中国人民大学考试试卷　　高等代数 AII 试题 A 卷

2018-2019 年度第二学期（考试时间 2019 年 6 月 17 日　? 8:00—10:00 ）

我郑重承诺：在本次考试中，遵守考场纪律、自尊自爱、平等竞争，维护学校的荣誉和学生的尊严。

承诺人签字：

序号＿＿＿＿＿ 专业＿＿＿＿＿ 学号＿＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿＿

高等代数 AII 期末试题 （2019 年 6 月 17 日　　）

题号	一	二	三	合计	阅卷人
题分	30	35	35	100	
得分					

得分	评卷人

一．填空(每小题 5 分，共 30 分)

1、设 n 阶矩阵 A 的元素全为 1，则 A 的 n 个特征值是＿＿＿＿＿＿；

答案：;0（n-1 重），n

2 设 2、4、6、……、2n 是 A 的 n 个特征值，E 是 n 阶单位矩阵，则 $A-2E$ 的行列式 $|A-2E|$=＿＿＿＿＿＿；

答案：0

3、　已知 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\1&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}1\\3\\2\\4\end{pmatrix}$，则最小二乘问题 $\mathbf{AX}=\beta$ 的正规方程是＿＿＿＿＿＿＿＿，最小二乘解是＿＿＿＿＿＿＿＿；

答案：$\begin{cases}4x_1+2x_2+2x_3=10\\ \cancel{2x_1+2x_2\quad\quad=4}\\ 2x_1+0x_2+2x_3=6\end{cases}$，$\begin{cases}x_1=3-x_3\\x_2=-1+x_3\end{cases}$ x_3为自由未知量

4、　A,B 为 n 阶正交矩阵，且 $|A|>0,|B|<0$，则 $|AB|=$＿＿＿＿；

答案：-1

5、　若二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+bx_2^2+3x_3^2+2ax_2x_3(a>0)$ 可经正交线性替换化为标准形 $y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$，则 $a=$＿＿＿，$b=$＿＿＿＿；

答案：$a=2$，$b=3$

6、　设 $A=(a_{ij})$ 是数域 P 上任意 n 阶方阵，$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，n 元二次型 X^TA^2X 的矩阵为＿＿＿＿＿＿；

答案：$\dfrac{A^2+(A^T)^2}{2}$

得分	评卷人

二．计算（每道题 10 分，共 40 分）

1、　给定 6 维线性空间 V 的基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6$ 及线性变换 $\mathbf{A}$，且

$$\mathbf{A}(\alpha_i)=\alpha_i+2\alpha_{7-i},i=1,2,3,4,5,6$$

(1) 求 $\mathbf{A}$ 的全部特征根与特征向量(利用已知基表示)；

(2) 判断是否存在另一组基，使 $\mathbf{A}$ 在该基下的矩阵为对角矩阵？若存在，把它构造出来(利用已知基表示)。

解：（1） $\mathbf{A}$ 在 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6$ 下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&2\\0&1&0&0&2&0\\0&0&1&2&0&0\\0&0&2&1&0&0\\0&2&0&0&1&0\\2&0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&0&0&0&-2\\0&\lambda-1&0&0&-2&0\\0&0&\lambda-1&-2&0&0\\0&0&-2&\lambda-1&0&0\\0&-2&0&0&\lambda-1&0\\-2&0&0&0&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+1)^3(\lambda-3)^3$$

所以特征值为-1(三重),3(三重)

$\lambda=-1$的特征子空间的基：$\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$

$\lambda=3$的特征子空间的基：$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$

（2） **A** 在 $\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ 的矩阵为对角形矩阵

$$\begin{pmatrix}-1&0&0&0&0&0\\0&-1&0&0&0&0\\0&0&-1&0&0&0\\0&0&0&3&0&0\\0&0&0&0&3&0\\0&0&0&0&0&3\end{pmatrix}$$

2、已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2tx_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$

