得分	

一、（共 30 分）判断下列命题是否成立, 画(✔)或(✘), 并说明理由

1. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为同阶矩阵, 则 $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{B}$ 具有相同的特征值.
   (　　)

2. 若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值, 则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似.
   (　　)

3. 已知 $p(x)$ 是数域 P 上的不可约多项式, 则 $p(x)$ 在数域 P 上必定无根.
   (　　)

4. 若 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶正交矩阵, 则其伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 也是正交矩阵.
   (　　)

5. $\mathbb{R}^n$ 中的子集 $\left\{(a_1, a_2, \ldots, a_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \sum\limits_{i=1}^{n} a_i = 1\right\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间.
   (　　)

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 维欧式空间 V 中某组基的度量矩阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值必大于零.
   (　　)

得分	

二、（共 20 分）填空

1. 已知 $1-i$ 是多项式 $f(x)=x^4-4x^3+5x^2-2x-2$ 的一个根,

   则 $f(x)$ 的其余三个根是____________________________.

2. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & a\\ -1 & a & 1\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & & \\ & b & \\ & & 2\end{pmatrix}$ 相似,

   则 $a=$ __________________, $b=$ __________________.

3. 在 $\mathbb{R}[x]_3$ 中定义内积

$$(f(x),g(x))=f(-1)g(-1)+f(0)g(0)+f(1)g(1),$$

   则向量 1 的长度为_______________, 1 与 x 的夹角为_______________.

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, 则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的最小二乘解唯一的充分必要条件是

   ____________________________.

得分	

三、（共 10 分） 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称矩阵, 秩为 r, 且 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$.

1. 求证 $V = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = 0\right\}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的子空间;
2. 求 V 的维数.

得分	

四、（共15分）设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

1. 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量;
2. 求一个可逆矩阵 $\boldsymbol{T}$ 使 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ 为对角矩阵;
3. 求 $\lim\limits_{n\to\infty} 4^{-n}\boldsymbol{A}^n$.（注: 若 $\boldsymbol{B}_n=(b_{ij}(n))$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\boldsymbol{B}_n$ 是指矩阵 $\big(\lim\limits_{n\to\infty} b_{ij}(n)\big)$）

得分	

五、（共 10 分）设 $\mathscr{A}$ 是 n 维欧氏空间 V 的正交变换,

$$W = \{\boldsymbol{\alpha} \in V \mid \mathscr{A}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}\}, \quad U = \{\boldsymbol{\beta} - \mathscr{A}\boldsymbol{\beta} \mid \boldsymbol{\beta} \in V\}$$

是 V 的两个子空间. 证明: $W^{\perp} = U$.

得分	

六、（共 15 分） $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{T}$ 为 n 阶矩阵，$\boldsymbol{AT}=\boldsymbol{TB}$，$f(x)$ 是多项式.

1. 证明：$f(\boldsymbol{A})\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}f(\boldsymbol{B})$.
2. 设 $g(x)$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式. 证明：$f(\boldsymbol{A})$ 可逆当且仅当 $(f(x),g(x))=1$.
3. 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 没有相同的特征根, 证明：$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{O}$.

一、 1. ✔ 2. ✘ 3. ✘ 4. ✔

~~5. ✔~~ 5. ✘ 6. ✔

二、 1. $1+i, 1\pm\sqrt{2}$ 2. $a=-1$, $b=-1$. 3. $\sqrt{3}$, $\pi/2$.

4. $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 可逆.

三、 因为 $\boldsymbol{A}$ 是对称幂等矩阵, 所以 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$, [2]

于是, $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0$ 等价于 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0$, [2]

由内积的性质, $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=0$ 当且仅当 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$.（亦可直接证明） [2]

所以 $V=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n | \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\}=\mathcal{N}(\boldsymbol{A})$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间. [1]

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系所含向量个数等于 $n-\mathrm{r}\,(\boldsymbol{A})$,

而基础解系构成 $\mathcal{N}(\boldsymbol{A})$ 的一组基, 故 $\dim V=n-\mathrm{r}\,(\boldsymbol{A})=n-r$. [3]

四、 先计算 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 得 $\lambda_1=1,\ \lambda_2=3,\ \lambda_3=4$; [3]

对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\-4\\-1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\-4\\-4\end{pmatrix}$. [3]

令 $\boldsymbol{T}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)=\begin{pmatrix}1&1&1\\-4&-2&-4\\-1&-1&-4\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&4\end{pmatrix}$. [3]

于是 $4^{-n}\boldsymbol{A}^n=4^{-n}\boldsymbol{T}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3^n&0\\0&0&4^n\end{pmatrix}\boldsymbol{T}^{-1}=\boldsymbol{T}\begin{pmatrix}(1/4)^n&0&0\\0&(3/4)^n&0\\0&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{T}^{-1}$,

