Bài toán 1. *Tìm tất cả các hàm* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *sao cho* $f(0) \neq 0$ *và*

$$f(f(x)) + f(f(y)) = f(x+y)f(xy),$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

Độ khó: 4
(Balkan SL 2020/A4)

Lời giải. Đáp số duy nhất là $f(x) = 2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, dễ kiểm tra được hàm này thoả mãn.

Ký hiệu $f(0) = t$ và $P(a, b)$ là phép thế vào giả thiết.

$P(0, 0)$ cho ta $2f(t) = t^2$. Tiếp tục thế $P(x, 0)$ thu được $f(f(x)) + \frac{t^2}{2} = tf(x)$.

Vậy giả thiết tương đương:

$$t(f(x) + f(y)) - t^2 = f(x+y)f(xy)$$

Giờ, thế $x \to 1$ và $y \to -1$ lên trên ta thu được: $t(f(1) + f(-1)) - t^2 = tf(-1)$. Lại do t khác 0 nên thu được $f(1) = t = f(0)$.

$P(x, 0) - P(x, 1)$ cho ta $f(x)f(x+1) = f(x)f(0)$. Nếu tồn tại c để $f(c) = 0$ thì thế $P(0, c)$ sẽ cho ta $f(t) + t = 0$, hay là $\frac{t^2}{2} + t = 0$.

Vậy $f(1) = f(0) = -2$. Vậy ta biến đổi giả thiết thành

$$f(x+y)f(xy) + 2(f(x) + f(y)) + 4 = 0$$

Thay $x \to 1$, $y \to 0$ sẽ thu được điều vô lý, vậy nên không tồn tại c để $f(c) = 0$.

Từ đây ta thấy $f(x) = f(0)$ với mọi x, lại có $f(0)$ khác 0 nên $f(x) = 2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Ta kết thúc chứng minh. □