信息的表示和处理(4)
---浮点数

王晶

jwang@ruc.edu.cn，信息楼124

2024年10月

如果用变量记录距离

- int distance
  - 4 bytes, 32 bits
  - 最大值：$2^{31}-1$
- long long ago
  - 8 bytes, 64 bits
  - 最大值：$2^{63}-1$

旅行者1号（Voyager1）

1977年9月5日发射

2014年9月13日凌晨2点，美国国家航空航天局(NASA)宣布“旅行者1号”已经离开太阳系，进入了恒星际空间

大到恒星级别的距离

- 1个天文单位

≈ 1.4958×10^{11} 米

≈ 1×2^{37} 米（38 bits）

地球到太阳
（1.496亿公里）

- 1 光年

≈ $0.94605284 \times 10^{16}$ 米

≈ 1×2^{53} 米（54 bits）

奥尔特星云
（9万亿公里）
（太阳系边界）

- 100亿光年

≈ 1×10^{26} 米

≈ 1×2^{87} 米（88 bits）

遥远的星系

小到分子级别的距离

- 1 毫米

= 1 × 10^{-3} 米

二进制如何表示?
int , long long?

float , double

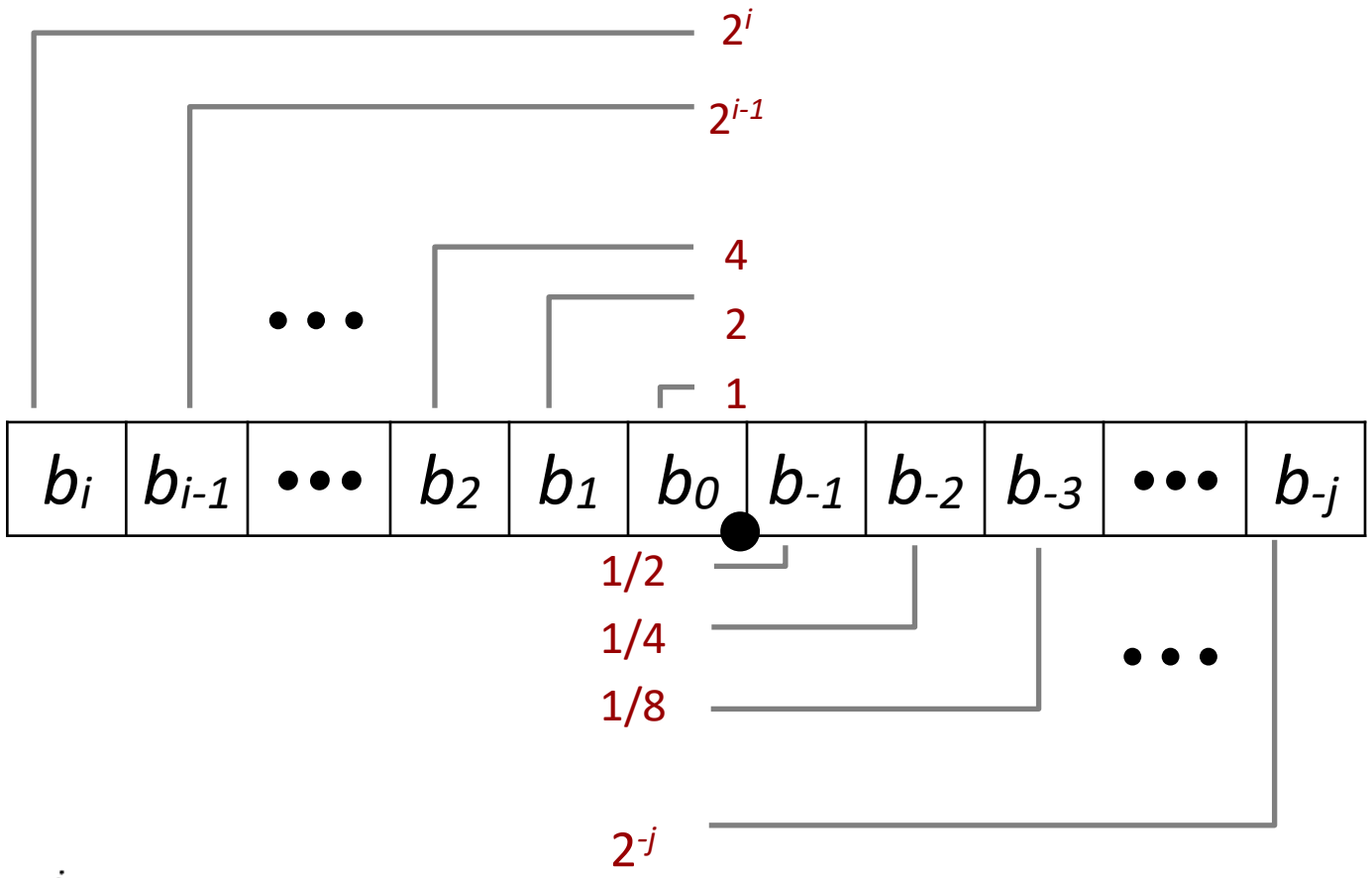
- 2.5 微米 = 2.5 × 10^{-6} 米
  - PM2.5：指环境空气中空气动力学当量直径小于等于2.5微米的颗粒物，也称细颗粒物

- 14 纳米 = 14 × 10^{-9} 米
  - Intel“Broadwell” 芯片，采用14纳米工艺制造

Outline

- Background: Fractional binary numbers
- IEEE floating point standard: Definition
- Example and properties
- Rounding, Floating point in C
- Addition, multiplication
- Summary

Fractional Binary Numbers



$$\sum_{k=-j}^{i} b_k \times 2^k$$

Fractional Binary Numbers

Value	Representation
$5\frac{3}{4}$	101.11_2 = 4 + 1 + 1/2 + 1/4
$2\frac{7}{8}$	10.111_2 = 2 + 1/2 + 1/4 + 1/8
$1\frac{7}{16}$	1.0111_2 = 1 + 1/4 + 1/8 + 1/16

- 观察
  - 通过右移小数点可以乘以2（无符号数）
  - 通过左移小数点可以除以2
  - 数字$0.111111\ldots_2$刚刚比1.0小一点
    - $1/2 + 1/4 + 1/8 + \ldots + 1/2^i + \ldots \rightarrow 1.0$
    - Use notation $1.0 - \varepsilon$

Representable Numbers

- Limitation #1
  - 只能精确表示$x/2^k$形式的数字（x为整数）
    - 其他数字会是无限小数（循环小数）形式
  - Value　　Representation
    - 1/3　　`0.0101010101[01]`…$_2$
    - 1/5　　`0.001100110011[0011]`…$_2$
    - 1/10　　`0.0001100110011[0011]`…$_2$

- Limitation #2
  - 位数有限（w bits），表达的数字大小范围有限
    - Limited range of numbers (very small values? very large?)

Ariane 5: 浮点溢出的高昂代价

- 原因：导航系统向控制引擎喷嘴的计算机发送了一个无效数据，没有发送飞行控制信息，而是发送了一个诊断位模式，原因是将64位浮点数转为16位有符号位时溢出；
- Ariene 4火箭的速度不会超过16位浮点数；
- Ariene 5速度比Ariene 4高出5倍，但直接重用了Ariene 4的代码；
- 将大的浮点数转换为整数是一种常见的程序错误来源
- 1996，$500 MILLION dollars lost

误差引发的灾难

爱国者导弹系统中有一个内置的时钟，其实现类似一个计数器，每 0.1 秒就加 1。为了以秒为单位来确定时间，程序将用一个 24 位的近似于 1/10 的二进制小数值来乘以这个计数器的值。特别地，1/10 的二进制表达式是一个无穷序列 $0.000110011[0011]\cdots_2$，其中，方括号里的部分是无限循环的。程序用值 x 近似地表示 0.1，x 只考虑这个序列的二进制小数点右边的前 23 位：x = 0.00011001100110011001100。（参考练习题 2.51，里面有关于如何更精确地近似表示 0.1 的讨论。）

A. 0.1 − x 的二进制表示是什么？ 0.00...00[1100] (前面23个0）

B. 0.1 − x 的近似的十进制值是多少？ $2^{-24} = 10^{-7}$

C. 当系统初始启动时，时钟从 0 开始，并且一直保持计数。在这个例子中，系统已经运行了大约 100 个小时。程序计算出的时间和实际的时间之差为多少？ 10^-7 *100*60*60*10=0.36s

D. 系统根据一枚来袭导弹的速率和它最后被雷达侦测到的时间，来预测它将在哪里出现。假定飞毛腿导弹的速率大约是 2000 米每秒，对它的预测偏差了多少？ 0.36s*2000m/s=700m

通过一次读取时钟得到的绝对时间中的一个轻微错误，通常不会影响跟踪的计算。相反，它应该依赖于两次连续的读取之间的相对时间。问题是爱国者导弹的软件已经升级，可以使用更精确的函数来读取时间，但不是所有的函数调用都用新的代码替换。结果就是，跟踪软件一次读取用的是精确的时间，而另一次读取用的是不精确的时间 [100]。

28 people die on 2/25/1991

Today: Floating Point

- Background: Fractional binary numbers
- IEEE floating point standard: Definition
- Example and properties
- Rounding, Floating point in C
- Addition, multiplication
- Summary

IEEE Floating Point

- IEEE Standard 754
  - 在1985年建立，作为浮点数运算的统一标准
    - 在此之前，有很多不同（古怪）的设计
  - 所有主流CPU都支持
- William (Velvel) Morton Kahan 威廉·卡亨
  - 1933 –
  - UC Berkeley
  - 1989年图灵奖，因为数值计算方面的贡献
  - Kahan是浮点运算IEE标准IEEE 754， IEEE 854的主要设计师

科学计数法

- 科学记数法中数字的组成部分是什么?

$$1.1101101101101_2 \times 2^{13}$$

- 在科学记数法中，有效数字总是以什么值开头?

