# Математический анализ

2 семестр

## 1 лекция

### 1.1 Понятие первообразной и неопределенного интеграла

**Определение.**
$F(x)$ - называется первообразной функцией $f(x)$ на промежутке $a, b$, если $F'(x) = f(x)$
**Определение.**
Множество первообразных функции $f$ на $a, b$ называется неопределенным интегралом.
**Обозначение**: $\int f(x)dx$
**Теорема:**
$\sqsupset$ $F(x)$ - первообразная функции $f(x)$ на $a, b$. Для того, чтобы $G(x)$ была первообразной функции $f(x)$ на $a, b$ необходимо и достаточно, чтобы: $G(x) = F(x) + C,\ C \in \mathbb{R}$
**Доказательство:**
Необходимость:
$F(x)$ - первообразная, $G(x)$ - первообразная.
Рассмотрим $\varphi(x) = F(x) - G(x)$
$\varphi'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$
Значит $\varphi(x) = const$ на $a, b$ (следствие из теоремы Лагранжа)
Достаточность:
$F(x)$ - первообразная и $G(x) = F(x) + C,\ C \in \mathbb{R}$
$G'(x) = F'(x) + C' = f(x) \Rightarrow G$ - первообразная
**Следствие**
$\sqsupset$ $f$ - имеет первообразных на $a, b$, тогда $\int f(x)dx = \{F(x) + C,\ C \in \mathbb{R}\}$
Будем писать:
$\int f(x)dx = F(x) + C$, $f(x)$ - подынтегральная функция, $F(x)$ - подынтегральное выражение, $dx$ - показывает, по какой функции происходит интегрирование.
**Договоримся**:
1)$\int dF(x) = F(x) + C$
2)$(\int f(x)dx)' = f(x)$
**У любой ли функции существует первообразная?**

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$$

$$F'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим функцию:

$$\text{sign} x = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x = 0 \\ -1, x < 0 \end{cases}$$

По теореме Дарбу у данной функции нет производной на $a, b$.
**Теорема.**
Если $f \in C(a, b)$, то $\exists$ первообразная функция $f$ на $a, b$
Таблица неопределенных интегралов

| | |
|---|---|
| $\int 0dx$ | $C$ |
| $\int x^\alpha$ | $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ |
| $\int \frac{dx}{x}$ | $\ln\lvert x\rvert + C$ |
| $\int \sin xdx$ | $\cos x + C$ |
| $\int \cos xdx$ | $-\sin x + C$ |
| $\int \frac{dx}{\sin^2 x}$ | $-\cot x + C$ |
| $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ | $\tan x + C$ |
| $\int a^x dx$ | $\frac{a^x}{\ln a} + C$ |
| $\int \frac{dx}{a^2+x^2}$ | $\frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$ |
| $\int \frac{dx}{x^2-a^2}$ | $\frac{1}{2a} \ln\lvert\frac{x-a}{x+a}\rvert + C$ |
| $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ | $\arcsin \frac{x}{a} + C$ |
| $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$ | $\ln\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\rvert + C$ |

