Bài toán 1. *Tìm tất cả các số nguyên dương $b > 1$ sao cho tồn tại vô hạn các số nguyên dương n thỏa mãn $n^2 \mid b^n + 1$.*

Độ khó: 4
(USTST 2018/8)

Lời giải. Đáp số lạ mọi b sao cho $b + 1$ là luỹ thừa của 2 và $b = 2$.

Nhận xét 1: Nếu $b + 1$ là luỹ thừa của 2 thì chỉ có duy nhất $n = 1$ thoả.

Trước tiên, giả sử $b = 2^k - 1$. Và giả sử n thoả mãn đề bài. Nếu n chẵn thì $4 \mid n^2$ nhưng vế phải lại đồng dư 3 mod 4 nên vô lý. Vậy n là số lẻ. Xét trường hợp $n > 1$.

Giả sử $p \in \mathbb{P}$ là ước nguyên tố nhỏ nhất của n, đặt $h = ord_p(2^k - 1)$. Từ giả thiết ta thấy $h \mid (2n, p - 1)$. Nếu tồn tại ước nguyên tố lẻ của h thì cả n và $p - 1$ sẽ cùng chia hết cho số nguyên tố này.

Điều này mâu thuẫn với việc p là ước nguyên tố nhỏ nhất của n. Điều này dẫn đến việc $h \mid 2$. Nếu $h = 1$ thì suy ra $(2^k - 1)^n + 1 \equiv 2 \pmod p$. Vậy $p \mid 2$, điều này cũng mâu thuẫn. Vậy suy ra $h = 1$, điều này đồng nghĩa với việc $p \mid 2^k$ và điều này cũng vô lý. Vậy không tồn tại $n > 1$ thoả mãn. Do vậy nên $2^k - 1$ thoả mãn đề bài.

Nhận xét 2: Nếu $b = 2$ thì chỉ có $n = 3$ thoả mãn.

Thật vậy, dễ thấy n lẻ. Gọi p là ước nguyên tố nhỏ nhất của n và lập luận tương tự bên trên ta thấy $p = 3$, theo LTE thì cũng thấy được $v_3(n) = 1$.

Đặt $n = 3k$, lúc này ta có: $9k^2 \mid 8^k + 1$. Vậy $k^2 \mid 8^k + 1$ với k không chia hết cho 3. Nếu $k > 1$ thì ta gọi q là ước nguyên tố nhỏ nhất của k thì $q \mid 63$, vậy $q = 7$. Điều này là mâu thuẫn do $8^k + 1 \equiv 2 \pmod 7$. Vậy $b = 2$ cũng thoả mãn.

Nhận xét 3: Mọi số khác đều không thoả mãn.

Thật vậy, xét $p \mid b + 1$, với p là số nguyên tố lẻ. Ta xây dựng dãy (x_n) với $x_1 = p$, $x_n = rx_{n-1}$ với r là ước nguyên tố của $b^{x_{n-1}} + 1$ và không bị chia hết bới x_{n-1}. Chú ý rằng luôn chọn được x_n theo định lý Zsigmondy. Giờ ta quy nạp rằng $x_n^2 \mid b^{x_n} + 1$ với mọi n.

Với $n = 1$ thì đúng, giả sử đúng đến $n - 1$. Theo định lý LTE thì:

$$v_r(b^{x_n} + 1) = v_r(x_n) + v_r(b^{x_{n-1}} + 1) \geq 2v_r(x_n)$$

Vậy nên ta xây dựng được dãy vô hạn nghiệm thoả mãn đề bài, do vậy nên ta thu được nhận xét 3.

Từ các nhận xét trên ta hoàn tất chứng minh bài toán. □