Bài toán 1. *Với một số nguyên dương k, ký hiệu $p(k)$ là số nguyên tố nhỏ nhất không chia hết cho k. Cho một số nguyên dương a, định nghĩa dãy số vô hạn $a_0, a_1, \ldots$ như sau:*

- *$a_0 = a$;*
- *Với $n > 0$, a_n là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn a_n chưa xuất hiện trong dãy và $(a_{n-1})^{a_n} - 1$ chia hết cho $p(a_{n-1})$.*

Chứng minh rằng mọi số nguyên dương đều xuất hiện trong dãy, tức là với mọi số nguyên dương m, tồn tại n sao cho $a_n = m$.

Độ khó: 6
(Brazil MO 2023/6)

Lời giải. Trước tiên ta thấy rằng nếu a_n lẻ thì a_{n+1} sẽ là số nhỏ nhất không xuất hiên trong dãy. Giả sử phản chứng rằng không tồn tại số nào trong dãy bằng m.

Nhận xét 1: $p(n) < n$ với mọi $n > 2$.

Thật vậy, ký hiệu $p_1 < p_2 < \ldots$ là các số nguyên tố. Giả sử rằng $p(n) = p_m$. Khi đó $n > p_1p_2\ldots p_{m-1}$. Mà theo định đề Bertrand thì giữa p_{m-1} và $2p_{m-1}$ sẽ tồn tại số nguyên tố q. Suy ra $p_m < 2p_{m-1}$. Vậy nếu $m > 2$ thì bất đẳng thức đúng. Nếu $m = 2$ thì nghĩa $p_m = 3$ nên nếu $n > 2$ thì $p(n) < n$. Vậy trong mọi trường hợp bất đẳng thức trên đều đúng.

Vậy từ nhận xét 1 ta thấy a_n giảm cho tới khi xuất hiện số 2 hoặc 1. Bây giờ ta đặt $T_m = p_1p_2\ldots p_m$.

Nhận xét 2: Với mọi m, tồn tại N để với mọi $n > N$, $T_m \mid a_n$

Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp theo m.

Thật vậy, gỉa sử k là số nhỏ nhất không xuất hiện trong dãy. Nếu 1 không xuất hiện trong dãy thì nghĩa dãy chỉ gồm toàn số chẵn. Nếu tồn tại $a_n \equiv 1 \pmod 3$ thì lúc này a_{n+1} sẽ bằng số nhỏ nhất chưa có trong dãy, điều này vô lý.

Do vậy nên dãy chỉ gồm hữu hạn các số dạng $3k + 1$. Dễ thấy rằng nếu $n \equiv 2 \pmod 3$ thì số tiếp theo sẽ là số chẵn nhỏ nhất chưa có trong dãy. Nếu có vô hạn số dạng $3k + 2$ thì tồn tại i sao cho $a_i \equiv 2 \pmod 3$ và $a_i + 2$ không có trong dãy, điều này dẫn đến $a_{i+1} = a_i + 2 \equiv 1 \pmod 3$. Điều này cũng mâu thuẫn.

Vậy với mọi n đủ lớn thì $6 \mid a_n$. Do vậy nên đúng với trường hợp $m = 1, 2$. Giả sử đúng đến $k - 1$, với T_k, xét số N sao cho với mọi $n > N$ thì $T_{k-1} \mid a_n$. Đặt $p_k = p$, nếu tồn tại $0 < x < p$ để có vô hạn $i > N$ sao cho $a_i \equiv x \pmod p$ thì lúc này $ord_p(x) \mid a_{i+1}$.

Bằng bất đẳng thức trong nhận xét 1 dễ thấy rằng $ord_p(x) < T_{k-1}$. Vậy nên tồn tại p_j với $j \leq k - 1$ sao cho $ord_p(x)$ không chia hết cho p_j.

Theo nguyên lý quy nạp thì tồn tại số α chia hết cho $\dfrac{T_{k-1}}{p_j}$ mà không thuộc trong dãy. Lại có vô số i để $a_i \equiv x \pmod p$ nên điều này là vô lý do tập S gồm các số chia hết cho $ord_p(x)$ mà $< \alpha$ là hữu hạn. Vậy nên với n đủ lớn thì $p \mid a_n$. Vậy theo nguyên lý quy nạp thì nhận xét đúng.

Và với trường hợp 1 có trong dãy ta cũng thực hiện tương tự.

Nhận xét 3: Với mọi p_m thì luôn tồn tại a_n sao cho $p(a_n) = p_m$.

Giả sử phản chứng rằng tồn tại m như trên, giả sử l là số nhỏ nhất như vậy. Khi đó theo nhận xét trên thì tồn tại n sao cho $p(a_n) = m - 1$ và $p(a_{n+1}) = t$ với $t > m$. Lúc này $ord_{p_{m-1}}(a_n)$ sẽ nhỏ hơn p_m mà số b_{n+1} bằng a_{n+1} chia cho $p_m, p_{m+1}, \ldots$ cũng là một số chia hết cho $ord_{p_{m-1}}(a_n)$ và không xuất hiện trong dãy. Điều này là vô lý.

Giờ, để kết thúc ta chỉ việc chọn n rất lớn và số nguyên tố $p = \dfrac{(3k+1)T_n}{3} + 1$. Luôn chọn được theo định lý Dirichlet. Và theo nhận xét 3 thì tồn tại n để $p(a_n) = p$. Lúc này $h = ord_p(a_n)$ sẽ không có ước nguyên tố là 3, lại chú ý rằng $2h$ chưa xuất hiện trong dãy theo nhận xét 2 nên ta thấy rằng điều này mâu thuẫn. Vậy ta có điều phải chứng minh.

$\square$