一、(30 分) 判断下列命题是否成立, 并说明理由

以下设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 是 n 阶方阵

1. 多项式 $1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}$ 没有重根.

2. 设 V_1, V_2 是 n 维欧氏空间 V 的子空间, 且 $V_1\cap V_2=\{\mathbf{0}\}$, 则 $V=V_1\oplus V_2$.

3. 映射 $\mathscr{A}: f(x)\mapsto xf'(x)$ 是 $P[x]_n$ 上的线性变换.

4. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于不同特征值的两个特征向量之和不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

5. 设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 是欧氏空间的基, 则 n 阶矩阵 $\big((\boldsymbol{\varepsilon}_i, \boldsymbol{\varepsilon}_j)\big)$ 是正定矩阵.

6. 欧式空间中保持长度不变的变换是正交变换.

二、(20 分) 填空

1. 已知 $1-2i$ 是多项式 $f(x)=x^3-3x^2+7x-5$ 的根,

   则其余根是 ________________.

2. 已知 $\mathfrak{B}$ 和 $\mathfrak{B}'$ 是三维线性空间 V 的两组基, V 中的任意向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 在这两组基下的坐标 (x_1, x_2, x_3) 和 (x_1', x_2', x_3') 满足

$$x_1'=x_1, \quad x_2'=x_2-x_1, \quad x_3'=x_3-x_2,$$

   则由 $\mathfrak{B}$ 到 $\mathfrak{B}'$ 的过渡矩阵是

   ____________________________.

3. 设三阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,2,2$, 则 $\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}^{-1}+\dfrac{1}{4}(\boldsymbol{A}^*)^2$ 的特征值为

   ________________.

4. 设在 $C[0,2\pi]$ 上的内积为

$$(f,g)=\int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

   则 x 在子空间 $L(1,\cos x,\sin x)$ 上的正交投影是 ____________________.

三、(10 分) 设 $\alpha = \sqrt[n]{2016}$, $n \geq 2$.

1. 证明多项式 $f(x) = x^n - \alpha^n$ 在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上不可约.
2. 证明 α^k 不是有理数, 其中 k 是小于 n 的正整数.

四、(15 分) 给定三阶矩阵 $\boldsymbol{C}$ 和矩阵空间 $M_3(P)$ 的子集 V, 其中

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad V = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \middle| a_{ij} \in P \right\}.$$

1. 验证 V 是 $M_3(P)$ 的子空间, 并写出 V 的一组基;
2. 验证 V 上的变换 $\mathscr{A} : \boldsymbol{X} \mapsto \boldsymbol{C}\boldsymbol{X}$ 是线性变换, 并求其在一组基下的矩阵;
3. 求 $\mathscr{A}$ 的特征值和全部特征向量. $\mathscr{A}$ 是否可对角化?

五、(15 分) 设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. 求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$ 为对角矩阵.

六、(10 分) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{A}^2 \\ \boldsymbol{A}^2 & \boldsymbol{A} \end{pmatrix}$ 为 $2n$ 阶矩阵. 若 $\boldsymbol{A}$ 可对角化, 证明: $\boldsymbol{B}$ 也可对角化.

一、 1. ✔ 2. ✘ 3. ✔ 4. ✔ 5. ✔ 6. ✘

二、 1. $1+i, 1$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

3. $3, 4, 4$

4. $\pi - 2\sin x$

三、 1. $2016 = 2^5 \times 3^2 \times 7$. [1]

Eisenstein 判别法: 验证三个条件（$p=7$）, 知 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约. [3]

注记. 未写出Eisenstein 判别法的三个条件不给分.

写出三个条件, 但取 $p=2,3$ 给 2 分; p 取其他素数或非素数给 1 分.

2. 反证法. 如果 α^k 是有理数, 则 $g(x) = x^k - \alpha^k \in \mathbb{Q}[x]$. [1]

显然, α 是 $g(x)$ 的一个实根.