$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C\ (?) =$

$= \ln|x| = \begin{cases} C_1, x > 0 \\ C_2, x < 0 \end{cases}$

## 1.2 Свойства неопределенного интеграла. Формула замены переменной и интегрирование по частям.

**Теорема(о линейности)**
$\sqsupset f, g$ имеют первообразные на промежутке $a, b$. Тогда
1)$f + g$ - имеет первообразную на $a, b$, причем $\int (f+g)dx = \int f dx + \int g dx$
2)$\alpha f$ имеет первообразную на $a, b$, причем (если $\alpha \neq 0$),
$\int \alpha f dx = \alpha \int f dx$
3) Если $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$, то :
$\int (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int f dx + \beta \int g dx$
$F(x)$ - первообразная f(x)
$G(x)$ - первообразная g(x)
$f + g$ - первообразная $F(x) + G(x)$
1) $\{F(x) + G(x) + C,\ C \in \mathbb{R}\} = \{F(x) + C_1,\ C_1 \in \mathbb{R}\} \boxed{+} \{G(x) + C_2,\ C_2 \in \mathbb{R}\}$
{☹} $\boxed{+}$ {☺} = {☺+☹ }
$\sqsupset H \in$ ЛЧ $\iff H(x) = F(x) + G(x) + C = (F(x) + \frac{C}{2}) + (G(x) + \frac{C}{2}) \in$ ПЧ, ч.т.д.
$\sqsupset H(x) \in$ ПЧ. $H(x) = F(x) + C_1 + G(x) + C_2 = F(x) + G(X) + (C_1 + C_2) \in$ ЛЧ
**Теорема(о замене переменной)**
$\sqsupset f$ имеет первообразную на $a, b$, а функция $\varphi$ :<a,b>→<a,b>, $\varphi$ - диф. на <a,b>
Тогда $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt$
**Доказательство:**
$\int f(x)dx = F(x) + C = F(\varphi(t)) + C = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt$
**Теорема(интегрирование по частям.)**
$\sqsupset f, g$ - диф.мы на <a,b> и $\exists$ первообразная функции $f \cdot g'$ на <a,b>, тогда:
$\int f'g dx = fg - \int fg' dx$
**Доказательство.**
$(f \cdot g)' = f'g + fg' \Rightarrow f'g = (fg)' - fg'$
$\int f'g dx = fg - \int fg' dx$, ч.т.д.

## 1.3 Интегрирование рациональных дробей

**Определение.**
Рациональной дробью называется функция следующего вида
$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ - многочлены степени $n$ и $m$, соответственно.
**Определение.**
Рациональная дробь называется правильной, если $m > n$.
**Лемма.**
$\sqsupset \frac{P_n(x)}{Q_n(x)}$ - неправильная рациональная дробь. Тогда $\exists$ представление $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = P_{n-m}(x) + \frac{\overline{P(x)}}{Q_m(x)}$
**Теорема.**
$\sqsupset P_n(x)$ - многочлен с вещественными коэффициентами, приведенный.
Тогда:
$P_n(x) = (x - a_1)^{k_1} - \cdots \cdot (x - a_t)^{k_t} \cdot (x^2 + b_1 x + c_1)^{l_1} \cdot \cdots \cdot (x^2 + b_r x + c_r)^{l_r}$, где $\forall i \in \mathbb{N}, i \leqslant r :\ b_i^2 - 4c_i < 0$
$\sum\limits_{i=1}^{t} k_i + 2\sum\limits_{i=1}^{r} l_i = n$
**Лемма 1**
$\sqsupset \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ - правильная дробь, причем многочлен по $Q_m(x) = (x-a)^k \widetilde{Q}(x)$, где $\widetilde{Q}(a) \neq 0$ - многочлен
$\exists!$ разложение:
$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{\widetilde{P}(x)}{(x-a)^{k-1}\widetilde{Q}(x)}$
**Доказательство.**
Рассмотрим разность $\frac{P_n x}{Q_m(x)} - \frac{A}{(x-a)^k} = \frac{P_n(x)(x-a)^k - A \cdot Q_m(x)}{(x-a)^k \cdot Q_m(x)} = \frac{P_n(x) - A \cdot \widetilde{Q}(x)}{(x-a)^k \widetilde{Q}(x)}$
Подберем $A$ так, чтобы $a$ - было корнем числителя. Тогда:
$P_n(a) - A \cdot \widetilde{Q}(a) = 0 \Rightarrow A = \frac{P_n(a)}{\widetilde{Q}(a)}$
Тогда $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{\widetilde{P}(x)}{(x-a)^k \widetilde{Q}(x)}$
**Единственность.**
Пусть существует 2 разложения. Тогда одновременно выполняются следующие условия:
$\frac{A_1}{(x-a)^k} + \frac{\widetilde{P}_1(x)}{(x-a)^{k-1}\widetilde{Q}(x)} = \frac{A_2}{(x-a)^k} + \frac{\widetilde{P}_2(x)}{(x-a)^{k-1}\widetilde{Q}(x)}$
$A_1 \widetilde{Q}(x) + \widetilde{P}_1(x)(x-a) = A_2 \widetilde{Q}(x) + \widetilde{P}_2(x)(x-a)$
Подставим $x = a$

