

ОТВЕТЫ К РК2

Кирилл Киселев

Октябрь 2022

1 Теорема о непрерывности собственного интеграла, зависящего от параметра.

Теорема 1. *О непрерывности собственного интеграла зависящего от параметра*

Пусть функция $f(x, y)$ определена на прямоугольнике $[a, b] \times [c, d]$ и непрерывна по совокупности переменных. Тогда интеграл, зависящий от параметра

$$I(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

является непрерывной функцией на отрезке $[c, d]$

2 Правило Лейбница для вычисления производной собственного интеграла, зависящего от параметра

Теорема 2. *Правило Лейбница*

Пусть f определена и непрерывна на прямоугольнике $[a, b] \times [c, d]$ и непрерывна по x на отрезке $[a, b]$ при каждом фиксированном $y \in [c, d]$. Также потребуем, чтобы функция $f'_y(x, y)$ существовала и была непрерывной на всем прямоугольнике $[a, b] \times [c, d]$. Тогда

$$I(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

Является дифференцируемой функцией параметра y на всем отрезке $[a, b]$. И производная $I'(y)$ может быть найдена по правилу Лейбница:

$$I'(y) = \int_a^b f'_y(x, y) dx$$

т.е. с помощью дифференцирования по параметру под знаком дифференциала.

3 Интегрирование по параметру собственного интеграла, зависящего от параметра.

Теорема 3. *Об интегрировании собственного интеграла, зависящего от параметра*

Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна по совокупности переменных на прямоугольнике $[a, b] \times [c, d]$. Тогда

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$$

4 Дифференцирование интеграла по параметру в случае, когда и пределы интегрирования зависят от параметра.

Рассмотрим вопрос о дифференцировании интеграла, зависящего от параметра в случае, когда пределы интегрирования зависят от параметра.

Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в точках прямоугольника $[a, b] \times [c, d]$, и пусть кривые $x = \alpha(y)$ и $x = \beta(y)$, $c \leq y \leq d$, целиком лежат в этом прямоугольнике. Рассмотрим интеграл $I(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx$ в виде

$I(y, u, v) = \int_u^v f(x, y) dx$, где $u = \alpha(y)$, $v = \beta(y)$ Тогда по правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{d}{dy} I(y, u, v) = \frac{\partial I}{\partial y} + \frac{\partial I}{\partial u} * \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial I}{\partial v} * \frac{\partial v}{\partial y} = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x, y) dx - f(\alpha(y), y) \alpha'(y) + f(\beta(y), y) \beta'(y).$$

Т.о. получим требуемую формулу

$$\frac{d}{dy} \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x, y) dx - f(\alpha(y), y) \alpha'(y) + f(\beta(y), y) \beta'(y).$$

5 Определение равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра.

Пусть функция $f(x, y)$ определена при $x \geq a$ и $y \in Y$. Пусть при каждом фиксированном $y \in Y$ существует несобственный интеграл:

$$I(y) = \int_a^{\infty} f(x, y) dx$$

Это означает, что существует конечный предел $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x, y) dx$. Если обозначить $F(y, A) = \int_a^A f(x, y) dx$, то $\lim_{A \rightarrow +\infty} F(y, A) = \int_a^{\infty} f(x, y) dx$. Если при $A \rightarrow +\infty$ функция $F(y, A)$ стремится к своему пределу равномерно относительно y , то говорят, что несобственный интеграл $\int_a^{\infty} f(x, y) dx$ сходится равномерно относительно $y \in Y$. Это означает, что

$\forall \varepsilon > 0 \exists A_0 = A_0(\varepsilon)$ такое, что при любом $A \geq A_0$ и при любом $y \in Y$ выполняется неравенство $|\int_a^{\infty} f(x, y) dx - \int_a^A f(x, y) dx| = |\int_A^{\infty} f(x, y) dx| < \varepsilon$

6 Критерий Коши равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра.

Пусть функция $f(x, y)$ определена при $x \geq a$ и $y \in Y$. Интеграл $I(y) = \int_a^{\infty} f(x, y) dx$ сходится равномерно относительно $y \in Y$ тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0 \exists A_0 = A_0(\varepsilon), A_0 \geq a$ такое, что для любых A_1 и A_2 , $A_1 \geq A_0, A_2 \geq A_0$ выполняется неравенство $|\int_{A_1}^{A_2} f(x, y) dx| = |\int_{A_1}^{A_2} f(x, y) dx| < \varepsilon$

7 Признак Вейерштрасса равномерной сходимости интеграла, зависящего от параметра.

