设函数 f 满足递推关系 $f(n)=2f(\sqrt{n})+\log n$，其中 n 是大于 1 的完全平方数且 $f(2)=1$，求关于 $f(n)$ 的大 O 估计.

将 n 表示为 $n=2^{2^k}$，其中 k 是一个非负整数。

定义：

$$g(k)=f(n)=f(2^{2^k})$$

$$f(n)=2f(\sqrt{n})+\log n$$

代入 $n=2^{2^k}$，得到：

$$g(k)=2g(k-1)+\log(2^{2^k})=2g(k-1)+2^k$$

注意到

$$g(k-1)=2g(k-2)+2^{k-1}$$

所以有

$$g(k)=2(2g(k-2)+2^{k-1})+2^k=4g(k-2)+2\cdot 2^k$$

而

$$g(k-2)=2g(k-3)+2^{k-2}$$

所以有

$$g(k)=4(2g(k-3)+2^{k-2})+2\cdot 2^k=8g(k-3)+3\cdot 2^k$$

观察可以发现，

$$g(k)=2^l g(k-l)+l\cdot 2^k$$

又因为 $g(0)=f(2^{2^0})=1$，我们可得 $g(k)=2^k g(k-k)+k\cdot 2^k=2^k+k\cdot 2^k=(k+1)2^k$

又因为 $n=2^{2^k}$，所以 $k=\log\log n$，$2^k=\log n$

因此，$f(n)$ 可以表示为：

$$f(n)=O\left(\log n\cdot\log\log n\right)$$