浮点数的表示

Example:
$15213_{10} = (-1)^0 \times 1.1101101101101_2 \times 2^{13}$

- Numerical Form:

$$(-1)^s \, M \;\; 2^E$$

  - **Sign bit *s*** determines whether number is negative or positive
  - **Significand *M*** normally a fractional value in range [1.0,2.0).
  - **Exponent *E*** weights value by power of two

- Encoding
  - MSB s is sign bit ***s***
  - exp field encodes ***E*** (but is not equal to E)

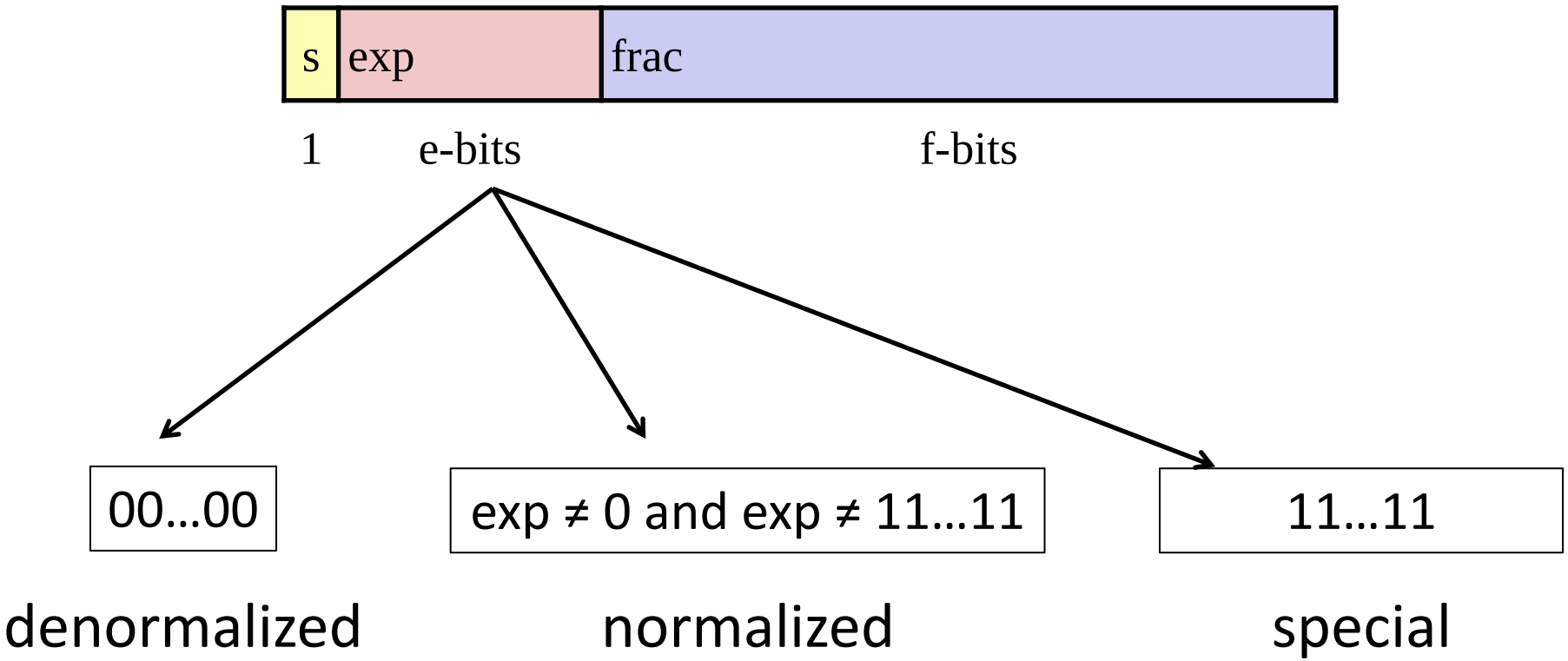
Precision options

- Single precision: 32 bits (float)

- Double precision: 64 bits (double)

- Extended precision: 80 bits (Intel only, long double)

Three “kinds” of floating point numbers



“Normalized” Values(规格化)

$v = (-1)^s M 2^E$

- When: exp ≠ 000…0 and exp ≠ 111…1

- E coded as a ***biased*** value: ***E*** = ***Exp*** – ***Bias (***移码***)***
  - *Exp*: unsigned value of exp field
  - *Bias* = $2^{k-1} - 1$, where *k* is number of exponent bits
    - Single precision: 127 (Exp: 1…254, E: -126…127)
    - Double precision: 1023 (Exp: 1…2046, E: -1022…1023)

问题：补码能真实地反映真值的大小吗？

答案：补码表示很难直接判断其真值大小！

$x_1 = +21$	+10101	0,10101	错
$x_2 = -21$	−10101	1,01011	大
$x_3 = +31$	+11111	0,11111	错
$x_4 = -31$	−11111	1,00001	大

$x + 2^5$

$x_1 = +21$	+10101 + 100000 = 110101	大	正确
$x_2 = -21$	−10101 + 100000 = 001011		
$x_3 = +31$	+11111 + 100000 = 111111	大	正确
$x_4 = -31$	−11111 + 100000 = 000001		

移码的特点

为什么要引入移码?

移码是用来表示浮点数的阶码!

为什么要用移码来表示浮点数的阶码呢?

- 便于浮点数加减运算时的对阶操作。

例： $1.01\times2^{-1}+1.11\times2^{3}=?$

补码 -1(1111) ? +3(0011)

移码 -1(0111) < +3(1011)

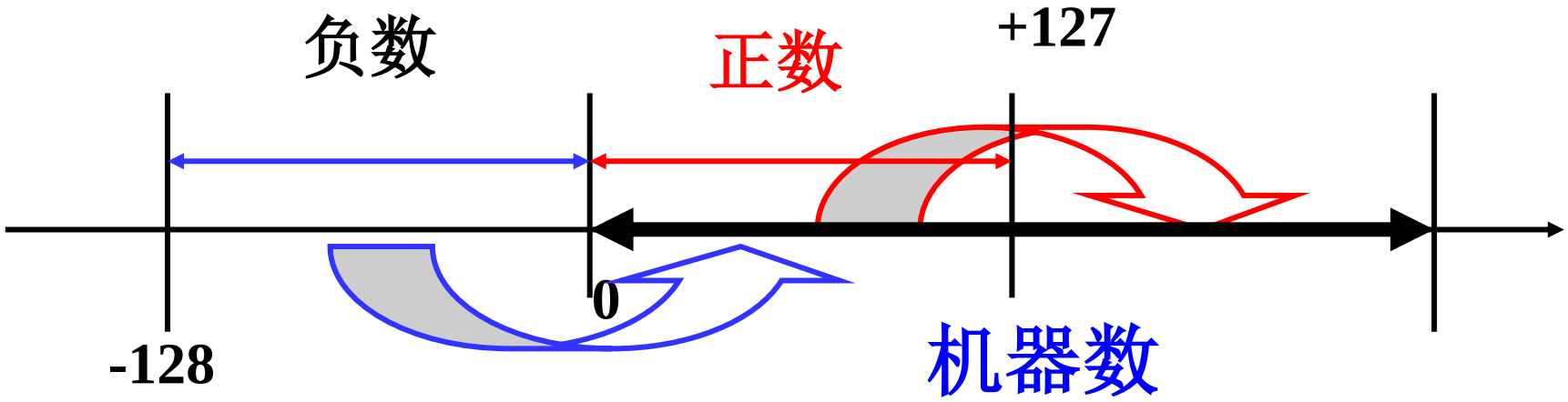
可以用移码表示的阶码直接比较阶码的大小!!

