Curs I. Recapitulare

1. Noțiuni introductive

Conducerea roboților presupune, de cele mai multe ori, automatizarea sistemelor din care acesta este compus. Prin conducerea unui sistem, denumit și proces, se înțelege asigurarea comportamentului dorit din partea sistemului respectiv. Acest lucru se mai numește și automatizarea proceselor.

În procesul de conducere a sistemului dorit intervin mai mulți pași, începând cu analiza procesului și înțelegerea acestuia, definirea comportamentului dorit, sinteza unui algoritm de control astfel încât să obținem comportamentul dorit și implementarea acestuia.

De cele mai multe ori, comportamentul unui sistem se poate aproxima printr-o ecuație diferențială, și folosind transformata Laplace se poate obține o funcție de transfer pe baza căreia se poate trece la obținea algoritmului de reglare. În teoria controlului, funcțiile numite funcții de transfer sunt utilizate pentru a caracteriza relația intrare-ieșire a sistemelor care pot fi descrise liniar, cu ecuații diferențiale invariante în timp.

Funcția de transfer a unui sistem liniar și invariant în timp este definită ca raportul transformatei Laplace a ieșirii la transformata Laplace a intrării, cu condiții inițiale nule (zero). Luând ca exemplu sistemul liniar invariant în timp definit de următoarea ecuație diferențială:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y^{(1)} + a_n y = b_0 x^{(m)} + b_1 x^{(m-1)} + \cdots + b_{m-1} x^{(1)} + b_m x$$

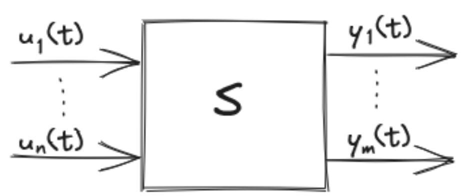
$$n \geq m$$

unde $u^{(p)}$ reprezintă derivata de ordin p a funcției u, y este ieșirea sistemului, x este intrarea sistemului, iar a_i și b_j sunt constantele sistemului. Funcția de transfer este definită astfel:

$$G(s) = \frac{\mathcal{L}[ieșire]}{\mathcal{L}[intrare]} = \frac{\mathcal{L}[y]}{\mathcal{L}[x]} = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}$$

Un sistem este complet definit dacă se cunosc:

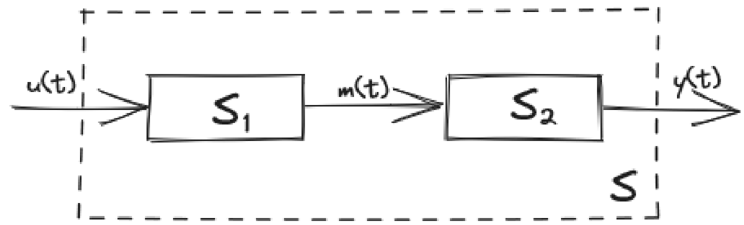
- Mărimea sau mărimile de intrare $u_i(t)$
- Mărimea sau mărimile de ieșire $y_i(t)$
- Structura S descrisă prin relațiile funcționale ce stabilesc implicația $u(t) \Longrightarrow y(t)$



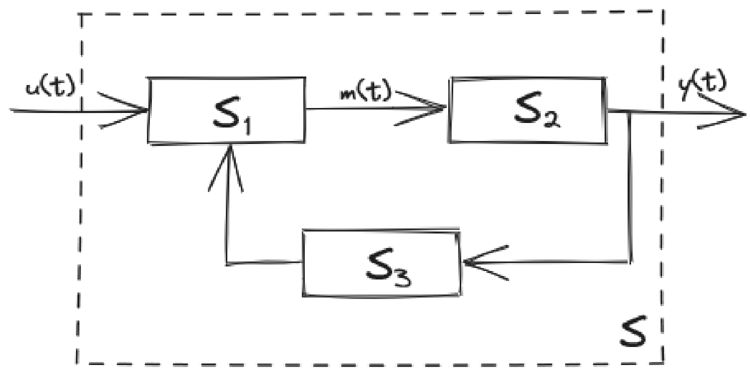
Structura S a unui sistem se poate compune din mai multe structuri, care sunt considerate la rândul lor sisteme. Acestea se mai denumesc și subsisteme.

În funcție de conexiunile dintre aceste subsisteme, se pot deosebi două tipuri de sisteme:

1. Sistemul cu structură deschisă

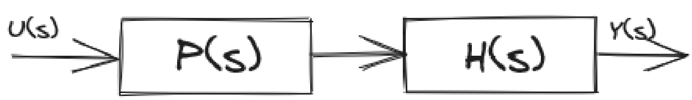


2. Sistemul cu structură închisă



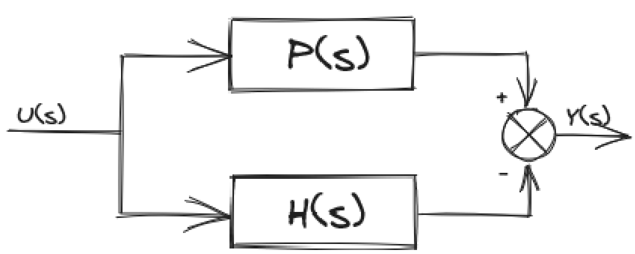
Între sisteme și subsisteme pot exista mai multe tipuri de conexiuni, iar în funcție de legăturile dintre acestea o colecție de subsisteme se poate înlocui cu un sistem echivalent.

1. Legătura tip serie



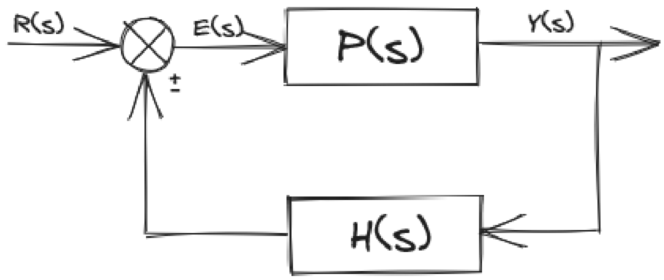
$$G(s) = P(s) \cdot H(s)$$

2. Legătura tip paralel



$$G(s) = P(s) + H(s)$$

3. Conexiunea cu reacție

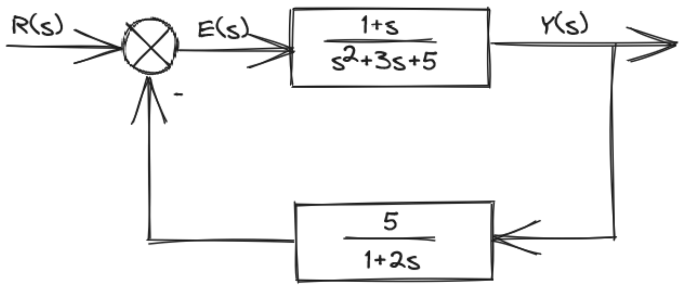


$$G(s) = \frac{P(s) \cdot H(s)}{1 \mp P(s) \cdot G(s)}$$

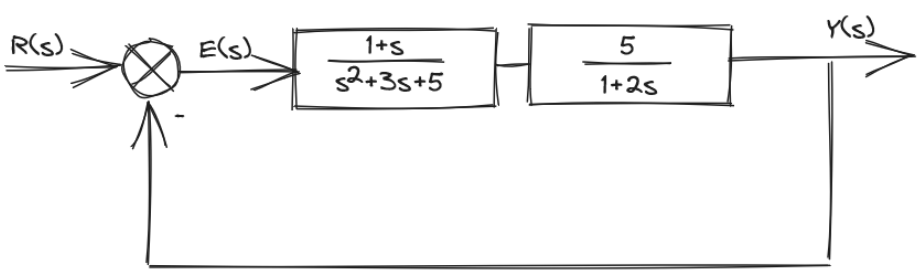
EXERCIȚII PROPUSE

1. Să se deducă simbolic funcțiile de transfer echivalente a următoarelor structuri.

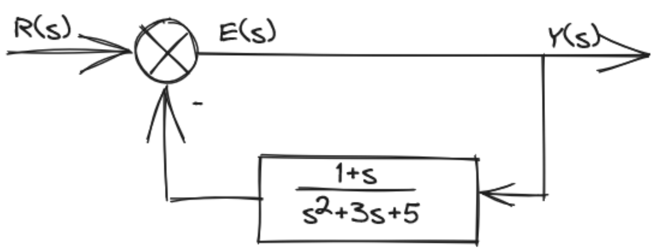
a)



b)

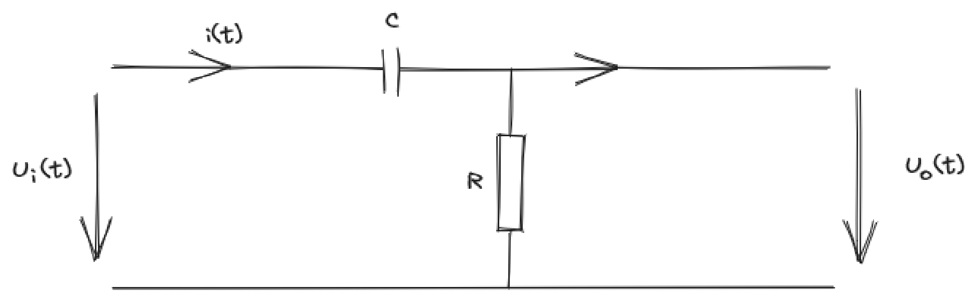


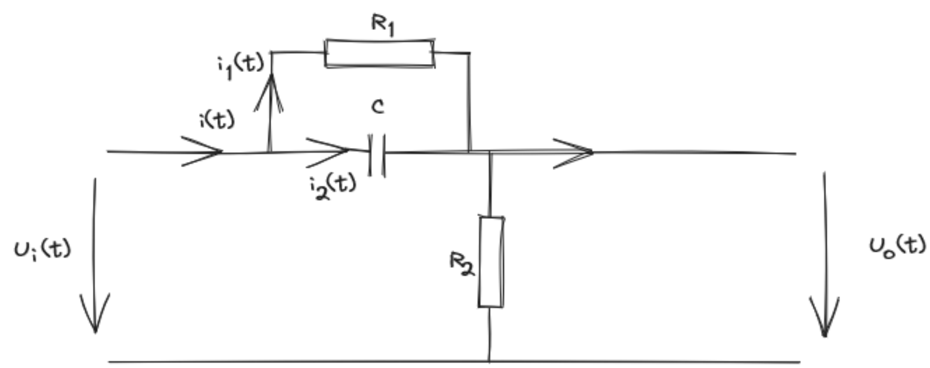
c)

