我郑重承诺：

在本次考试中，遵守考场纪律、自尊自爱、平等竞争，维护学校的荣誉和学生的尊严。

签字：

2016 – 2017 学年第二学期 **高等代数**（II）期末试题

（考试时间：2017.06.28 上午 8:00–10:00）

姓名＿＿＿＿＿＿ 学号＿＿＿＿＿＿

题号	一	二	三	四	五	六	合计	评卷人
题分	30	20	10	10	15	15	100	
得分								

得分	

一、（共 30 分）判断下列命题是否成立, 画(✔)或(✘), 并说明理由

1. 若 α 是 $f'(x)$ 的 m 重根, 则 α 是 $f(x)$ 的 $m+1$ 重根.

   [ ]

2. $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是 P 上的 n 阶矩阵, 则 $\mathcal{R}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) \subset \mathcal{R}(\boldsymbol{A}) + \mathcal{R}(\boldsymbol{B})$.

   [ ]

3. $\boldsymbol{A}$ 为 P 上的 n 阶满秩矩阵, 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 \\ \boldsymbol{A}_2 \end{pmatrix}$, 则 $P^n = \mathcal{N}(\boldsymbol{A}_1) \oplus \mathcal{N}(\boldsymbol{A}_2)$.

   [ ]

4. 如果 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 有相同的特征值, 则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似.

   [ ]

5. n 维线性空间 V 的线性变换 $\mathscr{A}$ 在不同基下的矩阵一定不同.

   [ ]

6. 实反对称矩阵的特征值都是纯虚数.

   [ ]

得分	

二、（共20分）填空

1. 把 $f(x)=2x^3-x^2+3x-5$ 表成 $(x-1)$ 的方幂的线性组合为

____.

2. 在 $M_2(P)$ 中, 设

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},$$

则 $L(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2)\cap L(\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2)$ 的一组基是 ______________________________.

3. 设 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的矩阵为 $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$,

则 $\mathscr{A}$ 在基 ____________________ 下的矩阵为对角矩阵 __________________.

4. 在 $\mathbb{R}^4$ 中, 已知 $W=L(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$, 其中

$$\boldsymbol{\alpha}=(1,1,-1,1)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\beta}=(1,-1,1,1)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\gamma}=(1,0,1,1)^{\mathrm{T}},$$

向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的夹角为 ______________,

W 的正交补 $W^{\perp}$ 的一组标准正交基为 ______________________,

得分	

三、(共 10 分) 已知实二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_2x_3$$

可通过正交替换化为标准形 $y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$. 求 a 的值和所做的正交替换矩阵.

得分	

四、（共10分） 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵.

1. 证明: $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值都不为零.
2. 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 将 $\boldsymbol{A}^*$ 和 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 表示为 $\boldsymbol{A}$ 的多项式形式.

得分	

五、（共 15 分） 设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\in\mathbb{Z}[x]$.

1. 证明: 若有素数 p, 使 $p\nmid a_0$, $p\mid a_i(1\le i\le n)$, $p^2\nmid a_n$, 则 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约.
2. 证明: 若存在奇数 a 和偶数 b 使得 $f(a)$ 和 $f(b)$ 都是奇数, 则 $f(x)$ 无整数根.

得分	

六、(共 15 分) 设 $\boldsymbol{\eta}$ 是 n 维欧式空间 V 的一个单位向量. 定义镜面反射 $\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}-2(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\eta}$. 若 W 是 V 的子空间, 记 $\mathscr{P}_W$ 为 V 到 W 的正交投影.

1. 验证 $\mathscr{A}$ 为对称变换, 并写出 $\mathscr{A}$ 的特征值.
2. 求 V 的子空间 W_1, W_2, 使得 $\mathscr{A}=\mathscr{P}_{W_1}-\mathscr{P}_{W_2}$.
3. 证明: 线性变换是对称变换当且仅当其可以写成一些正交投影的线性组合.