Пусть функция $f(x, y)$ определена при $x \geq a$ и $y \in Y$. Пусть также выполняется неравенство $|f(x, y)| \leq \varphi(x)$ (φ - мажоранта) для всех $y \in Y$. Тогда если интеграл $\int_a^\infty \varphi(x) dx$ сходится, то интеграл $\int_a^\infty f(x, y) dx$ сходится равномерно относительно $y \in Y$.

8 Примеры равномерно и неравномерно сходящегося несобственного интеграла, зависящего от параметра.

Пример 1.

Проверим, что интеграл $\int_0^\infty \frac{\cos(\alpha x)}{1+x^2} dx$ сходится равномерно относительно $\alpha \in \mathbb{R}$. Т.к. при всех $x \geq 0$ и при всех $\alpha \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство $|\frac{\cos(\alpha x)}{1+x^2}| \leq \frac{1}{1+x^2}$, и интеграл $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx$ сходится, то исходный интеграл сходится равномерно относительно $\alpha \in \mathbb{R}$ по теореме Вейерштрасса.

Пример 2.

$\int_0^\infty \frac{\cos(\alpha x)}{1+\alpha^2 x^2} dx$, $\alpha \in (0, +\infty)$. Пусть выполнен критерий Коши сходимости интеграла, зависящего от параметра. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists A_0 > 0$ такое, что если $A_1 > A_0$, $A_2 > A_0$, то $|\int_{A_1}^{A_2} \frac{\cos(\alpha x)}{1+\alpha^2 x^2} dx| < \varepsilon$ при любом $\alpha \in (0, +\infty)$.

Преобразуем последний интеграл: $\int_{A_1}^{A_2} \frac{\cos(\alpha x)}{1+\alpha^2 x^2} dx =$ (замена: $\alpha x = t$) $= \int_{\alpha A_1}^{\alpha A_2} \frac{1}{1+t^2} dt$. Пусть $A_1 = 2\pi n$, $A_2 = 2\pi n + \frac{\pi}{4}$, $\alpha = \frac{1}{n}$. Тогда имеем такое неравенство:

$$|n \int_{2\pi}^{2\pi + \frac{\pi}{4}} \frac{\cos t}{1+t^2} dt| < \varepsilon$$

Так как на отрезке $[2\pi, 2\pi + \frac{\pi}{4}]$ выполняется неравенство $\cos(t) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$, то написанное неравенство не выполняется при достаточно большом значении n (ни при каком ε). Равномерной сходимости нет.

9 Теорема о непрерывности несобственного интеграла, зависящего от параметра.

Теорема 4. *О непрерывности несобственного интеграла, зависящего от параметра*

Пусть функция $f(x, y)$ определена и непрерывна по совокупности переменных на множестве $[a, +\infty] \times [c, d]$. Пусть далее интеграл $\int_a^\infty f(x, y) dx$ сходится равномерно относительно $y \in [c, d]$. Тогда этот интеграл является непрерывной функцией на отрезке $[c, d]$

10 Теорема об интегрировании несобственного интеграла, зависящего от параметра.

Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна по совокупности переменных, как функция двух переменных на множестве $[a, +\infty] \times [c, d]$. Тогда если интеграл $\int_a^\infty f(x, y) dx$ сходится равномерно относительно $y \in [c, d]$, то выполняется равенство

$$\int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^d f(x, y) dy$$

11 Теорема о дифференцировании несобственного интеграла, зависящего от параметра.

Пусть на множестве $[a, +\infty] \times [c, d]$ непрерывны функции $f(x, y)$ и $f'_y(x, y)$. Пусть, далее, $\int_a^\infty f(x, y) dx$ сходится при каждом $y \in [c, d]$, а интеграл

$\int_a^\infty f'_y(x, y) dx$ сходится равномерно относительно $y \in [c, d]$. Тогда выполняется равенство

$$\frac{d}{dy} \int_a^\infty f(x, y) dx = \int_a^\infty f'_y(x, y) dx$$

Последнее равенство подразумевает и существование производной из левой части.

12 Бесконечномерное евклидово пространство и норма в таком пространстве.

13 Ортогональные и ортонормированные системы в бесконечномерном евклидовом пространстве.

