Вопрос 1. Пространство элементарных исходов. Сигма-алгебра событий. Классическое определение вероятности.

Пространство элементарных исходов (Ω) – множество всех элементарных исходов. Элементарный исход (ω) – простейший исход опыта.

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots\}$$

Случайное событие – любой набор элементарных исходов, то есть произвольное подмножество пространства Ω.

Сигма-алгеброй (σ-алгеброй) событий B назовем непустую систему подмножеств пространства элементарных исходов Ω, удовлетворяющую следующим двум условиям.

1. Если подмножество A принадлежит B, то дополнение A принадлежит B.
2. Если подмножества A1, A2, ..., An, ... принадлежат B, то их объединение A1 ∪A2 ∪...∪An ∪... и их пересечение A1 A2 ... An ... принадлежит B. Поскольку Ω = A∪A и ∅ = Ω, то достоверное событие Ω и невозможное событие ∅ принадлежат B.

В случае конечного или счетного пространства элементарных исходов Ω в качестве σ-алгебры событий обычно рассматривают множество всех подмножеств Ω.

Классической вероятностной схемой (или моделью) назовем всякий случайный эксперимент, удовлетворяющий следующим условиям:

1) пространство элементарных событий (множество исходов случайного эксперимента) Ω представляет собой конечное множество $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$;

2) случайные события — всевозможные подмножества множества Ω.

3) все элементарные события равновероятны, т.е. $P(\omega_i) = \frac{1}{n}$, $i = 1, \dots, n$;

4) вероятность любого события $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_k}\}$, состоящего из произвольных k элементарных событий, по определению равна $\frac{k}{n}$.

Вопрос 2. Выборки с повторениями и без повторений. Мультиномиальные коэффициенты.

Вопрос 1 ***Размещениями без повторений*** *называются упорядоченные выборки, содержащие **k** различных элементов из данных **n** элементов.*

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Размещениями с повторениями называются упорядоченные выборки, содержащие k элементов из данных n элементов, причем каждый элемент исходной совокупности может участвовать в размещении несколько раз.

$$\overline{A}_n^k = n^k$$

Перестановками без повторений называются всевозможные упорядоченные выборки, составленные из всех данных n элементов.

$$P_n = n! = n * (n - 1) * (n - 2) *...* 2 * 1$$

Пусть в исходную совокупность входит n_1 элементов первого типа, n_2 - второго типа, ..., n_k – k-го типа, при этом $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$. Всевозможные упорядоченные выборки, составленные из всех данных n элементов, называются перестановками с повторениями.

$$P_{n_1 n_2 \dots n_k} = \frac{n!}{n_1! * n_2! * \dots * n_k!}$$

Сочетаниями без повторений *называются неупорядоченные выборки, содержащие **k** различных элементов из данных **n** элементов.*

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Сочетаниями с повторениями называются неупорядоченные выборки, содержащие k элементов из данных n элементов, причем каждый элемент исходной совокупности может участвовать в сочетании несколько раз.

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^{n-1} = \frac{(n+k-1)!}{k! * (n-1)!}$$

Определение 3. *Мультиномиальный коэффициент $\binom{n}{n_1,\dots,n_k}$, где $n = n_1 + \dots + n_k$ — это число разбиений множества $\{1, \dots, n\}$ на k подмножеств размера $n_1, \dots, n_k$.*

В частности, $\binom{n}{k} = \binom{n}{k,\, n-k}$.

$$\binom{n}{n_1, \dots, n_k} = \binom{n_1 + \dots + n_k}{n_1}\binom{n_2 + \dots + n_k}{n_2} \cdot \ldots \cdot \binom{n_{k-1} + n_k}{n_k}\binom{n_k}{n_k} = \frac{n!}{n_1! \dots n_k!}$$

Вопрос 3. Геометрическое определение вероятности. Статистическое определение вероятности. Аксиоматическое определение вероятности. Аксиома непрерывности.

Вероятностью события A называют число P(A), равное отношению меры множества A к мере множества Ω:

$$P(A) = \mu(A) / \mu(\Omega),$$

где μ(A) — мера множества A.

Вероятностью события A называют (эмпирический) предел P(A), к которому стремится частота rA события A при неограниченном увеличении числа n опытов.