$A_1\widetilde{Q}(a) = A_2\widetilde{Q}(a) \Rightarrow A_1 = A_2$
Отсюда $\widetilde{P}_1(x) = \widetilde{P}_2(x)$
**Лемма 2**
$\exists\ \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ - правильная дробь, причем $Q_m(x) = (x^2+bx+c)^k \cdot \widetilde{Q}(x)$, где $\alpha \pm i\beta$ - корни $x^2+bx+c$, $b^2-4c<0, \widetilde{Q}(\alpha \pm i\beta) \neq 0$, тогда существует единственное разложение:
$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^k} + \frac{\widetilde{P}(x)}{(x^2+bx+c)^{k-1}\widetilde{Q}(x)}$
**Доказательство.**
Рассмотрим разность:
$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} - \frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^k} = \frac{P_n(x)-(Ax+B)\widetilde{Q}(x)}{(x^2+bx+c)^k\widetilde{Q}(x)}$
Хочу: $\alpha+i\beta$ - корень числителя
$P_n(\alpha+i\beta) = P_1 + iP_2$
$\widetilde{Q}(\alpha+i\beta) = \widetilde{Q}_1 + i\widetilde{Q}_2,\ \widetilde{Q}_1^2 + \widetilde{Q}_2^2 \neq 0$
$P_1 + iP_2 - (A(\alpha+i\beta)+B)(\widetilde{Q}_1 + i\widetilde{Q}_2) = 0$
$\begin{cases} P_1 + A\alpha\widetilde{Q}_1 - A\beta\widetilde{Q}_2 + B\widetilde{Q}_1 = 0 \\ P_2 - A\beta\widetilde{Q}_1 - A\alpha\widetilde{Q}_2 - B\widetilde{Q}_2 = 0 \end{cases}$
$\begin{cases} A(\beta\widetilde{Q}_2 - \alpha\widetilde{Q}_1) - B\widetilde{Q}_1 = -P_1 \\ A(-\beta\widetilde{Q}_1 - \alpha\widetilde{Q}_2) - B\widetilde{Q}_2 = -P_2 \end{cases}$
$\Delta = \begin{vmatrix} \beta\widetilde{Q}_2 - \alpha\widetilde{Q}_1 & -\widetilde{Q}_1 \\ -\beta\widetilde{Q}_1 - \alpha\widetilde{Q}_2 & -\widetilde{Q}_2 \end{vmatrix} = -\beta\widetilde{Q}_2^2 + \alpha\widetilde{Q}_1\widetilde{Q}_2 - \beta\widetilde{Q}_1^2 - \alpha\widetilde{Q}_1\widetilde{Q}_2 = -\beta(\widetilde{Q}_1^2 + \widetilde{Q}_2^2) \neq 0 \Rightarrow$ система имеет единственное решение
Если $\alpha+i\beta$ - корень, то и $P_n(x) - (Ax+B)\widetilde{Q}(x)$, то и $\alpha - i\beta$ - корень, значит, $P_n(x) - (Ax+B)\widetilde{Q}(x) = (x^2+bx+c)\widetilde{P}(x)$, дальше сокращаем. Единственность доказывается аналогично.
**Теорема(о разложении рациональной дроби)**
$\exists\ \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ - рациональная дробь, причем $Q_m(x) = (x-a_1)^{k_1}\cdot\dots\cdot(x-a_t)^{k_t}\cdot(x^2+b_1x+c_1)^{l_1}\cdot\dots\cdot(x^2+b_rx+c_r)^{l_r}$, $\forall i \in \mathbb{N}, i \leqslant r : b_i^2 < 4c_i < 0$
Тогда существует единственное представление вида:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = P_{n-m}(x) +$$
$$\frac{A_{11}}{(x-a_1)^{k_1}} + \frac{A_{12}}{(x-a_1)^{k_1-1}} + \dots + \frac{A_{1k_1}}{(x-a_1)}$$
$$\dots$$
$$\frac{A_{t1}}{(x-a_t)^{k_t}} + \frac{A_{t2}}{(x-t)^{k_t-1}} + \dots + \frac{A_{tk_t}}{(x-a_t)} +$$
$$\dots$$
$$\frac{B_{11}x+C_{11}}{(x^2+b_1x+c_1)^{l_1}} + \frac{B_{12}x+C_{12}}{(x^2+b_1x+c_1)^{l_1-1}} + \dots + \frac{B_{1l_1}x+C_{1l_1}}{(x^2+b_1x+c_1)}$$
$$\dots$$
$$\frac{B_{r1}x+C_{r1}}{(x^2+b_rx+C_r^{l_r}} + \dots + \frac{B_{rl_r}+C_{rl_r}}{(x^2+b_rx+c_r)}$$

