√ 1.(1) 解：

$$\forall \alpha \in \mathbb{Z},\ \forall \beta \in \mathbb{Z},$$
因为 $\alpha - \beta \in \mathbb{Z}$,
所以 $\mathbb{Z}$关于减法封闭

√ 1.(2) 解：

取 $1, 3 \in \mathbb{Z}$,
因为 $\dfrac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$,
所以 $\mathbb{Z}^*$关于普通除法不封闭

√ 2. 解：

设 a 的阶为 r_1,
因为 $(b^{-1}ab)^{r_1} = b^{-1}abb^{-1}ab......b^{-1}ab = b^{-1}a^{r_1}b = b^{-1}b = e$
所以 $b^{-1}ab$的阶存在，不妨设为 r_2
则 $r_2 \mid r_1$
又因为 $e = (b^{-1}ab)^{r_2} = b^{-1}abb^{-1}ab......b^{-1}ab = b^{-1}a^{r_2}b$
$\Rightarrow beb^{-1} = b(b^{-1}a^{r_2}b)b^{-1} = a^{r_2}$
$\Rightarrow e = a^{r_2}$
$\Rightarrow r_1 \mid r_2$
综上所述 $r_1 = r_2$, 也即 $|b^{-1}ab| = |a|$

√ 3. 解:

由群的性质可知 $\exists\, a^{-1} \in G,\ s.t.\ \ a^{-1}a = e$ (其中 e 为单位元)

则 $a^{-1}ab = a^{-1}ac$

$\Rightarrow eb = ec$

$\Rightarrow b = c$

得证

√ 4(1). 解:

取 $\{a, b, c\} = \{1, 0, -1\}$

易验证该集合关于乘法封闭，下面证明其唯一性:

因为 $abc \in \{a, b, c\}$

不妨设 $abc = a$

则 $a = 0$或者 $bc = 1$

情况 1：bc = 1

因为 $1 = bc \in A$, 若 $1 = a$:

则 $b^2 \in \{1, b, \frac{1}{b}\}$

因为 $b \neq 1, 0$, b 只可能为 -1

则 $b = c = -1$ 矛盾

若 1 = b 或 1 = c, 则 c = b = 1, 矛盾

情况 2：a = 0

因为 $b \neq c \neq a = 0$

故 $bc, b^2 \in \{b, c\}$

不妨 $bc = b$

$\Rightarrow c = 1$

$\Rightarrow b^2 \in \{b, 1\}$

$\Rightarrow b = -1$, 故 $\{a, b, c\} = \{1, 0, -1\}$

√ 4(2). 解:

易知 a,b,c 中必定至少存在一个正数或者一个负数,

不妨假设有存在正数时最大的正数为 c, 存在负数时最小的负数为 a

存在正数时:

$c + c = 2c > c = max\{a, b, c\}$

则 $2c \notin \{a, b, c\}$

存在负数时:

$a + a = 2a < a = min\{a, b, c\}$

则 $2a \notin \{a, b, c\}$

综上，无法找到满足条件的集合 {a, b, c}