varphi_n\|$, где $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ - произвольные вещественные числа, достигается при $\alpha_k = c_k$, где $c_k = \frac{(f,\varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2}$ - коэффициенты Фурье элемента f по ортогональной системе $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$

16 Замечание к теореме о минимальном свойстве коэффициентов Фурье.

Замечание

По ходу доказательства теоремы установлено такое равенство

$$\|f - \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k\| = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2\|\varphi_k\|^2$$

Здесь левая часть неорицательна, и, следовательно,

$$\|f\|^2 \geq \sum_{k=1}^{n} c_k^2\|\varphi_k\|^2$$

В последнем неравенстве можно перейти к пределу при $n \to \infty$; в результате получаем неравенство

$$\|f\|^2 \geq \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2\|\varphi_k\|^2$$

, которое называется неравенством Бесселя.
Если $\forall f \in E$ выполняется равенство

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \|\varphi_k\|^2$$

, то соответствуящая ортогональная система называется замкнутой. При этом последнее равенство называется равенством Парсеваля.
Из равенства

$$\|f - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k\| = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \|\varphi_k\|^2$$

следует, что ряд Фурье любого элемента $f \in E$ сходится к f по норме пространства E тогда и только тогда, когда ортогональная система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ является замкнутой.

17 Неравенство Бесселя и равенство Парсеваля. Замкнутость ортогональной системы.

Неравенство Бесселя.

$$\|f\|^2 \geq \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \|\varphi_k\|^2$$

Равенство Парсеваля

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \|\varphi_k\|^2$$

Если $\forall f \in E$ выполняется равенство

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \|\varphi_k\|^2$$

то соответствуящая ортогональная система называется замкнутой.

18 Замкнутость ортогональной системы и сходимость соответствующего ряда Фурье

Если $\forall f \in E$ выполняется равенство

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \|\varphi_k\|^2$$

, то соответствуящая ортогональная система называется замкнутой. При этом последнее равенство называется равенством Парсеваля.
Из равенства

$$\|f - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k\| = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \|\varphi_k\|^2$$

следует, что ряд Фурье любого элемента $f \in E$ сходится к f по норме пространства E тогда и только тогда, когда ортогональная система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ является замкнутой.

19 Пространство непрерывных функций и скалярное произведение в этом пространстве.

Рассмотрим множество всех непрерывных функций на отрезке $[a, b]$. На этом множестве (которое очевидным образом превращается в линейное пространство) введем скалярное произведение по формуле

$$(f, g) = \int\limits_{a}^{b} f(x)g(x)dx$$

При этом выполняются все аксиомы скалярного умножения

1. $(f, g) = (g, f)$
2. $(\alpha f, g) = \alpha(f, g)$
3. $(f_1 + f_2, g) = (f_1, g) + (f_2, g)$
4. $(f, f) \geq 0,\ (f, f) = 0 \Longrightarrow f = \overrightarrow{0}$

Полученное пространство обозначается $C_2[a, b]$

20 Тригонометрическая система на отрезке $[-\pi, \pi]$. Проверка ортогональности и вычисление норм.

Важнейшим примерос ортогональной системы в этос пространстве является тригонометрическая система:

$$\{1,\ cos(\frac{2\pi nx}{b-a}),\ sin(\frac{2\pi nx}{b-a})\},\ n = 1, 2, 3, ...$$

Подробнее разберем случай отрезка $[-\pi, \pi]$. Тригонометрическая система на этом отрезке имеет вид: $1,\ cos(x),\ sin(x),\ ..., cos(nx),\ sin(nx), ...$
Проверим ортогональность этой системы:

$$(1,\ cos(nx)) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} cos(nx)dx = \frac{sin(nx)}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$(1,\ sin(nx)) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} sin(nx)dx = -\frac{cos(nx)}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$(cos(mx),\ cos(nx)) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} cos(mx)cos(nx)dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(cos((m+n)x)+cos((m-n)x))dx =$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{sin((m+n)x)}{m+n} + \frac{sin((m-n)x)}{m-n})\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,\ m \neq n,\ m,\ n = 1, 2, ...$$

