MÈTODES NUMÈRICS I. Curs 2017/18. Semestre de tardor.

PRÀCTIQUES TEMA 3: INTERPOLACIÓ, DERIVACIÓ I INTEGRACIÓ

Recordeu:

(1) *Problema d'interpolació de Lagrange*: donats (x_i, f_i) , $i = 0, 1, 2, \ldots n$, amb totes les abscisses x_i diferents entre si, cal trobar $p(x) \in P_n[x]$ tal que $p(x_i) = f_i$, $\forall i = 0 \div n$.

(2) *Problema d'interpolació d'Hermite*: donats (x_i, f_i, g_i) , $i = 0, 1, 2, \ldots n$, amb totes les abscisses x_i diferents entre si, cal trobar $p(x) \in P_{2n+1}[x]$ tal que $p(x_i) = f_i$, $p'(x_i) = g_i$, $\forall i = 0 \div n$.

(3) Els problemes anteriors són problemes d'*interpolació polinomial d'una taula de valors*. Si els valors f_i i g_i són, respectivament, $f(x_i)$ i $f'(x_i)$ per alguna determinada funció $f(x)$, llavors s'anomenen problemes d'*interpolació polinomial d'una funció*.

(4) Per a tots els programes, podeu usar *gnuplot* per a comparar la taula (o funció) i el polinomi interpolador trobat. Si avalueu el polinomi (per a generar punts de la seva gràfica), cal usar l'*algorisme de Horner*.

Exercici 1 [Interpolació de Lagrange d'una taula resolent un sistema lineal "ple"]

Es busquen els coeficients del polinomi del problema (1) en la base natural:

$$p(x) = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + \ldots + a_n\, x^n \ .$$

Feu una funció on es resolgui un sistema lineal quadrat regular, per eliminació gaussiana i substitució endarrera.

Feu una funció *main* on es llegeixin les dades n, x_i's, f_i's, s'omplin adequadament A i f del sistema lineal $(n + 1) \times (n + 1)$ que cal resoldre: $Aa = f$, es cridi la funció anterior per a resoldre'l i escrigui les a_i's.

Exercici 2 [Interpolació de Lagrange d'una funció per diferències dividides]

Feu una funció que resolgui el problema (1)-(3) mitjançant el mètode de les diferències dividides de Newton.

També cal fer una funció on s'avaluï la $f(x)$ que es vol interpolar. Useu qualsevol funció *senzilla*, per exemple, $sin(x)$, $exp(x)$, $|x|$, etc.

En el programa principal, es llegirà n i els extrems de l'interval $[a, b]$ on es vol fer la interpolació. Aquesta es farà de dues maneres, en *abscisses equidistant* i en *abscisses de Txebishev*.

Exercici 3 [Interpolació d'Hermite d'una taula per diferències dividides]

Feu una funció que implementi el mètode de les diferències dividides en el cas del problema d'Hermite (2)-(3). En la funció *main* llegiu les dades que calgui i escriviu els resultats.

Exercici 4 [Interpolació per un spline cúbic natural]

Feu una funció que resolgui el problema de trobar el spline interpolador (SI) corresponent a un nombre de subintervals $n > 0$ i a unes dades $\Delta \equiv \{x_0 < x_1 < \ldots < x_n\}$ i $Y \equiv \{y_0, y_1, \ldots, y_n\}$.

El SI està caracteritzat per 3 vectors: un de moments (o derivades segones) i dos que són constants d'integració. Consulteu un document del Campus Virtual per a les explicacions i les fórmules.

La funció no ha d'usar cap matriu, sinó només vectors. S'han d'omplir adequadament els vectors que representen les tres diagonals centrals i el terme independent d'un sistema tridiagonal, resoldre'l per a trobar el vector de moments, i omplir després els altres dos vectors amb les constants d'integració.

Feu un programa principal on es generin les dades n, Δ i Y, es cridi la funció, i després s'avaluï el SI en molts punts equidistants de l'interval $[x_0, x_n]$.

Nota. Per a facilitar la implementació, es recomana usar exactament la mateixa notació per als índexs que la que s'usa al document del Campus Virtual.

Aplicació. Interpoleu punts de la gràfica de la funció $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Useu diversos n i diversos Δ.

Exercici 5 [Diferenciació numèrica i extrapolació de Richardson]

A vegades se sap avaluar directament una funció $f(x)$, però no les seves derivades (normalment f' i f''). La diferenciació numèrica s'usa per a aproximar el valor $f'(x)$ (o $f''(x)$) per combinacions lineals de valors $f_i = f(x_i)$, en alguns x_i's pròxims a x.

Considereu una funció f i un valor x. Cal calcular successives aproximacions de $f'(x)$ i de $f''(x)$ usant *diferències centrades de segon ordre* i *extrapolació de Richardson*. Caldrà prendre punts x_i simètrics respecte el valor x, i cada vegada més pròxims a x, segons un factor d'escala $q = 2$. No feu més càlculs dels necessaris per a obtenir una precisió predeterminada, i limiteu el nombre d'etapes d'extrapolació.

Apliqueu a $f(x) = e^x$ i $x = 1$, amb resultats exactes $f'(x) = f''(x) = e$.

Referència: *Eldén & Wittmayer-Koch*, capítol 6.

Exercici 6 [Integració per trapezis i mètode de Romberg]

Sovint cal avaluar integrals definides $I = \int_a^b f(x)dx$ aproximadament (per exemple, quan no es coneix una primitiva de $f(x)$). Un mètode molt usat és el dels trapezis compost. Per a estalviar càlculs (avaluacions de $f(x)$), s'acostuma a usar combinat amb l'extrapolació de Richardson, usant com a factor de canvi de pas $q = 2$.

Implementeu una funció a la qual se li passa una aproximació de I, corresponent al mètode dels trapezis compost usant $n/2$ intervals, i retorna una altra aproximació, corresponent a usar n intervals. L'objectiu de fer-ho així és que no es repeteixin les avaluacions de la funció $f(x)$ que ja s'han fet anteriorment.

Feu una funció *main* adequada que implementi el mètode de Romberg (extrapolació Richardson aplicada a trapezis).

Referència: *Eldén & Wittmayer-Koch*, capítol 7, secció 3.