# 期中复习讲义

课程教师：金希深
时间：4月18日18: 00
地点：教二2102

## 第六章

**习题** 1.1. 设 $f\left(x+y, \frac{y}{x}\right) = x^2 - y^2\,(x \neq 0)$，求 $f(x, y)$.

提示：代换$u = x + y, v = \frac{y}{x}$

**习题** 1.2. 判断下列极限是否存在，若存在，求出其极限:

1). $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,a)} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$  2). $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{xy+1}-1}{x+y}$

3). $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)x^2y^2}$  4). $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (1+xy)^{\frac{1}{x+y}}$

提示：

1. 运用$\lim f^g = \lim e^{g \ln f}$
2. 上下同时乘$\sqrt{xy+1}+1$
3. 利用$1 - \cos t \sim \frac{t^2}{2}$
4. 同1)

**习题** 1.3. 研究下列函数的连续性:

1). $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x+y}, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases};$  2). $f(x, y) = \begin{cases} x \sin\frac{1}{y}, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases};$

3). $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases};$  4). $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x-y}{x+y}, & x + y \neq 0 \\ 0, & x + y = 0 \end{cases};$

提示：
1）考虑$y = -x + kx^2, (k \neq 0)$上的点列。
2）利用有界量乘无穷小。
3）考虑$y = kx^2$上的点列。
4）同1）

**习题** 1.4. 设 $f(x,y)=\int_1^{x^2y}\frac{\sin t}{t}dt$，求 $f_x$ 和 $f_y$.

提示：先将$f$看成关于$u=x^2y$的函数，然后利用链式求导法则。

**习题** 1.5. 证明：函数 $u(x,t)=\varphi(x-at)+\psi(x+at)$ 满足波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

提示：利用链式求导法则。

**习题** 1.6. 证明：经过变换 $\xi=x+y,\eta=3x-y$ 后，方程 $u_{xx}+2u_{xy}-3u_{yy}+2u_x+6u_y=0$ 变为 $u_{\xi\eta}+\frac{1}{2}u_\xi=0$(设 $u$ 的所有二阶偏导数都连续).

提示：利用链式求导法则。$\frac{\partial}{\partial\xi}=\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial y}$、$\frac{\partial}{\partial\eta}=\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial\eta}\frac{\partial}{\partial y}$

**习题** 1.7. 证明：函数 $f(x,y)=\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处连续且偏导数存在，但偏导数在 $(0,0)$ 处不连续，而 $f$ 在 $(0,0)$ 可微.

提示：按定义验证偏导数在$(0,0)$的存在性。再分区域计算函数的偏导数并根据连续的定义验证偏导数的连续性。可微性依旧根据定义验证。

**习题** 1.8. 设 $y=f(x+t)$，其中 $t$ 是由方程 $y+g(x,t)=0$ 所确定的 $x,y$ 的函数. 求 $\frac{dy}{dx}$.

提示：将t看成关于$x,y$的函数，即$y=f(x+t(x,y))$。然后对$y=f(x+t)$两边关于$x$求导得到$\frac{dy}{dx}$表达式。再通过$y+g(x,t)=0$得到$t_x,t_y$并代入$\frac{dy}{dx}$表达式得到结论。

解答：由$y=f(x+t)$得到

$$\frac{dy}{dx}=f'\cdot(1+\frac{dt}{dx})=f'\cdot(1+\frac{\partial t}{\partial x}+\frac{\partial t}{\partial y}\frac{dy}{dx})$$

由$y+g(x,t)=0$得到

$$1+g_2\frac{\partial t}{\partial y}=0,\quad g_1+g_2\frac{\partial t}{\partial x}=0$$

将表达式代入前面关于$\frac{dy}{dx}$的方程再解出$\frac{dy}{dt}$即可。

**习题** 1.9. 证明：当 $1+xy=k(x-y)$($k$ 是常数) 时，有

$$\frac{dx}{1+x^2}=\frac{dy}{1+y^2}.$$

提示：利用$\frac{1+xy}{x-y}=k$，两边取全微分。

提示：或者先直接两边取全微分，然后用$k=(1+xy)/(x-y)$替换$k$。

**习题 1.10.** 设 $f(x,y)=3x^2y-x^4-2y^2$. 证明:$(0,0)$ 不是 $f$ 的极值点, 但沿着过 $(0,0)$ 的每一条直线,$(0,0)$ 都是极大值点.

提示：说明$(0,0)$不是极大值只需要说明对任意小的$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$都存在$(x,y)$使得$f(x,y)>0$。考虑$\sqrt{2}y=x^2$路径上的点。