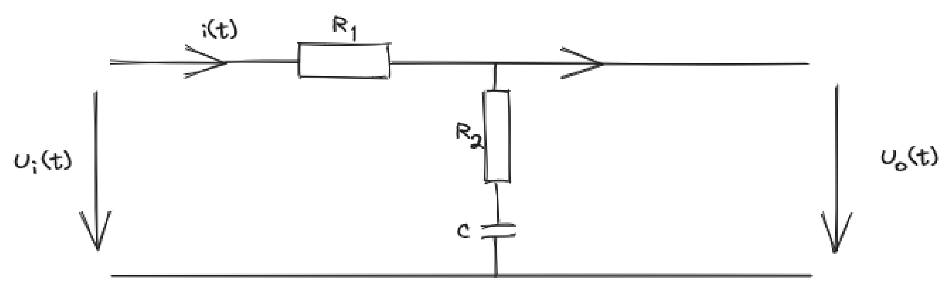


2. Folosind transformata Laplace, să se obțină funcția de transfer simbolice a circuitelor următoare.

Tensiunea pe rezistență	Tensiunea pe condensator	Tensiunea pe bobină
$U(t) = Ri(t)$	$U(t) = \frac{1}{c}\int i(t)$	$U(t) = \frac{\partial i(t)}{\partial t}$

a) 

b) 

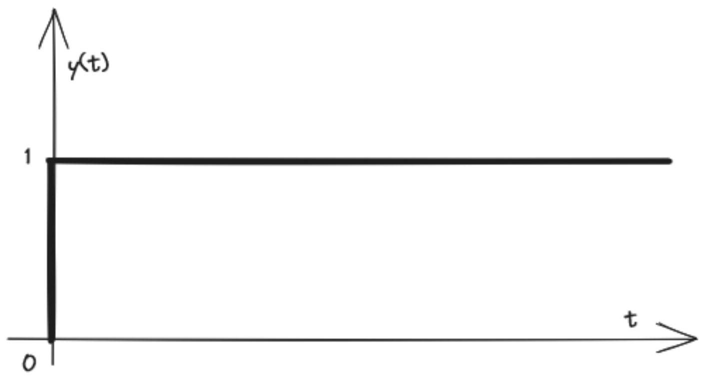
c) 

2. Analiza și simularea răspunsului în timp

În procesul de dezvoltare a unui sistem de reglare trebuie să avem o bază comună pentru comparația performanțelor realizate de acestea în diverse situații. Primul pas în stabilirea unei baze comune constă în specificarea unor semnale de intrare comune a căror formă de variație este cunoscută.

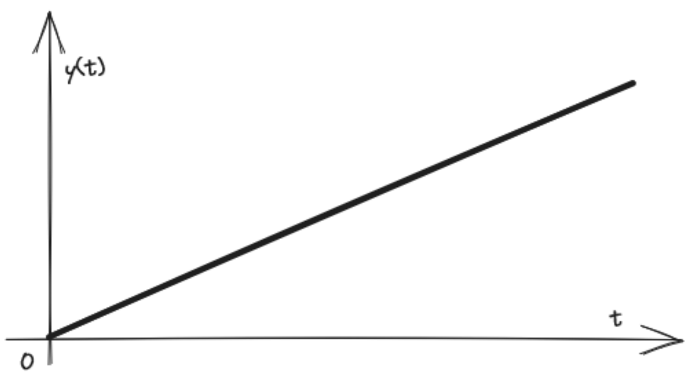
1. Treaptă unitară

$$r(t) = 1_{+}(t), R(s) = \frac{1}{s}$$



2. Rampă unitară

$$r(t) = t|_{t\geq 0}, R(s) = \frac{1}{s^2}$$



Considerând răspunsul unui sistem de ordin 2 la o intrare de tip treaptă unitară reprezentat în Fig. 1 se pot defini mai mulți indicatori de performanță, printre care menționăm:

1. Eroarea staționară ε_{st} – este diferența dintre mărimea de referință $r(t)$ și răspunsul sistemului $y(t)$ când $t \to \infty$

$$\varepsilon_{st}[\%] = \frac{|r(t) - y(t)|}{r(t)} * 100$$

2. Timpul de creștere t_c – este timpul necesar ca răspunsul la treaptă unitară să crească de la 10% la 90% din valoarea regimului staționar. Timpul de creștere verifică relația:

$$y(t_c) = 0.9y_{st}$$

unde y_{st} este valoarea răspunsului staționar.

3. Timpul de stabilire (reglare) t_s sau durata regimului tranzitoriu – este intervalul de timp după care răspunsul sistemului intră într-o bandă de toleranță de $\pm 0.05y_{st}$ sau $\pm 0.02y_{st}$ centrată pe valoarea răspunsului staționar.

$$|y(t_s) - y_{st}| \leq 0.05y_{st}\ (sau\ 0.02y_{st})$$

4. Suprareglajul (abaterea maximă) M_v (sau σ) – este exprimat în procente, acesta este definit cu relația:

$$M_v[\%] = \frac{y_{max} - y_{st}}{y_{st}} * 100$$

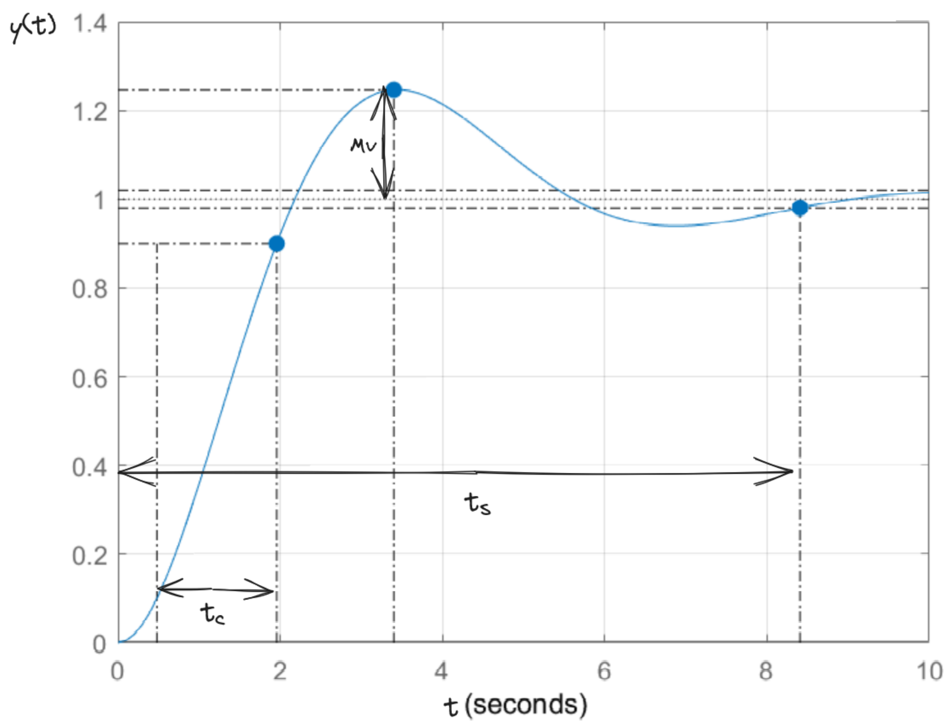


Fig 1. Răspunsul la intrare treaptă unitară a unui sistem de ordinul II

Pentru cazul unui sistem de ordin 1, indicii de calitate se pot aproxima folosind următoarele formule:

$$t_c = 2.2T$$

$$t_s = 4T \text{ pentru bandă de 5\%}$$

$$t_s = 5T \text{ pentru bandă de 2\%}$$

Pentru un sistem de ordin 2, indicii de calitate se pot aproxima folosind formulele:

$$t_C = \frac{\pi - \varphi}{w_n\sqrt{1-\zeta^2}}, \varphi = arctg\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)$$

$$t_s = \frac{4}{w_n\zeta} \text{ pentru bandă de 2\%}$$

$$t_s = \frac{5}{w_n\zeta} \text{ pentru bandă de 5\%}$$

$$M_v = e^{\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

Utilizând teorema valorii finale, eroarea staționară pentru diferite semnale de intrare aplicate unui sistem în buclă închisă se poate obține astfel:

1. Intrare treaptă unitară

$$e_{St} = \frac{sR(s)}{1 + \lim\limits_{s\to 0}[G(s)H(s)]} = \frac{1}{1 + k_p}$$