Пусть E - евклидово пространство. Последовательность $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ не нулевых элементов E называется ортогональной системой, если $(\varphi_k, \varphi_l) = 0$ при $k \neq l$. Ортогональные системы могут существовать только в бесконечномерных пространствах. Ортогональная система называется ортонормированной, если нормы всех векторов этой системы равны 1. Из ортогональной системы $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ нетрудно получить ортонормированную, перейдя к системе $\{\frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|}\}_{n=1}^\infty$

14 Коэффициенты Фурье и ряд Фурье по ортогональной системе.

Пусть $f \in E$, по аналогии с конечномерным случаем вычислим коэффициенты Фурье элемента f по ортогональной системе $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$

$$c_n = \frac{(f, \varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Составим ряд Фурье элемента f по указанной ортогональной системе:

$$f \sim c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \dots + c_n\varphi_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n$$

15 Теорема о минимальном свойстве коэффициентов Фурье.

Теорема 5. *о минимальном свойстве коэффициентов Фурье.*

Пусть E - евклидово пространство. Последовательность $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ - ортогональная система в этом пространстве, и пусть $f \in E$. Тогда минимальное значение величины $\|f - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \varphi_n\|$, где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ - произвольные вещественные числа, достигается при $\alpha_k = c_k$, где $c_k = \frac{(f, \varphi_k)}{\|\varphi_k\|^2}$ - коэффициенты Фурье элемента f по ортогональной системе $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$

16 Замечание к теореме о минимальном свойстве коэффициентов Фурье.

Замечание

По ходу доказательства теоремы установлено такое равенство

$$\|f - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n c_k^2 \|\varphi_k\|^2$$

Здесь левая часть неотрицательна, и, следовательно,

$$\|f\|^2 \geq \sum_{k=1}^n c_k^2 \|\varphi_k\|^2$$

В последнем неравенстве можно перейти к пределу при $n \rightarrow \infty$; в результате получаем неравенство

$$\|f\|^2 \geq \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \|\varphi_k\|^2$$

, которое называется неравенством Бесселя.

Если $\forall f \in E$ выполняется равенство

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \|\varphi_k\|^2$$

, то соответствующая ортогональная система называется замкнутой. При этом последнее равенство называется равенством Парсеваля.

Из равенства

$$\|f - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n c_k^2 \|\varphi_k\|^2$$

следует, что ряд Фурье любого элемента $f \in E$ сходится к f по норме пространства E тогда и только тогда, когда ортогональная система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ является замкнутой.

17 Неравенство Бесселя и равенство Парсеваля. Замкнутость ортогональной системы.

Неравенство Бесселя.

$$\|f\|^2 \geq \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \|\varphi_k\|^2$$

Равенство Парсеваля

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \|\varphi_k\|^2$$

Если $\forall f \in E$ выполняется равенство

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \|\varphi_k\|^2$$

то соответствующая ортогональная система называется замкнутой.

18 Замкнутость ортогональной системы и сходимость соответствующего ряда Фурье

Если $\forall f \in E$ выполняется равенство

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \|\varphi_k\|^2$$

, то соответствующая ортогональная система называется замкнутой. При этом последнее равенство называется равенством Парсеваля.

Из равенства

$$\|f - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n c_k^2 \|\varphi_k\|^2$$

следует, что ряд Фурье любого элемента $f \in E$ сходится к f по норме пространства E тогда и только тогда, когда ортогональная система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ является замкнутой.

19 Пространство непрерывных функций и скалярное произведение в этом пространстве.

Рассмотрим множество всех непрерывных функций на отрезке $[a, b]$. На этом множестве (которое очевидным образом превращается в линейное пространство) введем скалярное произведение по формуле

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

При этом выполняются все аксиомы скалярного умножения

1. $(f, g) = (g, f)$
2. $(\alpha f, g) = \alpha(f, g)$
3. $(f_1 + f_2, g) = (f_1, g) + (f_2, g)$
4. $(f, f) \geq 0, (f, f) = 0 \implies f = \vec{0}$

Полученное пространство обозначается $C_2[a, b]$

20 Тригонометрическая система на отрезке $[-\pi, \pi]$. Проверка ортогональности и вычисление норм.