**习题 1.11.** 在椭球体 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1$ 的内接长方体中, 求体积最大长方体的体积.

提示：以体积作为目标函数，椭球体表面作为限制条件建立最优化问题，然后运用拉格朗日乘数法求解。

**习题 1.12.** 求函数 $z=x^2+y^2-12x+16y$ 在有界闭区域 $x^2+y^2\leq 25$ 上的最值.

提示：分别寻找区域内部的驻点的取值以及边界上的最值。

## 第七章

**习题 1.2.** 求球 $x^2+y^2+z^2\leq R^2$ 和 $x^2+y^2+(z-R)^2\leq R^2$ 相交部分的体积 $V$(答案:$\frac{5}{12}\pi R^3$) 和表面积 $S$(答案:$2\pi R^2$).

提示：计算体积可以运用截面法，先计算纵坐标为z的界面与相交部分的面积S，然后对Sdz积分。

提示：计算表面积尝试球面面积微元$R^2\sin\varphi d\varphi d\theta$。

**习题 1.4.** 计算 $\iint_D\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}dxdy$, 其中 $D$ 是第一象限中由 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=4, y=0, y=x$ 围成的部分 (答案:$\frac{8}{3}\arctan\frac{b}{a}ab$).

提示：进行替换$(x,y)=(\rho a\cos\theta,\rho b\sin\theta),(\rho\in(0,2),\theta\in(0,\arctan(b/a))$

**习题 1.5.** 证明 $\iint_{x^2+y^2\leq 1}e^{x^2+y^2}dxdy\leq\left(\int_{-\frac{\sqrt{\pi}}{2}}^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}e^{x^2}dx\right)^2$.

提示：利用极坐标进行替换。

**习题 1.6.** 证明:$\iint_{|x|+|y|\leq 1}f(x+y)\,dxdy=\int_{-1}^{1}f(t)\,dt$.

提示：进行替换$t=x+y,w=x-y$。

**习题** 1.7. 计算曲面 $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}}=1$ 围成立体的体积 (答案:$\frac{4}{35}\pi abc$).

提示：进行替换$(x,y,z)=(a\rho^3\sin^3\varphi\cos^3\theta,b\rho^3\sin^3\varphi\sin^3\theta,c\rho^3\cos^3\varphi)$。

**习题** 1.9. 证明 $\iiint_{x^2+y^2+z^2\leq 1} f(z)\,dxdydz=\pi\int_{-1}^{1} f(z)\left(1-z^2\right)dz.$

提示：先对$dxdy$求积分。

**习题** 1.10. 设 $F(t)=\iiint_{x^2+y^2+z^2\leq t^2} f\left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz$, 其中 $f$ 是连续函数. 求 $F'(t)$(答案:$4\pi\operatorname{sgn}(t)\,t^2 f\left(t^2\right)$ ).

提示：$x^2+y^2+z^2$的出现说明可以考虑球坐标。

**习题** 1.11. 计算 $I=\iiint_{\Omega}(x+y+z)\,dV$, 其中

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\,|x^2+y^2+z^2\leq x+y+z+\frac{1}{4}\right\}$$

(答案:$2\pi$).

提示：区域$\Omega$可以化成$(x-1/2)^2+(y-1/2)^2+(z-1/2)^2=1$，然后利用区域对球心的对称性。

**习题** 1.12. 求由半球面 $z=\sqrt{3a^2-x^2-y^2}$ 以及旋转抛物面 $x^2+y^2=2az$ 所围成立体的表面积 (答案:$\frac{16\pi a^2}{3}$).

提示：旋转抛物面部分表面积尝试运用往$xy$平面投影的方法来计算。

提示：半球面部分面积可以用球面面积微元计算。

提示：还可以运用上学期旋转体表面积的公式来进行计算。

## 第八章

**习题** 1.3. 设 $S$ 是锥面 $z^2=k^2\left(x^2+y^2\right)(z\geq 0)$ 被柱面 $x^2+y^2=2ax\,(x\geq 0)$ 所截得的曲面. 计算第一型曲面积分 (答案:$\frac{\pi}{24}a^6\left(80k^2+7\right)\sqrt{1+k^2}$)

$$\iint_S\left(y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2\right)dS.$$

提示：可以运用往$xy$平面投影的方法计算$dS$。

**习题** 1.4. 计算第二型曲线积分 $\int_L e^{x+y+z}dx+e^{x+y+z}dy+e^{x+y+z}dz$, 其中 $L$ 是沿 $x=\cos\theta,y=\sin\theta,z=\frac{\theta}{\pi}$ 从 $(1,0,0)$ 到 $\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$(答案:$e^{\frac{3}{2}}-e$).