$x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2tx_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$

t取什么值时,下列二次型是正定的

解：对应矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&t&-1\\t&1&2\\-1&2&5\end{pmatrix}$,顺序主子式均大于0,即

$$\begin{vmatrix}1&t\\t&1\end{vmatrix}=1-t^2>0,\therefore -1<t<1$$

$|A|=\begin{vmatrix}1&t&-1\\t&1&2\\-1&2&5\end{vmatrix}=-5t^2-4t>0$, 综合上述条件知：$-\dfrac{4}{5}<t<0$

3、用正交替换法将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2-2x_3^2+4x_1x_3$化为标准形，并写出所用的正交替换和正惯性指数。

解：二次型的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&0\\2&0&-2\end{pmatrix}$$

由$|\lambda E-A|=(\lambda-2)^2(\lambda+3)$得 A 的特征值为$\lambda_1=2$（二重），$\lambda_3=-3$

对应于特征值$\lambda_1=2$，解齐次线性方程组$(2E-A)X=0$ 得基础解系

$$\xi_1=(2,0,1)^T,\quad \xi_2=(0,1,0)^T,$$

易见这两个向量正交，所以取

$$\eta_1=\frac{\xi_1}{\|\xi_1\|}=\frac{1}{\sqrt{5}}（2，0，1）^T，\quad \eta_2=\frac{\xi_2}{\|\xi_2\|}=（0，1，0）^T，$$

对应于$\lambda_3=-3$，齐次线性方程组$(-3E-A)X=0$的基础解系

$\xi_3=（1，0，-2）^T$， 取$\eta_3=\frac{\xi_3}{\|\xi_3\|}=\frac{1}{\sqrt{5}}（1，0，-2）^T$

取正交替换 $X=QY$,其中

$$Q=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}，X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}，$$

在此正交变换下，二次型化为标准形

$$f=2y_1^2+2y_2^2-3y_3^2$$

该二次型的正惯性指数为 2.

4、$W=\{x_1+x_2+x_3+x_4=0\}$是R^4的子空间，

（1）求 W 的一组标准正交基；

（2）求向量$\alpha=（1，0，0，0）$在 W 上的正交投影，并求α到 W 的距离。

解：$x_1+x_2+x_3+x_4=0$的一个基础解系为

$$\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}，\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}，\xi_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

施密特正交化得到正交基

$$\eta_1^*=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}，\eta_2^*=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\\0\end{pmatrix}，\eta_3^*=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\\1\end{pmatrix}$$

单位化为标准正交基：

$$\eta_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}，\eta_2=\frac{\sqrt{6}}{3}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\\0\end{pmatrix}，\eta_3=\frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\\1\end{pmatrix}$$

（2）$P_W(\alpha)=(\alpha,\eta_1)\eta_1+(\alpha,\eta_2)\eta_2+(\alpha,\eta_3)\eta_3=-\frac{\sqrt{2}}{2}\eta_1-\frac{\sqrt{6}}{6}\eta_2-\frac{\sqrt{3}}{6}\eta_3$

$$=-\frac{1}{2}\eta_1^*-\frac{1}{3}\eta_2^*-\frac{1}{4}\eta_3^*=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{4}\\-\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}\\-\frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

α到 W 的距离为

$$\|\alpha-P_W(\alpha)\|=\frac{1}{2}$$

得分	评卷人

三．证明题（每道题 10 分，共 30 分）

1、在n维欧氏空间R^n中，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是其一个标准正交基，$\sigma$是$R^n$的一个线性变换，$A=(a_{ij})_{n\times n}$是$\sigma$关于这个基的矩阵，证明

$$a_{ji}=<\sigma(\alpha_i),\alpha_j>,i,j=1,2,\cdots,n.$$

证明：因为$\sigma(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

所以$\sigma(\alpha_i)=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$

$$=a_{1i}\alpha_1+a_{2i}\alpha_2+\ldots+a_{ni}\alpha_n$$

所以$a_{ji}=<\sigma(\alpha_i),\alpha_j>,i,j=1,2,\cdots,n.$

2、设A是正定矩阵，整数$k>1$，证明：

（1）A^k也是正定矩阵；

（2）存在正定矩阵B使得$A=B^k$

证明：（1）A是正定矩阵，所以存在正交矩阵Q使得

$$A=Q^T\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}Q=Q^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}Q$$