2. Intrare rampă unitară

$$e_{st} = \frac{1}{\lim\limits_{s\to 0}[sG(s)H(s)]} = \frac{1}{k_v}$$

3. Intrare parabolică

$$e_{st} = \frac{1}{\lim\limits_{s\to 0}[s^2G(s)H(s)]} = \frac{1}{k_a}$$

Exerciții propuse

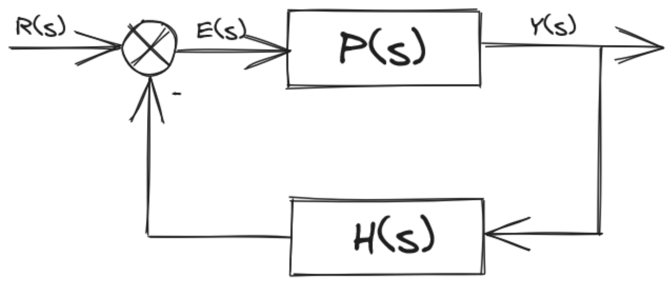
1. Să se calculeze timpul de creștere, timpul de stabilire și suprareglajul pentru următoarele sisteme:

$$G(s) = \frac{4}{s+4}$$

$$G(s) = \frac{100}{s^2 + 12s + 100}$$

$$G(s) = \frac{10000}{s^2 + 141.42s + 10000}$$

2. Considerând o structură cu buclă închisă având structura din figura de mai jos, să se determine erorile staționare pentru intrările de tip treaptă unitară, rampă unitară si parabolă pentru funcțiile de transfer:



$$P(s) = \frac{1}{s+3}, H(s) = \frac{3}{1 + 0.5s}$$

$$P(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}, H(s) = \frac{1}{1 + 0.5s}$$

$$P(s) = \frac{1}{s^2 + 0.5s + 3}, H(s) = \frac{100}{1 + 2s}$$

Curs II. Introducere regulatoare

1. Problematica sistemelor de reglare automată

Proiectarea sistemelor de reglare automată se realizează printr-o abordare ciclică în care se parcurg iterativ etapele de modelare, analiză, proiectare, simulare, testare și implementare. Arhitectura și componentele unui sistem de reglare automată (SRA) sunt determinate în principal de procesul (instalația tehnologică) reglat(ă). Proiectarea unui SRA presupune însă o tratare holistică a tuturor componentelor hardware și software și a aspectelor funcționale a acestuia, și anume: instalația tehnologică, senzorii (traductoarele), elementele de execuție, obiectivele reglării, calculatoare, arhitecturi și interfețe, rețele de comunicații, algoritmi, perturbații și incertitudini.

Instalația tehnologică (IT) sau procesul de controlat reprezintă componenta de bază de la care pleacă dezvoltarea și implementarea oricărui SRA. Înțelegerea funcționării acestuia, cunoașterea regimului nominal de funcționare, cunoașterea perturbațiilor și a locului de aplicare acestora, particularitățile sursei de energie și a modului de comandă a acesteia, precum și cerințele de performanță impuse sunt elemente esențiale în proiectarea SRA. Funcționarea procesului de controlat, incluzând perturbațiile aditive sau structurale, poate fi analizată pe baza modelelor de identificare analitică sau experimentală.

O instalație tehnologică este reprezentată sistemic ca în Fig. 2, unde intrarea este notată cu u, denumită și mărime de intrare sau execuție, iar ieșirile sunt reprezentate de mărimile de proces $y_1, y_2, \dots, y_n$, mărimi de natură fizică diversă (presiune, temperatură, debit, nivel concentrație, deplasare, viteză, cuplu, accelerație, etc.)

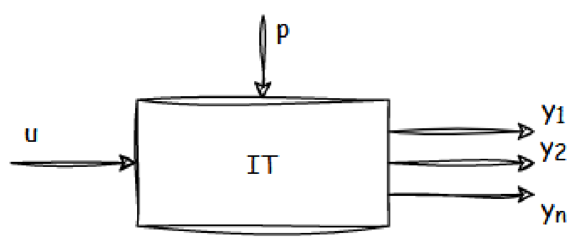


Fig. 2. Reprezentare instalație fixă

Elementele de măsurare (EM), denumite și Traductoare (T), au rolul de a culege informația de la IT, în general ieșirea acesteia, și transmiterea ei către algoritmul de reglare. Informația necesară pentru conducerea IT se obține prin măsurarea și conversia mărimilor fizice din proces. Principiul constructiv și modul de funcționare al unui element de măsurare este determinat de particularitățile IT, respectiv de natura fizică a mărimilor care trebuie achiziționate. În cazul în care mărimea fizică de la ieșirea IT nu se poate măsura direct, atunci informația necesară pentru conducerea procesului se poate obține pe baza unor observații și măsurări indirecte.

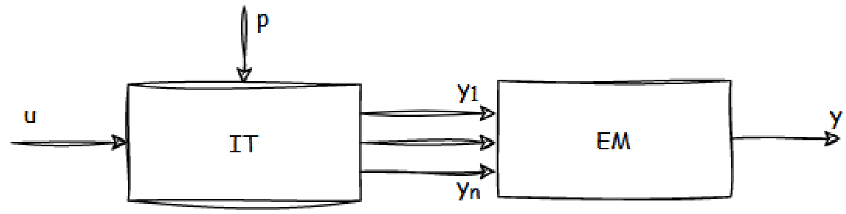


Fig. 2. Instalația tehnologică și elementul de măsurare

Elementele de execuție (EE) au rolul principal de a controla mărimea de intrare în IT în funcție de o mărime de intrare proprie. Practic, un element de execuție realizează și conversia între două semnale, dacă este necesar. De exemplu, un element de execuție poate să aibă la ieșire o mărime de natură electrică, hidraulică sau pneumatică, în timp ce la intrare poate să fie, pentru toate cele 3 cazuri, o mărime de natură electrică sau chiar un semnal digital. Ansamblul format din elementul de execuție EE, instalația tehnologică IT și elementul de măsurare EM este denumit generic proces condus (PC) sau parte fixată (PF).

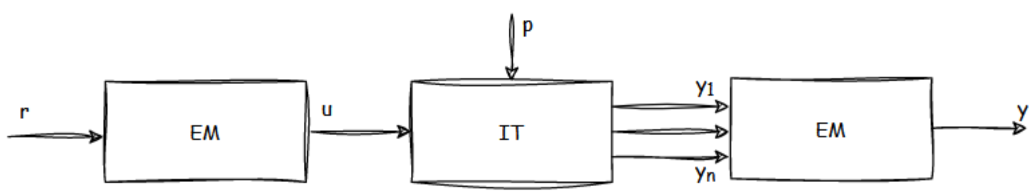


Fig. 3. Procesul condus/partea fixată formată din EE, IT și EM

Obiectivele unui SRA sunt urmărirea cât mai fidelă a referinței și rejectarea perturbațiilor. Aceste obiective calitative sunt definite în domeniul timpului de eroare, timpul de creștere, timpul de stabilizare și suprareglaj. Pe lângă acestea, mai există și obiective generale precum calitatea, siguranța în funcționare și compatibilitatea cu mediul.

Calculatoarele sunt parte integrată a sistemelor moderne de conducere a proceselor industriale. Sistemele de procesare numerică a informației puterea de calcul necesară și flexibilitatea dotiră a sistemelor complexe de conducere. Pe lângă aplicațiile în timp real, calculatoarele sunt instrumente eficiente pentru proiectarea asistată a sitemelor de reglare precum și pentru simularea și testarea algoritmilor de conducere. Prin utilizarea acestor intrumente este posibilă reducerea timpului de proiectare și implementarea unor sisteme bazate pe strategii avansate și flexibile de conducere.

2. Regulatorul și rol funcțional

Regulatorul (R) este elementrul central al unui sistem de reglare. Are rolul funcțional de a elabora pe baza unei legi de reglare (sau algoritm de reglare) mărimea de comandă u, în funcție de semnalul de eroare ε aplicat la intrare. Regulatorul realizează suplimentar, pe lângă prelucrările impuse de legea de reglare, și funcția elementului de comparație (sumarea dintre semnalul de referință și de reacție) și prescrierea mărimii de referință (EPR – element de prescriere a referinței).

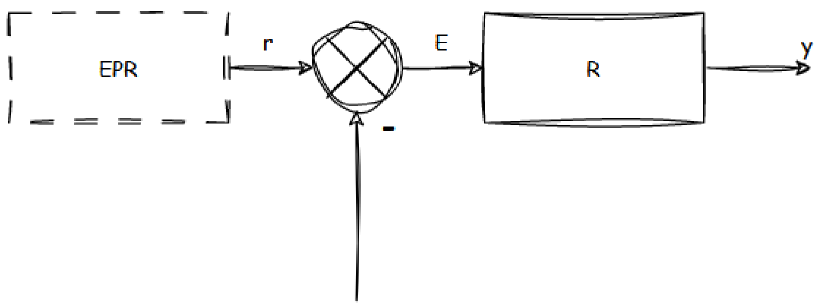


Fig. 4. Structura regulator

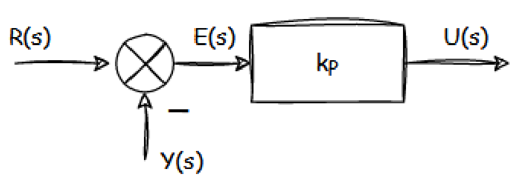
După tipul acțiunii regulatorului avem:

a) Regulatoare cu acțiune continuă numite de obicei regulatoare liniare. Legile de reglare tipice (algoritmi tipizați de reglare) pentru regulatoare liniare pot fi de tipul:

- Proporțional – P

$$u(t) = k_P \varepsilon(t)$$

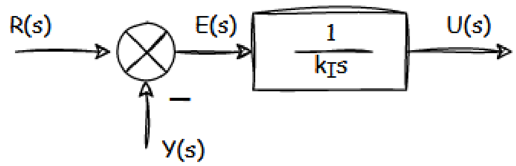
$$G_R(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = k_P$$