故 $\lim\limits_{n\to\infty}4^{-n}\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{T}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{T}^{-1}$. [3]

但 $\boldsymbol{T}^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-4&-3&2\\12&3&0\\-2&0&-2\end{pmatrix}$, 于是得 $\lim\limits_{n\to\infty}4^{-n}\boldsymbol{A}^n=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&0&-1\\4&0&4\\4&0&4\end{pmatrix}$. [3]

五、 任给 $\boldsymbol{\alpha} \in W$, $\boldsymbol{\alpha} = \mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}$, 由 $\mathscr{A}$ 保内积, $(\boldsymbol{\alpha}, \mathscr{A}\boldsymbol{\beta}) = (\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}, \mathscr{A}\boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$; [2]

$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} - \mathscr{A}\boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) - (\boldsymbol{\alpha}, \mathscr{A}\boldsymbol{\beta}) = 0$, 所以 $W \perp U$, $W + U$ 是直和; [2]

W 是 $\mathscr{E} - \mathscr{A}$ 的核, 而 U 是 $\mathscr{E} - \mathscr{A}$ 的象空间, [2]

所以, $\dim W = n - \mathrm{r}(\mathscr{E} - \mathscr{A})$, $\dim U = \mathrm{r}(\mathscr{E} - \mathscr{A})$, [2]

$\dim(W + U) = \dim W + \dim U = n$, 所以 $V = W \oplus U$. [2]

方法二.

若 $W = \{\mathbf{0}\}$, 则 $\mathscr{A} - \mathscr{E}$ 是单同态, 它也满同态, 故 $U = V$, 结论成立. [1]

若 $W = V$, 则 $\mathscr{A} = \mathscr{E}$, 所以 $U = \{\mathbf{0}\}$, 结论也成立. [1]

下设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}_r$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 分别是 W 和 $W^\perp$ 的标准正交基, $1 \le r < n$.

则 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}_r, \boldsymbol{\varepsilon}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 是 V 的标准正交基.

由于 $\mathscr{A}$ 是正交变换, 且 $\mathscr{A}|_W$ 是单位变换, 得 $W^\perp$ 也是 $\mathscr{A}$-子空间,

$\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵为准对角矩阵 $\mathrm{diag}(\boldsymbol{E}_r, \boldsymbol{B})$, $\boldsymbol{B}$ 是 $n - r$ 阶正交矩阵; [4]

$\mathscr{E} - \mathscr{A}$ 的矩阵为 $\mathrm{diag}(\boldsymbol{O}_r, \boldsymbol{E} - \boldsymbol{B})$; 若 $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}_r)\boldsymbol{x}_1 + (\boldsymbol{\varepsilon}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{x}_2$,

则有 $\boldsymbol{\beta} - \mathscr{A}\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{\varepsilon}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}_n)(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{B})\boldsymbol{x}_2$, 所以 $U \subset W^\perp$. [2]

W 是 $\mathscr{A}$ 的特征值为 1 的特征子空间, 故 1 不是 $\boldsymbol{B}$ 的特征值, $\boldsymbol{E} - \boldsymbol{B}$ 可逆,

得 $\boldsymbol{\varepsilon}_{r+1} - \mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}_n - \mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 线性无关, $\dim U \ge n - r$, 故 $U = W^\perp$. [2]

六、 (1) 归纳法证明 $a_k\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}(a_k\boldsymbol{B}^k)$, [3]

设 $f(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$. 则 $f(\boldsymbol{A})\boldsymbol{T} = \cdots$ [2]

(2) **充分性.** 若 $(f(x), g(x)) = 1$, 有 $u(x), v(x)$ 使 $u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1$;

所以 $u(\boldsymbol{A})f(\boldsymbol{A}) + v(\boldsymbol{A})g(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{E}$;

由 $g(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{O}$ 得 $u(\boldsymbol{A})f(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{E}$, 所以, $f(\boldsymbol{A})$ 可逆. [3]

必要性. 若 $f(\boldsymbol{A})$ 可逆, 则 $f(\boldsymbol{A})$ 没有零特征根;

若 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征根, 则 $f(\lambda)$ 是 $f(\boldsymbol{A})$ 的特征根, 所以, $f(\lambda) \ne 0$;

故 $f(x), g(x)$ 没有公共根, 它们互素. [3]

(3) 取 $f(x)$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的特征多项式, $f(\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{O}$, 由第一小题, 得 $f(\boldsymbol{A})\boldsymbol{T} = \boldsymbol{O}$; [2]

由 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 没有相同的特征根, 得 $(f(x), g(x)) = 1$, $f(\boldsymbol{A})$ 可逆, $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{O}$. [2]