浮点数阶码的移码表示

一位符号位和 7 位数值位组成的移码, 其定义为;

$[E]_{移} = 2^7 + E \quad -2^n <= E < 2^n$

表示范围： 00000000 ~ 11111111



移码序列实际上是其真值在数轴上平移的结果，实际上是将有符号数转换成无符号数表示。

8 位移码表示的机器数为数的真值

在数轴上向右平移了 128 个位置

“Normalized” Values(规格化)

- When: exp ≠ 000…0 and exp ≠ 111…1

$v = (-1)^s M 2^E$

- E coded as a ***biased*** value: ***E = Exp – Bias (移码)***
  - *Exp*: unsigned value of exp field
  - *Bias* = $2^{k-1} - 1$, where *k* is number of exponent bits
    - Single precision: 127 (Exp: 1…254, E: -126…127)
    - Double precision: 1023 (Exp: 1…2046, E: -1022…1023)

- M coded with implied leading 1: ***M*** = $1.xxx…x_2$
  - xxx…x: bits of frac field
  - Minimum when frac=000…0 (M = 1.0)
  - Maximum when frac=111…1 (M = 2.0 – ε)
  - Get extra leading bit for “free”

Floating Point Representation

- 浮点表示法
  - 举例：$(-1101.0101)_2$,m=9, n=3
  - $-0.11010101*2^4$

S	Es	E	M
1位	1位	3位	9位
1	0	100	110101010

  - $-0.011010101*2^5$

S	Es	E	M
1位	1位	3位	9位
1	0	101	011010101

Normalized Encoding Example

- Value: `float F = 15213.0;`
  - $15213_{10} = 11101101101101_2$
    $= 1.1101101101101_2 \times 2^{13}$

$$v = (-1)^s M 2^E$$
$$E = Exp - Bias$$

- Significand
  - $M = 1.\underline{1101101101101}_2$
  - $\mathbf{frac} = \underline{1101101101101}0000000000_2$

- Exponent
  - $E = 13$
  - $Bias = 127$
  - $Exp = 140 = \mathbf{10001100}_2$

- Result:

0	10001100	11011011011010000000000
s	**exp**	**frac**

Denormalized Values (非规格化)

- Condition: exp = 000…0

$$v = (-1)^s M 2^E$$
$$E = 1 - Bias$$

- Exponent value: $E = 1 - Bias$ (instead of $E = 0 - Bias$)
  - 为了平滑过度到规格化浮点数（$1.xxx * 2^{-126}$)
  - 非规格化：$0.xxx * 2^{-126}$
- M没有隐藏的1，方便表示0及接近0的数字: $M = 0.xxx…x_2$
- Cases
  - **exp** = 000…0, **frac** = 000…0
    - 表示0
    - 但是根据S为0或1，可以表示 +0 and –0
  - **exp** = 000…0, **frac** ≠ 000…0
    - 用于表示接近于 0.0的数字

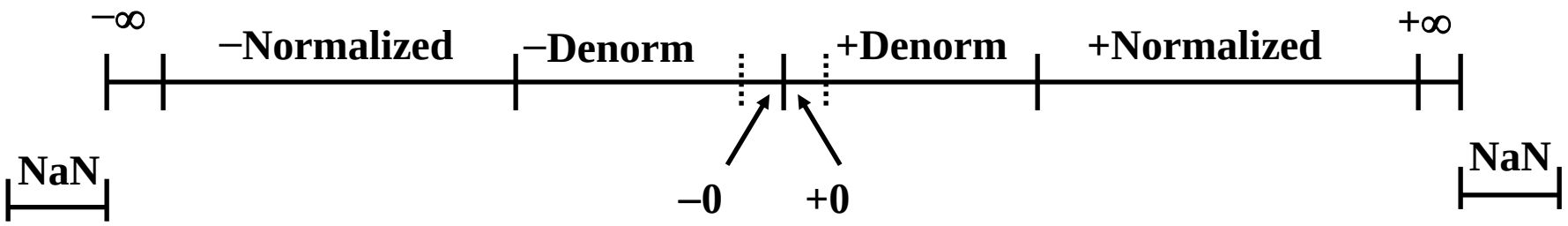
Special Values

- Condition: **exp** = **111…1**

- Case: **exp** = **111…1**, **frac** = **000…0**
  - Represents value ∞
  - 用来表示overflow
  - 包括+∞和−∞
  - E.g., 1.0/0.0 = −1.0/−0.0 = +∞, 1.0/−0.0 = −∞

- Case: **exp** = **111…1**, **frac** ≠ **000…0**
  - Not-a-Number (NaN)
  - 表示无法得到一个数值（出错/未定义）
  - E.g., 0/0, sqrt(–1), ∞ − ∞, ∞ × 0

Visualization: Floating Point Encodings



有限范围内的一些采样点，与实数完全不同

Today: Floating Point

- Background: Fractional binary numbers
- IEEE floating point standard: Definition
- Example and properties
- Rounding, Floating point in C
- Addition, multiplication
- Summary

Dynamic Range (Positive Only)

$v = (-1)^s M 2^E$

n: E = Exp – Bias

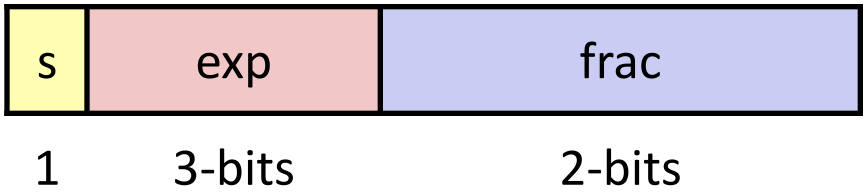
d: E = 1 – Bias

Bias=7

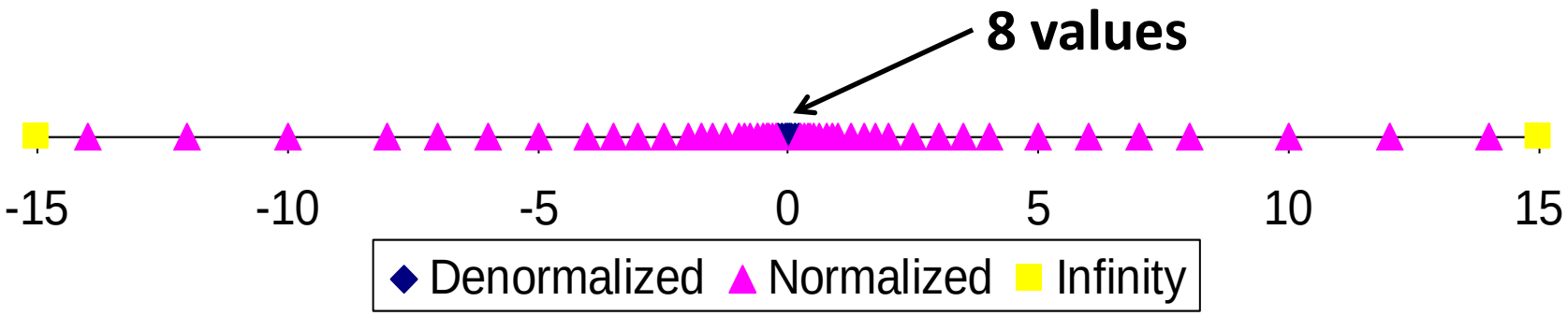
	s	exp (k位)	frac (m位)	E	Value	
Denormalized numbers	0	0000	000	-6	0	
	0	0000	001	-6	1/8*1/64 = 1/512	closest to zero
	0	0000	010	-6	2/8*1/64 = 2/512	$2^{-m}*2^{2-2^{(k-1)}}$
	…					
	0	0000	110	-6	6/8*1/64 = 6/512	$(1-2^{-m})*2^{2-2^{(k-1)}}$
	0	0000	111	-6	7/8*1/64 = 7/512	largest denorm
Normalized numbers	0	0001	000	-6	8/8*1/64 = 8/512	smallest norm
	0	0001	001	-6	9/8*1/64 = 9/512	$1*2^{2-2^{(k-1)}}$
	…					
	0	0110	110	-1	14/8*1/2 = 14/16	
	0	0110	111	-1	15/8*1/2 = 15/16	closest to 1 below
	0	0111	000	0	8/8*1 = 1	
	0	0111	001	0	9/8*1 = 9/8	closest to 1 above
	0	0111	010	0	10/8*1 = 10/8	
	…					
	0	1110	110	7	14/8*128 = 224	$(2-2^{-m})*2^{2^{(k-1)}-1}$
	0	1110	111	7	15/8*128 = 240	largest norm
	0	1111	000	n/a	inf	

Distribution of Values

- 6-bit IEEE-like format
  - e = 3 exponent bits
  - f = 2 fraction bits
  - Bias is $2^{3-1}-1 = 3$

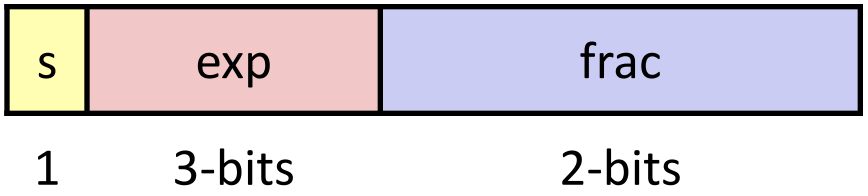


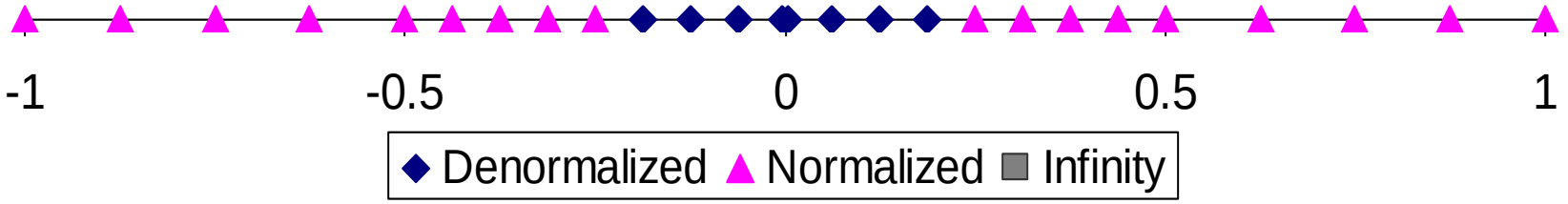
- Notice how the distribution gets denser toward zero.