- Integrativ – I

$$u(t) = \frac{1}{k_I} \int \varepsilon(t) dt$$

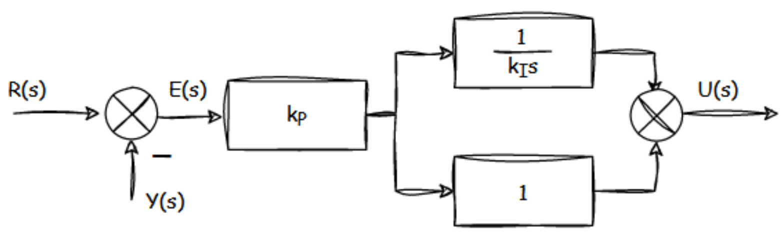
$$G_R(s) = \frac{1}{s k_I}$$



- Proporțional și integrativ – PI

$$u(t) = k_P \left[\varepsilon(t) + \frac{1}{k_I}\int \varepsilon(t)dt\right]$$

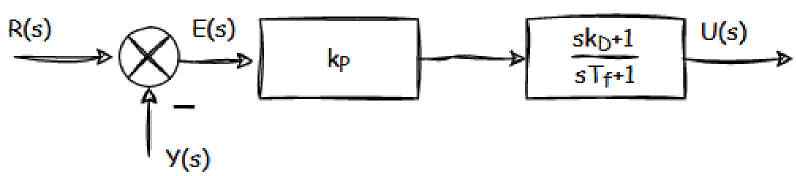
$$G_R(s) = k_P\left(1 + \frac{1}{sk_I}\right)$$



- Proporțional și derivativ cu filtru – PDT1

$$T_f\frac{\partial u(t)}{\partial t} + u(t) = k_P[\varepsilon(t) + k_D\frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial t}]$$

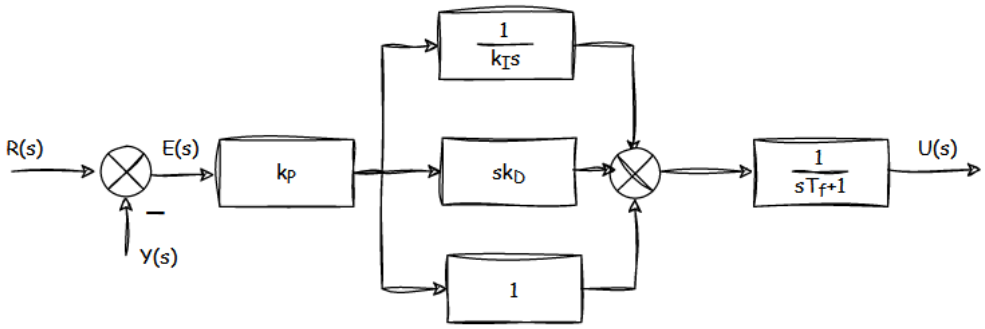
$$G_R(s) = k_P\frac{sk_D + 1}{sT_f + 1}$$



- Proporțional, derivativ și integrativ cu filtru – PDT1

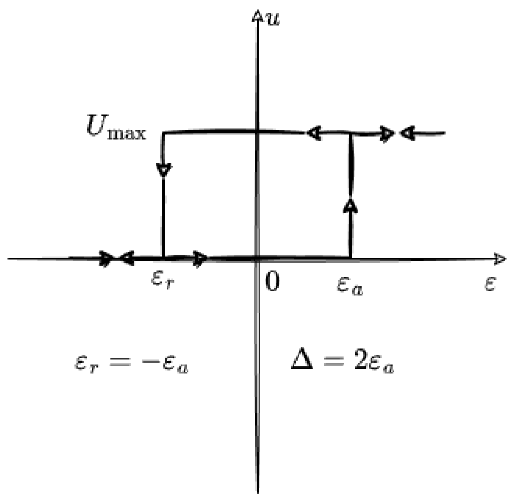
$$T_f\frac{\partial u(t)}{\partial t} + u(t) = k_P\left[\varepsilon(t) + k_D\frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial t} + \frac{1}{k_I}\int \varepsilon(t)dt\right]$$

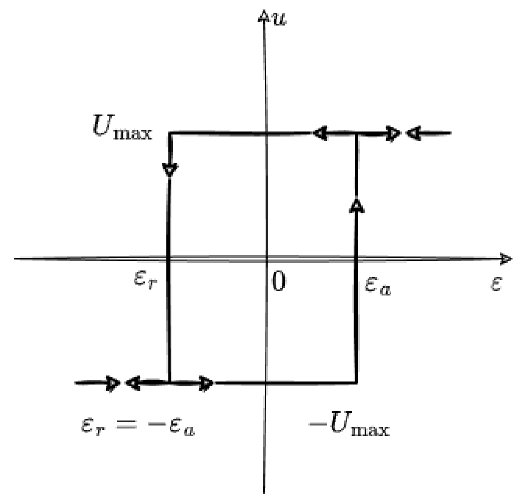
$$G_R(s) = k_P\left(1 + \frac{1}{sk_I} + sk_D\right)\frac{1}{sT_f + 1} = \frac{k_P(s^2k_Dk_I + sk_I + 1)}{sk_I(sT_f + 1)}$$



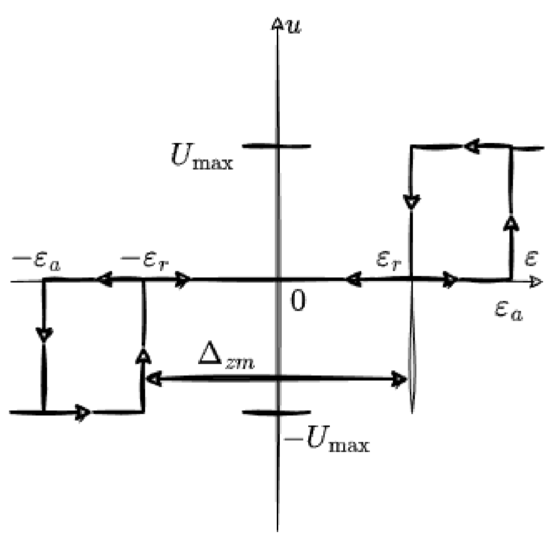
b) Regulatoare cu acțiune discontinuă denumite uzual regulatoare neliniare care pot fi

- De tip bipozițional





- De tip tripozițional



Regulatoarele neliniare furnizează la ieșire o mărime de comandă care poate lua numai două sau trei valori distincte.

După natura semnalelor prelucrate avem:

a) Regulatoare continue (analogice)
b) Regulatoare numerice (discrete)

După tipul procesului condus (reglat) avem:

a) Regulatoare pentru procese rapide
b) Regulatoare pentru procese lente

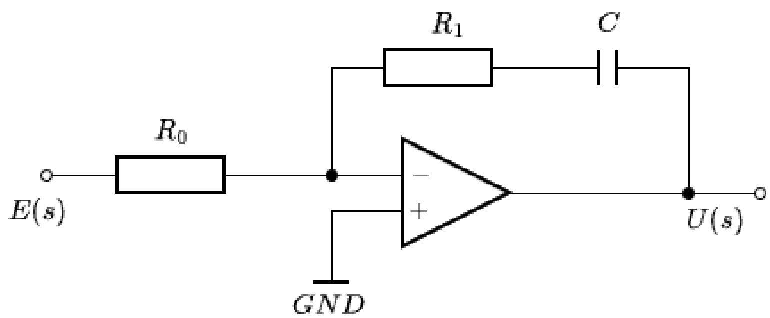


Fig. 5. Regulator PI analogic

$$k_P = \frac{R_1}{R_0}, k_I = cR_1$$

Curs III. Regulatoare continue. PID

1. Regulatoare liniare

Regulatoarele liniare sunt dispozitive sau algoritmi care sunt utilizați pentru a controla sau regla comportamentul unui sistem dinamic într-un mod specific. Aceste regulatoare sunt "liniare" în sensul în care se bazează pe sistemele liniare ale sistemului pe care încearcă să îl controleze. Regulatoarele liniare sunt utilizate pentru a asigura că sistemul rămâne stabil și funcționează în conformitate cu anumite specificații sau cerințe de performanță.

Printre cele mai cunoscute tipuri de regulatoare liniare se regăsesc:

1. Regulatorul proporțional-integral-derivativ (PID). Acesta este un tip comun de regulator liniar utilizat în controlul proceselor și automatizarea industrială. Regulatorul PID se bazează pe trei componente principale:
    a. Proporțional (P) – reacționează proporțional cu eroarea actuală dintre valoarea dorită și valoarea măsurată a sistemului, producând o comandă proporțională cu această eroare
    b. Integral (I) – ține cont de integrala erorii în timp, ceea ce ajută la eliminarea erorilor în regim permanent
    c. Derivativ (D) – ține cont de rata de schimbare a erorii în timp, ceea ce ajută la diminuarea suprareglajului și îmbunătățește stabilitatea sistemului
2. Regulatoarele liniare după stare. Sunt o clasă de regulatoare utilizate în controlul proceselor și automatizare. Acestea se bazează pe reprezentarea unui sistem dinamic sub formă de ecuații de stare, ceea ce permite o abordare mai flexibilă și eficientă a proiectării și controlului sistemelor complexe.

1. Regulatorul PID

Structura generală a regulatorului PID este prezentată în Fig. 6. Intrarea în regulator este eroarea dintre mărimea impusă $R(s)$ și mărimea de ieșire $Y(s)$. Regulatorul are rolul de a transforma eroarea într-un semnal de comandă $U(s)$ pentru procesul condus astfel încât acesta să asigure criteriile de performanță impuse. Trebuie avut în vedere că, în general, sistemul este perturbat de un zgomot $P(s)$ care nu poate fi măsurat sau estimat. Un regulator are rolul și de a menține procesul stabil în ciuda acestui semnal perturbator.

