MÈTODES NUMÈRICS I

Grau de Matemàtiques. Curs 2017-18. Semestre de primavera

Pràctica 4: Càlcul de zeros de funcions

Els mètodes numèrics per buscar solucions d'una equació $f(x) = 0$ generen successions $(x_n)_{n\geq 0}$, que s'espera que convergeixin a un valor α tal que $f(\alpha) = 0$.

Pendrem com a solució del problema un x_k que verifiqui $|f(x_k)| < \varepsilon_1$ o bé $|x_{k-1} - x_k| < \varepsilon_2$, on els valors de les toleràncies caldrà que estiguin fixats d'entrada.

Exercici 1 Mètode de Newton

Si la funció f és derivable es pot usar el mètode de Newton (o de Newton-Raphson):

Donada una aproximació inicial x_0, es genera la successió

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

a) Escriviu una funció

```
int newton(double x0, double *sol, double eps, int it_max)
```

que calcula un zero de la funció f mitjançant aquest mètode, partint del valor `x0`, on `eps` és la tolerància demanada, `it_max` és el màxim nombre d'iteracions permès i `sol` contindrà el valor de l'arrel trobada, si el mètode ha convergit. Retorna:

0 si hi ha hagut convergència; posa abans a la variable `sol` el valor de l'arrel trobada,

1 si s'ha arribat al nombre màxim d'iteracions `it_max` sense tenir la tolerància demanada,

2 si el valor de la derivada és 0.

b) Programeu una funció `main` per comprovar la funció anterior.

c) Per a cada exemple, caldrà programar una funció `double f(double x)` que calculi el valor de f en el punt x i una altra `double df(double x)`, que calculi el valor de f' en el punt x.

Exercici 2 Mètode d'iteració simple

L'equació $f(x) = 0$ es pot escriure en la forma $x = g(x)$ usant operacions elementals i, recíprocament, $x = g(x)$ es pot posar com $f(x) = 0$. Llavors, si α és una arrel de l'equació $f(x) = 0$, tenim que $\alpha = g(\alpha)$, on α s'anomena **punt fix** de g. Un mètode d'iteració simple:

Donada una aproximació inicial x_0, es genera la successió

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad n = 0, 1, \ldots$$

a) Escriviu una funció

```
int iteracioSimple(double x0, double *sol, double tol, int *iter,
                   int it_max)
```

que calcula un punt fix d'una funció mitjançant el mètode d'iteració simple, partint del valor `x0`. Retorna:

0 si hi ha hagut convergència; posa abans a `iter` el nombre d'iteracions realitzades i a `sol` el valor del punt fix calculat.

1 si s'ha arribat al nombre màxim d'iteracions `it_max` sense assolir la tolerància demanada.

b) Programeu una funció `main` per comprovar la funció anterior.

c) Caldrà programar una funció per a cada aplicació.

Aplicacions

1 Trobeu els zeros reals de les funcions següents.

- $f_1(x) = x^3 - 10\sin x$ amb 8 xifres decimals. En el cas del mètode de Newton-Raphson, comproveu la convergència quadràtica del mètode.
- $f_2(x) = x^6 - x - 1$. Quantes iteracions han estat necessàries en cada cas? Compareu els resultats.
- Trobeu la solució que ocupa la posició 5 de l'equació $e^{-x} - \sin(x) = 0$.
- Els zeros de la funció $g(x) = xe^{-x} - 0.06064$. En el cas del mètode de Newton, preneu $x_0 = 0, 0.99, 4, 4.5, 5$.

En tots els casos que calgui, justifiqueu la vostra elecció del punt inicial en cada mètode.
Compareu els resultats dels mètodes i del mètode agafant els diferents valors inicials.

2 El polinomi $P(x) = 10x^3 - 8.3x^2 + 2.295x - 0.21141$ té una arrel a $x = 0.29$. Busqueu-la mitjançant el mètode de Newton partint de $x_0 = 0.28$. Expliqueu què succeeix.

3 Considerem el mètode d'iteració simple $x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2$ per a diferents λ.

a) Estudieu la convergència o divergència teòrica del mètode en funció de λ.

b) Apliqueu el mètode per calcular els punts fixos per alguns dels valors següents de λ:
$0.1 + 0.01p,\ 0.4 + 0.01p,\ 0.6 + 0.01p,\ 0.9 - 0.01p,\ 2 - 0.01p\ (p \in [1, 10])$
Feu una gràfica dels iterats per cada λ.

Els resultats numèrics es corresponen amb l'estudi teòric?