Distribution of Values

- 6-bit IEEE-like format
  - e = 3 exponent bits
  - f = 2 fraction bits
  - Bias is 3





C float Decoding Example

$$v = (-1)^s M 2^E$$
$$E = \exp - Bias$$

float: **0xC0A00000**

binary:

$Bias = 2^{k-1} - 1 = 127$

1 8-bits 23-bits

E =

S =

M =

v = $(-1)^s$ M 2^E =

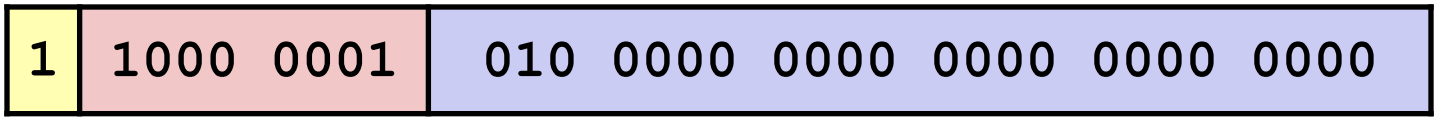
Hex	Decimal	Binary
0	0	0000
1	1	0001
2	2	0010
3	3	0011
4	4	0100
5	5	0101
6	6	0110
7	7	0111
8	8	1000
9	9	1001
A	10	1010
B	11	1011
C	12	1100
D	13	1101
E	14	1110
F	15	1111

C float Decoding Example #1

$$v = (-1)^s M 2^E$$
$$E = \exp - Bias$$

float: **0xC0A00000**

binary: **1100 0000 1010 0000 0000 0000 0000 0000**



E =

S =

M = 1 .

v = $(-1)^s$ M 2^E =

Hex	Decimal	Binary
0	0	0000
1	1	0001
2	2	0010
3	3	0011
4	4	0100
5	5	0101
6	6	0110
7	7	0111
8	8	1000
9	9	1001
A	10	1010
B	11	1011
C	12	1100
D	13	1101
E	14	1110
F	15	1111

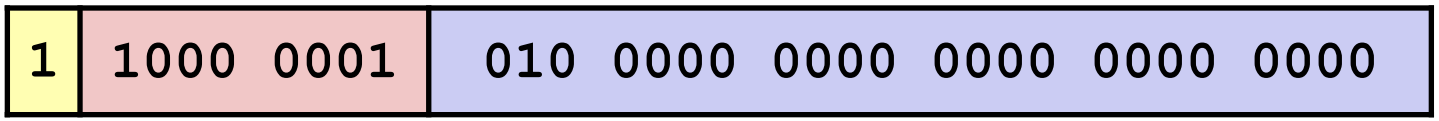
C float Decoding Example #1

$$v = (-1)^s M 2^E$$
$$E = \mathbf{exp} - Bias$$

float: **0xC0A00000**

$Bias = 2^{k-1} - 1 = 127$

binary: **1100 0000 1**010 0000 0000 0000 0000 0000



1 8-bits 23-bits

E =

S = 1 -> negative number

M = **1.**

Hex	Decimal	Binary
0	0	0000
1	1	0001
2	2	0010
3	3	0011
4	4	0100
5	5	0101
6	6	0110
7	7	0111
8	8	1000
9	9	1001
A	10	1010
B	11	1011
C	12	1100
D	13	1101
E	14	1110
F	15	1111

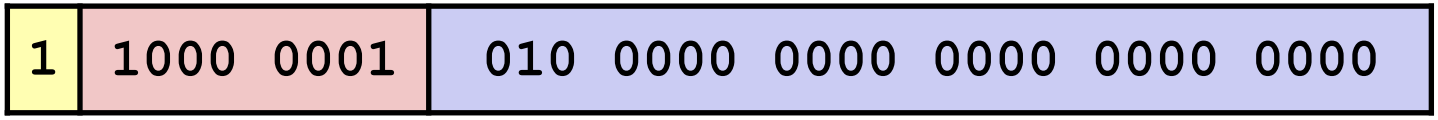
C float Decoding Example #1

$$v = (-1)^s M 2^E$$
$$E = \texttt{exp} - Bias$$

float: **0xC0A00000**

$Bias = 2^{k-1} - 1 = 127$

binary: **1100 0000 1**010 0000 0000 0000 0000 0000



1 8-bits 23-bits

E = **exp** – Bias = 129 – 127 = 2 (decimal)

S = 1 -> negative number

M =**1.**

Hex	Decimal	Binary
0	0	0000
1	1	0001
2	2	0010
3	3	0011
4	4	0100
5	5	0101
6	6	0110
7	7	0111
8	8	1000
9	9	1001
A	10	1010
B	11	1011
C	12	1100
D	13	1101
E	14	1110
F	15	1111

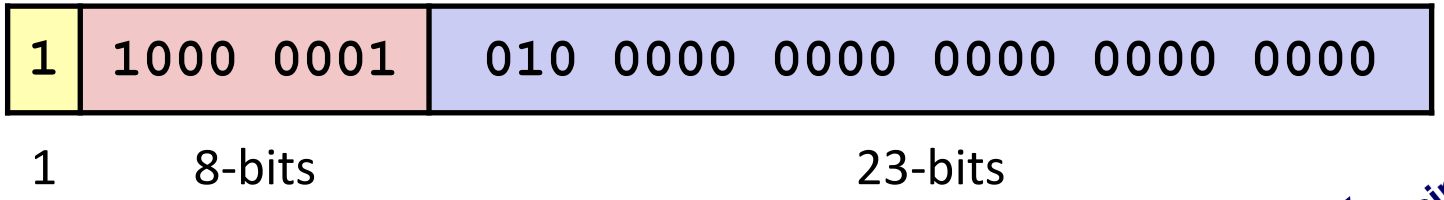
C float Decoding Example #1

$$v = (-1)^s M 2^E$$
$$E = \texttt{exp} - Bias$$

float: **0xC0A00000**

$Bias = 2^{k-1} - 1 = 127$

binary: **1100 0000 1010 0000 0000 0000 0000 0000**



E = **exp** – Bias = 129 – 127 = 2 (decimal)

S = 1 -> negative number

M = 1.010 0000 0000 0000 0000 0000

= 1 + 1/4 = 1.25

v = $(-1)^s$ M 2^E = $(-1)^1$ * 1.25 * 2^2 = -5

Hex	Decimal	Binary
0	0	0000
1	1	0001
2	2	0010
3	3	0011
4	4	0100
5	5	0101
6	6	0110
7	7	0111
8	8	1000
9	9	1001
A	10	1010
B	11	1011
C	12	1100
D	13	1101
E	14	1110
F	15	1111

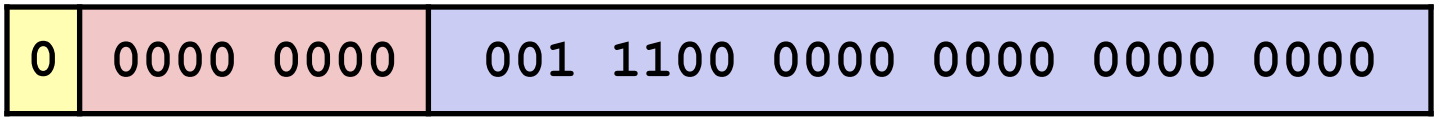
C float Decoding Example #2

$v = (-1)^s M 2^E$

$E = 1 - Bias$

float: **0x001C0000**

binary: 0000 0000 0001 1100 0000 0000 0000 0000



E =

S =

M = 0 .

v = $(-1)^s$ M 2^E =

Hex	Decimal	Binary
0	0	0000
1	1	0001
2	2	0010
3	3	0011
4	4	0100
5	5	0101
6	6	0110
7	7	0111
8	8	1000
9	9	1001
A	10	1010
B	11	1011
C	12	1100
D	13	1101
E	14	1110
F	15	1111

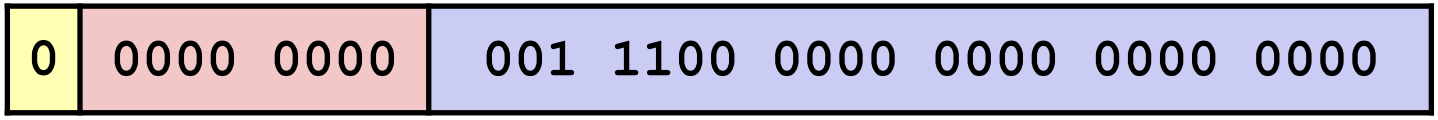
C float Decoding Example #2

$$v = (-1)^s M 2^E$$
$$E = 1 - Bias$$

float: **0x001C0000**

$Bias = 2^{k-1} - 1 = 127$

binary: 0000 0000 0001 1100 0000 0000 0000 0000



E = 1 – Bias = 1 – 127 = –126 (decimal)