提示：$e^{x+y+z}dx+e^{x+y+z}dy+e^{x+y+z}dz=de^{x+y+z}$，然后我们可以利用下面的公式

## 推论 2.1

当 $Pdx+Qdy$是 $u(x,y)$的全微分时，

$$\int_A^B Pdx+Qdy=u(B)-u(A).$$

**习题** 1.5. 计算第二型曲面积分 $\iint_S x^3dydz+y^3dzdx$, 其中 $S$ 是上半椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的上侧 (答案:$\frac{2\pi}{5}abc\left(a^2+b^2\right)$).

提示：因为这个第二型曲面积分在xy平面上的积分为0，因此可以补上xy平面被S截取的部分，使得积分区域成为一个封闭曲面。再利用Gauss公式进行计算。

**习题** 1.6. 计算 $\iint_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$, 其中 $S$ 是球面 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ 的外侧 (答案:$\dfrac{8\pi R^3}{3}(a+b+c)$ ).

提示：运用高斯公式原积分为$\int_V 2x+2y+2zdxdydz$，再运用对称性。

**习题** 1.8. 设 $\boldsymbol{c}$ 是常向量,$S$ 是任意光滑闭曲线. 证明 $\int_S \cos\left(\widehat{\boldsymbol{c},\boldsymbol{n}}\right)dS=0$, 其中 $\widehat{\boldsymbol{c},\boldsymbol{n}}$ 表示 $\boldsymbol{c}$ 与曲线外法向量 $\boldsymbol{n}$ 之间的夹角.

提示：Green公式。

**习题** 1.9. 设 $\boldsymbol{c}$ 是常向量,$S$ 是任意光滑闭曲面. 证明 $\iint_S \cos\left(\widehat{\boldsymbol{c},\boldsymbol{n}}\right)dS=0$, 其中 $\widehat{\boldsymbol{c},\boldsymbol{n}}$ 表示 $\boldsymbol{c}$ 与曲面外法向量 $\boldsymbol{n}$ 之间的夹角.

提示：Gauss公式。

**习题** 1.10. 计算第二型曲线积分 $I=\oint_{C^+}\dfrac{-ydx+xdy}{4x^2+y^2}$, 其中 $C$ 表示任何一条不经过 $(0,0)$ 的简单闭曲线 (答案:$\pi$).

提示：使用Green公式要关注区域内是否有函数$-\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial Q}{\partial x}$的奇点。

提示：如果简单闭曲线包围的区域没有奇点，直接运用Green公式得到积分值为0。

提示：如果简单闭曲线包围的区域有奇点，先由Green公式说明积分值与路径无关。然后为了简化计算选取路径$(x,y)=(\frac{1}{2}\cos\theta,\sin\theta)$。

**习题** 1.11. 设曲面 $S$ 为曲线 $\begin{cases} z = e^y, \\ x = 0 \end{cases}$ $(1 \le y \le 2)$ 绕 $z$ 轴旋转一周所成曲面的下侧. 计算第二型曲面积分

$$\iint_S 4zx dydz - 2zdzdx + \left(1 - z^2\right) dxdy.$$

(答案:$\frac{13}{2}\pi e^4 - \frac{3}{2}\pi e^2 - 3\pi$)

提示：补上$z = e^2$的上侧以及$x = e^1$的下侧，然后利用Gauss公式。

**习题** 1.12. 求第二型曲线积分 $I = \oint_C \left(y^2 - z^2\right) dx + \left(z^2 - x^2\right) dy + \left(x^2 - y^2\right) dz$, 其中 $C$ 为用平面 $x + y + z = \frac{3}{2}a$ 切立方体

$$\Omega = \{(x, y, z) \,|0 \le x, y, z \le a\}$$

的表面所得的切痕, 其方向取从 $x$ 轴正向看去逆时针的方向 (答案:$-\dfrac{9}{2}a^3$ ).

提示：先画出曲线的图像，然后分段计算。

提示：尽量利用对称性化简计算。