作业 8 补充

第二题

- 首先，判断该问题是否为凸优化。由于约束是线性的，只需考虑目标函数是否是凸函数。令

  $$f(x) = \frac{1}{2}x^T P x + q^T x + r. \tag{1}$$

  求 $f(x)$ 关于 x 的二阶导，有

  $$\nabla^2 f(x) = \frac{1}{2}(P^T + P) = P. \tag{2}$$

  计算 P 的特征值为 $0.26, 13.8, 27.9$，易知 P 为正定矩阵，即原问题为一个凸优化。

- 接下来证明对于 x^* 存在对偶变量 λ^* 使得 x^*, λ^* 满足 KKT 条件。原优化的拉格朗日函数如下，

  $$L(x, \lambda_1, \lambda_2) = f(x) - \lambda_1^T(x - I) - \lambda_2^T(-x - I). \tag{3}$$

  其中 $I = (1,1,1)^T$, 对偶变量 $\lambda_1 = (\lambda_{1,1}, \lambda_{1,2}, \lambda_{1,3})^T$, $\lambda_2 = (\lambda_{2,1}, \lambda_{2,2}, \lambda_{2,3})^T$. 根据 KKT 条件，若 x^* 为最优解，则存在 λ_1^*, λ_2^* 满足

  $$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = (0,0,0)^T \\ \lambda_1^* \odot (x^* - I) = (0,0,0)^T \\ \lambda_2^* \odot (-x^* - I) = (0,0,0)^T \end{cases}$$

  代入 $x^* = (1, 0.5, -1)$ 解得 $\lambda_1^* = (1,0,0)^T, \lambda_2^* = (0,0,2)^T$ 满足上式。因此 x^* 为最优解。