Вопрос 1. Дайте определение интегрируемой функции двух переменных. Сформулируйте свойства интегрируемых функций.

Функцией двух независимых переменных (x, y), определенной на множестве $D \in R^2$, называется соответствие f, которое каждому элементу $(x, y) \in D$ ставит в соответствие единственный элемент $F \in R$, обозначаемый $f(x, y)$ (рис. 1, 2).

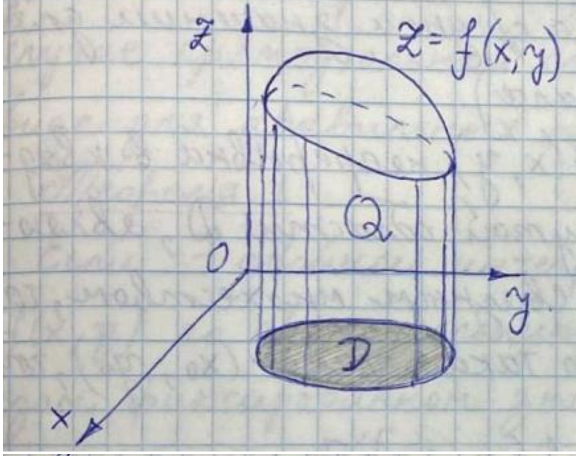
1. Если функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$ интегрируемы в D, то их произведение $f(x,y)\,g(x,y)$ также интегрируемо в D.

2. Если функция $g(x,y)$ интегрируема в D и удовлетворяет в D неравенству $|g(x,y)| \geqslant c > 0$, то функция $1/g(x,y)$ также интегрируема в D.

3. Если функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$ интегрируемы в D и $|g(x,y)| \geqslant c > 0$ в D, то функция $\dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}$ интегрируема в D.

Вопрос 2. Сформулируйте задачи о вычислении объема тела и массы пластины, приводящие к понятию двойного интеграла.

Необходимо найти объём V рассматриваемого тела Q.



Кратко:
D - ограничена и замкнута на xOy.
$Z=f(x,y)$
$f(x,y) \geq 0$ при $(x,y) \in D$

Пусть на ограниченной замкнутой области D в координатной плоскости xOy распределена масса с поверхностной плотностью $\rho_S(x,y)$. Так можно представить, например, пластину из однородного материала с постоянной плотностью ρ_0, но имеющую переменную толщину $h(x,y)$. Тогда поверхностная плотность пластины будет $\rho_S(x,y)=\rho_0 h(x,y)$. Необходимо вычислить массу m пластины.

Вопрос 3. Сформулируйте теоремы о среднем значении для двойного интеграла.

Если ф-ция $f(x, y)$ непрерывна в квадрируемой замкнутой области D, являющейся линейно связным множеством, то в D существует такая точка $(x_0; y_0)$, что

$$\int_D f(x, y)\, dS = f(x_0, y_0)\, S$$

Вопрос 4. Сформулируйте теорему о представлении двойного интеграла в виде повторного в случае прямоугольной области и в общем виде для правильных областей.

Если $\exists$ двойной интеграл от ф-ции $f(x, y)$ по прямоугольнику D^* и при каждом фиксированном значении $x \in [a, b]$ $\exists$ определённый интеграл:

$$I(x) = \int_c^d f(x, y)\, dy, \quad x \in [a, b],$$

то $\exists$ повторный интеграл:

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy = \int_a^b I(x)\, dx,$$

причём:

$$\iint_D f(x, y)\, dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy.$$

$*$ $D = \{ (x; y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a; b], y \in [c, d] \}$

площадь от D: $S = (b-a)(d-c)$

Если $\exists$ двойной интеграл от ф-ции $f(x,y)$ по области интегрирования D, являющейся правильной, и при каждом фиксированном $x \in [a, b]$ $\exists$ интеграл:

$$I(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\, dy$$

то $\exists$ повторный интеграл:

$$\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\, dy = \int_a^b I(x)\, dx,$$

причём:

$$\iint_D f(x, y)\, dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\, dy$$

Вопрос 5. Сформулируйте теорему о замене переменных в двойном интеграле.