Аксиоматическая вероятность – числовая функция P, заданная на σ алгебре $\mathfrak{B}$, которая удовлетворяет аксиомам:

1) Аксиома неотрицательности: $P(A) \geq 0$
2) Аксиома нормированности: $P(\Omega) = 1$
3) Аксиома сложения: Для любых попарно несовместных событий:
$P(A1 + \cdots + An + \cdots) = P(A1) + \cdots + P(An) + \cdots$

(**аксиома непрерывности**): если последовательность событий A1, . . . , An, . . . такова, что An ⊂ An+1, n ∈ N, и A1 ∪ ... ∪ An ∪ ... = A, то limn→∞ P(An) = P(A).

Вопрос 4. Свойства вероятности, следующие из аксиом.

Теорема 2.1 *Вероятность удовлетворяет следующим свойствам.*

1. *Вероятность противоположного события* $\mathsf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathsf{P}(A)$.
2. *Вероятность невозможного события* $\mathsf{P}(\emptyset) = 0$.
3. *Если* $A \subset B$, *то* $\mathsf{P}(A) \leqslant \mathsf{P}(B)$ *("большему" события соответствует бóльшая вероятность).*
4. *Вероятность заключена между 0 и 1:* $0 \leqslant \mathsf{P}(A) \leqslant 1$.
5. *Вероятность объединения двух событий* $\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(AB)$.
6. *Вероятность объединения любого конечного числа событий*

$$\mathsf{P}(a_1 \cup \ldots \cup A_n) = \mathsf{P}(A_1) + \ldots + \mathsf{P}(A_n) - \mathsf{P}(A_1A_2) - \mathsf{P}(A_1A_3) - \ldots - \mathsf{P}(A_{n-1}A_n) + \\ + \mathsf{P}(A_1A_2A_3) + \ldots + (-1)^{n+1}\mathsf{P}(A_1A_2\ldots A_n).$$

Вопрос 5. Условная вероятность и теорема умножения вероятности.

Условная вероятность случайного события A при условии, что случайное событие B произошло определяется:

$$P(A|B) = P(AB)\ P(B)\ ,\ P(B) \neq 0$$

Теорема умножения: Если $A = A1A2 \ldots An$ и $P(A) > 0$, то:

$$P(A) = P(A1) * P(A2|A1) * \ldots * P(An|A1A2 \ldots An{-}1)$$

Вопрос 6. Зависимые и независимые события. Критерий независимости случайных событий. Являются ли зависимыми несовместные события?

Событие A называется **независимым** от события B, удовлетворяющего условию P(B) > 0, если выполняется равенство P(A|B) = P(A).

События A и B называются **независимыми**, если P(AB) = P(A)P(B).

В противном случае события A и B называются **зависимыми**.

Критерий независимости: Два события A и B, $P(A) > 0$, $P(B) > 0$, являются независимыми тогда и только тогда, когда: $P(AB) = P(A)P(B)$

Да, **несовместные события являются зависимыми**, так как если одно из них произойдет, то другое не может произойти.

Вопрос 7. Формула полной вероятности и формула Байеса.

- Если события $H_1, H_2, \ldots, H_n$
- образуют **полную группу** и $P(H_i) \neq 0$, то для любого события А справедлива формула

$$\boxed{P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + \ldots + P(H_n)P(A/H_n)}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)}$$

$$\mathsf{P}(H_k|A) = \frac{\mathsf{P}(A|H_k)\mathsf{P}(H_k)}{\mathsf{P}(A)},$$

Вопрос 8. Испытания по схеме Бернулли, теорема Пуассона.

Определение 2.4. ***Схемой Бернулли*** (или ***последовательностью независимых одинаковых испытаний***, или ***биномиальной схемой*** испытаний) называют последовательность испытаний, удовлетворяющую следующим условиям:

1) при каждом испытании различают лишь два исхода: появление некоторого события A, называемого "успехом", либо появление его дополнения $\overline{A}$, называемого "неудачей";

2) испытания являются *независимыми*, т.е. вероятность успеха в k-м испытании не зависит от исходов всех испытаний до k-го;

3) *вероятность* успеха во всех испытаниях постоянна и равна $\mathsf{P}(A) = p$.

Теорема 2.8 (Формула Бернулли). *Если Y_n — число успехов в n испытаниях Бернулли с вероятностью успеха p, то вероятность $\mathsf{P}\{Y_n = k\}$ получить ровно k успехов в n испытаниях равна*

$$\mathsf{P}\{Y_n = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n, \tag{2.7}$$

где $q = 1 - p$.