- $R(s)$ – mărimea de intrare impusă
- $E(s)$ – eroarea dintre semnalul de intrare și ieșirea sistemului
- $U(s)$ – mărimea de comandă a procesului
- $P(s)$ – zgomotul din sistem
- $Y(s)$ – ieșirea sistemului

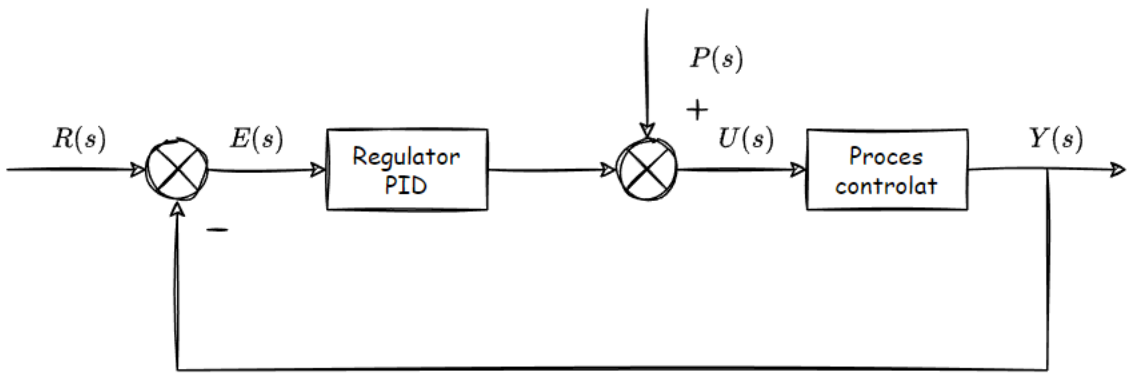


Fig. 6. Structura clasică de reglare cu regulator PID

Presupunând un sistem de ordin I și intrarea de tip treaptă unitară, evoluția în timp și eroarea staționară sunt reprezentate în Fig. 7.

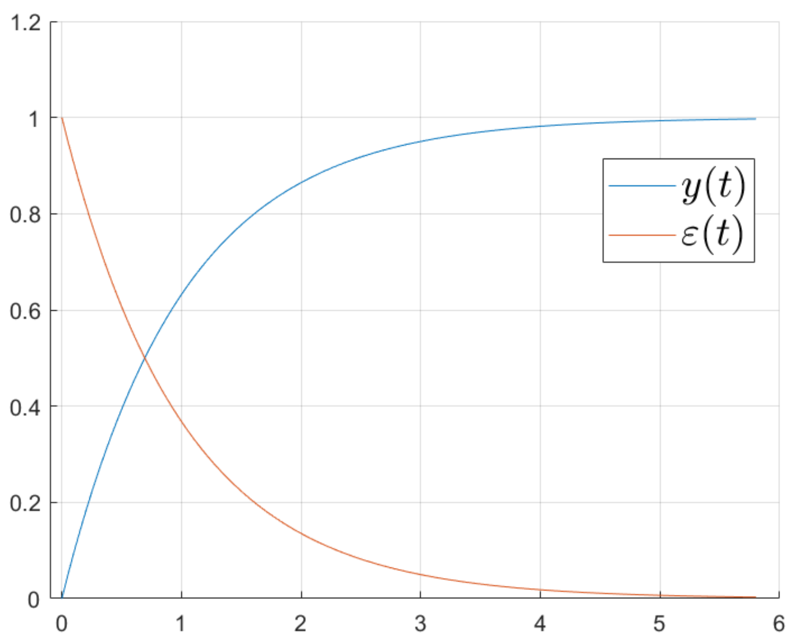


Fig. 7. Răspunsul unui sistem de ordin I și eroarea acestuia pentru o mărime de intrare treaptă unitară

Luând în considerare funcția de transfer generală a unui regulator PID se pot determina efectele fiecărei componente a acestuia asupra semnalului de comandă, și automat și asupra răspunsului sistemului. Acești parametri modifică, în același timp, caracteristicile de performanță ale sistemului în cauză.

$$u(t) = k_P \left[\varepsilon(t) + k_D \frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial t} + \frac{1}{k_I} \int \varepsilon(t) dt \right]$$

Efectele componentelor regulatorului PID sunt:

1. Componenta proporțională (P):
   - Reacționează la eroarea actuală dintre mărimea de referință și ieșirea sistemului
   - Generază mărimea de comandă proporțională cu eroarea sistemului. Cu cât eroarea este mai mare, cu atât comanda de control generată este mai mare
   - Ajută la stabilizarea sistemului și la reducerea erorii în regim permanent
   - Reduce timpul de creștere și de stabilizare
   - Poate duce la surpareglaj și/sau oscilații în jurul valorii staționare

Pentru un sistem de ordinul I cu o eroare staționară de 10%, un regulator proporțional cu factorul proporțional $k_P = 0.5$ produce un semnal de comandă ca cel ilustrat în Fig. 8.

$$G_R(s) = 0.5$$

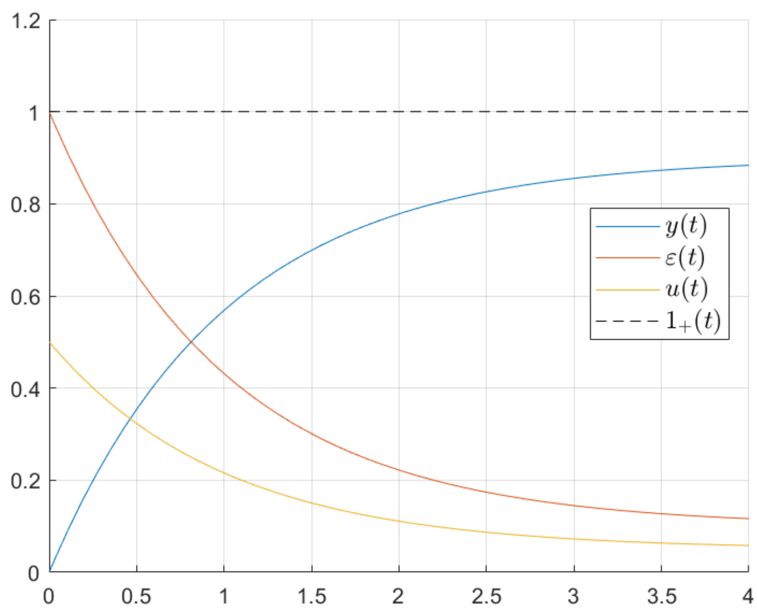


Fig. 8. Răspunsul sistemului, eroarea și semnalul de comandă a unui sistem de ordin I cu eroare staționară de 10%

2. Componenta integrativă (I):
   - Ține cont de integrala erorii în timp. Acumulează eroarea în timp și generează o comandă de control ce are ca efect eliminarea erorilor în regim staționar
   - Contribuie la stabilizarea sistemului și la reducerea erorilor staționare

- Poate duce la creșterea timpului de stabilizare și a suprareglajului

Pentru un sistem similar cu cel de la elementul proporțional și un regulator doar cu componentă integrativă având $k_I = 0.9$, se produce un semnal de comandă ca cel ilustrat în Fig. 9.

$$G(s) = \frac{1}{0.9s}$$

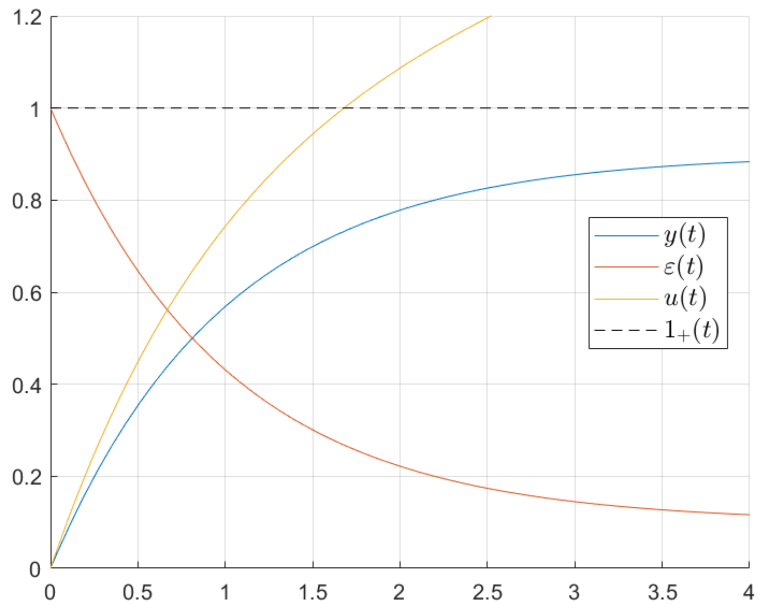


Fig. 9. Răspunsul sistemului, eroarea și semnalul de comandă a unui sistem de ordin I cu eroare staționară de 10%

3. Componenta derivativă (D):
   - Reacționează la rata de schimbare a erorii. Aceasta ajută la anticiparea modificărilor rapide ale erorii și încetinește rata de schimbare a mărimii de comandă pentru a preveni suprareglajul
   - Contribuie la reducerea oscilațiilor și la îmbunătățirea stabilității sistemului
   - Este mai puțin sensibilă la zgomot sau perturbații ale sistemului deoarece reacționează la schimbările rapide ale erorii
   - Poate crește timpul de creștere și stabilizare

Pentru un sistem similar cu cele anterioare și un regulator cu factor derivativ $k_D = 1$, mărimea de comandă este similară cu cea ilustrată în Fig. 10. De notat că atât mărimea de comandă cât și funcția de transfer sunt aproximate, funcția reală fiind obligată să respecte condiția de realizabilitate fizică.

