1. 占优特征值为 3，一个特征向量为 $(1,0.5,1)^T$, 将 3 代入 $(\lambda E-B)=0$ 解得：

$$\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}X=0$$

因此对应的特征向量空间为：

$$span(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix})$$

√ **2.**

解：

(1):

$$\text{因为}\xi\text{ 为}A\text{ 的特征向量，}\quad A\xi=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2+a\\b+1\end{pmatrix}$$

故：

$$\begin{pmatrix}-1\\2+a\\b+1\end{pmatrix}=(-1)\xi=(-1)\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\text{解得：}a=-3,\quad b=0$$

$$f_A(\lambda)=\det(\lambda E-A)=\begin{vmatrix}\lambda-2&1&-2\\-5&\lambda+3&-3\\1&0&\lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda+1)^3$$

$$\text{解得}\lambda=-1\text{，故}A\text{ 的特征值为}-1$$

(2):

代回 $(\lambda E - A)X = 0$ 得:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ -5 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = 0$$

化简得:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = 0$$

故 $\dim(V_{\lambda=-1}) = 1$，因此 A 的线性无关的特征向量只有一个， A 不相似于对角矩阵

3.

解:

(a): 因为:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -9 & 6 & 12 \\ 0 & -1 & 4 & 6 \\ 2 & -11 & 8 & 16 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

特征多项式为:

$$f_A(\lambda) = det(A - \lambda E) = \lambda^4 - 10\lambda^3 + 35\lambda^2 - 50\lambda + 24$$

解得特征值为:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 3, \quad \lambda_4 = 4$$

将特征值代回解得对应的特征向量, 可得特征向量矩阵 P :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

相应的对角矩阵 D 为：

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

因此，矩阵 A 的对角化为：

$$A = PDP^{-1}$$

(b)

$$A^{10} = PD^{10}P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4^{10} \end{pmatrix} P^{-1}$$

4.

解：

由于每一列的元素和为 1，则 a, b, c：

$$0.1 + 0.3 + a = 1 \implies a = 0.6$$

$$0.2 + 0.6 + b = 1 \implies b = 0.2$$

$$0.8 + 0.1 + c = 1 \implies c = 0.1$$

因此，完整的矩阵为：

$$A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.8 \\ 0.3 & 0.6 & 0.1 \\ 0.6 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}$$

设稳态向量为 $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$，满足 $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$。
代入可得：

$$0.1\pi_1 + 0.2\pi_2 + 0.8\pi_3 = \pi_1$$
$$0.3\pi_1 + 0.6\pi_2 + 0.1\pi_3 = \pi_2$$
$$0.6\pi_1 + 0.2\pi_2 + 0.1\pi_3 = \pi_3$$
$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$$

解得:

$$\pi_1 = \frac{34}{97}$$
$$\pi_2 = \frac{33}{97}$$
$$\pi_3 = \frac{30}{97}$$

假设初始的天气概率对应列向量 ξ，显然其所有元素之和为 1 则由 Perron-Frobenius 定理可得：在经过 t 天后 (t 充分大)，得到的天气概率列向量为

$$A^t\xi \approx \begin{pmatrix} \frac{34}{97} \\ \frac{33}{97} \\ \frac{30}{97} \end{pmatrix}$$

故长期情况下，下雨，多云，下雪的概率为

$$\frac{34}{97}, \frac{33}{97}, \frac{30}{97}$$