**Доказательство**
По индукции:
$\sum\limits_{i=1}^{t}\sum\limits_{j=1}^{k_i} \frac{A_{ij}}{(x-a)^{k_i-j+1}} + \sum\limits_{i=1}^{r}\sum\limits_{j=0}^{l_i} \frac{B_{ij}x+C_{ij}}{(x^2+b_ix+c_i)^{b_i-j+1}}$
Типы дробей:
1 тип: $\frac{1}{(x-a)^k}$
2 тип: $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$
$\int \frac{Ax+B}{x^2++px+q}dx = \int \frac{Ax+B}{(x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}}dx = |(x+\frac{p}{2})^2 = t^2, a^2 = q - \frac{p^2}{4}| = \int \frac{At+B-\frac{Ap}{2}}{a^2+t^2}dx = A\int\frac{tdt}{t^2+a^2} + (B-\frac{Ap}{2})\int\frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{A}{2}\ln(t^2+a^2) + (B - \frac{Ap}{2}\cdot\frac{1}{a}\arctan\frac{t}{a})$
$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}dx = A\int\frac{tdt}{(t^2+a^2)^k} + (B-\frac{Ap}{2})\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^k} = \frac{A}{2}\frac{1}{(t^2+a^2)^{k-1}(1-k)} + (B-\frac{Ap}{2})I_k$
$I_k = \int\frac{dt}{(t^2+a^2)^k} = \frac{1}{a^2}\int\frac{a^2}{(t^2+a^2)^k} = \frac{1}{a^2}\int\frac{(a^2+t^2)-t^2}{(t^2+a^2)^k}d = \frac{1}{a^2}\int\frac{dt}{(t^2-a^2)^{k-1}} - \frac{1}{a^2}\int\frac{t^2dt}{(t^2-a^2)^k} = \begin{vmatrix} u = t \\ du = dt \\ dv = \frac{t}{(t^2+a^2)^k}dt \\ v = \frac{1}{2(t^2+a^2)^{k-1}(1-k)} \end{vmatrix} = \frac{1}{a^2}I_{k-1} - \frac{1}{a^2}(\frac{t}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}} - \frac{1}{2(1-k)}I_{k-1})$
Итого: $I_k = \frac{1}{a^2}\frac{1-2k}{2(1-k)}I_{k-1} - \frac{t}{2a^2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}},\ I_1 = \frac{1}{a}\arctan\frac{t}{a} + C$

# 2 лекция

## 2.1 Понятие определенного интеграла Римана

**Определение.**
Разбиением $\tau$ на отрезки $[a, b]$ назовем набор точке $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$
**Определение.**

Оснащенном разбиением $(\tau, t)$ отрезка $[a, b]$ назовем его разбиение $\tau$ вместе с выбранными точками $\xi : x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i,\ i \in \{1, \ldots, n\}$

$\boxed{\text{NB}}$ :

Обозначения: рассмотрим $[a, b]$, $(\tau, \xi)$ $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$ $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ $!\xi_i \in \Delta_i$

**Определение.**

$\sqsupset f$ задана на $[a, b]$ - его основное оснащенное разбиение. Интегральной суммой для $f$ на $[a, b]$ с оснащенным разбиением $(\tau, \xi)$ называется

$$\boxed{\sigma_\tau(f, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i}$$

**Определение.**

$\sqsupset \tau$ - разбиение $[a, b]$. Мелкостью разбиения $\tau$(рангом равного дробления) называется $\lambda(\tau) = \max\limits_{i \in \{1, \ldots, n\}} \Delta x_i$