Важнейшим примером ортогональной системы в этом пространстве является тригонометрическая система:

$$\{1, \cos(\frac{2\pi nx}{b-a}), \sin(\frac{2\pi nx}{b-a})\}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Подробнее разберем случай отрезка $[-\pi, \pi]$. Тригонометрическая система на этом отрезке имеет вид: $1, \cos(x), \sin(x), \dots, \cos(nx), \sin(nx), \dots$
Проверим ортогональность этой системы:

$$(1, \cos(nx)) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx = \frac{\sin(nx)}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$(1, \sin(nx)) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) dx = -\frac{\cos(nx)}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$(\cos(mx), \cos(nx)) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx) dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos((m+n)x) + \cos((m-n)x)) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin((m+n)x)}{m+n} + \frac{\sin((m-n)x)}{m-n} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, \quad m \neq n, \quad m, n = 1, 2, \dots$$

$$\text{Аналогично можно проверить равенства } \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\sin(nx) dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx) dx = 0, \text{ в последнем интеграле } m \neq n, \quad m, n = 1, 2, \dots$$

Вычислим нормы элементов тригонометрической системы :

$$\|1\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} 1 * 1 dx = 2\pi$$

$$\| \cos(nx) \|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos(2nx)}{2} dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{\sin(2nx)}{2n} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi$$

$$\| \sin(nx) \|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx) dx = \dots = \pi$$

21 Равенство Парсеваля для тригонометрической системы на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Равенство Парсеваля в случае отрезка $[-\pi, \pi]$ выглядит так:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

22 Сходимость в среднем квадратичном для тригонометрического ряда; определение сходимости в среднем квадратичном для последовательности функций.

Сходимость последовательности функций $f_n(x)$, заданных на отрезке $[a, b]$ к функции $f(x)$ по норме пространства $C_2[a, b]$ означает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b (f_n(x) - f(x))^2 dx = 0$$

Все функции предполагаются непрерывными. Такая сходимость называется сходимостью в среднем квадратичном.

Для тригонометрического ряда Фурье она обозначает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x) - \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \right) \right)^2 dx = 0$$

23 Условия Дирихле и теорема Дирихле.

Если функция одновременно кусочно непрерывна и кусочно монотонна на некотором отрезке, то говорят, что на этом отрезке функция удовлетворяет условиям Дирихле.

Теорема 6. Дирихле

Пусть функция $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ кусочно непрерывна и кусочно монотонна на отрезке $[-\pi, \pi]$. Тогда ряд Фурье этой функции по тригонометрической системе сходится в каждой точке $x \in \mathbb{R}$, и его сумма $S(x)$ является 2π периодической функцией.

Если $x \in (-\pi, \pi)$, то $S(x) = \frac{1}{2}(f(x-0) + f(x+0))$, где $f(x-0) = \lim_{t \rightarrow x-0} f(t)$, $f(x+0) = \lim_{t \rightarrow x+0} f(t)$; в частности, в точке x непрерывности функции f сумма ряда $S(x) = f(x)$. Далее, $S(-\pi) = S(\pi) = \frac{1}{2}(f(-\pi+0) - f(\pi-0))$

24 Применение теоремы Дирихле для изучения поведения неполных рядов Фурье.

Пусть, например, дана функция $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, и этой функции поставлен в соответствие ряд Фурье по синусам:

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx), \text{ где } b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin(nt) dt$$

Продолжим функцию $f(x)$ на полуинтервал $[-\pi, 0)$, положив $f(-x) = -f(x)$. Продолженную таким образом на весь отрезок $[-\pi, \pi]$ также будем обозначать $f(x)$. Для функции $f(x)$ ряд Фурье будет иметь такое же вид, как и для исходной функции, и применение теоремы Дирихле здесь возможно (если только продолженная функция удовлетворяет требованиям этой теоремы). То же самое верно и для разложения в неполный ряд по косинусам.

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx), \text{ где } a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos(nt) dt$$

25 Тригонометрический ряд Фурье на отрезке

Если дана функция $f : [-l, l] \rightarrow \mathbb{R}$, где $l > 0$, то мы можем рассмотреть тригонометрическую систему:

$$1, \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right), \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right), \dots, \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \dots,$$

которая ортогональна на отрезке $[-l, l]$. Ряд Фурье функции f по такой системе имеет вид:

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \text{ где}$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{l}\right) dt$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \sin\left(\frac{n\pi t}{l}\right) dt$$

Ортонормированная тригонометрическая система на отрезке $[-l, l]$ такова:

$$\frac{1}{\sqrt{2l}}, \frac{1}{\sqrt{l}} \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right), \frac{1}{\sqrt{l}} \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right), \dots, \frac{1}{\sqrt{l}} \cos\left(\frac{\pi x n}{l}\right), \frac{1}{\sqrt{l}} \sin\left(\frac{\pi x n}{l}\right), \dots,$$