Распределение Пуассона – совокупность вероятностей:

$$F(k, \lambda) = P\{X \le k, \lambda\} = \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}$$

Если $n \to \infty, np \to \lambda$, то:

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \qquad k = \overline{0, n}$$

Вопрос 9. Функция распределения случайной величины. Ее определение и вид для дискретной случайной величины. Теорема о свойствах функции распределения случайной величины.

Функцией распределения вероятностей случайной величины X называют функцию $F(x)$, значение которой в точке x равно вероятности события $\{X < x\}$, т.е. события, состоящего из тех и только тех элементарных исходов ω, для которых $X(\omega) < x$:

$$F(x) = P(\{X < x\})$$

Теорема 3.1. *Функция распределения удовлетворяет следующим свойствам.*

1. $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$.

2. $F(x_1) \leqslant F(x_2)$ *при* $x_1 < x_2$, *т.е.* $F(x)$ *— неубывающая функция.*

3. $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0; \quad F(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1.$

4. $\mathsf{P}\{a \leqslant \xi < b\} = F(b) - F(a)$.

5. $F(x) = F(x-0)$, *где* $F(x-0) = \lim\limits_{y \to x-0} F(y)$, *т.е.* $F(x)$ *— непрерывная слева функция.*

Вопрос 10. Математическое ожидание и дисперсия для непрерывных и дискретных случайных величин.

Определение 6.1 ***Математическим ожиданием*** (***средним значением***) $\mathsf{M}X$ *дискретной случайной величины* X называют сумму произведений значений x_i *случайной величины* и *вероятностей* $p_i = \mathsf{P}\{X = x_i\}$, с которыми случайная величина принимает эти значения:

$$\mathsf{M}X = \sum_i x_i p_i.$$

Определение 6.2 ***Математическим ожиданием*** (***средним значением***) $\mathsf{M}X$ *непрерывной случайной величины* называют интеграл

$$\mathsf{M}X = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x)\, dx.$$

Определение 6.3 ***Дисперсией*** $\mathsf{D}X$ случайной величины X называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины X от ее среднего значения, т. е. $\mathsf{D}X = \mathsf{M}(X - \mathsf{M}X)^2$.

Вопрос 11. Нормальное распределение (определение, числовые характеристики).

Нормальное распределение

$$\varphi_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\Phi_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(u-m)^2}{2\sigma^2}} du$$

Нормальное стандартное распределение

Случай нормального с $m = 0$ и $\sigma = 1$

Вопрос 12. Показательное распределение (определение, числовые характеристики).

Случайная величина распределена по ***экспоненциальному*** (***показательному***) ***закону***, если она имеет плотность распределения $p(x)$ и функцию распределения $F(x)$

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0, \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

Вопрос 13. Распределение Пуассона (определение, числовые характеристики).

Дискретная случайная величина X распределена по ***закону Пуассона***, если она принимает целые неотрицательные значения с вероятностями

$$\mathsf{P}\{X = i\} = P(i;\lambda) = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}, \qquad i = 0, 1, \ldots,$$

или, по-другому, с вероятностями, представленными рядом распределения в таблице 7.2, где $\lambda > 0$ — параметр распределения Пуассона.

X	0	1	2	…	n	…
P	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda}$	…	$\frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$	…

Таблица 7.2.

Проверка корректности определения распределения Пуассона дает:

$$\sum_{i=0}^{\infty} P(i;\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1.$$

Вопрос 14. Вероятность попадания нормальной случайной величины в интервал (a, b).

$$\mathsf{P}\{a < X < b\} = \int_a^b \varphi_{m,\sigma}(y)\, dy = \int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(y-m)^2/(2\sigma^2)}\, dy.$$

Проводя замену $x = (y - m)/\sigma$, этот интеграл можно записать в виде

$$\mathsf{P}\{a < X < b\} = \int_{(a-m)/\sigma}^{(b-m)/\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = \int_{(a-m)/\sigma}^{(b-m)/\sigma} \varphi(x)\, dx.$$

Таким образом, окончательно получаем

$$\mathsf{P}\{a < X < b\} = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right).$$

Вопрос 15. Теорема о свойствах функции распределения двумерного случайного вектора.