Теорема 1.12. Пусть отображение

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v), \quad (u;v) \in G^*, \tag{1.51}$$

взаимно однозначно, непрерывно дифференцируемо и отображает область $G^* \subset \mathbb{R}^2$ на область $D^* \subset \mathbb{R}^2$, причем *якобиан* $J(u,v)$ этого отображения в G^* отличен от нуля. Тогда площадь S квадрируемой замкнутой области $D \subset D^*$ может быть выражена двойным интегралом по ее прообразу $G \subset G^*$:

$$S = \iint\limits_D dx\,dy = \iint\limits_G |J(u,v)|\,du\,dv. \tag{1.52}$$

Вопрос 6. Дайте определение тройного интеграла и интегрируемой функции трех переменных.

Функцию $f(x,y,z)$ называют ***интегрируемой функцией*** в кубируемой замкнутой области $Q \in \mathbb{R}^3$, если существует конечный предел I ее интегральных сумм $S(T)$, т.е. если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любого разбиения $T = \{Q_1, \ldots, Q_N\}$ замкнутой области Q с диаметром $d(T) < \delta(\varepsilon)$ и любого выбора точек $(\xi_i;\eta_i;\zeta_i) \in Q_i$ для соответствующей интегральной суммы $S(T)$ выполняется неравенство $|S(T) - I| < \varepsilon$. При этом конечный предел I интегральных сумм называют ***тройным интегралом*** от функции $f(x,y,z)$ по замкнутой области Q и обозначают

$$I = \iiint\limits_Q f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_Q f(x,y,z)\,dV.$$

Вопрос 7. Перечислите свойства тройного интеграла.

1°. Если $Q \subset \mathbb{R}^3$ — кубируемая замкнутая область объема V, то

$$\int_Q dV = V. \quad (2.5)$$

2°. Если функции $f(x,y,z)$ и $g(x,y,z)$ интегрируемы в Q, то их линейная комбинация $\alpha f(x,y,z) + \beta g(x,y,z)$ с произвольными константами α и β также интегрируема в Q, причем

$$\int_Q \big(\alpha f(x,y,z) + \beta g(x,y,z)\big)\, dV = \\ = \alpha \int_Q f(x,y,z)\, dV + \beta \int_Q g(x,y,z)\, dV. \quad (2.6)$$

3°. Если функция $f(x,y,z)$ интегрируема в Q, то для любой кубируемой замкнутой подобласти $Q' \subset Q$ функция $f(x,y,z)$ интегрируема как в Q', так и в $\overline{Q \setminus Q'}$.

4°. Если функция $f(x,y,z)$ интегрируема в замкнутых областях Q_1 и Q_2, то она интегрируема и в их объединении $Q = Q_1 \cup Q_2$, причем если замкнутые области Q_1 и Q_2 не имеют общих внутренних точек, то

$$\int_Q f(x,y,z)\, dV = \int_{Q_1} f(x,y,z)\, dV + \int_{Q_2} f(x,y,z)\, dV. \quad (2.7)$$

5°. Если функция $f(x,y,z)$ интегрируема в Q и $f(x,y,z) \geqslant 0$, $(x;y;z) \in Q$, то

$$\int_Q f(x,y,z)\, dV \geqslant 0. \quad (2.8)$$

6°. Если функции $f(x,y,z)$ и $g(x,y,z)$ интегрируемы в Q и $f(x,y,z) \leqslant g(x,y,z)$, $(x;y;z) \in Q$, то

$$\int_Q f(x,y,z)\, dV \leqslant \int_Q g(x,y,z)\, dV. \quad (2.9)$$

7°. Если функция $f(x,y,z)$ интегрируема в Q, то функция $|f(x,y,z)|$ также интегрируема в Q, причем

$$\left| \int_Q f(x,y,z)\, dV \right| \leqslant \int_Q |f(x,y,z)|\, dV. \quad (2.10)$$

8°. Если функции $f(x,y,z)$ и $g(x,y,z)$ интегрируемы в Q и удовлетворяют в Q неравенствам $m \leqslant f(x,y,z) \leqslant M$ и $g(x,y,z) \geqslant$ $\geqslant 0$, то

$$m \int_Q g(x,y,z)\, dV \leqslant \int_Q f(x,y,z)\, g(x,y,z)\, dV \leqslant \\ \leqslant M \int_Q g(x,y,z)\, dV. \quad (2.11)$$

Вопрос 8. Сформулируйте теорему о представлении тройного интеграла в виде повторного.