注意到, α 也是 $f(x)$ 的根, 可得 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不互素. [3]

由于 $f(x)$ 不可约, $f(x)|g(x)$. 故 $n = \deg f \le \deg g = k < n$, 矛盾! [2]

方法二. 先证明整系数多项式 $g(x) = x^n - 2016^k$ 无有理根.

反证法. 若 a 是 $g(x)$ 的有理根, 则 a 必是整数, 且 $a \mid 2016^k = 2^{5k}3^{2k}7^k$. [2]

所以, $a = \pm 2^{r_1}3^{r_2}7^{r_3}$, 其中 r_1, r_2, r_3 是非负整数.

于是, $2^{nr_1}3^{nr_2}7^{nr_3} = 2^{5k}3^{2k}7^k$, 有 $nr_1 = 5k$, $nr_2 = 2k$, $nr_3 = k$.

由 $r_3 = 0$ 或 $r_3 \ge 1$, 得 $k = 0$ 或 $k \ge n$, 矛盾! [3]

而 α^k 是 $g(x)$ 的一个根, 故 α^k 不是有理数. [1]

注记. 也可以用素数 7（不能用 2 或 3）通过反证法证明: $\alpha^k \ne \dfrac{p}{q}, (p,q) = 1$.

若只证明 $k|n$ 的情形:

设 $mk = n$, 则 $\alpha^k = \sqrt[m]{2016}$ 是 $x^m - 2016$ 的根, 故 $\alpha^k \notin \mathbb{Q}$. 给 2 分.

四、 1. $\mathbf{0}\in V$, V 对加法封闭, 对数乘封闭. [3]

V 的一组基: $\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{31},\boldsymbol{E}_{13},\boldsymbol{E}_{33},\boldsymbol{E}_{22}$, $\dim V=5$. [1]

2. $\mathscr{A}$ 保持加法与数乘. [2]

$\mathscr{A}$ 在基上的作用:

$$\mathscr{A}\boldsymbol{E}_{11}=\boldsymbol{E}_{31},\ \mathscr{A}\boldsymbol{E}_{31}=\boldsymbol{E}_{11},\ \mathscr{A}\boldsymbol{E}_{13}=\boldsymbol{E}_{33},\ \mathscr{A}\boldsymbol{E}_{33}=\boldsymbol{E}_{13},\ \mathscr{A}\boldsymbol{E}_{22}=\boldsymbol{E}_{22}.$$

所以, $\mathscr{A}$ 在 $\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{31},\boldsymbol{E}_{13},\boldsymbol{E}_{33},\boldsymbol{E}_{22}$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$. [3]

3. *方法一*. 观察可知,

$\boldsymbol{E}_{11}+\boldsymbol{E}_{31},\boldsymbol{E}_{13}+\boldsymbol{E}_{33},\boldsymbol{E}_{22}$ 是 $\mathscr{A}$ 的对应于 1 的线性无关的特征向量,

$\boldsymbol{E}_{11}-\boldsymbol{E}_{31},\boldsymbol{E}_{13}-\boldsymbol{E}_{33}$ 是 $\mathscr{A}$ 的对应于 -1 的线性无关的特征向量.

这五个向量线性无关, 得 $V=V_1\oplus V_{-1}$,

$\mathscr{A}$ 的特征值为 ±1, 对应的特征子空间分别为

$$L(\boldsymbol{E}_{11}+\boldsymbol{E}_{31},\boldsymbol{E}_{13}+\boldsymbol{E}_{33},\boldsymbol{E}_{22}),\quad L(\boldsymbol{E}_{11}-\boldsymbol{E}_{31},\boldsymbol{E}_{13}-\boldsymbol{E}_{33}).$$ [5]

$\mathscr{A}$ 可对角化. [1]

方法二. 特征多项式为 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-1)^3(\lambda+1)^2$, 得 $\mathscr{A}$ 的特征值为 1 和 -1.

