作业 11

1

1.1

每一对球 (i,j) 放入同一个篮子的概率是 $\frac{1}{n}$，因为篮子是独立选择的，所以：

$$E[X_{i,j}] = \frac{1}{n}$$

$X_{m,n}$ 的期望为：

$$E[X_{m,n}] = E\left[\sum_{1\le i<j\le m} X_{i,j}\right] = \sum_{1\le i<j\le m} E[X_{i,j}] = \binom{m}{2}\cdot\frac{1}{n}$$

因为 $\binom{m}{2} = \frac{m(m-1)}{2}$，所以：( )

$$\mu_{m,n} = \frac{m(m-1)}{2n}$$

接下来计算 $\mathrm{Var}(X_{m,n})$

由于该事件可视为 $\binom{m}{2}$ 个独立子事件之和（对应 $\binom{m}{2}$ 对球是否在同一个篮子中），每个子事件对应方差为 $\frac{1}{n}\cdot\frac{n-1}{n} = \frac{n-1}{n^2}$, 因此：

$$\mathrm{Var}(X_{m,n}) = \binom{m}{2}\cdot\frac{n-1}{n^2} = \frac{m(m-1)(n-1)}{2n^2}$$

1.2

由切比雪夫不等式

$$P[|X - E[X]| \geq k] \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{k^2}$$

将 $k = c\sqrt{\mu_{m,n}}$ 代入, 得:

$$P[|X - E[X]| \geq k] \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{(c\sqrt{\mu_{m,n}})^2} = \frac{\frac{m(m-1)(n-1)}{2n^2}}{c^2\frac{m(m-1)}{2n}} = \frac{n-1}{c^2 n} \leq \frac{1}{c^2}$$

2

由题:

$$p(\lambda \geq \alpha) = P(e^{s\lambda} \geq e^{s\alpha})$$

由马尔可夫不等式:

$$P(e^{s\lambda} \geq e^{s\alpha}) \leq \frac{Ee^{s\lambda}}{e^{s\alpha}} = e^{-s\alpha}Ee^{s\lambda}$$

同理，由:

$$p(\lambda \leq \alpha) = P(e^{-s\lambda} \geq e^{-s\alpha})$$

可得:

$$P(e^{-s\lambda} \geq e^{-s\alpha}) \leq \frac{Ee^{-s\lambda}}{e^{-s\alpha}} = e^{s\alpha}Ee^{-s\lambda}$$

3

设单位求体积为 V, 则有:

$$\frac{V - (1-\epsilon)^{1000}V}{V} = 0.99$$

$$(1-\epsilon)^{1000} = 0.01$$

$$1 - \epsilon = 0.99541 \quad \Rightarrow \quad \epsilon = 0.00459$$

5

生成样本 x 的累积分布函数 $G(x)$:

$$G(x) = P(X \leq x)$$

由于 $x = F^{-1}(u)$，我们有:

$$P(X \leq x) = P(F^{-1}(u) \leq x)$$

因为 $F(x)$ 是单调递增的，且 F^{-1} 是 F 的反函数，所以:

$$P(F^{-1}(u) \leq x) = P(u \leq F(x))$$

由于 u 是从均匀分布 U (0, 1) 中采样得到的，所以:

$$P(u \leq F(x)) = F(x)$$

两边同时求导，得:

$$G'(x) = f_X(x)$$

得证