| 得分 | |
|---|---|

**一**、（共 30 分）判断下列命题是否成立, 画(✔)或(✘), 并说明理由

1. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为同阶矩阵, 则 $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{B}$ 具有相同的特征值.
   (　　)

2. 若 $n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值, 则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似.
   (　　)

3. 已知 $p(x)$ 是数域 $P$ 上的不可约多项式, 则 $p(x)$ 在数域 $P$ 上必定无根.
   (　　)

4. 若 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶正交矩阵, 则其伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 也是正交矩阵.
   (　　)

5. $\mathbb{R}^n$ 中的子集 $\left\{(a_1, a_2, \ldots, a_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} a_i = 1\right\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间.
   (　　)

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 维欧式空间 $V$ 中某组基的度量矩阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值必大于零.
   (　　)

| 得分 | |
|---|---|

## 二、（共 20 分）填空

1. 已知 $1-i$ 是多项式 $f(x)=x^4-4x^3+5x^2-2x-2$ 的一个根,

   则 $f(x)$ 的其余三个根是____________________________.

2. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & a\\ -1 & a & 1\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & & \\ & b & \\ & & 2\end{pmatrix}$ 相似,

   则 $a=$ __________________, $b=$ __________________.

3. 在 $\mathbb{R}[x]_3$ 中定义内积

$$(f(x),g(x))=f(-1)g(-1)+f(0)g(0)+f(1)g(1),$$

   则向量 $1$ 的长度为_______________, $1$ 与 $x$ 的夹角为_______________.

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, 则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的最小二乘解唯一的充分必要条件是

   __________________________.

| 得分 | |
|---|---|

**三**、（共 10 分） 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n$ 阶实对称矩阵, 秩为 $r$, 且 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$.

1. 求证 $V=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0\right\}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的子空间;
2. 求 $V$ 的维数.

| 得分 | |
|---|---|

**四**、（共15分）设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4 & 1 & -1\\ -4 & -1 & 4\\ 0 & -1 & 5\end{pmatrix}$.

1. 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量;
2. 求一个可逆矩阵 $\boldsymbol{T}$ 使 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ 为对角矩阵;
3. 求 $\lim\limits_{n\to\infty} 4^{-n}\boldsymbol{A}^n$.（注: 若 $\boldsymbol{B}_n=(b_{ij}(n))$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\boldsymbol{B}_n$ 是指矩阵 $\left(\lim\limits_{n\to\infty} b_{ij}(n)\right)$）

| 得分 | |
|---|---|

**五**、(共 10 分) 设 $\mathscr{A}$ 是 $n$ 维欧氏空间 $V$ 的正交变换,

$$W=\{\boldsymbol{\alpha}\in V \mid \mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}\},\quad U=\{\boldsymbol{\beta}-\mathscr{A}\boldsymbol{\beta} \mid \boldsymbol{\beta}\in V\}$$

是 $V$ 的两个子空间. 证明: $W^{\perp}=U$.

| 得分 | |
|---|---|

**六**、（共15分） $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{T}$ 为 $n$ 阶矩阵, $\boldsymbol{AT}=\boldsymbol{TB}$, $f(x)$ 是多项式.

1. 证明: $f(\boldsymbol{A})\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}f(\boldsymbol{B})$.
2. 设 $g(x)$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式. 证明: $f(\boldsymbol{A})$ 可逆当且仅当 $(f(x),g(x))=1$.
3. 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 没有相同的特征根, 证明: $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{O}$.