S = 0 -> positive number

M = 0.001 1100 0000 0000 0000 0000

= 1/8 + 1/16 + 1/32 = 7/32 = $7*2^{-5}$

$v = (-1)^s M 2^E = (-1)^0 * 7*2^{-5} * 2^{-126} = 7*2^{-131}$

$\approx 2.571393892 \times 10^{-39}$

Hex	Decimal	Binary
0	0	0000
1	1	0001
2	2	0010
3	3	0011
4	4	0100
5	5	0101
6	6	0110
7	7	0111
8	8	1000
9	9	1001
A	10	1010
B	11	1011
C	12	1100
D	13	1101
E	14	1110
F	15	1111

假设浮点数共16位，其中阶码6位，采用类IEEE 754标准

1）求浮点数20.625的二进制形式

2）求浮点数能够表示的规格化的最大负数和最小负数，以及非规格化的最大负数和最小负数（二进制+真值）

作答

课堂练习（答案）

$v = (-1)^s M 2^E$

$E = 1 - Bias$

$Bias = 2^{k-1} - 1 = 31$

v =20.625=16+4+0.5+0.125

=（10100.101）$_2$=1.0100101*2^4

E = **4** + Bias = 4 +（2^{6-1} -1）= 4+31=32+3=（100011）$_2$

S = 0 -> positive number

M = **0100 1010 0000 0000 000**

1 6-bits 9-bits

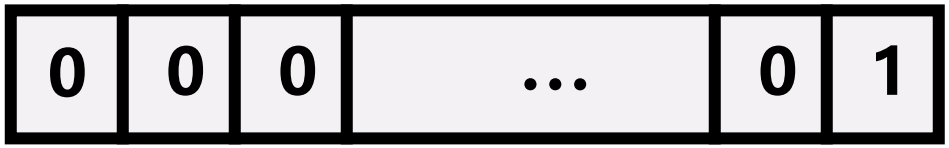
binary: **0100 0110 1001 0100**

float: **0x4694**

定点小数表示范围

设数值位的位数为n，分析定点小数的范围：

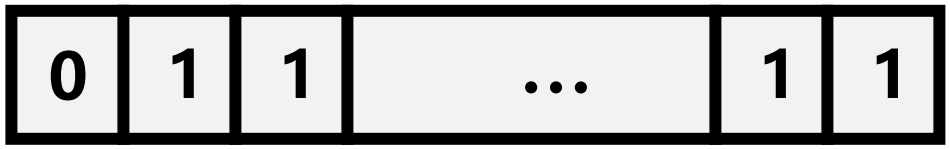
最小正数



当X_s=0，X_1～X_{n-1}=0且X_n=1时，X为最小正数，即：

$$X_{最小正数} = 2^{-n}。$$

最大正数

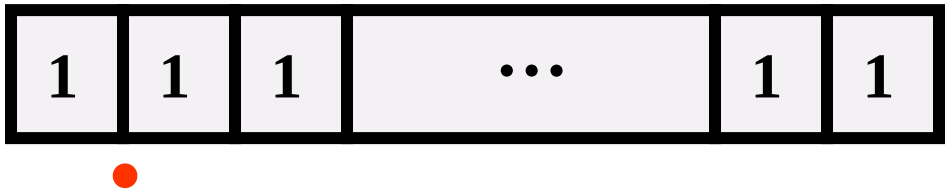


当X_s=0，X_1～X_n=1时，X为最大正数，即：

$$X_{最大正数} = (1-2^{-n})。$$

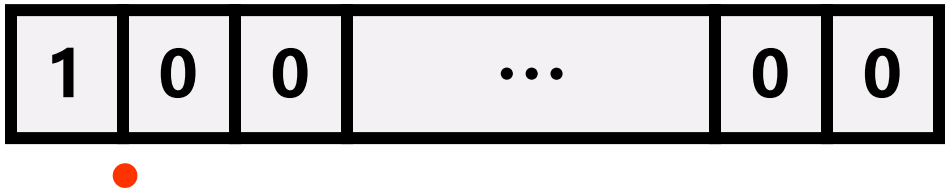
定点小数表示范围

原码表示的绝对值最大负数



$X_{\text{绝对值最大负数(原码表示时)}} = -(1-2^{-n})$

补码表示的绝对值最大负数

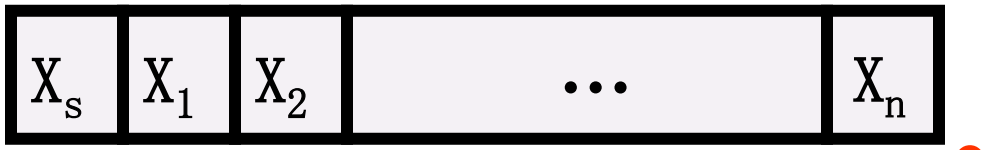


$X_{\text{绝对值最大负数（补码表示时）}} = -1$

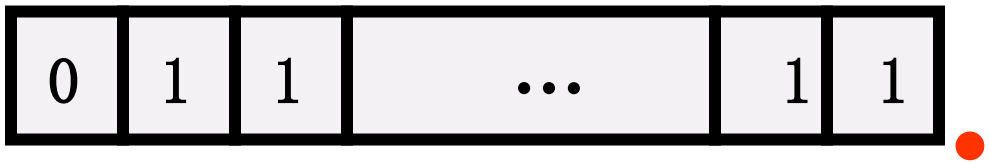
定点整数表示范围

设数值位的位数为n，分析定点整数的范围：

定点整数

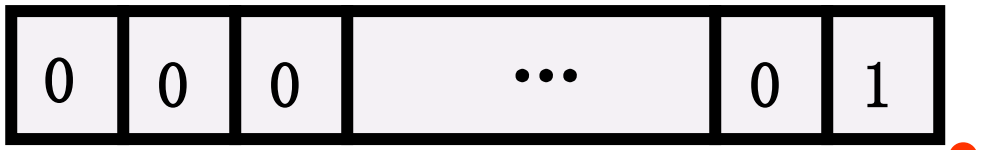


最大正数



$X_{最大正数} = (2^n - 1)$

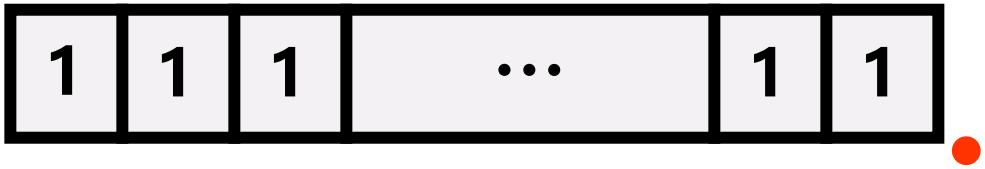
最小正数



$X_{最小正数} = 1$

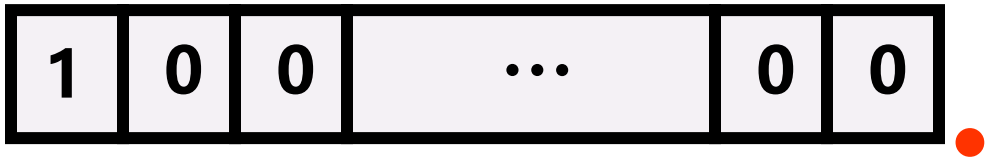
定点整数表示范围

原码表示的绝对值最大负数



$X_{绝对值最大负数（原码表示时）} = -(2^n - 1)$

补码表示的绝对值最大负数



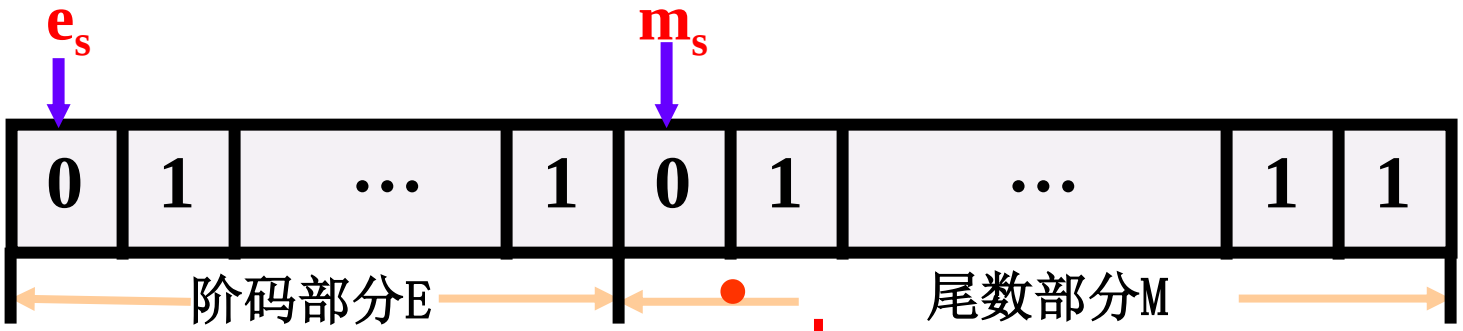
$X_{绝对值最大负数（补码表示时）} = -2^n$

注意

浮点数的表示范围（补码）：

设阶码数值位是k位，尾数的数值位是n位

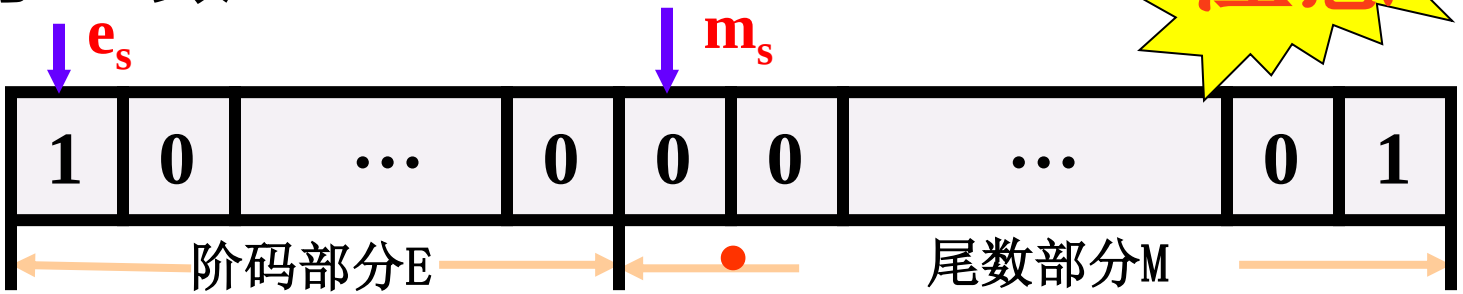
(1)最大正数:



$$X_{最大正数}=(1-2^{-n})\times 2^{2^k-1}$$

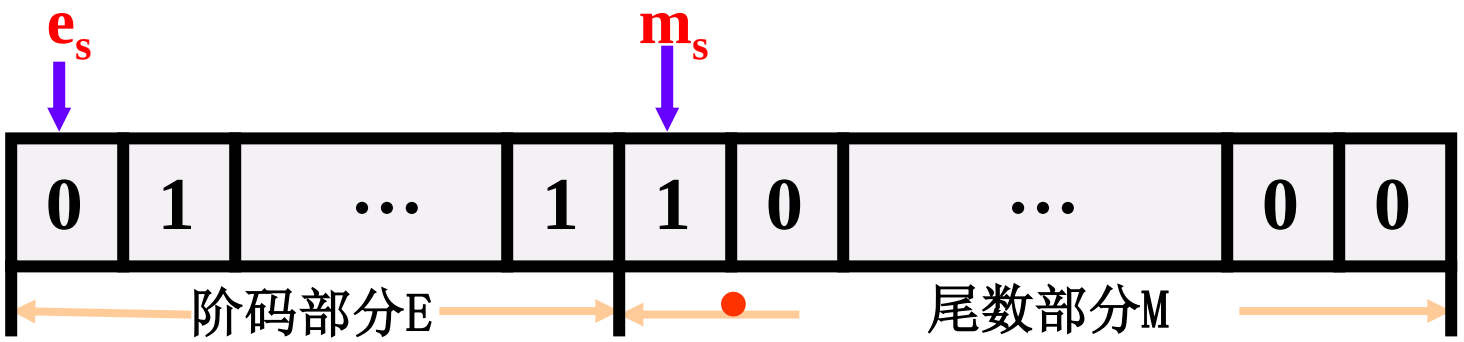
(2)最小正数:

注意



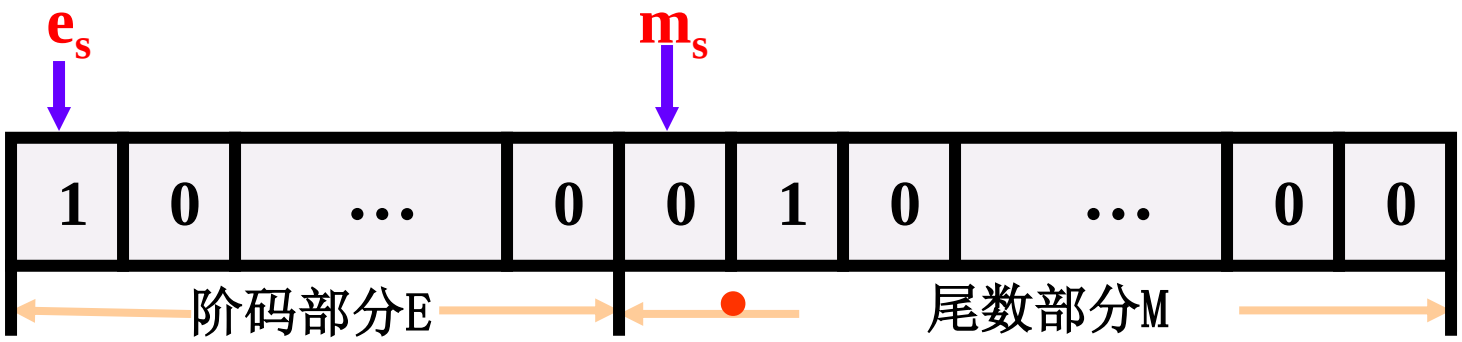
$$X_{最小正数}=2^{-n}\times 2^{-2^k}$$

绝对值最大负数（补码表示）：



$X_{\text{绝对值最大负数}} = -1 \times 2^{2^k-1}$

下面格式中表示的数是什么呢?



$X_{\text{规格化的最小正数}} = 2^{-1} \times 2^{-2^k}$

浮点数的表示范围：

（1）采用原码表示阶码和尾数时

浮点正数的表示范围为：

$+2^{-n}\times 2^{-(2^k-1)} <= +X <= +(1-2^{-n})\times 2^{+(2^k-1)}$

浮点负数的表示范围为：

$-(1-2^{-n})\times 2^{+(2^k-1)} <= -X <= -2^{-n}\times 2^{-(2^k-1)}$

（2）用补码表示阶码和尾数时

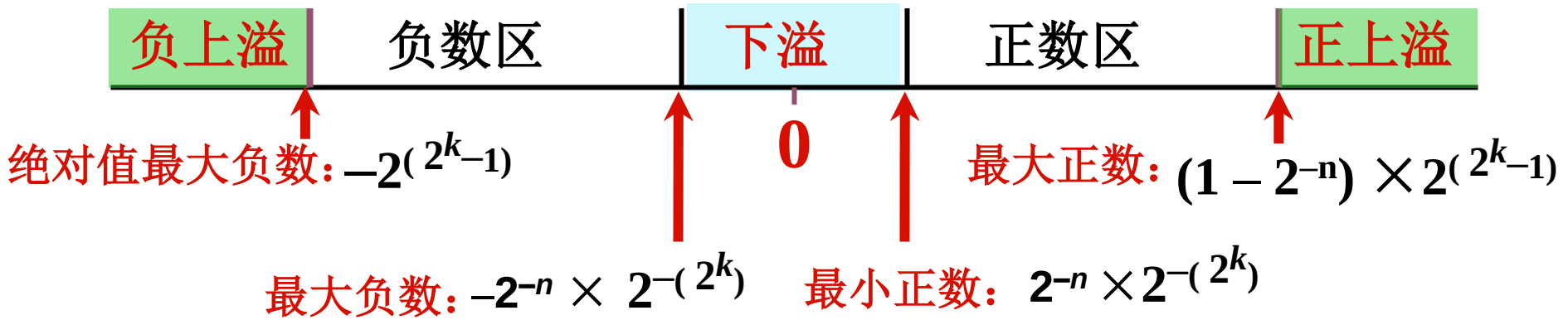
浮点正数的表示范围为：

$+2^{-n}\times 2^{-2^k} <= +X <= +(1-2^{-n})\times 2^{+(2^k-1)}$

浮点负数的表示范围为：

$-1\times 2^{+(2^k-1)} <= -X <= -2^{-n}\times 2^{-2^k}$

浮点数的溢出



设 $n = 10$，$k = 4$，阶符、数符各取 1位,分析用补码所表示的浮点数范围.

	真值	补码
最大正数	$(1-2^{-10}) \times 2^{15}$	0,1111; 0.1111111111
最小正数	$2^{-10} \times 2^{-16}$	1,0000; 0.0000000001

浮点数绝对值太大的溢出称上溢；浮点数绝对值太小的溢出称下溢。发生上溢时,要中止运算,进行溢出处理,而发生下溢时不报错可作为机器零处理.

