MÈTODES NUMÈRICS I

Grau de Matemàtiques. Curs 2017-18. Semestre de primavera

Pràctica 2: Algebra lineal numèrica

Exercici 1 Escriviu una funció

```
int substitucio(int n, double **matU, double *x)
```

que resol, per substitució endarrera, un sistema triangular superior de dimensió n, de matriu ampliada `matU`; la solució s'ha de guardar en `x`. La funció retornarà **1** si la matriu és no singular, i **0** en cas contrari. Guardeu la funció en un fitxer de nom **solTriangSup.c**.

Feu una funció `main` per comprovar que la funció `substitucio` funciona i guardeu-la en el fitxer **princTriang.c**.

Aplicació

Resoleu els sistemes triangulars superiors següents:

- $U_n(c)x = e^{(n)}$, per a diferents valors de c, on $e^{(n)}$ és el vector n-è de la base canònica i

$$U_n(c) = \begin{pmatrix} 1 & c & c & \cdots & c \\ & 1 & c & \cdots & c \\ & & 1 & \cdots & c \\ & & & \ddots & c \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

- $A_n y = b^{(n)}$ per a matrius i termes independents generats aleatòriament.

Calculeu el temps d'execució per a diferents valors de n: 100, 500, 1000, 1500, ... Feu una taula amb els temps que es triga en la resolució. Compareu els temps amb els resultats de teoria.

Exercici 2 Volem resoldre sistemes lineals amb el mètode d'eliminació gaussiana. Programeu les següents funcions:

- Una funció anomenada `gauss`, amb tres paràmetres, una matriu ampliada `a`, amb elements de tipus **`double`**, la dimensió `n`, i una tolerància `tol`, i que retorna un **`int`**. La funció fa l'eliminació gaussiana a la matriu ampliada `a`, que a la sortida conté la matriu reduïda a triangular superior.

  Si es pot fer tot el procés d'eliminació, i la matriu és no singular, la funció ha de retornar un **1**, en cas contrari, un **0**. Guardeu aquesta funció en un fitxer de nom **gauss-sensePiv.c**.

- Una funció `main` per llegir de fitxer un sistema lineal, fer l'eliminació gaussiana, resoldre el sistema triangular superior, i escriure la solució en un altre fitxer. El nom dels dos fitxers s'ha de demanar per teclat. Guardeu-la en un fitxer de nom **resolSensePiv.c**.

Comproveu que les vostres funcions resolen correctament el problema aplicant-les a diferents sistemes lineals de resultats coneguts.

Exercici 3 Ara resoldrem els sistemes usant el mètode d'eliminació gaussiana amb pivotatge maximal per columnes. Programeu les següents funcions:

- Una funció `gaussPivot` que, abans de fer el pas d'eliminació gaussiana, calculi el pivot, i intercanviï els apuntadors a les files si fos necessari. A cada pas del mètode d'eliminació gaussiana guardeu els multiplicadors m_{ik}, $i = k+1, \ldots, n$, en la part triangular inferior de la matriu A.

  Guardeu-la en un fitxer de nom **gauss-Piv.c**.

- Una funció `main` anàloga a la del problema anterior. Guardeu-la en un fitxer de nom **resolPiv.c**.

Aplicacions de l'eliminació gaussiana

1 Resoleu els sistemes següents, i compareu les solucions obtingudes quan fem l'eliminació gaussiana amb i sense pivotatge.

a) $(A|b) = \left(\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$

b) $A = \begin{pmatrix} 1. & 3.1415 & -1.1876 \\ -10.1012 & 2.7172 & 2. \\ 1.1999 & 1. & -1. \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1. \\ 2.1013 \\ 69. \end{pmatrix}$

c) $(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1. & 0. & 1. & 1. \\ 1. & 10^{-15} & 2. & 2. \\ 1. & 1. & 1. & 0 \end{array}\right)$

amb tolerància 10^{-12}.

d) $Ay = c$ per a matrius i termes independents generats aleatòriament.

e) $Ax = b$, amb $b_i = i$, $a_{ij} = \dfrac{1}{i+j-1}$, $i, j = 1, \ldots n$.
Resoleu-lo per a diferents valors de la tolerància i de n.

2 Considerem l'equació integral

$$g(x) = y(x) - \lambda \int_0^1 K(x,t)y(t)dt,$$

on $\lambda \in \mathbb{R}$, $g(x)$ i $K(x,t)$ són funcions donades. La incògnita de l'equació és la funció $y(x)$, $x \in [0,1]$.

- Aproximem la integral usant la fórmula dels trapezis en els punts $t_j = jh, j = 0, \ldots, N$, on $h = 1/N$.
- Discretitzem ara l'equació resultant en els punts $x_i = ih, i = 0, \ldots, N$.
- Obtindrem un sistema lineal $Ay = b$ de $(N+1)$ equacions i $(N+1)$ incògnites $y_i = y(x_i), i = 0, \ldots, N$, i coeficients depenents de $K(x_i, t_j), i, j = 0, \ldots, N$.

Resoleu el sistema $Ay = b$ en els casos: $g(x) = x^2$, $K(x,t) = x^2 + t^2$, $N = 20$ i $\lambda = 0., 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$.

Nota: La fórmula dels trapezis serveix per aproximar una integral definida en un interval $[a,b]$.
Sigui $h = \frac{b-a}{N}$, $t_i = a + ih, i = 0, \ldots, N$, llavors

$$\int_a^b F(t)dt = T(h) + R_T$$

on

$$T(h) = h\left(\frac{F(t_0)}{2} + F(t_1) + \ldots + F(t_{N-1}) + \frac{F(t_N)}{2}\right) \qquad \text{és la fórmula dels trapezis}$$

i

$$R_T = -\frac{b-a}{12}F''(\xi)h^2 \qquad (\text{amb } \xi \in (a,b)) \qquad \text{és l'error de la fórmula}$$

3 Volem resoldre un Problema de Valors a la Frontera Lineal:

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x)\ ,\ a \leq x \leq b\ ,\ y(a) = \alpha\ ,\ y(b) = \beta$$

Reemplacem les derivades per quocients de diferències, fent una discretització de manera anàloga al cas de l'equació integral i obtenim un sistema d'equacions lineals.

Referència: BURDEN, R.L., FAIRES, J.D.: *Análisis Numérico*, capítol 11, secció 3.