Теорема 2.5. Если существует тройной интеграл от функции $f(x,y,z)$ по замкнутой области

$$Q = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \colon (x;y) \in D,\ \varphi(x,y) \leqslant z \leqslant \psi(x,y)\},$$

а для каждой фиксированной точки $(x;y) \in D$ существует определенный интеграл

$$\int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\,dz, \qquad (2.16)$$

то существует повторный интеграл

$$\iint\limits_{D} dx\,dy \int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\,dz, \qquad (2.17)$$

причем имеет место равенство

$$\iiint\limits_{Q} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{D} dx\,dy \int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\,dz. \quad \# \qquad (2.18)$$

Вопрос 9. Сформулируйте теорему о замене переменных в тройном интеграле.

$$x = x(\xi,\eta,\zeta), \quad y = y(\xi,\eta,\zeta), \quad z = z(\xi,\eta,\zeta) \qquad (2.20)$$

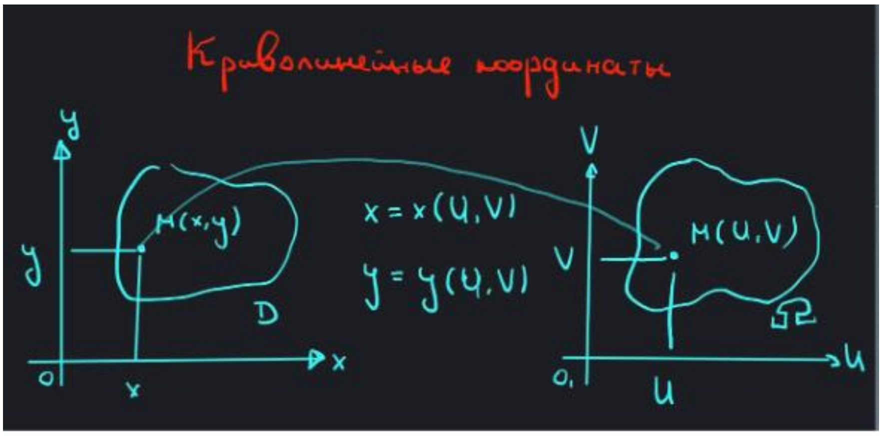
Теорема 2.6. Пусть задано взаимно однозначное непрерывно дифференцируемое отображение (2.20) области $\Omega^* \subset \mathbb{R}^3$ на область $Q^* \subset \mathbb{R}^3$, якобиан $J(\xi,\eta,\zeta)$ которого в Ω^* отличен от нуля. Если функция $f(x,y,z)$ непрерывна в кубируемой замкнутой области $Q \subset Q^*$ или же ограничена в Q и непрерывна в Q всюду, кроме некоторого множества объема нуль, то

$$\iiint\limits_{Q} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint\limits_{\Omega} f\big(x(\xi,\eta,\zeta), y(\xi,\eta,\zeta), z(\xi,\eta,\zeta)\big)\,\big|J(\xi,\eta,\zeta)\big|\,d\xi\,d\eta\,d\zeta, \qquad (2.25)$$

где Ω — прообраз замкнутой области Q при отображении (2.20).

Вопрос 10. Опишите криволинейные координаты в плоской области.



$$\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\Omega_1} f(r\cos\varphi; r\sin\varphi)\,r\,d\varphi\,dr$$

Вопрос 11. Сформулируйте теорему о площади квадрируемой области в криволинейных координатах.

$x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $(u;v) \in G^*$ взаимно однозначно, непрерывно дифференцируемо и отображает область $G^* \subset \mathbb{R}^2$ на область $D^* \subset \mathbb{R}^2$, причём якобиан $J(u,v)$ этого отображения в G^* отличен от нуля. Тогда площадь S квадрируемой замкнутой области $D \subset D^*$ может быть выражена двойным интегралом по её прообразу $G \subset G^*$:

$$S = \iint\limits_D dx\,dy = \iint\limits_G |J(u,v)|\,du\,dv.$$

Вопрос 12. Запишите необходимые условия сходимости числового ряда. Объясните, как с их помощью исследуют ряды на сходимость.