课堂练习（答案）

（2）

	S	E(6位）	M（9位）	Value
非规格化	1	000 000	000 000 001	-2^(-9)*2^(-30)
	1	000 000	111 111 111	-(1-2^(-9))*2^(-30)
规格化	1	000 001	000 000 000	-1*2^(-30)
	1	111 110	111 111 111	-(2-2^(-9))*2^31
特殊情况	1	111 111	0 != 0	Infinite NaN

Interesting Numbers

{single,double}

Description	*exp*	*frac*	*Numeric Value*
• Zero	00…00	00…00	0.0
• Smallest Pos. Denorm.	00…00	00…01	$2^{-\{23,52\}} \times 2^{-\{126,1022\}}$
• Single ≈ 1.4×10^{-45}			
• Double ≈ 4.9×10^{-324}			
• Largest Denormalized	00…00	11…11	$(1.0 - \varepsilon) \times 2^{-\{126,1022\}}$
• Single ≈ 1.18×10^{-38}			
• Double ≈ 2.2×10^{-308}			
• Smallest Pos. Normalized	00…01	00…00	$1.0 \times 2^{-\{126,1022\}}$
• Just larger than largest denormalized			
• One	01…11	00…00	1.0
• Largest Normalized	11…10	11…11	$(2.0 - \varepsilon) \times 2^{\{127,1023\}}$
• Single ≈ 3.4×10^{38}			
• Double ≈ 1.8×10^{308}			

宇宙所有原子的数量10^{80}

课堂练习

- 分配给你一个任务，编写一个C函数用来计算2^x的浮点表示。你意识到完成这个任务的最好方法是直接创建结果的IEEE单精度表示。
- 当x太小时返回0.0；当x太大时返回+∞。
- 填写下面的代码空白，以计算出正确的结果。
- 假设函数u2f返回的浮点值与它的无符号参数有相同的位表示。

- float fpwr2(int x) {
  - unsigned exp, frac, u;
  - if (x < _____) {
    - exp = _____;
    - frac = _____;
  - } else if (x < _____) {
    - exp = _____;
    - frac = _____;
  - } else if (x < _____) {
    - exp = _____;
    - frac = _____;
  - }else {
    - exp = _____;
    - frac = _____;
  - }
  - u = exp<<23 | frac;
  - return u2f(u);
- }

练习答案

- 分配给你一个任务，编写一个C函数用来计算2^x的浮点表示。你意识到完成这个任务的最好方法是直接创建结果的IEEE单精度表示。
- 当x太小时返回0.0；当x太大时返回+∞。
- 填写下面的代码空白，以计算出正确的结果。
- 假设函数u2f返回的浮点值与它的无符号参数有相同的位表示。

- float fpwr2(int x) {
  - unsigned exp, frac, u;
  - if (x < __-149____) { //太小，返回0
    - exp = __0____;
    - frac = __0____;
  - } else if (x < _-126_) { //非规格化
    - exp = __0____;
    - frac = __1<<(x+149)____;
  - } else if (x < _128_) { //规格化
    - exp = __x+127____;
    - frac = __0____;
  - }else {
    - exp = ___255___; // 太大，返回+∞
    - frac = ___0___;
  - }
  - u = exp<<23 | frac;
  - return u2f(u);
- }

Special Properties of the IEEE Encoding

- 浮点数0和整型0在二进制形式上一样
  - 所有bits都是0（+0）

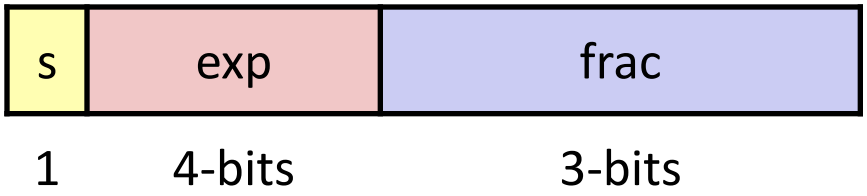
- 几乎总可以使用unsigned integer的比较大小方式
  - 必须首先比较符号位
  - 必须考虑-0 = 0
  - NaNs的问题
    - 比任何其他值都大
    - NaNs有多个值
  - 其他情况OK
    - 非规格化< 规格化
    - 规格化 < 无穷大

Today: Floating Point

- Background: Fractional binary numbers
- IEEE floating point standard: Definition
- Example and properties
- Rounding, Floating point in C
- Addition, multiplication
- Summary

Creating Floating Point Number

- Steps
  - 规格化，首位为 1
  - 尾数部分进行round
  - 后规格化(Postnormalize)处理round带来的问题



- Case Study
  - Convert 8-bit unsigned numbers to tiny floating point format

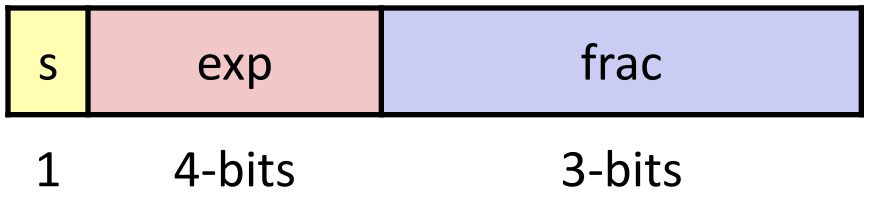
Example Numbers

128	10000000
13	00001101
33	00010001
35	00010011
138	10001010
63	00111111

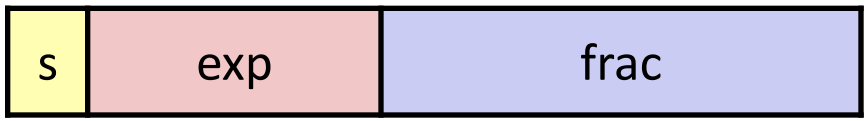
规格化

- 要求
  - 小数点选择合适的位置，数表示为1.xxxxx
  - 左移数值或右移小数点，指数减1

Value	*Binary*	*Fraction*	*Exponent*
128	10000000	1.0000000	7
13	00001101	1.1010000	3
17	00010001	1.0001000	4
19	00010011	1.0011000	4
138	10001010	1.0001010	7
63	00111111	1.1111100	5



舍入



- 向偶数舍入

Value	*Fraction*	*Rounded*
128	1.0000000	1.000
13	1.1010000	1.101
17	1.0001000	1.000
19	1.0011000	1.010
138	1.0001010	1.001
63	1.1111100	10.000

判溢出

- 问题
  - 舍入操作可能导致 溢出
  - 可能需要右移M，增加E

Value	*Rounded*	*Exp*	*Adjusted*	*Result*
128	1.000	7		128
13	1.101	3		13
17	1.000	4		16
19	1.010	4		20
138	1.001	7		144
63	10.000	5	1.000/6	64

舍入

- Rounding Modes (illustrate with $ rounding)

	$1.40	$1.60	$1.50	$2.50	–$1.50
向0舍入	$1	$1	$1	$2	–$1
向下舍入(−∞)	$1	$1	$1	$2	–$2
向上舍入(+∞)	$2	$2	$2	$3	–$1
就近舍入(default)	$1	$2	$2	$2	–$2

  - 向偶数舍入（距离两边一样的中间结果，向偶数舍入）

Closer Look at Round-To-Even

- 默认的舍入模式
  - 如果不用汇编语言，很难改为其他round模式
  - 其他模式都是静态偏移
    - round的方向是确定的
  - 所以round-to-even的好处是数字有两个round方向，可以避免/减小统计偏差

- 应用在10进制数字上的例子
  - E.g., round to nearest hundredth

7.8949999	7.89 (Less than half way)
7.8950001	7.90 (Greater than half way)
7.8950000	7.90 (Half way—round up)
7.8850000	7.88 (Half way—round down)

Rounding Binary Numbers

- 二进制小数
  - “Even” 当最小的数字是0时
  - “Half way” 当bits正好在中间位置时 = $100\ldots_2$

- Examples
  - Round to nearest 1/4 (2 bits right of binary point)

Value	Binary	Rounded	Action	Rounded Value
2 3/32	10.00011_2	10.00_2	(<1/2—down)	2
2 3/16	10.00110_2	10.01_2	(>1/2—up)	2 1/4
2 7/8	10.11100_2	11.00_2	(1/2—up)	3
2 5/8	10.10100_2	10.10_2	(1/2—down)	2 1/2

Floating Point in C

- C Guarantees Two Levels
  - **`float`** single precision
  - **`double`** double precision
- Conversions/Casting
  - **`int`**, **`float`**和**`double`**之间的转换会改变bit值
  - **`double`**/**`float`** → **`int`**
    - 去掉小数部分
    - 向0舍入
    - 当超过范围或NaN时没有定义，一般设为Tmin（可能过大整数得到负数Tmin）
  - **`int`** → **`double`**
    - 精确的转换，int数值 < 53 bit
  - **`int`** → **`float`**
    - 按照舍入模式来进行舍入

课堂练习

- 对于下面的每一个C语言表达式：
  - 或者证明各种情况都为真
  - 或者解释为什么不为真

```
int x = …;
float f = …;
double d = …;
```

假设d和f都不是NaN

- `x == (int)(float) x`
- `x == (int)(double) x`
- `f == (float)(double) f`
- `d == (double)(float) d`
- `f == -(-f);`
- `2/3 == 2/3.0`
- `d < 0.0  ⇒  ((d*2) < 0.0)`
- `d > f  ⇒  -f > -d`
- `d * d >= 0.0`
- `(d+f)-d == f`

Floating Point Puzzles

- For each of the following C expressions, either:
  - Argue that it is true for all argument values
  - Explain why not true

```
int x = …;
float f = …;
double d = …;
```

Assume neither `d` nor `f` is NaN

- `x == (int)(float) x` ✗
- `x == (int)(double) x` ✓
- `f == (float)(double) f` ✓
- `d == (double)(float) d` ✗
- `f == -(-f);` ✓
- `2/3 == 2/3.0` ✗
- `d < 0.0 ⇒ ((d*2) < 0.0)` ✓
- `d > f ⇒ -f > -d` ✓
- `d * d >= 0.0` ✓
- `(d+f)-d == f` ✗

Today: Floating Point

- Background: Fractional binary numbers
- IEEE floating point standard: Definition
- Example and properties
- Rounding, Floating point in C
- Addition, multiplication
- Summary

浮点数的基本运算

- $x +_f y = Round(x + y)$
- $x \times_f y = Round(x \times y)$
- Basic idea
  - 首先计算精确结果
  - 然后去适配精度，进行溢出/舍入
    - 当阶过大时，可能溢出，变为+/- ∞
    - 尾数可能需要舍入