Свойства функции распределения двумерного $\overrightarrow{\text{СВ}}$

- $0 \le F(x_1, x_2) \le 1$
- $F(x_1, x_2)$ – неубывающая по каждому аргументу
- $F(-\infty, x_2) = F(x_1, -\infty) = 0$
- $F(+\infty, +\infty) = 1$
- $P\{a_1 \le X_1 \le b_1, a_2 \le X_2 \le b_2\} = F(b_1, b_2) + F(a_1, a_2) - F(b_1, a_2) -$
  $-F(a_1, b_2)$
- $F(x_1, x_2)$ – непрывная слева в любой точке $(x_1, x_2) \in R^2$
- $F_{X_1,X_2}(x, +\infty) = F_{X_1}(x),\ F_{X_1,X_2}(+\infty, x) = F_{X_2}(x),$

Вопрос 16. Дискретные многомерные случайные векторы. Закон распределения и его свойства.

Определение 5.3. ***Двумерный случайный вектор*** (ξ, η) называют ***дискретным***, если каждая из случайных величин ξ и η является *дискретной*.

ξ \ η	y_1	y_2	...	y_j	...	$\mathbf{P}_\xi$
x_1	p_{11}	p_{12}	...	p_{1j}	...	$p_{1\bullet}$
x_2	p_{21}	p_{22}	...	p_{2j}	...	$p_{2\bullet}$
...	...	...	...	...	...	...
x_i	p_{i1}	p_{i2}	...	p_{ij}	...	$p_{i\bullet}$
...	...	...	...	...	...	...
$\mathbf{P}_\eta$	$p_{\bullet 1}$	$p_{\bullet 2}$	...	$p_{\bullet j}$	...	

$$p_{ij} = \mathbf{P}\{\xi = x_i, \eta = y_j\},$$

$$p_{i\bullet} = \mathbf{P}\{\xi = x_i\} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}$$

$$p_{\bullet j} = \mathbf{P}\{\eta = y_j\} = \sum_{i=1}^{m} p_{ij}$$

Св-ва: 1) $0 \le F(x_1 x_2) \le 1$; 2) $F(+\infty; +\infty) = 1$; 3) $F(-\infty; x_2) = F(x_1; +\infty) = 0$; 4) $F(x_1 .. x_n)$ – неубывающая ; 5) $F(x_1; x_2)$ – непр. слева в $\forall$ точке.

Вопрос 17. Непрерывные случайные векторы. Свойства совместной плотности распределения.

• Непрерывн случай величиной $(X;Y)$ называю такую двумер. СВ $(X;Y)$, совмест. ф-ю распред которой можно представить: $F(X_1; X_2) = \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2} p(y_1, y_2)\,dy_1 dy_2$

• Св-ва: 1) $p(x_1; x_2) \geq 0$

2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} p(y_1, y_2)\,dy_1 dy_2 = 1$

3) $P\{X_1 = x_1; Y = x_2\} = 0$

4) $p_x(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{xy}(xy)\,dy$

5) $p_y y = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{xy}(xy)\,dx$

Вопрос 18. Независимые случайные величины, критерий независимости.

• СВ X и Y наз-ся независим, if справедливо: $F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) F_Y(y)$.

• Критерий: СВ X и Y независим тогда и только тогда, когда услов распред СВ X при условии $Y = y$ совпадает с безуслов. распред. СВ X

Вопрос 19. Вычисление функции распределения и плотности случайной величины Y (X) по известной плотности случайной величине X.

Задача 14. Дана функция плотности распределения случайной величины X

$$f(x)=\begin{cases}Cx^2, & x\in[0;2]\\ 0, & x\notin[0;2]\end{cases}$$

Найти C, $M(X)$, $P\left(0\le X<\frac{1}{2}\right)$

Решение: функция плотности распределения вероятности обладает свойством $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$. В данном случае:

$$C\int\limits_0^2 x^2dx=1\Rightarrow C=\frac{1}{\int\limits_0^2 x^2dx}$$

$$\int\limits_0^2 x^2dx=\frac{1}{3}(x^3)\Big|_0^2=\frac{1}{3}(8-0)=\frac{8}{3}$$

Таким образом:

$$C=\frac{1}{\frac{8}{3}}=\frac{3}{8}$$

Функция плотности распределения вероятностей:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{8}x^2, & x\in[0;2]\\ 0, & x\notin[0;2]\end{cases}$$

Вычислим математическое ожидание:

$$M(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int\limits_0^2 x\cdot\frac{3}{8}x^2dx=\frac{3}{8}\int\limits_0^2 x^3dx=\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{4}(x^4)\Big|_0^2=$$

$$=\frac{3}{32}(16-0)=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$$

Найдём:

$$P\left(0\le X<\frac{1}{2}\right)=\int\limits_0^{1/2} f(x)dx=\frac{3}{8}\int\limits_0^{1/2} x^2dx=\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{3}\left(x^3\right)\Big|_0^{1/2}=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{8}-0\right)=\frac{1}{64}$$ – вероятность того, что случайная величина X примет значение из данного интервала.

