

## MÈTODES NUMÈRICS I

Grau de Matemàtiques. Curs 2017-18. Semestre de primavera

### Pràctica 1: Estudi d'errors

**Exercici 1** L'èpsilon de la màquina és el menor valor real  $u > 0$  de la forma  $u = 2^{-i}$ ,  $i > 0$ , que verifica  $1 + u > 1$ .

Feu un programa (**epsilon.c**) que calculi l'epsilon de la màquina dels tipus **float** i **double**. Quina conclusió en traieu? El valor es correspon amb el que havieu pensat?

**Exercici 2** Volem calcular  $S(N) = \sum_{j=1}^N \frac{1}{j^2}$  per als valors  $N = 10^3, 10^4, 10^5$  i  $10^6$ .

Feu un programa que calculi  $S(N)$ , sumant els termes començant per  $j = 1$  fins a  $j = N$  i a l'inrevés. Compareu els resultats obtinguts,  $S_{calc}(N)$ .

Feu primer tots els càlculs en precisió simple. Després, en precisió doble. (**sumes.c**)

Quines conclusions en traieu?

**Exercici 3** Considerem l'esquema iteratiu següent:

$$\begin{aligned} x_0 & \text{ fixat} \\ y_0 & = \sqrt{1 - x_0^2} \\ t_0 & = x_0^2 + y_0^2 = 1 \\ \left\{ \begin{array}{l} x_{n+1} & = 2x_n y_n \\ y_{n+1} & = x_n^2 - y_n^2 \\ t_{n+1} & = x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 \end{array} \right. \quad n = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Demostreu, per inducció a partir de  $t_0 = 1$ , que es verifica  $t_n = 1$ , per tot  $n$ .

- a) Feu un programa que calculi, en precisió simple, els 30 primers termes de la successió  $\{t_n\}_{n \geq 0}$ , a partir d'un valor de  $x_0$  que s'ha de llegir. Executeu-lo per a diferents valors de  $x_0$ . Per als valors  $x_0 = 0.3$  i  $x_0 = 0.8$ , escriviu la sortida en els fitxers **f03.res** i **f08.res**, respectivament. Feu la gràfica d'aquests dos casos, mitjançant el programa **gnuplot**. Dibueixeu les gràfiques per als rangs de  $t$  següents:  $[0.5, 2.5]$  i  $[0.99, 1.01]$ .
- b) Modifiquem el programa anterior per treballar en precisió doble i calculant 60 termes de la successió. Executeu-lo per a diferents valors de  $x_0$ ; en particular, podeu agafar els valors  $x_0 = 0.35, 0.55, 0.75, 0.85$ . Feu-ne la gràfica mitjançant el programa **gnuplot**.

Comenteu els resultats.

**Exercici 4** a) Escriviu la sèrie de Taylor de la funció  $\log(1 + y)$  per  $y = x$  i  $y = -x$  ( $|y| < 1$ ) (la denotarem  $(L_1)$ ).

- b) Determineu un valor aproximat de  $\log(0.7)$ , a partir del polinomi de Taylor de grau  $n$  de  $(L_1)$  per  $n = 7, 9, 11$ . Quin és l'error en  $S_{11}$ ? Quants termes de la sèrie són necessaris per tenir un error menor que  $10^{-15}$ , per tot  $0 < x < 10^{-3}$ ?
- c) De l'expressió  $(L_1)$  i la identitat  $\log(a/b) = \log a - \log b$ , deduiu-ne una expressió per

$$(L_2) \quad \log \frac{1+x}{1-x}.$$

Quin valor ha de tenir  $x$  en  $(L_2)$  per a aproximar  $\log(0.7)$ ? Useu aquest  $x$  per calcular un valor aproximat de  $\log(0.7)$ , a partir del polinomi de Taylor de grau  $n$  de  $(L_2)$  per  $n = 7, 9, 11$ . Quin és l'error en  $S_{11}$ ? Quants termes de  $(L_1)$  són necessaris per a assegurar aquesta mateixa exactitud?