一、 1. ✘ 2. ✔ 3. ✔ 4. ✘ 5. ✘ 6. ✘

二、 1. $2(x-1)^3+5(x-1)^2+7(x-1)-1$

2. $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

3. $\boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_3, \boldsymbol{\varepsilon}_1-\boldsymbol{\varepsilon}_3$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. 答案不唯一

4. $\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,-1)^{\mathrm{T}}$

三、 二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&a\\0&a&3\end{pmatrix}$. [1]

根据假设, 存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\mathrm{diag}(1,2,5)$,

所以, $|\boldsymbol{A}|=1\times2\times5=10$, 即 $2(3^2-a^2)=10$, 解得 $a=\pm2$. [2]

$a=-2$, $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&-2\\0&-2&3\end{pmatrix}$, 其特征值为 $\lambda=1,2,5$. 分别对应的单位特征向量为

$$\boldsymbol{\eta}_1=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\eta}_2=\pm\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\eta}_3=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}. \qquad [4]$$

所做的正交替换矩阵为 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)$ 八种情形之一. [1]

$a=2$, 同理, 可得 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_1)$. [2]

注记. 两种情形, 各写出一个正交矩阵, 即给满分.

四、 1. *必要性* 设 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

反证法 设 0 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 则存在非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$, 使得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$. [1]

得方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解, 与 $\boldsymbol{A}$ 可逆矛盾! [1]

充分性 若 $\boldsymbol{A}$ 的特征值都不为零, 则 0 不是 $f(\lambda)$ 的根,

即 $0\neq f(0)=(-1)^n|\boldsymbol{A}|$, 所以, $\boldsymbol{A}$ 可逆. [2]

2. $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为 n 次多项式, 设为

$$f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n,$$

其中 $a_n=(-1)^n|\boldsymbol{A}|$. [1]

若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, $a_n\neq0$, 由 Hamilton-Caylay 定理知

$$f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^n+a_1\boldsymbol{A}^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\boldsymbol{A}+a_n\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O},$$

故

$$-\frac{1}{a_n}(\boldsymbol{A}^{n-1}+a_1\boldsymbol{A}^{n-2}+\cdots+a_{n-1}\boldsymbol{E})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E},$$

因此, $\boldsymbol{A}^{-1}=-\frac{1}{a_n}(\boldsymbol{A}^{n-1}+a_1\boldsymbol{A}^{n-2}+\cdots+a_{n-1}\boldsymbol{E})$, [3]

以及, $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=(-1)^{n-1}(\boldsymbol{A}^{n-1}+a_1\boldsymbol{A}^{n-2}+\cdots+a_{n-1}\boldsymbol{E})$. [2]

五、 1. **方法一** 记 $g(y)=y^n f(1/y)=a_0y^n+a_1y^{n-1}+\cdots+a_{n-1}y+a_n\in\mathbb{Z}[y]$.

由假设,

$$p\nmid a_0,\quad p\mid a_i(1\le i\le n),\quad p^2\nmid a_n,$$

知 $g(y)$ 满足 Eisenstein 判别法的条件, 所以, $g(y)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约. [4]

反证法 若 $f(x)=f_1(x)f_2(x)$, $f_1(x),f_2(x)\in\mathbb{Z}[x]$, $\deg f_i(x)=n_i<n$.

则 $g_i(y)=y^{n_i}f_i(1/y)\in\mathbb{Z}[x]$, 且 $g(y)=y^{n_1}f_1(1/y)y^{n_2}f_2(1/y)=g_1(y)g_2(y)$.

即得, $g(y)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上可约, 矛盾! [4]

方法二 **反证法** 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上可约, 则存在整系数多项式

$$g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0$$
$$h(x)=c_lx^l+b_{l-1}x^{l-1}+\cdots+c_1x+c_0$$

其中 $m,l>0$, 使得 $f(x)=g(x)h(x)$. [2]

由于 $p\nmid a_0=b_0c_0$, 得 $p\nmid b_0$, $p\nmid c_0$;

由 $p\mid a_n=b_mc_l$, $p^2\nmid a_n$, 得 $p\mid b_m,p\nmid c_l$ 或 $p\mid c_l,p\nmid b_m$. [3]

不妨设, $p\mid b_m,p\nmid c_l$, 存在 $0\le k<m$, 使得 $p\nmid b_k$, $p\mid b_{k+1},\ldots,b_m$.

$$a_{k+l}=b_kc_l+b_{k+1}c_{l-1}+b_{k+2}c_{l-2}+\cdots,$$

得 $p\nmid a_{k+l}$, $1\le k+l<n$, 矛盾! [3]

2. **反证法** 设 c 是 $f(x)$ 的一个整数根.

根据因式定理, $f(x)=(x-c)q(x)$, $q(x)\in\mathbb{Z}[x]$. [3]

因为, $f(a)=(a-c)q(a)$, $f(b)=(b-c)q(b)$ 都是奇数,

而 $q(a),q(b)\in\mathbb{Z}$, 所以, $a-c,b-c$ 必为奇数.