Floating Point Multiplication

- $(-1)^{s1}\ M1\ \ 2^{E1}\ \ \times\ \ (-1)^{s2}\ M2\ \ 2^{E2}$
- Exact Result: $(-1)^{s}\ M\ \ 2^{E}$
  - Sign *s*: $s1 \wedge s2$
  - Significand *M*: $M1 \times M2$
  - Exponent *E*: $E1 + E2$

- 结果修正
  - 如果$M \geq 2$, M右移，对应增大E
  - 如果E越界，就overflow
  - 最后M的值再进行舍入

- 实现
  - 复杂度最高的部分是尾数的乘法

浮点数加减运算

$$X = m_X \times 2^{E_X} \qquad Y = m_Y \times 2^{E_Y}$$

(1)对阶操作，求两数阶码的差：$\Delta E = E_X - E_Y$，使阶码小的数的尾数右移$|\Delta E|$位，调整其阶码值与大的阶码值相同。

对阶原则：小阶向大阶看齐

方法：求阶差

$$\Delta E = E_x - E_y = \begin{cases} = 0 & E_x = E_y \quad \text{已对齐} \\ > 0 & E_x > E_y \quad y \text{ 向 } x \text{ 看齐} \\ < 0 & E_x < E_y \quad x \text{ 向 } y \text{ 看齐} \end{cases}$$

对阶　尾数加减　规格化　舍入　判溢出

例　$x = 0.1101 \times 2^{10}$，　$y = 0.1011 \times 2^{01}$　　求 $x+y$

（阶码取 4 位，尾数取 7位，各含一位符号位）

解：$[x]_{补} = 00, 010; 00.110100$

$[y]_{补} = 00, 001; 00.101100$

① 对阶

$$[\Delta E]_{补} = [E_x]_{补} - [E_y]_{补} = \begin{array}{r} 00, 010 \\ + \quad 11, 111 \\ \hline 100, 001 \end{array}$$

阶差为 +1　　∴ M_y 右移，E_y+1

∴ $[y]_{补'} = 00, 010; 00.0101100$

② 尾数求和

$$\begin{array}{rl} & [M_x]_{补} = 00.1101000 \\ + & [M_y]_{补'} = 00.0101100 \\ \hline & 01.0010100 \end{array}$$

对阶后的$[M_y]_{补'}$

尾数溢出需右规

$[x+y]_{补} = 00,\ 010;\ 01.\ 0010100$

③ 右规

$[x+y]_{补} = 00,\ 011;\ 00.\ 1001010\ 0$

$\therefore\ x+y = 0.\ 100101 \times 2^{11}$

对阶　尾数加减　规格化　舍入　判溢出

例　$x = 0.1101 \times 2^{01}$，　$y = (-0.1010) \times 2^{11}$　求　$x + y$=?

解：$[x]_{补} = 0, 01; 0.1101$　　$[y]_{补} = 0, 11; 1.0110$

1. 对阶

① 求阶差　　$[\Delta E]_{补} = [E_x]_{补} - [E_y]_{补} = 0, 01$

$+ \quad 1, 01$

$1, 10$

阶差为负（-2）　∴ M_x 右移 2位　　$E_x + 2$

② 对阶　　$[x]_{补} = 0, 11; 0.0011\boxed{01}$　　保留位

2. 尾数求和

$[M_x]_{补'} = 0.001101$　　对阶后的$[M_x]_{补'}$

$+ \quad [M_y]_{补} = 1.011000$

1.100101

∴ $[x+y]_{补} = 0, 11; 1.100101$

3. 规格化

尾数左移一位，阶码减 1。

上例　$[x+y]_{补} = 0,\ 11;\ 1.\ 100101$

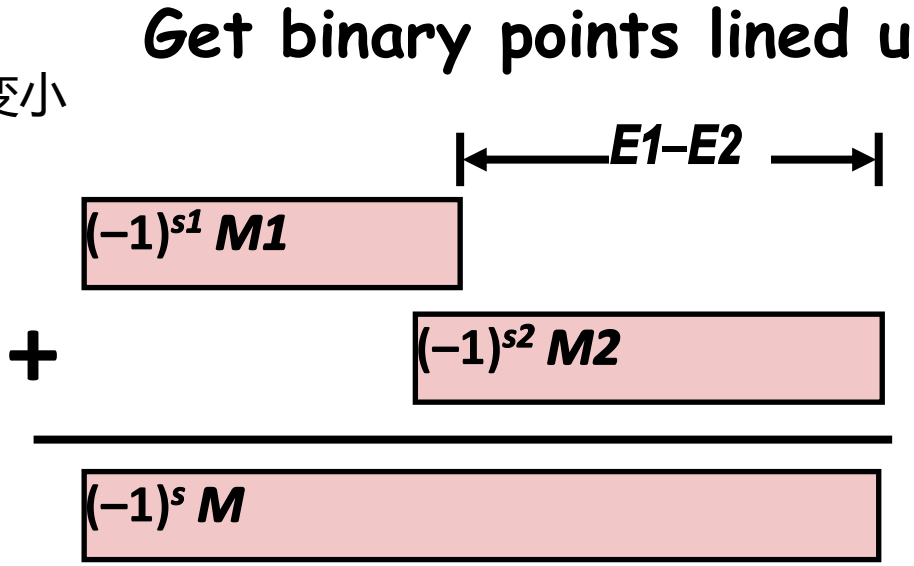
左规后　$[x+y]_{补} = 0,\ 10;\ 1.\ 00101$

4.舍入处理

$$\therefore\ x + y = (-\ 0.1110) \times 2^{10}$$

Floating Point Addition

- $(-1)^{s1}\ M1\ \ 2^{E1}\ \ +\ \ (-1)^{s2}\ M2\ \ 2^{E2}$
  - 假设$E1 > E2$，首先对阶，$E2 \to E1$, $M2$变小
- 准确结果: $(-1)^{s}\ M\ \ 2^{E}$
  - Sign s, significand M:
    - Result of signed align & add
  - Exponent E: $E1$



- 修正：
  - 如果$M \geq 2$, 右移M, 增加E
  - 如果$M < 1$, 将M 左移 k 位到合法区间, E 减小 k （可能规格化，可能非规格化）
  - 如果E超过边界，则overflow
  - 如果M位数过长，则进行舍入

Mathematical Properties of FP Add

- 是否符合阿贝尔群的特征 — ***Yes***
  - 加法的封闭性? — ***Yes***
    - 但是有可能产生无穷或NaN
  - 交换律? — ***No***
  - 结合律?
    - Overflow and inexactness of rounding
    - `(3.14+1e10)-1e10 = 0, 3.14+(1e10-1e10) = 3.14`
  - 0 是加法单位元? — ***Yes***
  - 每个元素都有加法逆元? — ***Almost***
    - Yes, 除了infinities & NaNs
- 单调性
  - $a \geq b \Rightarrow a+c \geq b+c$? — ***Almost***
    - 除了infinities & NaNs

Mathematical Properties of FP Add

- FP加法不具有结合率
  - 对编译器有很大影响
    - 例如x = a + b + c; y = b + c + d;
    - 编译器试图优化，减少一次运算
      - t = b + c;
      - x = a + t;
      - y = t + d
    - 这样可能产生不同的值，编译器一般会做保守的选择，避免对程序功能产生影响

Mathematical Properties of FP Mult

- 属性
  - 乘法是否封闭？ **Yes**
    - 但可能产生 infinity or NaN
  - 交换律? **Yes**
  - 结合率? **No**
    - 可能导致溢出，或者由于舍入带来的不精确
    - Possibility of overflow, inexactness of rounding
    - Ex: `(1e20*1e20)*1e-20= inf, 1e20*(1e20*1e-20)= 1e20`
  - 1是乘法的单位元？ **Yes**
  - 乘法对加法的分配率？ **No**
    - 可能导致溢出，或者由于舍入带来的不精确
    - `1e20*(1e20-1e20)= 0.0, 1e20*1e20 - 1e20*1e20 =NaN`
- 单调性 **Almost**
  - $a \geq b \ \& \ c \geq 0 \Rightarrow a * c \geq b * c$?
    - 除了infinities & NaNs

Floating Point Comparison

- 不能用==, !=判定浮点数相等或不等
  - 0.1这样10进制整齐的数在二进制下可能无法精确表示
  - 要进行近似；而且数字在处理几次之后，会得到一些误差（舍入导致）
  - 所以，可能两个0.1的二进制的表达不完全一样
- 采用fabs(f1-f2) <= precision
  - precision为自己预设的精度，如1e-6
- 但以上precision是绝对精度，如果浮点数非常大，可能用1e-6就不合适了
  - 应该用相对精度

Floating Point Comparison

- 相对误差和绝对误差结合的方式
  - bool IsEqual(float a, float b, float absError, float relError) {
  - if (a==b) return true;
  - if (fabs(a-b)<absError) return true;
  - if (fabs(a)<fabs(b)) return (fabs((a-b)/a)<relError) ? true : false;
  - return (fabs((a-b)/b<relError) ? true : false;
  - }

Summary

- IEEE浮点数标准有清晰的数学属性
- 浮点数表示数字的形式是 $M \times 2^E$
- 和实数代数不一样
  - 违反结合率和分配率
  - 使compiler和一些严格的计算型应用程序很难做