**Определение.**

Число $I$ называется интегралом Римана от функции $f$ по отрезку $[a, b]$, если
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 : \forall \tau :\ \lambda(\tau) < \delta$ и $\forall \varepsilon \Rightarrow |\sigma_\tau(f, \xi) - I| < \varepsilon$

Можно называть пределом интегральной суммы
$\lim\limits_{\lambda_\tau \to 0} G_\tau(f, \xi) = I := \int_b^a f dx$

**Теорема(об эквивалентом определении интеграла)**:

Число $I$ - интеграл Римана от функции $f$ по $[a, b]$ тогда и только тогда, когда:

$$\boxed{\forall (\tau_n, \xi_n) : \lambda(\tau_n) \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0 \Rightarrow \sigma_{\tau_n}(f, \xi_n)) \underset{n\to\infty}{\rightarrow} I}$$

**Определение.**

Функция, для которой существует интеграл Римана по отрезку $[a, b]$ называется интегрируемой(по Риману на $[a, b]$) и обозначается $f \in \mathbb{R}[a, b]$

<u>Договоримся</u>:

$\int_a^a f(x)dx = 0$

$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

## 2.2 Суммы Дарбу и их свойства. Интегралы Дарбу

**Определение.**

$\sqsupset f$ задана на отрезке $[a, b]$. $\tau$ - разбиение $[a, b]$. Введем понятия верхней суммы Дарбу -

$\underline{S}_\tau(f) = \sum\limits_{i=0}^{n} M_i \Delta x_i$, где $M_i = \sup f$

$\overline{S}_\tau(f) = \sum\limits_{i=0}^{n} m_i \Delta x_i$, где $M_i = \inf f$

Называются верхний и нижней суммы Дарбу.

$\boxed{\text{NB}}$ :

$$\boxed{\overline{S}_\tau(f) \leqslant \sigma_\tau(f, \xi) \leqslant \underline{S}_\tau(f)}$$

$f$ ограничена $\iff$ конечны $\underline{S}_\tau(f), \overline{S}_\tau(f)$

$$\boxed{\overline{S}_\tau(f) = \min_{\xi} \sigma_\tau(f, \xi)}$$

$$\boxed{\underline{S}_\tau(f) = \max_{xi} \sigma_\tau(f, \xi)}$$

**Лемма.**

$\underline{S}_\tau(f) = \inf\limits_{\xi} \sigma_\tau(f, \xi)$

$\overline{S}_\tau(f) = \sup\limits_{\xi} \sigma_\tau(f, \xi)$

**Доказательство**:

1) $\sqsupset f$ ограничена на $[a, b]$. Докажем, что $\underline{S}_\tau(f) = \sup\limits_{\xi} \sigma_\tau$.

$\sqsupset \epsilon > 0$. Согласно определению супремума:

$\exists \xi_i : M_i - \frac{\epsilon}{b-a} < f(\xi_i)$

$\sum\limits_{i=1}^{n} (M_i - \frac{\epsilon}{b-a})\Delta x_i < \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

$\underline{S}_\tau(f) - \epsilon < \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.

Кроме того, $\sigma_\tau \leqslant \underline{S}_\tau(f)$. Итого, $\underline{S}_\tau(f) = \sup\limits_\xi \sigma_\tau(f,\xi)$

**Определение.**

$\sqsupset$ $\tau-$ разбиение отрезка $[a,b]$, $\tau'$ называется измельчением $\tau$, если $\tau < \tau'$.

**Лемма.**

$\sqsupset$ $\tau'$ - измельчение $\tau$, тогда:

$$\boxed{\underline{S}_{\tau'} \leqslant \underline{S}_\tau}$$

$$\boxed{\overline{S}_{\tau'} \geqslant \overline{S}_\tau}$$

Докажем, что $\underline{S}_{\tau'} \leqslant \underline{S}_\tau$

Достаточно рассмотреть $\tau' = \tau \cup \{*\}$

$\sqsupset$ $x_{j-1} < x^* < x_j$

$\underline{S}_\tau(f) = \sum\limits_{i=1}^n M_i \Delta x_i = \sum\limits_{\substack{i=1\\i\neq j}}^n M_i\Delta x_i + M_j \Delta x_j \boxed{\geqslant}$

