20**- 20** 学年第二学期《高等代数 II》期中样卷

（考试时间 20**年**月 ** 日　）

我郑重承诺：在本次考试中，遵守考场纪律、自尊自爱、平等竞争，维护学校的荣誉和学生的尊严。 承诺人签字：

一、 单选题（共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）.

1．在$P[x]$里能整除任意多项式的多项式是（　　）。

A．零多项式　B．零次多项式　C．本原多项式　D．不可约多项式

2．设$g(x)=x+1$是$f(x)=x^6-k^2x^4+4kx^2+x-4$的一个因式，则$k=$（　　）。

A．1　B．2　C．3　D．4

3．以下命题不正确的是（　　）。

A．若$f(x)|g(x)$，则$f(x),g(x)$的最大公因式是$f(x)$；

B．集合$F=\{a+bi|a,b\in Q\}$是数域；

C．若$(f(x),f'(x))=1$，则$f(x)$没有重因式；

D．设$p(x)$是$f'(x)$的$k-1$重因式，则$p(x)$是$f(x)$的k重因式

4．整系数多项式$f(x)$在Z上不可约是$f(x)$在Q上不可约的（　　）条件.

A． 充分　B． 充分必要　C．必要　D．既不充分也不必要

5．下列对于多项式的结论不正确的是（　　）.

A．如果$f(x)|g(x), g(x)|f(x)$，那么$f(x)=g(x)$

B．如果$f(x)|g(x), f(x)|h(x)$，那么$f(x)|(g(x)\pm h(x))$

C．如果$f(x)|g(x)$，那么$\forall h(x)\in P[x]$，有$f(x)|g(x)h(x)$

D．如果$f(x)|g(x), g(x)|h(x)$，那么$f(x)|h(x)$

6．下面论述中，错误的是（　　）。

A． 奇数次实系数多项式必有实根；　B． 代数基本定理适用于复数域；

C． 任一数域包含Q；　D． 在$P[x]$中，$f(x)g(x)=f(x)h(x)\Rightarrow g(x)=h(x)$

7. 考虑如下命题：

(1) 两个多项式做带余除法的结果不随数域的变化而改变

(2) 两个多项式的互素性随数域的变化而改变

(3) 两个多项式的最大公因式不随数域的变化而改变

(4) 一个多项式有无重因式随数域的扩大而改变

其中正确的个数为（　）

A． 1 个　B． 2 个　C． 3 个　D． 4 个

8．下列集合中，是R^3的子空间的为（　　），其中$\alpha=(x_1,x_2,x_3)'$

A．$\{\alpha|x_3\ge 0\}$　B．$\{\alpha|x_1+2x_2+3x_3=0\}$　C．$\{\alpha|x_3=1\}$　D．$\{\alpha|x_1+2x_2+3x_3=1\}$

9． 下列集合有（　　）个是R^n的子空间；

$w_1=\{\alpha=(x_1,x_2,\cdots x_n)\,|\,x_i\in R, x_1+x_2+\cdots+x_n=0\}$；

$w_2=\{\alpha=(x_1,x_2,\cdots x_n)\,|\,x_i\in R, x_1=x_2=\cdots=x_n\}$；

$w_3=\{\alpha=(a,b,a,b,\cdots,a,b)\,|\,a,b\in R\}$；

$w_4=\{\alpha=(x_1,x_2,\cdots x_n)\,|\,x_i\text{为整数}\}$；

10． 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与$\beta_1,\beta_2,\beta_3$都是三维向量空间$V$的基，且

$\beta_1=a_1,\beta_2=\alpha_1+\alpha_2,\beta_3=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，则矩阵$P=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$是由基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到

（　　）的过渡矩阵。

A．β_2,β_1,β_3　B．β_1,β_2,β_3　C．β_2,β_3,β_1　D．β_3,β_2,β_1

二、简答题（共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

1．设a,b是两个不相等的常数，求给定的多项式$f(x)$除以$(x-a)(x-b)$所得的余式.

2．设$f(x)\in R[x]$使得$\deg f(x)<3$且$f(1)=1, f(-1)=3, f(2)=3$，求$f(x)$.

3．求多项式$f(x)=x^4+x^3-3x^2-4x-1$与$g(x)=x^3+x^2-x-1$的最大公因式.

4． 已知$R[x]=L(1,(x-1)^2)\oplus L((x-1),(x-1)^3)$，将多项式$5x^3-12x^2+13x-4$分解为子空间$L(1,(x-1)^2)$中的多项式与子空间$L((x-1),(x-1)^3)$中的多项式

之和.

5. 判断$1-x,1+x,x+x^2$是否可以构成$P[x]_3$的一组基，如果可以，求出$f(x)=a+bx+cx^2$在这组基下的坐标；如果不可约，将其极大线性无关组扩充为$P[x]_3$的一组基，并求$f(x)=a+bx+cx^2$在这组基下的坐标.

6. 设$V=\left\{\begin{pmatrix} a & b+ci \\ b-ci & -a \end{pmatrix} a,b,c\in R\right\}$,其中 i 是虚数，V 对矩阵的加法和数乘构成实数域上的线性空间，求 V 的维数和一组基.

三．计算和证明题，要求写出详细的计算或证明过程. (共 40 分)

1.（10 分）数域P上的多项式$f(x)$是 4 次多项式，如果$x-2$是$f(x)+5$的三重因式，$x+3$是$f(x)-2$的二重因式，求$f(x)$.

2.（15 ） 设 R^3 中的两个基分别为 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$，

$\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$（1）求由基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的过渡矩阵.

（2）已知向量α在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的坐标为$\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$，求$\alpha$在基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$下的坐标.

3. （15 分） 在线性空间$P[x]_n$中，

（1）证明：$1,x,x^2,\dots,x^{n-1}$和$1,x-a,(x-a)^2,\dots,(x-a)^{n-1}$都是 $P[x]_n$的基，其中$a\in P$且$a\neq 0$；

（2）当$n=3,a=2$时，给出从基$1,x,x^2,\dots,x^{n-1}$到基$1,x-a,(x-a)^2,\dots,(x-a)^{n-1}$的过渡矩阵及相应的坐标变换公式；

（3）求$P[x]_n$的一组基，使得$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}\in P[x]_n$在这组基下的坐标都是非负的.