$$G_R(s) \approx k_D s$$

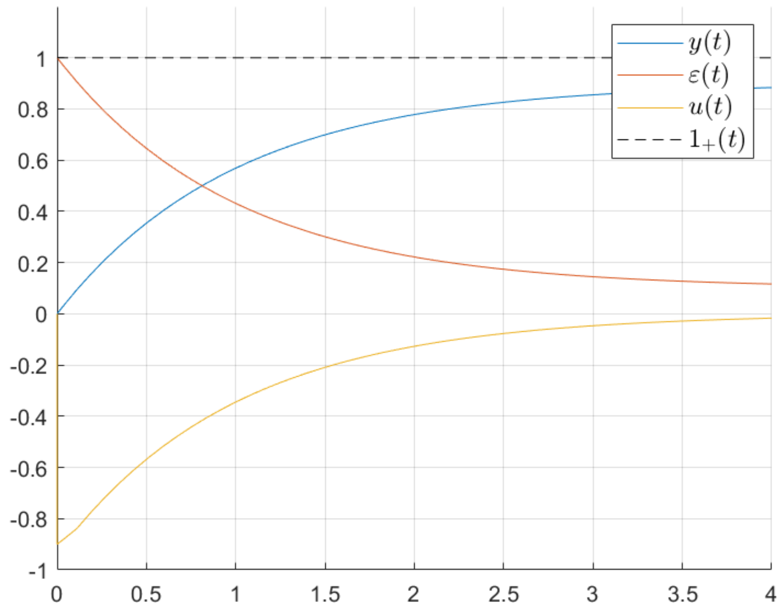


Fig. 9. Răspunsul sistemului, eroarea și semnalul de comandă a unui sistem de ordin I cu eroare staționară de 10%

Curs IV. Sinteza regulatoarelor. Metoda răspunsului impus

1. METODA RĂSPUNSULUI IMPUS

Regulatoarele PI și PID sunt cele mai răspândite și utilizate structuri de reglare. Pentru a realiza un regulator se parcurg următoarele etape:

1. Identificarea procesului condus (instalația fixată) printr-o metodă analitică sau experimentală
2. Alegerea valorilor criteriilor de performanșă a sistemului de reglare în buclă închisă.
3. Se adoptă o lege de reglare pe baza procesului condus și a criteriilor de performanță dorite și se calculează parametrii acesteia
4. Se analizează comportamentul sistemului de reglare automată simulând bucla închisă a acestuia într-un soft de specialitate

Metoda răspunsului impus sau metoda alocării polilor este aplicată doar proceselor ce sunt modelate prin funcții de transfer de ordin 1 sau 2. Regulatorul PI se utilizează pentru procesele de tip T1, iar regulatorul PIDT1 se utilizează pentru controlul proceselor de tip T2 oscilantme sau amortizate. Etapa de proiectare a regulatorului prin metoda răspunsului impus necesită cunoașterea relațiilor de legătură dintre indicatorii de calitate (performanță) și parametrii funcțiilor de transfer ale sistemului de reglare automată.

2. SINTEZA REGULATORULUI PI PENTRU UN PROCES DE ORDINUL 1

Funcția de transfer optimă a unui element de tip T1 este:

$$G(s) = \frac{k}{1 + sT}$$

Metoda se mai numește și metoda alocării polilor pentru că, de exemplu, în cazul sistemului de tip T1 urmează să se determine valoarea constantei de timp T1, adică a polului procesului. A se remarca faptul că pentru un element de tip T1 cu eroare staționară nulă la treaptă unitară factorul de amplificare are valoarea $k = 1$. Matematic, pentru o mărime de comandă oarecare, acest lucru este exprimat prin ecuația simplă:

$$y_{st} = k$$

În funcție de indicatorul de calitate ales, pe lângă eroarea staționară, valoarea constantei de timp T se poate determina astfel:

1) Timpul de creștere t_c

$$y(t_c) = 0.9y_{st} = 0.9k$$

$$k\left(1-e^{-\frac{t}{T}}\right)=0.9k$$

$$t_c = 2.3T \Rightarrow T = \frac{t_c}{2.3}$$

2) Timpul de stabilire t_s

Pentru bandă de 5%,

$$|y(t_S) - y_{st}| \leq 0.05 y_{st}$$

$$\left|k\left(1-e^{-\frac{t_s}{T}}\right)-k\right| \leq 0.05k$$

$$e^{-\frac{t_s}{T}} = 0.05 \Rightarrow t_s = 3T \Rightarrow T = \frac{t_s}{3}$$

Iar pentru bandă de 2%,

$$t_s \cong 4T \Rightarrow T \cong \frac{t_s}{4}$$

3) Banda de trecere ω_B

$$G(j\omega) = \frac{k}{1+j\omega T}, G(j0) = k$$

$$|G(j\omega_B) = \frac{k}{\sqrt{1+\omega_B^2 T^2}} = \frac{G_0(j_0)}{\sqrt{2}} = \frac{k}{\sqrt{2}}$$

$$\omega_B = \frac{1}{T} \Rightarrow T = \frac{1}{\omega_B}$$

Având funcția de transfer a sistemului în buclă închisă, mai exact parametrii k și T, se poate trece la aflarea funcției de transfer a regulatorului PI. Se consider procesul cu partea fixate modelată prin funcția de transfer

$$G_F(s) = \frac{k_F}{1+sT_F}$$

Se stabilesc obiectivele reglării. Ca exemplu, se vor utiliza:

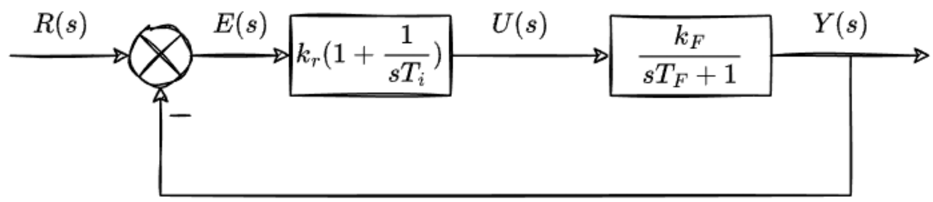
- Eroare staționară nulă la treaptă unitară, $e_{st}^1 = 0$
- Timp de creștere dat t_c

Pentru a îndeplini performanțele specificate, regulatorul trebuie să conțină în mod obligatoriu un pol în origine, iar din acest motiv se impune un regulator cu acțiune integrativă.

Funcția de transfer în buclă închisă care va asigura performanțele cerute este:

$$G_0(s) = \frac{1}{s + sT_0}, T_0 = \frac{t_c}{2.3}$$

Schema bloc echivalentă a sistemului în buclă închisă este:



Se calculează funcția de transfer echivalentă a sistemului în buclă închisă,

$$G_0(s) = \frac{G_R(s)G_F(s)}{1 + G_R(s)G_F(s)} = \frac{1}{s\frac{T_i}{k_R k_F} + 1} = \frac{1}{sT_0 + 1}$$

Principiul general după care se aplică SRA este faptul că zerourile regulatorului compensează polii procesului condus. De aici rezultă că $T_i = T_F$.

$$T_0 = \frac{T_F}{k_R k_F} \Rightarrow k_R = \frac{T_F}{k_F T_0}$$

2. Sinteza regulatorului PIDT1 pentru un proces de ordinul 2

Funcția de transfer optimă pentru elementul de tip T2 este:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{a_0}{s^2 + a_1 s + a_0}$$

Alocarea polilor pentru elementul de tip T2 implică determinarea factorului de amortizare ζ și a pulsației naturale ω_n, sau a parametrilor a_0 și a_1.

Pentru $0 < \zeta < 1$ avem răspunsul indicial:

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t + \varphi\right), \varphi = arctg\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

sau

$$y(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left(cos\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}sin\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t\right)$$

Se observă că $y_{st} = 1$.

Indicatorii de calitate importanți pentru elementul de tip T2 sunt $t_c, t_p, t_s, M_v, \omega_B$. Alocarea polilor reprezintă obținere formulelor de calcul pentru parametrii ζ și ω_B în funcție de indicatorii de calitate selectați. În general se vor alege doi parametri, iar unul dintre aceștia este indicat să fie surpareglajul M_v. Motivul pentru care se indică acest lucru este faptul că surpareglajul este singurul indicator care depinde numai de ζ.

În funcție de indicatorul de calitate ales, avem următoarele metode de a determina parametrii:

1) Timpul de creștere t_c

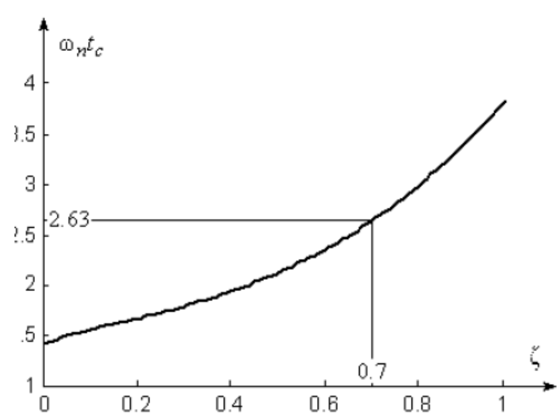
Se determină prin rezolvarea ecuației:

$$y(t_c) = 0.9 = 1 - e^{-\zeta\omega_n t_c}\left(cos\omega_d t_c + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}sin\omega_d t_c\right), \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

de unde se obține ecuația algebrică:

$$e^{-\zeta\omega_n t_c}\left(cos\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t_c + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}sin\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t_c\right) = 0.1$$

Din aceasă ecuație nu se poate obține o soluție analitică. Presupunând că se cunoaște ζ, care se poate calcula din suprareglaj, problema se poate rezolva grafoanalitic sau cu calculatorul reprezentând funcția $\omega_n t_c = f(\zeta)$.