T1 (I необходимое усл-ие сх-ти ряда)

Если ряд сходится, то $\exists \lim a_n = 0$

не работает

$\sum a_n$ – n-ый член ряда

T1' Если $\lim a_n \neq 0$ или $\nexists$, то $\sum a_n$ расход-ся

T2 (II необходимое усл. сходимости числ. ряда)

Если $\sum a_n$ сходится, то $\{S_n\}$ – огр.

Вопрос 13. Запишите необходимые условия сходимости числового ряда. Сформулируйте признак Даламбера для числовых рядов.

T1 (I необходимое усл-ие сх-ти ряда)

Если ряд сходится, то $\exists \lim a_n = 0$

не работает

$\sum a_n$ – n-ый член ряда

T1' Если $\lim a_n \neq 0$ или $\nexists$, то $\sum a_n$ расход-ся

T2 (II необходимое усл. сходимости числ. ряда)

Если $\sum a_n$ сходится, то $\{S_n\}$ – огр.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \quad q \geq 0$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

а) если $q<1$, то ряд сходится

б) если $q>1$ или $q=+\infty$, то ряд расходится.

Вопрос 14. Какими свойствами обладают сходящиеся числовые ряды? Что будет со свойством ряда быть сходящимся, если из него удалить конечное число слагаемых?

Опр: Суммой рядов $\sum a_n, \sum b_n$ назыв ряд $\sum c_n$: $\forall n \Rightarrow c_n = a_n + b_n$

Опр: $\lambda \cdot \sum a_n$ – это ряд $\sum d_n : d_n = \lambda \cdot a_n$

Теор: если $\sum a_n, \sum b_n$ сходятся, то $\sum (a_n + b_n)$ тоже сходящийся ряд, и для $\forall \lambda \neq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \sum (\lambda a_n)$ – сходится.

Теорема: если из ряда $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n$ удалить конечн. число слагаемых, то нов. ряд будет вести себя как исходный

Вопрос 15. Как изменится свойство ряда быть сходящимся, если все его слагаемые умножить на одно и то же число, отличное от нуля? Сформулируйте теорему об оценке двойного интеграла по модулю.

Утверждение 2. Умножение каждого члена ряда на const $k \neq 0$ не влияет на сходимость ряда. В случае сходимости сумма нового ряда равна kS, где S — сумма исходного ряда.

6°. Если функция $f(x,y)$ интегрируема в D, то функция $|f(x,y)|$ также интегрируема в D, причем

$$\left| \int\limits_D f(x,y)\,dS \right| \leqslant \int\limits_D |f(x,y)|\,dS. \qquad (1.24)$$

Вопрос 16. Сформулируйте признак сравнения в предельной форме и в виде неравенства.

$\sum a_n, \sum b_n$, $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$. При $n > N \Rightarrow a_n \leq b_n$

Тогда: Если $\sum b_n$ сх, то $\sum a_n$ сх

Если $\sum a_n$ расх, то $\sum b_n$ расх.

Т (признак сравнения в предельной форме)

$a_n \geq 0, b_n \geq 0$, при $n > N \Rightarrow b_n > 0$

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \neq 0, \neq \infty$, тогда $\sum a_n, \sum b_n$ ведут себя одинаково

Вопрос 17. Сформулируйте интегральный признак Коши сходимости числового ряда.

Пусть действительная неотрицательная и непрерывная в промежутке $[1, +\infty)$ ф-ция $f(x)$ не возрастает в этом промежутке. Тогда для сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ необходимо и достаточно, чтобы сходился несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx$.

Вопрос 18. Какими свойствами обладают частичные суммы сходящегося знакоположительного числового ряда? Какими свойствами обладают частичные суммы с четными номерами ряда Лейбница?

Коротко: Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сх-ся, то $\{S_n\}$ ограничена сверху.