故得 $a-b$ 为偶数, a,b 同奇偶, 与它们一奇一偶的假设矛盾! [4]

六、 1. 方法一 任意 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$,

$$\begin{aligned}(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})&=(\boldsymbol{\alpha}-2(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})-2(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\beta})\\&=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})-2(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\eta})=(\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}\boldsymbol{\beta}).\end{aligned}$$

所以, $\mathscr{A}$ 是对称变换. [3]

$\mathscr{A}$ 的特征值为 ±1. [2]

方法二 取 $\boldsymbol{\varepsilon}_n=\boldsymbol{\eta}$, 把它扩充为 V 的一组标准正交基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\dots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$.

$$\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_i=\begin{cases}\boldsymbol{\varepsilon}_i, & i=1,2,\dots,n-1,\\ -\boldsymbol{\varepsilon}_n, & i=n.\end{cases}$$

$\mathscr{A}$ 在 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\dots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的矩阵为 $\mathrm{diag}(\boldsymbol{E}_{n-1},-1)$, 故 $\mathscr{A}$ 为对称变换. [3]

$\mathscr{A}$ 的特征值为 ±1. [2]

2. 方法一 设 W_1 和 W_2 是 $\mathscr{A}$ 的分别属于 ±1 的特征子空间.

则有 $W_2=L(\boldsymbol{\eta})=W_1^{\perp}$.

任意 $\boldsymbol{\alpha}\in V$ 可以唯一写成 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}+k\boldsymbol{\eta}$, 其中 $\boldsymbol{\beta}\in W_1$, $k\in\mathbb{R}$. [2]

可见, $\mathscr{P}_{W_1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$, $\mathscr{P}_{W_2}\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\eta}$. 于是,

$$\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}+k\boldsymbol{\eta}-2(\boldsymbol{\beta}+k\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\eta})\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\beta}-k\boldsymbol{\eta}=(\mathscr{P}_{W_1}-\mathscr{P}_{W_2})\boldsymbol{\alpha}.$$

所以, $\mathscr{A}=\mathscr{P}_{W_1}-\mathscr{P}_{W_2}$. [2]

方法二 若 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\dots,\boldsymbol{\xi}_r$ 是 W 的一组标准正交基, 则

$$\mathscr{P}_W(\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\xi}_1)\boldsymbol{\xi}_1+(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\xi}_2)\boldsymbol{\xi}_2+\dots+(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\xi}_r)\boldsymbol{\xi}_r. \quad [1]$$

任意 $\boldsymbol{\alpha}\in V$, 可以写成 $\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\varepsilon}_1)\boldsymbol{\varepsilon}_1+(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\varepsilon}_2)\boldsymbol{\varepsilon}_2+\dots+(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{\varepsilon}_n$, 于是,

$$\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\varepsilon}_1)\boldsymbol{\varepsilon}_1+(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\varepsilon}_2)\boldsymbol{\varepsilon}_2+\dots+(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\varepsilon}_{n-1})\boldsymbol{\varepsilon}_{n-1}-(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{\varepsilon}_n$$

与正交投影的表达式比较, 令 $W_1=L(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\dots,\boldsymbol{\eta}_{n-1})$ 和 $W_2=L(\boldsymbol{\eta}_n)$.

可见, $\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}=\mathscr{P}_{W_1}\boldsymbol{\alpha}-\mathscr{P}_{W_2}\boldsymbol{\alpha}=(\mathscr{P}_{W_1}-\mathscr{P}_{W_2})\boldsymbol{\alpha}$, $\mathscr{A}=\mathscr{P}_{W_1}-\mathscr{P}_{W_2}$. [3]

3. 设 $\mathscr{B}$ 是 V 上的线性变换.

必要性 设 $\mathscr{B}$ 的全部特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_s$. 若 $\mathscr{B}$ 是对称变换, 则

$$V=W_1\oplus W_2\oplus\dots\oplus W_s,$$

其中 W_i 是 $\mathscr{B}$ 的对应于 λ_i 的特征子空间. 并且它们两两正交.

任意 $\boldsymbol{\alpha}\in V$, 有 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\dots+\boldsymbol{\alpha}_s$, $\boldsymbol{\alpha}_i\in W_i$. 于是, $\mathscr{P}_{W_i}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_i$.

$$\mathscr{B}\boldsymbol{\alpha}=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\dots+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_s=(\lambda_1\mathscr{P}_{W_1}+\lambda_2\mathscr{P}_{W_2}+\dots+\lambda_s\mathscr{P}_{W_s})\boldsymbol{\alpha}.$$

所以, $\mathscr{B}=\lambda_1\mathscr{P}_{W_1}+\lambda_2\mathscr{P}_{W_2}+\dots+\lambda_s\mathscr{P}_{W_s}$. [4]

充分性 正交投影是对称变换, 对称变换的线性组合也是对称变换,

故若 $\mathscr{B}$ 是一些正交投影的线性组合, 则 $\mathscr{B}$ 是对称变换. [2]