2019- 2020 学年第一学期《高等代数 I》期中考试试题

2019　11　　　: 00　:30

我郑重承诺：在本次考试中，遵守考场纪律、自尊自爱、平等竞争，维护学校的荣誉和学生的尊严。 承诺人签字：

一、 判断题（每小题　分，共　分）判断下列命题是否成立 并说明理由。

1、任意一个 n 线性方程组，如果其方程个数少于未知量个数，则该方程组一定有无穷多个解.

（错），反例

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ 2x_1+2x_2+2x_3=3 \end{cases}$$

2、向量组（Ⅰ）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$,（Ⅱ）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$,（Ⅲ）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$，若各向量组的秩分别为 r（Ⅰ）= r（Ⅱ）= 3， r（Ⅲ）= 4，那么向量组（Ⅳ）：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4$ 的秩为 4。

（对）：

证明：r（Ⅰ）= r（Ⅱ）= 3，所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，而 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关，所以

α_4 可以被 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，

r（Ⅲ）= 4，所以 α_5 不能被 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 所以向量组（Ⅳ）：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4$ 的秩为 4.

3、 行列式非零子式所在的行向量组和列向量组均线性无关；

(对)

证明：行列式非零子式的行向量组和列向量组均性无关，将这些行向量组和列向量组去掉的分量补齐，仍然线性无关。

4、$m\times n$ 矩阵 A 的秩为 r，则该矩阵的任意 s 行组成的矩阵的秩不小于 $r+s-m$.

（对）

证明：矩阵 A 的任意 s 行组成的矩阵，其秩是在矩阵 A 的秩基础上，去掉一行，秩最多减 1，所以其秩 $\geq r-(m-s)=r+s-m$

二、填空题（每小题 5 分，共　分）

1、四阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ =___ x^4 ______.

2、 设 $\{i_1,i_2,\cdots,i_n\}=\{1,2,\cdots,n\}$,则 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(i_ni_{n-1}\cdots i_1)=$ __ $\dfrac{n(n-1)}{2}$ ________.

3、含有 n 个未知量 n 个方程的齐次线性方程组有非零解的充分且必要条件是

__________系数行列式等于 0____.（或者系数矩阵秩小于 n）

4、4 阶行列式 $D_4=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & x \\ b_1 & b_2 & b_3 & x \\ c_1 & c_2 & c_3 & x \\ d_1 & d_2 & d_3 & x \end{vmatrix}$ 中第一列各元素的代数余子式之和 $A_{11}+A_{21}+A_{31}+A_{41}=$ ______________0______________;

5、 设 $n\geq 2$, $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 两两不同，则 $f(x)=\begin{vmatrix} x & a_1 & \dots & a_1 \\ a_2 & x & \dots & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_n & \dots & x \end{vmatrix}$ 的不同根为

____________________________。

6、已知向量组 $\alpha_1=(1,0,1),\alpha_2=(2,2,3),\alpha_3=(1,3,t)$ 线性无关，则__ $t\neq\dfrac{5}{2}$ ______。

三．（10 分）计算n阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x & 4 & 4 & \cdots & 4 \\ 1 & x & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & x & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

解：将第一列的-2倍加到第二到第n列

$$D_n=\begin{vmatrix} x & 4-2x & 4-2x & \cdots & 4-2x \\ 1 & x-2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & x-2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & x-2 \end{vmatrix}\cdots\cdots\cdots(\ \text{分})$$

$$\underline{\underline{r_1+r_i(i=2,3,\ldots,n)}}$$

$$D_n=\begin{vmatrix} x+2(n-1) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x-2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & x-2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & x-2 \end{vmatrix}\cdots\cdots\cdots(\ \text{分})$$

$$=[x+2(n-1)](x-2)^{n-1}\cdots\cdots\cdots(\ \text{分})$$

（也可以用加边方法）

四、　分 设$\alpha_1=(1,-1,2,4)$，$\alpha_2=(0,1,3,5)$，$\alpha_3=(3,0,7,14)$，$\alpha_4=(1,-1,2,0)$

$\alpha_5=(3,1,7,8)$.