$\lambda_i>0\quad(i=1,2,\cdots n)$，此时

$$A^k==Q^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}^k Q=Q^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k \end{pmatrix}Q$$

特征值都大于零，所以A^k正定

（2）在(1)中，存在正交矩阵Q使得

$$A=Q^T\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}Q=Q^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}Q$$

取$B=Q^T\begin{pmatrix} \sqrt[k]{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt[k]{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt[k]{\lambda_n} \end{pmatrix}Q$即可.

3、证明：任意 n 阶矩阵 A 的几何重数都小于等于其代数重数。（几何重数是指λ特征子空间的维数，代数重数$(x-\lambda)$在特征多项式$f_A(x)$重因式的重数).

证明：假设λ是 A 的一个特征值，n_1,r_1分别是其几何充数和代数重数，

λ的特征子空间的V_λ的一组基为α_1，$\alpha_2,\ldots,\alpha_{n_1}$,将其扩充为$P^n$ 的一组基

$$\alpha_1，\alpha_2,\ldots,\alpha_{n_1}，\beta_1，\beta_2，\ldots,\beta_{n-n_1}$$

则

$$A(\alpha_1，\alpha_2,\ldots,\alpha_{n_1}，\beta_1，\beta_2，\ldots,\beta_{n-n_1})$$

$$=(\alpha_1，\alpha_2,\ldots,\alpha_{n_1}，\beta_1，\beta_2，\ldots,\beta_{n-n_1})\begin{pmatrix} \lambda & 0\ldots & 0 & b_{11} & b_{n-n_i1} \\ 0 & \lambda\ldots & 0 & b_{12} & b_{n-n_i2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & & \\ 0 & 0 & \lambda & & \\ 0 & 0\ \ldots & 0 & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & & \\ 0 & 0\ldots & 0 & b_{1n} & b_{n-n_in} \end{pmatrix}$$

右边矩阵记为B，而矩阵

$$P=\left(\alpha_1，\alpha_2,\ldots,\alpha_{n_1}，\beta_1，\beta_2，\ldots,\beta_{n-n_i}\right)$$

可逆，所以

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda E_{n_i} & B_1\\ 0 & B_2\end{pmatrix}=B$$

所以$f_A(x)=f_B(x)=(x-\lambda)^{n_i}f_1(x)$

所以因式 $x-\lambda$在$f_A(x)$中至少出现n_1重，从而矩阵 A 的几何重数都小于等于其代数重数。

2、A 和 B 都是n阶正定方阵，则方程$|\lambda A-B|=0$的根都是正的，并且当且仅当$A=B$时，所有的根都等于 1。

3 、设 $f = X^{'}AX$ 是一个非退化的二次型，其中 A 为对称矩阵，证明 f 可用正交变换化为规范形当且仅当 A 是正交矩阵。

4、设 A 为 n 阶实对称矩阵，求证当 A 可逆时，存在 n 阶方阵 P，使得 $AP + P^T A$ 为正定矩阵。

5、设 A 是对称正定 $n \times n$ 矩阵，其最大及最小特征值分别为 $\lambda_{\max}, \lambda_{\min} > 0$；并设 A 的对角元素为 $a_{ii} (1 \le i \le n)$，试证明

$$\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \ge \max_{1 \le i, j \le n} \frac{a_{ii}}{a_{jj}}$$

6、A 为 n 阶实对称矩阵，且 $A^2 = I$. 证明：存在正交矩阵 U，使

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix}$$

其中 r 为 A 的正特征值的个数.

7、