Аналогично можно проверить равенства $\int\limits_{-\pi}^{\pi} cos(mx)sin(nx)dx = 0$, $\int\limits_{-\pi}^{\pi} sin(mx)sin(nx)dx = 0$, в последнем интеграле $m \neq n,\ m, n = 1, 2, ...$
Вычислим нормы элементов тригонометрической системы :

$$\|1\|^2 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} 1 * 1dx = 2\pi$$

$$\|cos(nx)\|^2 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} cos^2(nx)dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1+cos(2nx)}{2}dx = \frac{1}{2}(x+\frac{sin(2nx)}{2n})\Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi$$

$$\|sin(nx)\|^2 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} sin^2(nx)dx = \ldots = \pi$$

21 Равенство Парсеваля для тригонометрической системы на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Равенство Парсеваля в случае отрезка $[-\pi, \pi]$ выглаядит так:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

22 Сходимость в среднем квадратичном для тригонометрического ряда; определение сходимости в среднем квадратичном для последовательности функций.

Сходимость последовательности функций $f_n(x)$, заданных на отрезке $[a, b]$ к функции $f(x)$ по норме пространства $C_2[a, b]$ означает, что

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{a}^{b}(f_n(x) - f(x))^2dx = \ 0$$

Все функции предполагаются непрерывными. Такая сходимость называется сходимостью в среднем квадратичном.
Для тригонометрического радя Фурье она обозначает, что

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(f(x) - (\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k cos(kx) + b_k sin(kx)))^2dx = \ 0$$

23 Условия Дирихле и теорема Дирихле.

Если функция одновременно кусочно непрерывнаи кусочно монотонна на некотором отрезке, то говорят, что на этом отрезке функция удовлетворяет условиям Дирихле.

Теорема 6. *Дирихле*

Пусть функция $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ кусочно непрерывна и кусочно монотонна на отрезке $[-\pi, \pi]$. Тогда ряд Фурье этой функции по тригонометрической системе сходится в каждой точке $x \in \mathbb{R}$, и его сумма $S(x)$ является 2π периодической функцией.
Если $x \in (-\pi, \pi)$, то $S(x) = \frac{1}{2}(f(x-0)+f(x+0))$, где $f(x-0) = \lim\limits_{t \to x-0} f(t)$, $f(x+0) = \lim\limits_{t \to x+0} f(t)$; в частности, в точке x непрерывности функции f сумма ряда $S(x) = f(x)$. Далее, $S(-\pi) = S(\pi) = \frac{1}{2}(f(-\pi+0) - f(\pi-0))$

24 Применение теоремы Дирихле для изучения поведения неполных рядов Фурье.

Пусть, например, дана функция $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, и этой функции поставлен в соответствие ряд Фурье по синусам:

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n sin(nx), \text{где } b_n = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} f(t) sin(nt) dt$$

Продолжим функцию $f(x)$ на полуинтервал $[-\pi, 0)$, положив $f(-x) = -f(x)$. Продолженную таким образом на веь отрезок $[-\pi, \pi]$ также будем обозначать $f(x)$. Для функции $f(x)$ ряд Фурье будет иметь такое же вид, как и для исходной функции, и применение теоремы Дирихле здесь возможно (если только продолженная функция удовлетворяет требованиям этой теоремы). То же самое верно и для разложения в неполный ряд по косинусам.

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(nx), \text{где } a_n = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} f(t) cos(nt) dt$$

25 Тригонометрический ряд Фурье на отрезке

Если дана функция $f : [-l, l] \to \mathbb{R}$, где $l > 0$, то мы можем рассмотреть тригонометрическую систему:

$$1,\ cos(\frac{\pi x}{l}),\ sin(\frac{\pi x}{l}), \ldots, cos(\frac{n\pi x}{l}),\ sin(n\frac{\pi x}{l}), \ldots,$$

которая ортогональна на отрезке $[-l, l]$. Ряд Фурье функции f по такой системе имеет вид:

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(\frac{n\pi x}{l}) + sin(\frac{n\pi x}{l}),\ \text{где}$$

$$a_n = \ \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)cos(\frac{n\pi t}{l})dt$$

$$b_n = \ \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)sin(\frac{n\pi t}{l})dt$$

Ортонормированная тригонометрическая система на отрезке $[-l, l]$ такова:

$$\frac{1}{\sqrt{2l}},\ \frac{1}{\sqrt{l}}cos(\frac{\pi x}{l}),\ \frac{1}{\sqrt{l}}sin(\frac{\pi x}{l}),\ \ldots\ , \frac{1}{\sqrt{l}}cos(\frac{\pi x n}{l}),\ \frac{1}{\sqrt{l}}sin(\frac{\pi x n}{l}),\ \ldots\ ,$$