计算该向量组的

（1）　秩；

（2）　所有极大无关组。

解：（1）$(\alpha_1^{\mathrm{T}},\alpha_2^T,\alpha_3^T,\alpha_4^T,\alpha_5^T)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 7 & 2 & 7 \\ 4 & 5 & 14 & 0 & 8 \end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3-2r_1\\ r_4-4r_1}]{r_2+r_1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-5r_2]{r_3-3r_2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -8 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & -13 & -4 & -24 \end{pmatrix}\xrightarrow{r_4-\frac{13}{8}r_3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -8 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -\frac{49}{8} \end{pmatrix}\cdots\cdots\cdots(\ \text{分})$$

所以向量组的秩为 4

（2）易见极大无关组为以下五个向量组：

α_1，α_2，α_3，α_4

α_1，α_2，α_3，α_5

α_2，α_3，α_4，α_5　　　　$\cdots\cdots\cdots(\ \text{分})$

α_1，α_3，α_4，α_5

α_1，α_2，α_4，α_5

五（15 分）设n阶行列式对角线及对角线之下元素为 1，其余为-1

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

求D_n的展开式中正项的总数.

解：由于的元素都是±1，因此D_n的展开式$n!$项中，每一项不是 1 就是±1，设

正项总数为p，负项总数为q，$\cdots\cdots\cdots(\ \text{分})$

则

$$\begin{cases} D_n=p-q \\ n!=p+q \end{cases}\quad \text{所以}\ p=\frac{1}{2}(D_n+n!)\qquad\cdots\cdots\cdots(\ \text{分})$$

而

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & -1 & -1 & \cdots & -1\\ 1 & 1 & -1 & \cdots & -1\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1\end{vmatrix}\underline{\underline{r_i+r_n}}\begin{vmatrix}2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 2 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 0\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\end{vmatrix}=2^{n-1}$$ ………(分)

$p=\frac{1}{2}(2^{n-1}+n!)$ ………(分)

六. (分) 设 γ 是非齐次方程组 $AX=\beta$ 的一个解，$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$ 是其导出组 $AX=0$ 的一个基础解系

证明 （1） $\gamma,\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$ 线性无关；

（2） $\gamma,\gamma+\eta_1,\cdots,\gamma+\eta_{n-r}$ 是方程组 $AX=\beta$ 的 $n-r+1$ 个线性无关的解；

（3）方程组 $AX=\beta$ 的任一解都可以表示为这 $n-r+1$ 个解的线性组合，且组合系数之和是 1。

证明：（1）设 $k\gamma+k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_{n-r}\eta_{n-r}=0$，则 $k=0$，否则 γ 可由 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$ 线性表示，从而 γ 也是导出组的解，矛盾。所以

$\gamma,\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$ 线性无关………(分)

（2）若 $k\gamma+k_1(\gamma+\eta_1)+k_2(\gamma+\eta_2)+\cdots+k_{n-r}(\gamma+\eta_{n-r}+=0$

则（$k+k_1+k_2+\cdots+k_{n-r}$） $\gamma+k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_{n-r}\eta_{n-r}=0$，

( ) $\gamma+k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_{n-r}\eta_{n-r}=0$

由（1）知 $\begin{cases}k+k_1+k_2+\cdots+k_{n-r}=0\\ k_1=0\\ \vdots\\ k_{n-r}=0\end{cases}$

所以 $k=k_1=k_2=\cdots=k_{n-r}=0$，所以 $\gamma,\gamma+\eta_1,\cdots,\gamma+\eta_{n-r}$ 是方程组 $AX=\beta$ 的 $n-r+1$ 个线性无关的解。 ………(分)

（3） 方程组 $AX=\beta$ 的任一解 δ，则

$$\delta=\gamma+k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_{n-r}\eta_{n-r}$$

$$=\gamma+k_1(\gamma+\eta_1-\gamma)+k_2(\gamma+\eta_2-\gamma)+\cdots+k_{n-r}(\gamma+\eta_{n-r}-\gamma)$$
$$=(1-k_1-k_2-\cdots-k_{n-r})\gamma+k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_{n-r}\eta_{n-r}$$

以表示为了这 $n-r+1$ 个解的线性组合，且组合系数之和是 1。

………(分)

评分标准说明：

1、 判断题，判断对 3 分，说明:2 分；

2、 填空题第五题所有人不扣分；