Для ряда Лейбница: Последовательность частичных сумм с чётными номерами возрастает и ограничена сверху, т.к.:

$n = 2m$

$$S_{2m} = \underbrace{(a_1 - a_2)}_{>0} + \underbrace{(a_3 - a_4)}_{>0} + \ldots + \underbrace{(a_{2m-1} - a_{2m})}_{>0}$$

$S_{2m} < a_1$.

Вопрос 19. Какой ряд называют абсолютно сходящимся, условно сходящимся? Как связаны свойства ряда быть сходящимся, условно сходящимся, абсолютно сходящимся?

Определение. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *абсолютно сходящимся*, если ряд из его модулей $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится. Знакопеременный ряд называется *условно сходящимся*, если он сходится, а ряд из модулей расходится.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится

→ Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ также сх-ся, то исходный ряд сх-ся абсолютно

→ Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расх-ся, то исходный ряд сх-ся условно.

Вопрос 20. Какой ряд называют рядом Лейбница? Сформулируйте признак Лейбница сходимости знакопеременного ряда. Можно ли применять этот признак к знакопостоянным рядам?

Ряд Лейбница - это такой знакочередующийся ряд, сходимость которого следует из признака Лейбница

Теорема 8. Признак Лейбница. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ удовлетворяет трем условиям:

1) ряд знакочередующийся;
2) последовательность $|a_n|$ монотонно убывает;
3) $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$,

то ряд сходится.

Этот признак не применим к знакопостоянным рядам.

Вопрос 21. Каким свойством обладает n-й остаток ряда Лейбница? Сформулируйте теорему о свойствах остатков произвольного числового ряда. Как связаны сходимость ряда и сходимость его остатка?

Если знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$, $a_n>0$, $n\in\mathbb{N}$, удовлетворяет условиям признака Лейбница, то модуль суммы всякого его остатка $R_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$ оценивается сверху числом a_{n+1}:

$$|R_n|\leq a_{n+1},\ n\in\mathbb{N}$$

1° Если $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ сходится, то сходится и любой из его остатков. Обратно, если сходится хотя бы 1 из остатков ряда, то сходится и сам ряд. При этом для всех $n\in\mathbb{N}$ справедливо равенство:

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k \quad \text{или} \quad S=S_n+R_n.$$

2° Если $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ сходится, то последовательность $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ сумм его n-х остатков стремится к 0 при $n\to\infty$: $\lim_{n\to\infty}R_n=0$.

Вопрос 22. Верно ли, что для любого расходящегося числового ряда $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)>1$?

Утверждение верно

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l>1$.

при $n>N(\varepsilon)\Rightarrow\frac{a_{n+1}}{a_n}>(l-\varepsilon)>1$

$\Rightarrow a_{n+1}>a_n(l-\varepsilon)\Rightarrow$ сравнивая $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ с расходящейся геометрической прогрессией со знаменателем ~~со степенью~~ $q=(l-\varepsilon)>1$, делаем вывод: $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ расходится.

Вопрос 23. Верно ли, что для любого сходящегося числового ряда $\lim_{n\to\infty}(a_n)^{\frac{1}{n}}<1$?

Утверждение верно

Пусть $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l<1$

$\sqrt[n]{a_n}<l+\varepsilon<1$ при $n>N(\varepsilon)$

$a_n<(l+\varepsilon)^n$

Из сходимости $\sum_{n=1}^{\infty}(l+\varepsilon)^n$ следует сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

Вопрос 1. Докажите свойство линейности двойного интеграла.

$$\int_D (\alpha f(x,y) + \beta g(x,y))\,dS = \alpha \int_D f(x,y)\,dS + \beta \int_D g(x,y)\,dS$$

Док-во:

1) $\int_D c\cdot f(x,y)\,dS = \lim\limits_{\lambda\to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} c\cdot f(x,y)_k \Delta S_k = c \lim\limits_{\lambda\to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} f(x,y)_k \Delta S_k =$

$= c\int_D f(x,y)\,dS$

2) $\int_D (f(x,y) + g(x,y))\,dS = \lim\limits_{\lambda\to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} (f(x,y)_k + g(x,y)_k) \Delta S_k =$

$= \lim\limits_{\lambda\to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} f(x,y)_k \Delta S_k + \lim\limits_{\lambda\to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} g(x,y)_k \Delta S_k = \int_D f(x,y)\,dS + \int g(x,y)\,dS$

$\Rightarrow \int_D (\alpha f(x,y) + \beta g(x,y))\,dS = \alpha \int_D f(x,y)\,dS + \beta \int_D g(x,y)\,dS$, ч.т.д.