Pentru $\zeta = 0.707$ ($M_v = 4.3\%$) avem $\omega_n t_c = 2.63$. Cunoscând $\omega_n t_c$ și t_c rezultă ω_n. Calculul se poate simplifica dacă se modifică ușor definiția timpului de creștere, și anume $y(t_c) = 1$. În acest caz t_c se determină rezolvând ecuația

$$e^{-\zeta\omega_n t_c}\left(cos\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t_c + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} sin\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t_c\right) = 0$$

Având în vedere că $e^{\zeta\omega_n t_c} \neq 0$, t_c se calculează rezolvând ecuația trigonometrică:

$$\cos\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t_c + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t_c = 0, sau$$

$$tg\left(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t_c\right) = -\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

Care are soluția

$$\omega_n t_c = \frac{\pi - \varphi}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\pi - arctg\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Cunoscând ζ și t_c se poate calcula ω_n.

2) Timpul de vârf t_v

$$y(t_v) = y_{max}, \frac{dy}{dt} = 0$$

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t + \varphi\right)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{e^{-\zeta\omega_n t_v}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\left[-\zeta\omega_n\sin(\omega_d t_v + \varphi) + \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\cos(\omega_d t_v + \varphi)\right] = 0$$

$$\varphi = arctg\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}, \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

Rezultă:

$$\sin(\omega_d t_v + \varphi) - \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\cos(\omega_d t_v + \varphi) = 0$$

Având în vedere că $\sqrt{1-\zeta^2} = sin\varphi, \zeta = cos\varphi$ se obține

$$\frac{\sin(\omega_d t_v + \varphi)\, cos\varphi - sin\varphi \cos\,(\omega_d t_v + \varphi)}{cos\varphi} = 0, sau$$

$$\sin(\omega_d t_v + \varphi - \varphi) = 0 \rightarrow \sin(\omega_d t_v) = 0 \rightarrow \omega_d t_v = 0, \pi, 2\pi, \ldots n\pi$$

Rezultă ecuația pentru timpul de vârf

$$t_v = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

3) Suprareglajul M_v

Înlocuind $\omega_n t_v = \frac{\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}$ în ecuația răspunsului rezultă suprareglajul:

$$M_v = y(t_v) - 1 = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t_v}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\pi - \Phi) - 1 = -\frac{e^{-\zeta\omega_n t_v}}{\sqrt{1-\zeta^2}}(-\sin\Phi) = \frac{e^{\zeta\omega_n t_v}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sqrt{1-\zeta^2}$$
$$= e^{-\zeta\omega_n t_v}$$

$$M_v = e^{-\zeta\omega_n t_v} = e^{-\zeta\pi\omega_n/(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})} = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}, M_v\% = 100e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Factorul de amortizare se poate determina folosind relația:

$$\zeta = -\frac{lnM_v}{\sqrt{(\pi^2 + \ln^2 M_v)}}$$

4) Timpul de stabilire t_s

Timpul de stabilire se poate obține exact rezolvând inecuația:

$$|y(t_s) - y_{st}| \leq 0.05y_{st}, y_{st} = 1$$

Înlocuind expresia răspunsului în relația de mai sus se obține:

$$\left|1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t + \Phi\right) - 1\right| \leq 0.05$$

$$\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\left|\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t + \Phi\right)\right| \leq 0.0.5$$

Se va aproxima acoperitor $\left|\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t + \Phi\right)\right|$ prin valoarea sa maximă, adică 1, și se obține $\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \leq 0.05$. Rezultă:

$$t_s = -\frac{\ln\left(0.05\sqrt{1-\zeta^2}\right)}{\zeta\omega_n}; respectiv\ t_s = -\frac{\ln\left(0.02\sqrt{1-\zeta^2}\right)}{\zeta\omega_n}$$

Calculul se poate simplifica la:

$$t_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n}; respectiv\ t_s \approx \frac{5}{\zeta\omega_n}$$

Plecând de la procesul cu PF descrisă prin funcția de transfer

$$G_F(s) = \frac{b_0}{1 + a_1 s + a_2 s^2}$$

Mai precis, PF poate avea funcția de transfer:

$$G_F(s) = \frac{k_F}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)}, sau\ G_F(s) = \frac{k_F \omega_{nF}^2}{s^2 + 2\zeta_F \omega_{nF} s + \omega_{nF}^2}$$

Se stabilesc obiectivele reglării:

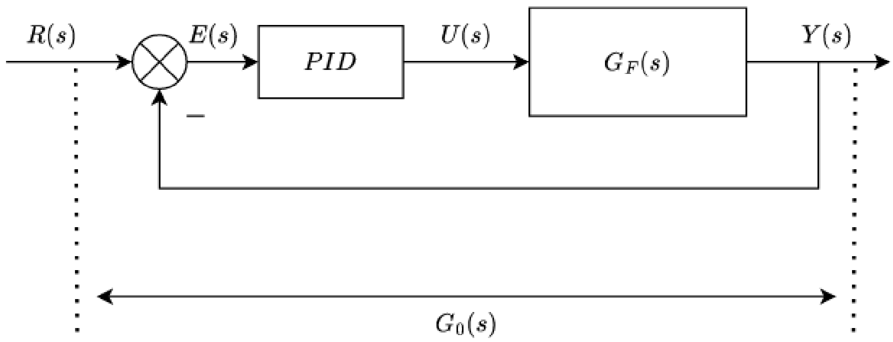
- Eroare staționară nulă la intrare treaptă unitară, $e_{st}^1 = 0$
- Timp de creștere t_c sau timp de stabilire t_s impuse împreună cu suprareglajul M_v

Ca exemplu, vom considera cazul cu timp de stabilire și suprareglaj. Cunoscând M_v, putem afla factorul de amortizare $\zeta = \frac{lnM_v}{\sqrt{\pi^2 - \ln^2 M_v}}$. Apoi, se poate determina ω_n din relația timpului de stabilire $t_s \cong \frac{4}{\omega_n}$. Cu ζ și ω_n se poate determina funcția de transfer a sistemului în circuit închis care respectă indicatorii de calitate impuși.

Regulatorul trebuie să conțină o componentă integrativă (pol în origine) pentru a asigura o eroare staționară nulă la intrare treaptă, și două zerouri pentru a compensa polinomul de grad 2 din FT a PF, deci de tip PID.

$$G_R(s) = k_R\left(1 + \frac{sT_d}{1 + sT_d/N} + \frac{1}{sT_i}\right) = k_R \frac{s^2 T_i T_d (1 + 1/N) + s(T_i + T_d/N) + 1}{sT_i(sT_d/N + 1)}$$

Schema de reglare este următoarea:



Se determină cei 4 parametrii ai regulatorului (k_R, T_d, T_i, N) cunoscând cei 5 parametrii ai funcției de transfer ce asigură indicatorii de calitate impuși $(\omega_n, \zeta, a_1, a_2, b_0)$. Din condiția de compensare a polilor PC de către regulator rezultă:

$$a_1 = T_i + \frac{T_d}{n} \, (1)$$

$$a_2 = T_i T_d + \frac{T_i T_d}{N} = T_i T_d \left(1 + \frac{1}{N}\right) (2)$$

Funcția de transfer a sistemului în buclă închisă, obținută în ipoteza compensării polilor PC va fi:

$$G_0(s) = \frac{\dfrac{k_R b_0}{sT_i\left(s\dfrac{T_d}{N} + 1\right)}}{1 + \dfrac{k_R b_0}{sT_i\left(s\dfrac{T_d}{N} + 1\right)}} = \frac{k_R b_0}{s\dfrac{T_i T_d}{N} + sT_i + k_R b_0}$$

$$G_0(s) = \frac{\dfrac{k_R b_0 N}{T_i T_d}}{s^2 + s\dfrac{N}{T_d} + \dfrac{k_R b_0 N}{T_i T_d}} \equiv \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Prin identificare vom avea:

$$\frac{N}{T_d} = 2\zeta\omega_n \, (3), \frac{k_R b_0 N}{T_i T_d} = \omega_n^2 \, (4)$$

Înlocuind (3) în (1) rezultă:

$$T_i = a_1 - \frac{T_d}{N} = a_! - \frac{1}{2\zeta\omega_n} \, (5)$$

În continuare din (2) vom avea:

$$T_d = \frac{a_2}{T_i} - \frac{T_d}{N} = \frac{a_2}{T_i} - \frac{1}{2\zeta\omega_n} \ (6)$$

Apoi din (3) și (6) se obține:

$$N = 2\zeta\omega_n T_d = 2\zeta\omega_n \frac{a_2}{T_i} - 1$$

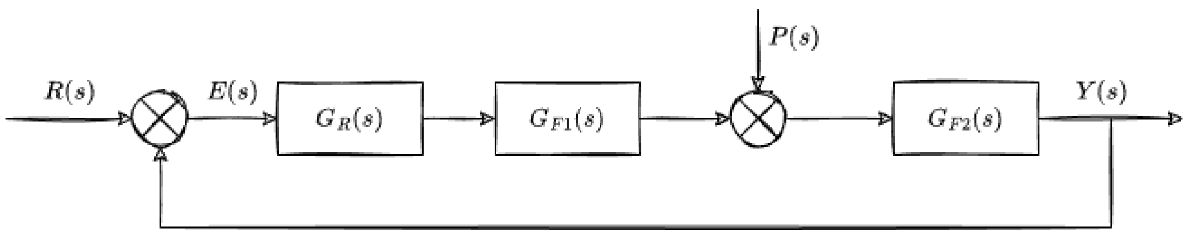
Și din (4) rezultă:

$$k_R = \frac{T_i T_d}{N b_0}\omega_n^2 = \frac{\omega_n T_i}{2\zeta b_0}$$

Curs V. Criteriul modulului. Criteriul simetriei

1. Criteriul Modulului

Pentru determinarea relațiilor de bază ale criteriului modulului (CM), se consideră un sistem de reglare automată care se presupune că are o comportare ideală în raport cu referința și perturbația. Sistemul de reglare automată are reacție negativă unitară și este modelat ca în figură, unde funcția de transfer a părții fixate a fost descompusă în două blocuri punându-se astfel în evidență punctul de aplicare a perturbației aditive $p(t)$.