Рассмотрим $M_j \Delta x_j = M_j(x_j - x_{j-i}) = M_j(x_j - x^* + x^* - x_{j-i}) = M_j(x_j - x^*) + M_j(x^* - x_{j-i}) \geqslant$

$\geqslant \widetilde{M} = \sup\limits_{[x^*,x_j]} f,\ \widetilde{\widetilde{M}} = \sup\limits_{[x_{j-i},x^*]} f$

$\boxed{\geqslant} \sum\limits_{\substack{i=1\\i\neq j}}^n M_i \Delta x_i + \widetilde{M}(x_j - x^*) + \widetilde{\widetilde{M}}(x^* - x_{j-1}) = \underline{S}_{\tau'}(f)$

**Лемма.**

$\forall \tau', \tau''$ - разбиения на $[a,b]$, тогда

$$\boxed{\overline{S}_{\tau'} \leqslant \underline{S}_{\tau''}}$$

**Доказательство.**

$\tau = \tau' \cup \tau''$

$\overline{S}_{\tau'} \leqslant \overline{S}_\tau \leqslant \underline{S}_\tau \leqslant \underline{S}_{\tau''}$

**Определение.**

$I^*(f) = \inf\ \underline{S}_\tau$ - верхний

$I_*(f) = \sup\ \overline{S}_\tau$ - нижний

$\boxed{\text{NB}}$ :

$\forall \tau', \tau''$ - разбиения $\Rightarrow$

$$\boxed{\overline{S}_{\tau'}(f) \leqslant I_*(f) \leqslant I^*(f) \leqslant \underline{S}_{\tau''}(f)}$$

## 2.3 Необходимое условие интегрируемости функции, критерий Дарбу и Римана

**Теорема(необходимое условие)**.

$\sqsupset$ $f \in \mathbb{R}[a,b]$.

**Доказательство**

$\sqsupset$ $f$ не ограничено сверху, тогда из этого следует, что $\underline{S}_\tau(f) = +\infty$

$\forall M \exists \xi : \sigma_\xi(f,\xi) > M \Rightarrow \sigma_\tau(f,\xi)$ не имеет конечного предела.

**Теорема(критерий Дарбу)**:

$\sqsupset$ $f$ задана на $[a,b]$. $f \in \mathbb{R}[a,b] \iff \lim\limits_{\lambda(\tau)\to 0}(S_\tau(f) - \overline{S}_I(f)) \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 :\ \forall \tau :\ \lambda(\tau) < \delta \Rightarrow$

$\underline{S}_\tau(f) - \overline{S}_\tau(f)$

**Доказательство.**

"$\Rightarrow$": $\sqsupset$ $\varepsilon > 0$ $\exists \delta = \delta(\varepsilon) : \forall \tau : \lambda(\tau) < \delta \forall \xi \Rightarrow |\sigma_{tau}(f,\xi) - I| < \frac{\varepsilon}{3} \iff I - \frac{\epsilon}{3} < \sigma_\tau(f,\xi) < I + \frac{\epsilon}{3} \iff$

$$\iff \overbrace{I - \tfrac{\varepsilon}{3} < \sigma_\tau(f,\xi)}^{\inf\limits_\xi} \underbrace{\vphantom{I}< I + \frac{\varepsilon}{3}}_{\sup\limits_\xi}$$

$$\begin{matrix} \underline{S}_\tau(f) \leqslant I + \dfrac{\varepsilon}{3} \\ \overline{S}_\tau(f) \geqslant I - \dfrac{\varepsilon}{3} \end{matrix} \iff \begin{matrix} \underline{S}_\tau(f) \leqslant I + \dfrac{\varepsilon}{3} \\ \overline{S}_\tau(f) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3} - I \end{matrix} (+)$$

$$\boxed{\underline{S}_\tau(f) - \overline{S}_\tau(f) \leqslant \frac{2\epsilon}{3} \leqslant \varepsilon}$$

"$\Leftarrow$" $\lim\limits_{\lambda(\tau)\to 0}(\underline{S}_\tau(f) - \overline{S}_\tau(f)) = 0 \Rightarrow \underline{S}_\tau(f)$ и $\overline{S}_\tau(f)$ ограничены, т.е. $f$ ограничена.

