Bài toán 1. *Cho $\mathbb{R}$ là tập hợp các số thực. Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho, với mọi số thực x và y, phương trình sau được thỏa mãn:*

$$f(f(x)f(y)) + f(x+y) = f(xy).$$

Độ khó: 5
(IMO 2017/P2)

Lời giải. Đáp số là $f(x) = 0$, $f(x) = x - 1$ hoặc $f(x) = 1 - x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Dễ kiểm tra được các hàm này thoả.

Ký hiệu $P(a, b)$ là phép thế vào giả thiết. Xét trường hợp f khác hằng số.

$P(0, 0)$ cho ta $f(f^2(0)) = 0$. Nếu tồn tại c khác 1 để $f(c) = 0$ thì $P(c, \dfrac{c}{c-1})$ cho ta $f(0) = 0$. Lại tiếp tục cho $x \to 0$ vào giả thiết ta thấy vô lý.

Vậy $f^2(0) = 1$. Ta xét 2 trường hợp sau:

Trường hợp 1: $f(0) = -1$.

Ta sẽ chứng minh $f(x) = x - 1$, thật vậy, ta đã có $f(1) = 0$ nên $P(x, 1)$ cho ta $f(x + 1) = f(x) + 1$, từ đây quy nạp được $f(x + n) = f(x) + n$ với $n \in \mathbb{Z}$. Suy ra $f(n) = n - 1$ với mọi n nguyên.

Giờ, ta chứng minh rằng f đơn ánh. Giả sử phản chứng rằng tồn tại a khác b để $f(a) = f(b)$. $P(x, a)$ và $P(-1, b)$ cho ta $f(-a) - f(a - 1) = f(-b) - f(b - 1)$. Vậy nên $f(-a) = f(-b)$. Ngoài ra, $f(a) = f(b)$ cũng cho ta $f(na) = f(nb)$ với mọi $n \in \mathbb{Z}$.

$P(a, -b) - P(-a, b)$ cho ta $f(a - b) = f(b - a)$, đặt $a - b = t$. Lúc này ta có t khác 0 và $f(t) = f(-t)$. $P(t, -1)$ suy ra $f(-2f(t)) + f(t - 1) = f(-t) = f(t)$.

Hay là $f(-2f(t)) = 1$, suy ra $f(-2f(t) - 1) = 0$, ta đã biết nếu $f(x) = 0$ thì x phải bằng 1. Suy ra $f(t) = -1$, lúc này $f(t + 1) = 0$ nên $t + 1 = 1$ hay $t = 0$. Điều này mâu thuẫn với việc a khác b.

Vậy f đơn ánh, giờ ta thay $y \to 1 - x$ vào giả thiết thu được $f(x)f(1 - x) = x(1 - x)$. Thay x thành $-x$ lên trên thu được $f(-x)f(1 + x) = -x(1 + x)$.

Vậy ta thu được $f(x)f(-x) + f(x) = x(1 - x)$ và $f(-x)f(x) + (-x) = -x(1 + x)$.

Trừ 2 vế thu được $f(x) - f(-x) = 2x$. Vậy nên $f(-x) = f(x) - 2x$, thay lên trên thu được $f^2(x) - 2xf(x) + f(x) + x^2 - x = 0$, hay là $(f(x) - (x + 1))(f(x) - x) = 0$

Nếu tồn tại c để $f(c) = c$ thì $P(2, c)$ cho ta $2c + 2 = f(2c)$. Điều này là mâu thuẫn do $f(2c)$ bằng $2c$ hoặc $2c + 1$. Vậy $f(x) = x + 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Kiểm tra thấy hàm này thoả mãn.

Trường hợp 2: $f(0) = 1$.

Ta cũng sẽ chứng minh f đơn ánh như trường hợp trước với chú ý rằng $f(x+n) = f(x) - n$ với $n \in \mathbb{Z}$. Tương tự như trên, nếu tồn tại a khác b để $f(a) = f(b)$ thì đặt $t = a - b$, khi đó $f(t) = f(-t)$. $P(t, -1)$ cho ta $f(2f(t)) = -1 = f(2)$.

Suy ra $f(2f(t)-1)=0$, vậy nên $2f(t)-1=1$ hay là $f(t)=1$. Suy ra $f(t+1)=0$ hay là $t=0$, điều này mâu thuẫn với việc a khác b.

Từ đây ta thay $y \to 1-x$ vào giả thiết thu được $f(x)f(-x)-f(x)=x(1-x)$. Tiếp tục thay $x \to -x$ lên trên rồi giải hệ ta sẽ thu được $(f(x)-(1-x))(f(x)+x)=0$. Nếu tồn tại c để $f(c)=-c$ thì chú ý rằng $P(c,c)$ sẽ cho ta $f(c^2)+f(2c)=f(c^2)$ hay là $c=\dfrac{1}{2}$. Vậy $f(x)=1-x$ với mọi x khác $\dfrac{1}{2}$. Nhưng $f(\dfrac{3}{2})=\dfrac{-1}{2}$ nên theo tính đơn ánh thì vô lý. Vậy $f(x)=1-x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Từ 2 trường hợp trên ta hoàn tất chứng minh.

$\square$