$\lambda=1$, 解方程组 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, 得一个基础解系为

$$\boldsymbol{\eta}_1=(1,1,0,0,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\eta}_2=(0,0,1,1,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\eta}_3=(0,0,0,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

所以，$\mathscr{A}$ 的属于 1 的特征子空间为 $L(\boldsymbol{E}_{11}+\boldsymbol{E}_{31},\boldsymbol{E}_{13}+\boldsymbol{E}_{33},\boldsymbol{E}_{22})$;

$\lambda=-1$, 解方程组 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, 得一个基础解系为

$$\boldsymbol{\eta}_4=(1,-1,0,0,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\eta}_5=(0,0,1,-1,0)^{\mathrm{T}}.$$

所以，$\mathscr{A}$ 的属于 -1 的特征子空间为 $L(\boldsymbol{E}_{11}-\boldsymbol{E}_{31},\boldsymbol{E}_{13}-\boldsymbol{E}_{33})$. [5]

$\mathscr{A}$ 可对角化. [1]

注记. 特征向量给出为列向量, 扣 2 分.

未给出特征子空间或未给出全部特征向量, 扣 2 分.

直接给出线性变换矩阵, 没有计算线性变换在基上的作用, 扣 2 分.

五、 特征多项式为 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-1)^3(\lambda-5)$, 特征值为 $1,5$ [4]

对于 $\lambda_1=1$, $\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\-1&1&-1&1\\1&-1&1&-1\\-1&1&-1&1\end{pmatrix}$. 解得线性无关的特征向量:

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0,0)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,-1,0)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,0,1)^{\mathrm{T}}. \qquad [3]$$

正交化,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta}_1&=\boldsymbol{\alpha}_1\\
\boldsymbol{\beta}_2&=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=\frac{1}{2}(1,-1,-2,0)^{\mathrm{T}}\\
\boldsymbol{\beta}_3&=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_3)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_1=\frac{1}{3}(1,-1,1,3)^{\mathrm{T}}
\end{aligned}$$

单位化, 得

$$\boldsymbol{\eta}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\eta}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2,0)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\eta}_3=\frac{1}{2\sqrt{3}}(1,-1,1,3)^{\mathrm{T}}; \qquad [4]$$

$\lambda_2=5$, 特征向量: $\boldsymbol{\alpha}_4=(1,-1,1,-1)^{\mathrm{T}}$, 单位化, $\boldsymbol{\eta}_4=\frac{1}{2}(1,-1,1,-1)^{\mathrm{T}}$. [2]

所求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{2\sqrt{3}}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{2\sqrt{3}}&-\frac{1}{2}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{2\sqrt{3}}&\frac{1}{2}\\0&0&\frac{3}{2\sqrt{3}}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$, 而 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&5\end{pmatrix}$. [2]

注记. 也可直接给出对应于 1 的一组正交特征向量:

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0,0)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\alpha}_2=(0,0,1,1)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,-1,1)^{\mathrm{T}}.$$

然后单位化, 最终得 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

未写出对角矩阵 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$, 扣 1 分.

六、 *方法一*. 若 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个属于 λ 的特征向量, 则 $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$, [1]

于是, $\boldsymbol{B}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\alpha}\end{pmatrix}=(\lambda+\lambda^2)\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\alpha}\end{pmatrix}$, 且 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\alpha}\end{pmatrix}\neq\boldsymbol{0}$, 得它是 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量. [3]

同理, $\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}\\ -\boldsymbol{\alpha}\end{pmatrix}$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的属于特征值 $\lambda-\lambda^2$ 的特征向量. [2]

由于 $\boldsymbol{A}$ 可对角化, $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量, 设为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n$.

于是, $\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_1\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_n\\ \boldsymbol{\alpha}_n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ -\boldsymbol{\alpha}_1\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_n\\ -\boldsymbol{\alpha}_n\end{pmatrix}$ 都是 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量.