$\sqsupset\ \varepsilon > 0\ \exists \delta:\ \forall \tau: \lambda(\tau) < \delta \Rightarrow \underline{S}_\tau(f) - \overline{S}_\tau(f) < \varepsilon$
Согласно выведенному,

$$\boxed{\begin{matrix} I^* \leqslant \underline{S}_\tau(f) \\ I_* \geqslant \overline{S}_\tau(f) \end{matrix} \iff \begin{matrix} I^*(f) \leqslant \underline{S}_\tau(f) \\ -I_*(f) \leqslant -\overline{S}_\tau(f) \end{matrix} (+)}$$

$$\boxed{0 \leqslant I^*(f) - I_*(f) \leqslant \underline{S}_\tau(f) - \overline{S}_\tau(f) < \varepsilon}$$

Таким образом, $I^*(f) = I_*(f) = I$
$\sqsupset\ \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0:\ \forall \tau < \delta \Rightarrow \underline{S}_\tau(f) - \overline{S}_\tau(f) < \varepsilon$

$$\begin{cases} \overline{S}_\tau(f) \leqslant \sigma_\tau(f,\xi) \leqslant \underline{S}_\tau(f) \\ \overline{S}_\tau \leqslant I \leqslant \underline{S}_\tau(f) \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \overline{S}_\tau(f) \leqslant \sigma_\tau(f,\xi) \leqslant \underline{S}_\tau(f) \\ -\underline{S}_\tau(f) \leqslant -I \leqslant -\overline{S}_\tau(f) \end{cases} \qquad (+)$$

=

$$\overline{S}_\tau(f) - \underline{S}_\tau(f) \leqslant \sigma_\tau(f,\xi) - I \leqslant \underline{S}_\tau(f) - \overline{S}_\tau(f)$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{|\sigma_\tau(f,\xi) - I| \leqslant \underline{S}_\tau(f) - \overline{S}_\tau(f) < \varepsilon}$$

**Определение.**
Колебанием функции $f$ на множестве $E$ назовем

$$\boxed{\omega(f,E) = \sup_{x,y\in E}(f(x) - f(y))}$$

$\boxed{\text{NB}}$ :

$\omega(f,E) = \sup\limits_E f - \inf\limits_E f$
**Теорема(Дарбу)**:
$\sqsupset\ f$ задана на $[a,b]$, $f \in \mathbb{R}[a,b]$, тогда:

$$\boxed{\lim_{\lambda(\tau)} \sum_{i=0}^{n} \omega(f,\Delta i)\Delta x_i = 0}$$

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta:\ \forall \tau:\ \lambda(\tau) < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \omega(f,\Delta_i)\Delta x_i < \varepsilon}$$

**Доказательство.**

$$\underline{S}_\tau(f) - \overline{S}_\tau(f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_1)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \omega(f,\Delta_i)\Delta x_i$$

**Теорема(Критерий Римана)**:
$\sqsupset\ f$ задана на $[a,b]$
$f \in \mathbb{R}[a,b] \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \tau:\ \underline{S}_\tau(f) - \overline{S}_\tau(f) < \varepsilon$

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0\ \exists \tau:\ \sum_{i=1}^{n} \omega(f,\Delta_i)\Delta x_i < \varepsilon}$$

**Доказательство.**
Необходимость. Следует из критерия Дарбу
Достаточность.

$$\sqsupset\ \varepsilon > 0\ \exists \tau:\ \underline{S}_\tau(f) - \overline{S}_\tau(f)$$

$f$ - ограничена.

$$\begin{cases} I_*(f) \geqslant \overline{S}_\tau(f) \\ I^*(f) \leqslant \underline{S}_\tau \end{cases} \qquad (-)$$

$$\boxed{0 \geqslant I^*(f) - I_*(f) \leqslant \underline{S}_\tau(f) - \overline{S}_\tau(f)}$$

**Вывод:**

$$\boxed{I^*(f) = I_*(f) = I}$$

Далее аналогично доказательству критерию Дарбу
**Теорема:**
$\sqsupset$ $f$ задана на $[a, b]$.
$f \in \mathbb{R}[a, b] \iff f$ ограничена и $I_*(f) = I^*(f) = \int_a^b f dx$