Ответ: $C=\frac{3}{8}$, $M(X)=1\frac{1}{2}=1{,}5$, $P\left(0\le X<\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{64}=0{,}015625$

Вопрос 20. Линейная функция от нормальной случайной величины.

Пусть ξ - нормально распределенная случайная величина с параметрами $M(\xi)=a$ и $\sigma(\xi)=\sigma$. Тогда, *если A и B - постоянные, то случайная величина* $\eta=A+B\xi$ *, линейно зависящая от* ξ *, также нормально распределена,* причем *

$$M(\eta)=A+Ba,\ \ D(\eta)=B^2\sigma^2$$

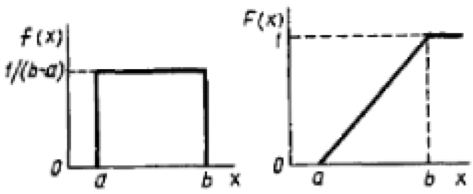
Вопрос 21. Генерация произвольного распределения из равномерного на отрезке [0, 1].

$$f(x)=\begin{cases}1/(b-a), & a\leqslant x\leqslant b,\\ 0, & x<a,\ x>b;\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ (x-a)/(b-a), & a\leqslant x\leqslant b,\\ 1, & x>b.\end{cases}$$

F(X)-ф-я распределения

f(X)-ф-я плотности



Вопрос 22. Формула свёртки.

• Выраж для пл-ти распр суммы X_1 и X_2: $p_Y(y) = \int p_{X_2}(y-x)\, p_{X_1}(x)\, dx$

Вопрос 23. Линейное преобразование n-мерного нормального случайного вектора.

23 Линейное преобр n-мерного в-ра:

$\bar{\psi} = A \cdot \bar{\xi} + \bar{b}$

ф-ла свертки

Вопрос 24. Определение и свойства математического ожидания.

• Мат. ожидание СВ принято называть алгебраическую сумму произведения значен случ. величины и её вер-ти: $M_x = \sum x_i p_i$

Св-ва: 1) $M(C) = C$; 2) $M(CX) = CM(X)$; 3) $M(X+Y) = M(X) + M(Y)$; 4) $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$

Вопрос 25. Определение и свойства дисперсии.

• Дисперсией принято называть квадрат отклонения мат. ожид. случ. вел-ны от ее ср. знач: $D_x = M(x - M_x)^2$

Св-ва: 1) $D(C) = 0$; 2) $D(CX) = C^2 \cdot D(X)$; 3) $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$; 4) $D(X \cdot Y) = D(X) \cdot D(Y)$; 5) $D(X) = M(X^2) - M^2(X)$

Вопрос 26. Примеры вычисления дисперсии и математического ожидания.

X: x_i: 10 5; p_i: 0,2 0,6

X^2: x_i: 6 7; p_i: 0,1 0,2

$D(X) = M(X^2) - M^2(X) \Rightarrow D(X) = (6 \cdot 0{,}1 + 7 \cdot 0{,}2) - (10 \cdot 0{,}2 + 5 \cdot 0{,}6)^2 = \ldots$

Вопрос 27. Моменты случайной величины. Ковариация и её свойства.

Определение 7.6. ***Моментом k-го порядка*** m_k (***k-м моментом***) случайной величины X называют математическое ожидание k-й степени случайной величины X:

$$m_k = \mathbf{M}X^k = \sum_i x_i^k p_i,$$

• Ковариацией двух случ. в-н X и Y называют произведение отклонения двух СВ от их M_x: $M\{[X-M_x]\cdot[Y-M_y]\}$. Св-ва: 1) $cov(XY) = cov(YX)$; 2) $cov(XX) = D_x$ 3) $cov(YY) = D_y$; 4) $cov(X,0) = 0$; 5) $cov(C_1X_1 + C_2X_2; Y) = C_1 cov(X_1; Y) + C_2 cov(X_2 Y)$.