Вопрос 2. Докажите ограниченность интегрируемой в плоской области функции.

Если $f(x,y)$ интегрируема в замкнутой области D, то она ограничена в D.

Док-во:

Пусть ф-ия не ограничена. Тогда для $\forall$ разбиения $D = D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_n$ $\exists\, D_i$, в которой ф-ия не ограничена. Тогда выбирая точку $(x_i; y_i) \in D_i$ можно увеличить значение $f(x_i; y_i)$ до $\infty \Rightarrow \sum f(x_i; y_i) S(D_i) \to \infty \Rightarrow$
$\Rightarrow$ предел не существует и ф-ия не интегрируема.

Противоречие $\Rightarrow$ ч.т.д.

Вопрос 3. Докажите, что функция Дирихле не является интегрируемой в единичном квадрате.

Рассмотрим $\chi(x,y)$

$D = \{(x,y) \in R^2 : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$

$\chi(x,y) = 1$, если $(x,y) \in Q$

$\chi(x,y) = 0$, если $(x,y) \in Q$

Для $\forall\, T = \{D_1, \ldots, D_n\}$ квадрата D выбирать в частичных областях D_i точки $(\xi_i, \eta_i) \in Q \Rightarrow S(T) = \sum\limits_{i=1}^{n} \chi(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i = \sum\limits_{i=1}^{n} 1 \cdot \Delta S_i = S_D$

Тогда и при $d(T) \to 0$ предельное значение интегральных сумм равно S_D

Если $(\xi_i, \eta_i) \notin Q \Rightarrow S(T) = 0 \Rightarrow$ предельное значение интегральных сумм $= 0$

$\Rightarrow$ множество всех интегральных сумм не имеет предела при $d(T) \to 0$ и $\chi(x,y)$ не является интегрируемой в квадрате D, ч.т.д.

Вопрос 4. Докажите, что если область D имеет площадь S, то существует двойной интеграл $\iint_D \, dxdy = S$

Если область D имеет площадь S, то существует двойной интеграл

Док-во:

$f(x,y)=1 \Rightarrow$ для $\forall\, T=\{D_1,\dots,D_n\}$ с ΔS_i для D_i и при произвольном выборе точек $(\xi_i;\eta_i)\in D_i$ имеем:

$\iint_D dxdy = \lim_{d(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n} 1\cdot\Delta S_i = S$, где $d(T)$ — диаметр разбиения T, ч.т.д.

Вопрос 5. Докажите теорему об интегрировании неравенств для двойного интеграла.

Если $f(x,y)$ и $g(x,y)$ инт-мы в D и $f(x,y)\geq g(x,y)$, $(x,y)\in D$, то

$\iint_D f(x,y)\,dS \geq \iint_D g(x,y)\,dS$

Док-во:

$f(x,y)-g(x,y)$ — инт-мая ф-ия

$f(x,y)-g(x,y)\geq 0 \Rightarrow \iint_D \big(f(x,y)-g(x,y)\big)\,dS \geq 0$

$\iint_D f(x,y)\,dS - \iint_D g(x,y)\,dS \geq 0 \Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dS \geq \iint_D g(x,y)\,dS$, ч.т.д.

Вопрос 6. Докажите первую теорему о среднем значении для двойного интеграла.

