中国人民大学《高等代数 II》期末样题

(考试时间:)

班级________ 姓名____________ 学号____________

一、单选题 (共 10 小题, 每题 3 分, 共 30 分).

1. 在一元多项式环 $P[x]$ 中能整除任意多项式的多项式是(　　).

A. 零多项式　　B. 零次多项式

C. 本原多项式　　D. 不可约多项式

2. 设 $g(x)=x+1$ 是 $f(x)=x^6-k^2x^4+4kx^2+x-4$ 的一个因式，则 $k=$(　　).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

3. 整系数多项式 $f(x)$ 在整数环 Z 上不可约是 $f(x)$ 在有理数域 Q 上不可约的(　　).

A. 充分条件　　B. 充分必要条件

C. 必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. 设 V 是数域 P 上的 n 维线性空间，V 中的两组向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关, 而 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 线性相关，则(　　).

A. α_1 必可由 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表出

B. α_1 必不能由 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表出

C. α_4 必可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出

D. α_4 必不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出

5. 下列选项中的 $\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in R^n$，那么下列哪个集合一定可以构成 R^n 的线性子空间(　　).

A. $\{\alpha|x_n\geq 0\}$　　B. $\{\alpha|x_1=1\}$

C. $\{\alpha|\sum_{i=1}^n x_i=0\}$　　D. $\{\alpha|\sum_{i=1}^n x_i=2\}$

6. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 和 β_1,β_2,β_3 都是三维线性空间 V 的基，且 $\beta_1=\alpha_1,\beta_2=\alpha_1+\alpha_2,\beta_3=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$, 则矩阵 $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 是由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到以下哪一组基的过渡矩阵(　　).

A. β_2,β_1,β_3　　B. β_1,β_2,β_3　　C. β_2,β_3,β_1　　D. β_3,β_2,β_1

7. 设三阶方阵 A 的特征值是 $-1,1,3$, 矩阵 B 与 A 相似，则 B 的伴随矩阵 B^* 的特征值是(　　).

A. $-3,3,\frac{1}{3}$　　B. $-1,1,-\frac{1}{3}$　　C. $-3,3,-1$　　D. $-3,3,1$

8. 设 V 是数域 P 上的 n 维线性空间, $\mathcal{A}$ 是 V 上的任意线性变换, 矩阵 A 是 $\mathcal{A}$ 在 V 的某组基下的矩阵. 则以下结论中正确的是(　　).

A. $\mathcal{A}$ 在数域 P 上一定有 n 个特征值，重根按照重数计算
B. $\mathcal{A}$ 的最小多项式的次数一定小于 n
C. 若 $|E-A|=0$, 则一定存在非零向量 $\alpha\in V$ 使得 $\mathcal{A}\alpha=\alpha$
D. 以上都不对

9. 在线性空间 R^3 中定义内积运算 $(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^3 ix_iy_i$, 其中 $\alpha=(x_1,x_2,x_3),\beta=(y_1,y_2,y_3)$, 形成欧氏空间 R_1^3. 则下列说法中正确的是(　　).

A. 向量 $(1,-1,0)$ 与 $(1,1,0)$ 在 R_1^3 中正交
B. 在 R_1^3 中, 向量 $(2,1,0)$ 到 $(1,0,1)$ 的距离等于 $\sqrt{3}$

C. 几何空间 R^3 的任意一组标准正交基也是 R_1^3 的标准正交基

D. 在 R_1^3 中, $|(1,1,1)| = \sqrt{6}$

10. A 是 n 阶实方阵，则 A 是正交矩阵的充要条件是(　　).

A. $AA^{-1} = E$　B. $A = A^T$　　C. $A^{-1} = A^T$　D. $A^2 = E$

参考答案：$BBBCC$, $ACCDC$.

二、填空题 (共 5 题，每题 4 分, 共 20 分.)

11. 两个多项式 $f(x) = x^4-2x^3-4x^2+4x-3$, $g(x) = 2x^3-5x^2-4x+3$ 的最大公因式 $(f(x), g(x)) =$ ____________.

12. 多项式 $x^5 - 1$ 在有理数域上的标准分解式为 ___________, 在实数域上的标准分解式为 ___________.

13. 集合 $V = \left\{(x_1, x_2 + x_3\sqrt{2}, x_2 - x_3\sqrt{2}, -x_1)^T | x_1, x_2, x_3 \in Q\right\}$ 对于向量的加法和数乘构成有理数域 Q 上的线性空间，写出 V 的一组基 __________________________.

14. 设 3 阶方阵 $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ a & -2 & 2 \\ 3 & b & -1 \end{pmatrix}$ 有一个特征向量 $x = (2, -1, 2)^T$, 则 x 对应的特征值为 ______________, $a =$ ______________, $b =$ ______________.

15. 在 $R[x]_3$ 中定义内积 $(f(x), g(x)) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$, 则与 $1, x, x^2$ 等价的标准正交基是 __________________.

参考答案: $x-3$; $(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$, $(x-1)(x^2-2\cos\frac{2\pi}{5}x+1)(x^2-2\cos\frac{4\pi}{5}x+1)$; $(1,0,0,-1)^T, (0,1,1,0)^T, (0,\sqrt{2},-\sqrt{2},0)^T$; $2, -4, 0$; $\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{6}}{2}x, \frac{3\sqrt{10}}{4}(x^2-\frac{1}{2})$

三、计算和证明题，要求写出详细的解题或证明过程. (共 4 题，共 50 分.)

16. (10 分) 设 $f(x), g(x) \in P[x]$, 证明 $(f(x), g(x)) = 1$ 的充分必要条件是 $(f(x)g(x), f(x)+g(x)) = 1$.

17. (15 分) 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 是四维线性空间 V 的一组基，线性变换 $\mathcal{A}$ 在这组基下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

(1) 求 $\mathcal{A}$ 在基 $\eta_1 = \varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 + \varepsilon_4$,$\eta_2 = 3\varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4$, $\eta_3 = \varepsilon_3 + \varepsilon_4$, $\eta_4 = 2\varepsilon_4$ 下的矩阵; (2) 求 $\mathcal{A}$ 的值域与核.

18. (15 分) 设 n 阶矩阵 A 和 B 满足 $A+B = AB$, 且 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 A 的特征值. 证明：(1) $\lambda_i \neq 1 (i = 1, 2, ..., n)$; (2) 若 A 是实对称矩阵，则存在正交矩阵 P，使得

$$P^{-1}BP = diag\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - 1}, \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - 1}, \cdots, \frac{\lambda_n}{\lambda_n - 1}\right).$$

19. (10 分) 设实二次型 $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2ax_1x_2+2ax_1x_3+2ax_1x_4+2ax_2x_3+2ax_2x_4+2ax_3x_4$. 已知 $f(x)$ 可通过正交替换化为标准形 $3y_1^2+3y_2^2+3y_3^2-5y_4^2$，求 a 的值和所作的正交替换.

参考答案：略