Вопрос 28. Условное математическое ожидание и его свойства.

• M_x, найденное с помощью услов. з-на распределения: $M(Y/\xi = x)$

1. $\mathbf{M}(c|Y) \equiv c$.
2. $\mathbf{M}(aX+b|Y) = a\mathbf{M}(X|Y)+b$.
3. $\mathbf{M}(X_1+X_2|Y) = \mathbf{M}(X_1|Y)+\mathbf{M}(X_2|Y)$.
5. $\mathbf{M}X = \mathbf{M}(\mathbf{M}(X|Y))$.
6. Пусть $u(X)$ и $v(Y)$ — функции от случайных величин X и Y. Тогда $\mathbf{M}(u(X)v(Y)|Y) = v(Y)\mathbf{M}(u(X)|Y)$.

$\mathbf{M}(X_1X_2|Y) = \mathbf{M}(X_1|Y)\mathbf{M}(X_2|Y)$ $\mathbf{M}(X|Y) \equiv \mathbf{M}X$.

Вопрос 29. Локальная теорема Муавра-Лапласа.

З-ть того, что в независимых испытаниях событие A пр-дет m раз и n всех случаев выч-ся по ф-ле: $P(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right)$

Вопрос 30. Интегральная теорема Муавра-Лапласа.

S_n - суммарное число успехов в n испыт. по схеме Бернулли с в-тью успеха p и неудачи q

Тогда: $P\left\{\frac{S_n-np}{\sqrt{npq}}\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi(x)$

Вопрос 31. Неравенства Чебышева.

1) $P\{X \geq \varepsilon\} \leq \frac{M_x}{\varepsilon}$ – для $\forall$ СВ X, имеющ M_x и $\varepsilon \geq 0$ спр-во

2) $P\{|X - M_x| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$ – для $\forall$ СВ X, имеющей $D_x = \sigma^2$, при $\forall$ ε спр-во

Вопрос 32. Закон больших чисел в форме Чебышева.

если для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i\right| \geqslant \varepsilon\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Вопрос 33. Теорема Бернулли

Теорема 9.4. Пусть проводится n испытаний по *схеме Бернулли* и Y_n — общее число успехов в n испытаниях. Тогда наблюденная частота успехов

$$r_n = \frac{Y_n}{n}$$

сходится по вероятности к вероятности p успеха в одном испытании, т.е. для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}\{|r_n - p| \geqslant \varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Вопрос 34. Характеристические функции и их свойства.

Определение 9.6. ***Характеристической функцией*** $f(t) = f_X(t)$ *случайной величины* X называют *математическое ожидание* случайной величины e^{itX}, где i — мнимая единица, а t — произвольное (действительное) число.

1. $f(t)$ — непрерывная функция, причем абсолютное значение $f(t)$ ограничено единицей, т.е. $|f(t)| \leqslant 1$ и $f(0) = 1$.
2. Если $Y = aX + b$, то $f_Y(t) = f_X(at)e^{ibt}$.
3. Если X_1 и X_2 — *независимые случайные величины* и $Y = X_1 + X_2$, то $f_Y(t) = f_{X_1}(t) f_{X_2}(t)$.
4. Если случайная величина X имеет *момент n-го порядка* m_n, то характеристическая функция X дифференцируема n раз, причем для $k \leqslant n$

$$f^{(k)}(0) = i^k m_k.$$

Вопрос 35. Центральная предельная теорема.

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, $\mathbf{M}X_n = m$, $\mathbf{D}X_n = \sigma^2$. Тогда

$$\mathbf{P}\left\{\frac{S_n - nm}{\sqrt{n\sigma^2}} < x\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi(x),$$

где $\Phi(x)$ — *функция стандартного нормального распределения.*

Вопрос 36. Виды сходимости последовательностей случайных величин.

1. Сходимость по вер-сти (П-ств

случ в-н $X_1 \dots X_n$ сх-ся по в-сти

к a, if для $\forall\ \varepsilon > 0$ и $\delta > 0$: $\exists\ n(\varepsilon; \delta)$,

где выпол н-во $\lim P(|X_n - a| < \varepsilon) = 1$

2. Сходимость по распред. (П-тв

случ в-и $X_1, \dots, X_n$ сх-ся по распред:

$\lim F_n(x) = F(x)$.