Если $f(x,y)$ непрерывна в D, причём D — линейно связное мн-во, то в D $\exists$ (x_0,y_0), где $\iint_D f(x,y)\,dS = f(x_0,y_0)S$

Док-во:

$f(x,y)$ непрерывна $\Rightarrow$ инт-ма

$m \leq f(x,y) \leq M$

$m\iint_D 1\cdot dxdy \leq \iint_D f(x,y)\,dxdy \leq M\iint_D 1\cdot dxdy$

$m \leq \frac{1}{S}\iint_D f(x,y)\,dxdy \leq M \Rightarrow m \leq \mu \leq M$

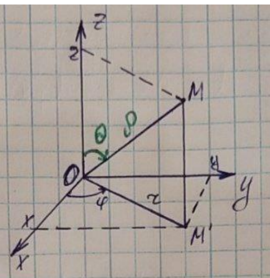
$f(x,y)$ непрерывна $\Rightarrow \exists\, f(x_0,y_0)=\mu$, $(x_0,y_0)\in D$

$f(x_0,y_0) = \frac{1}{S}\iint_D f(x,y)\,dxdy$

$\iint_D f(x,y)\,dxdy = f(x_0,y_0)S$, ч.т.д.

Вопрос 7. Выведите связь цилиндрических и сферических координат с прямоугольными.

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$



$$J(r,\varphi,z) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r$$

$$\iiint\limits_Q f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_\Omega f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\, r\,dr\,d\varphi\,dz = \iiint\limits_\Omega \tilde f(r,\varphi,z)\, r\,dr\,d\varphi\,dz$$

$$\begin{cases} x = \rho\sin\theta\cos\varphi \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = \rho\cos\theta \end{cases}$$

$$J(\rho,\varphi,\theta) = \left\| \begin{matrix} \sin\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\varphi & 0 & -\rho\sin\theta \end{matrix} \right\| =$$

$$= \cos\theta \begin{vmatrix} -\rho\sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi \\ \rho\sin\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi \end{vmatrix} - \rho\sin\theta \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= \left| -\rho^2\sin\theta\cos^2\theta - \rho^2\sin^3\theta \right| = \left| -\rho^2\sin\theta \right| = \rho^2\sin\theta$$

$$\iiint\limits_Q f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_\Omega f(\rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\theta)\,\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\varphi\,d\theta =$$

$$= \iiint\limits_\Omega \tilde f(\rho,\varphi,\theta)\,\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$$

Вопрос 8. Докажите необходимые условия сходимости числового ряда.

1) Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Док-во:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – сх. $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n - \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$, ч.т.д.

2) Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \neq \infty$

Док-во:

$S_n - S_{n-1} = (a_1 + \ldots + a_n) - (a_1 + \ldots + a_{n-1}) = a_n$

$\lim\limits_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, ч.т.д.

Вопрос 9. Докажите критерий Коши сходимости числового ряда.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ - сходится} \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N(\varepsilon) \in N) : (\forall n \geq N \ \&\ \forall m \in N : \left|\sum_{k=n+1}^{m+n} a_k\right| < \varepsilon)$$

Док-во:

$$\sum_{k=n+1}^{m+n} a_k = S_{n+m} - S_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ сходится} \Leftrightarrow \exists \lim_{n\to\infty} S_n = S \Rightarrow (\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N(\varepsilon) \in N) : (\forall n \geq N \ \&\ m \in N : |S_{n+m} - S_n| < \varepsilon),$$

ч.т.д.

Вопрос 10. Докажите признак сравнения в виде неравенства.

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ - знакополож.; $\exists N : \forall n \geq N : a_n \leq b_n$

Тогда, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ - сх. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сх.

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ - расх. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ - расх.

Док-во:

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сх. $\Rightarrow$ ее частичные суммы B_m ограничены сверху $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists M : \forall m \geq 1 : B_m \leq M$

$a_n \leq b_n$ для $\forall n \geq 1 \Rightarrow A_m \leq B_m$ и $A_m \leq M \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сх, ч.т.д.

Вопрос 11. Докажите признак сравнения в предельной форме.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ - знакополож., $b_n > 0$ $\forall n \geq 1$ $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ имеют одинаковый порядок сходимости.

Док-во:

$\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k \Rightarrow \exists N : \forall n \geq N : \quad k - \varepsilon \leq \frac{a_n}{b_n} \leq k + \varepsilon$

$$(k-\varepsilon) b_n \leq a_n \leq (k+\varepsilon) b_n$$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сх. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (k-\varepsilon) b_n$ сх $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сх

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расх $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (k-\varepsilon) b_n$ расх. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сх, ч.т.д.