作线性组合, $k_1\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_1\end{pmatrix}+\cdots+k_n\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_n\\ \boldsymbol{\alpha}_n\end{pmatrix}+l_1\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ -\boldsymbol{\alpha}_1\end{pmatrix}+\cdots+l_n\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_n\\ -\boldsymbol{\alpha}_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$,

则由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关, 得 $k_i+l_i=k_i-l_i=0$, 于是, $k_i=l_i=0$.

$\boldsymbol{B}$ 有 $2n$ 个线性无关的特征向量, 故 $\boldsymbol{B}$ 可对角化. [4]

方法二. 取 $\boldsymbol{T}_1=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{E}&\boldsymbol{E}\end{pmatrix}$, 其逆 $\boldsymbol{T}_1^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{O}\\ -\boldsymbol{E}&\boldsymbol{E}\end{pmatrix}$. 验证:

$$\boldsymbol{T}_1^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{T}_1=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{O}\\ -\boldsymbol{E}&\boldsymbol{E}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{A}^2\\ \boldsymbol{A}^2&\boldsymbol{A}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{E}&\boldsymbol{E}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2&\boldsymbol{A}^2\\ \boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^2\end{pmatrix}. \quad [3]$$

再令 $\boldsymbol{T}_2=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}&-\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{O}&\boldsymbol{E}\end{pmatrix}$, 则有 $\boldsymbol{T}_2^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2&\boldsymbol{A}^2\\ \boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^2\end{pmatrix}\boldsymbol{T}_2=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2&\boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^2\end{pmatrix}$.

所以, $\boldsymbol{B}\sim\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2&\boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^2\end{pmatrix}$. [3]

由于 $\boldsymbol{A}$ 可对角化, 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{T}$ 使得 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT}=\boldsymbol{D}$ 是对角矩阵,

于是 $\boldsymbol{T}^{-1}(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{A}^2)\boldsymbol{T}=\boldsymbol{D}\pm\boldsymbol{D}^2$ 为对角矩阵, 故 $\boldsymbol{B}$ 可对角化. [4]

方法三. $\boldsymbol{A}$ 可对角化, 有可逆矩阵 $\boldsymbol{T}$ 使 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT}=\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)$. [1]

于是 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{T}=\boldsymbol{\Lambda}^2=\mathrm{diag}(\lambda_1^2,\lambda_2^2,\dots,\lambda_n^2)$ 也是对角矩阵. [1]

令 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{T}&\\ &\boldsymbol{T}\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{BQ}=\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Lambda}&\boldsymbol{\Lambda}^2\\ \boldsymbol{\Lambda}^2&\boldsymbol{\Lambda}\end{pmatrix}$. [2]

用数学归纳法证明 $\boldsymbol{C}$ 可对角化. 当 $n=1$ 时, $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\lambda&\lambda^2\\ \lambda^2&\lambda\end{pmatrix}$.

若 $\lambda=0$, 则 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{O}$; 若 $\lambda\neq0$, 则 $\boldsymbol{C}$ 有不同的特征值 $\lambda\pm\lambda^2$. 均可对角化.

取 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}(n,n{+}1)\boldsymbol{P}(n{+}1,n{+}2)\cdots\boldsymbol{P}(2n{-}1,2n)$, 其中 $\boldsymbol{P}(i,j)$ 是 $2n$ 阶初等对换矩阵, 则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{CP}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_1&\\ &\boldsymbol{C}_2\end{pmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{C}_1=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Lambda}_1&\boldsymbol{\Lambda}_1^2\\ \boldsymbol{\Lambda}_1^2&\boldsymbol{\Lambda}_1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\Lambda}_1=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_{n-1})$,

$\boldsymbol{C}_2=\begin{pmatrix}\lambda_n&\lambda_n^2\\ \lambda_n^2&\lambda_n\end{pmatrix}$. 根据归纳假设, $\boldsymbol{C}_1$ 可对角化, $\boldsymbol{C}_2$ 也可对角化, 故 $\boldsymbol{C}$ 可对角化. [6]

注记. $\boldsymbol{C}$ 不一定是实矩阵, 故不能使用实对称矩阵的结论.