Вопрос 12. Докажите признак Даламбера для числовых рядов.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - знакополож.: $a_n > 0 \ \forall n \geq 1$ $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$

Тогда: $q < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сх.

$q > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - расх.

Док-во:

$q < 1$

$q < \tau < 1$

Тогда, $\exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N: \frac{a_{n+1}}{a_n} < \tau$

$a_{n+1} < a_n \tau$

$a_n < a_1 \tau^{n-1}$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 \tau^{n-1}$ сходится, т.к. $\tau < 1$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сх.

$q > 1$

$1 < \tau < q$

Тогда, $\exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N: \frac{a_{n+1}}{a_n} > \tau$

$a_{n+1} > a_n \cdot \tau > a_n \Rightarrow$

$\Rightarrow a_n$ возрастает $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расх.

Вопрос 13. Докажите радикальный признак Коши для числовых рядов.

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - знакополож. $\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$

Тогда, $q < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сх.

$q > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - расх.

Док-во:

$q < 1$

$q < \tau < 1$

Тогда, $\exists N \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}, \sqrt[n]{a_n} < \tau$

$\sum_{n=1}^{\infty} \tau^n$ - сх., т.к. $\tau < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сх.

$q > 1$

$1 < \tau < q$

Тогда, $\exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N: \sqrt[n]{a_n} > \tau$

$a_n > \tau^n > 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - расх

ч.т.д.

Вопрос 14. Докажите интегральный признак Коши для числовых рядов.

Пусть f - непрерывная, неотрицательная, невозрастающая фн на $[1; +\infty)$

Тогда, $\int_1^{\infty} f(x)dx$ - сх.

Док-во:

$n \leq x \leq n+1$

$a_{n+1} \leq f(x) \leq a_n$

$a_{n+1} \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq a_n$

$S_{n+1} - a_1 \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq S_n$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сх. $\Rightarrow S_n$ - ограничена $\Rightarrow \int_1^t f(x)dx \leq \int_n^{n+1} f(x)dx$, где $n+1 > t$

$\Rightarrow \int_1^{\infty} f(x)dx$ - сх., ч.т.д.

Вопрос 15. Докажите, что если числовой ряд абсолютно сходится, то он сходится.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - абсолютно сх. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сх

Док-во:

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n, \text{ если } a_n \ge 0 \\ 0, \text{ если } a_n < 0 \end{cases} \qquad a_n^- = \begin{cases} 0, \text{ если } a_n \ge 0 \\ -a_n, \text{ если } a_n < 0 \end{cases}$$

$a_n = a_n^+ - a_n^-$

$|a_n| = a_n^+ + a_n^-$

$a_n^+ \le |a_n|$ и $a_n^- \le |a_n|$

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ - абсолютно сх. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ - сх. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ - сх. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сх., ч.т.д.

Вопрос 16. Докажите свойства четных частичных сумм ряда Лейбница. Выведите из этих свойств сходимость такого ряда.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$, все $a_n \ge 0$

2) $a_1 \ge a_2 \ge a_3 \dots$

3) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ - сх.

Док-во:

$S_{2n+2} - S_{2n} = a_{2n+1} - a_{2n+2} \ge 0 \Rightarrow S_{2n+2} \ge S_{2n}$

$S_{2n+2} = a_1 - a_2 + \dots + a_{2n+1} - a_{2n+2} \Rightarrow S_{2n+2}$ - неубыв.

$S_{2n} = a_1 - a_2 + \dots + a_{2n-1} - a_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \dots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) -$
$- a_{2n} \le a_1$

$\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} S_{2n} = S$

$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} (S_{2n} + a_{2n+1}) = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = S + 0 = S \Rightarrow$

$\Rightarrow S_n \to S \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сх., ч.т.д.

Вопрос 17. Выведите оценку для n-го остатка ряда Лейбница.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сх

$r_n = S - S_n$

$S - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$

$S = \lim_{n\to\infty} S_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} (S - S_n) = 0$, ч.т.д.