Ieșirea sistemului va avea două componente, una de terminată de referință, cealaltă de perturbație $Y(s) = G_0(s)R(s) + G_{0p}(s)P(s)$, unde:

$$G_0(s) = \frac{G_R(s)G_F(s)}{1 + G_R(s)G_F(s)} \qquad G_{0p}(s) = \frac{G_{F2}(s)}{1 + G_R(s)G_F(s)}$$

$$G_F(s) = G_{F1}(s)G_{F2}(s)$$

Un sistem de reglare automat are o comportare ideală dacă urmărește exact (fidel), fără întârzieri, referința și rejectează perturbația și efectele acesteia. O astfel de comportare este obținută dacă sunt îndeplinite condițiile:

$G_0(s) = 1$ (1) și $G_{0p}(s) = 0$, $(\forall)s \in \mathbb{C}$ (2). În acest caz avem $Y(s) = R(s)$

Condițiile (1) și (2) care asigură comportarea ideală nu poate fi însă asigurate practic întrucât, având permanent $y(r) = r(t)$, rezultă că $\varepsilon(t) = r(t) - y(t) = 0$, deci eroarea trebuie să fie de asemena, permanent, nulă. Dar $e(t) = 0, \forall t$ implică $u(t) = 0, \forall t$ și prin urmare SRA nu poate intra în acțiune pentru a determina mărimea de ieșire să urmărească variațiile mărimii de intrare. Așadar condițiile (1) și (2) care asigură o funcționare optimă (ideală) nu poate fi practic realizate. De aici și denumirea acestor metode, de cvasioptim.Pentru a obține relații practic aplicabile, condițiile (1) și (2) sunt scrise în frecvență, obținându-se:

$$G_0(j\omega) = 1, G_{0p}(j\omega) = 0, \forall\omega \in \mathbb{R} \ \ (3, 4)$$

Ceea ce implică pentru module îndeplinirea condițiilor:

$$M(\omega) = |G_0(j\omega)| = 1, (5)$$

$$M_p(\omega) = \left|G_{0p}(j\omega)\right| = 0, (\forall)\omega \in \mathbb{R}\ (6)$$

Din condițiile (5) și (6) impuse modulelor derivă denumirea "Criteriul Modulului". Însă, nici condițiile (5) și (6) nu sunt aplicabile în mod exact. Mai departe, se dezvoltă aceste două condiții în serie Mc-Laurin obținându-se:

$$M(\omega) = M(0) + \left.\frac{dM(\omega)}{d\omega^2}\right|_{\omega=0} \cdot \omega + \frac{1}{2!}\left.\frac{d^2M(\omega)}{d\omega^2}\right|_{\omega=0} \cdot \omega^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\left.\frac{d^nM(\omega)}{d\omega^n}\right|_{\omega=0} \cdot \omega^n + \cdots$$

$$M_p(\omega) = M_p(0) + \left.\frac{dM_p(\omega)}{d\omega}\right|_{\omega=0} \cdot \omega + \frac{1}{2!}\left.\frac{d^2M_p(\omega)}{d\omega^2}\right|_{\omega=0} \cdot \omega^2 + \cdots$$

De aici rezultă setul de condiții care asigură în mod aproximativ comportarea ideală:

I) $M(0) = 0$

II) $M_p(0) = 0$

III) $\begin{cases} \left.\frac{dM(\omega)}{d\omega}\right|_{\omega=0} = 0 \\ \cdots \\ \left.\frac{d^nM(\omega)}{d\omega^n}\right|_{\omega=0} = 0 \end{cases}$

IV) $\begin{cases} \left.\frac{dM_p(\omega)}{d\omega}\right|_{\omega=0} = 0 \\ \cdots \\ \left.\frac{d^nM_p(\omega)}{d\omega^n}\right|_{\omega=0} = 0 \end{cases}$

Condiția I) este o consecință a condiției $G_0(0) = 1$, deci este îndeplinită de sistemele ale căror funcții de transfer în circuit deschis au un pol în origine. Această condiție asigură, așadar, eroare staționară nulă la intrare treaptă unitară.

Condiția II) este de asemenea îndeplinită în acest caz dacă polul egal cu zero este ăn funcția de transfer a elementelor plasate înaintea perturbațiilor.

Condițiile III) și IV) nu pot fi îndeplinite exact, urmând ca acordarea optimă prin criteriul modulului să asigure satisfacerea unor relații cât mai precise. Pentru deducerea unor relații practice de proiectare renunțăm la condițiile IV).

Fie funcția de transfer a sistemului în circuit închis în raport cu referința de forma:

$$G_0(s) = \frac{b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0}, n \geq m$$

După efectuarea unor calcule complexe se obțin relațiile generale de sinteză a unui SRA, deduse prin aplicarea condițiilor modulului:

V)
$$\begin{cases} b_0^2(a_1^2 - 2a_0a_2) = a_0^2(b_1^2 - 2b_0b_2) \\ b_0^2(a_2^2 - 2a_1a_3 + 2a_0a_4) = a_0^2(b_2^2 - 2b_1b_3 + 2b_0b_4) \\ \dots \\ b_0(a_i^2 + 2\sum_{k=1}^{i}(-1)^k a_{i-k}a_{i+k} = a_0^2(b_i^2 + 2\sum_{k=1}^{i}(-1)^k b_{i-k}b_{i+k} \\ \dots \\ a_n^2 + 2\sum_{k=1}^{n}(-1)^k a_{n-k}a_{n+k} = 0, a_n^2 = 0 \end{cases}$$

Coeficienții din relațiile V) care lipsesc din funcția de transfer $G_0(s)$ se vor lua egali cu 0.

Funcțiile de transfer cvasioptimale obținute prin aplicarea formei generale a criteriului modulului sunt:

$$G_{02}(s) = \frac{\omega_0^2}{A_2^{CM}(s)} = \frac{\omega_0^2}{s^2 + \sqrt{2}\omega_0 s + \omega_0^2}$$

$$G_{03}(s) = \frac{\omega_0^3}{A_3^{CM}(s)} = \frac{\omega_0^3}{s^3 + 2\omega_0 s^2 + 2\omega_0^2 s + \omega_0^3}$$

$$G_{04}(s) = \frac{\omega_0^3}{A_3^{CM}(s)} = \frac{\omega_0^3}{s^4 + 2.613\omega_0 s^3 + 3.141\omega_0^2 s^2 + 2.613\omega_0 s + \omega_0^4}$$

$$G_{05}(s) = \frac{\omega_0^5}{A_5^{CM}(s)} = \frac{\omega_0^5}{s^5 + 3.2351\omega_0 s^4 + 5.2358\omega_0^2 s^2 + 5.2358\omega_0^3 s^2 + 3.2361\omega_0^4 s + \omega_0^5}$$

Unde ω_0 este un parametru care se va alege liber sau pe baza unei performanțe de genul: timp de creștere, timp de stabilire sau lărgime de bandă.

2. Sinteza regulatoarelor PDT1 pe baza formei generale a criteriului modulului

Se consider procesul cu partea fixate modelată prin funcția de transfer:

$$G_F(s) = \frac{k_F}{s(sT_F + 1)}$$

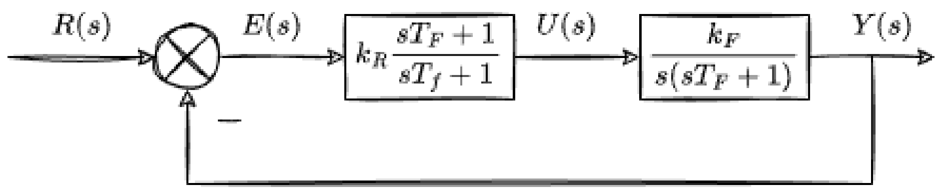
Obiectivele reglării sunt:

- Răspuns la treaptă cu criteriile de performanță specifice criteriului modulului
- Eroare staționară nulă la referință treaptă
- Timp de creștere cu valoarea impusă

Din examinarea funcției de transfer a părții fixate se constată că aceasta conține un pol în origine, deci nu mai este necesară introducerea unei componente integrative în regulator pentru a obține eroarea staționară nulă la referință. Regulatorul trebuie să compenseze constanta de timp T_F, deci este necesar ca funcția de transfer a acestuia să conțină la numărător un factor de forma $sT_F + 1$. Se obține astfel un regulator de tip PIDT1 cu funcția de transfer:

$$G_R(s) = k_R \frac{sT_D + 1}{sT_F + 1}, T_D = T_F$$

Sistemul de reglare va avea structura următoare:



Funcția de transfer a sistemului în buclă închisă este:

$$G_0(s) = \frac{k_R k_F}{s^2 T_f + s + k_R k_F} = \frac{\frac{k_R k_F}{T_f}}{s^2 + s\frac{1}{T_f} + \frac{k_R k_F}{T_f}}$$

Constanta de timp de derivare T_D se determină din condiția compensării polului $s = -1/T_F$. Așadar, avem $T_D = T_F$. Pentru un sistem de ordinul doi avem funcția de transfer optimă în sensul criteriului modulului:

$$G_0^{CM} = \frac{\omega_0^2}{s^2 + \sqrt{2}\omega_0 s + \omega_0^2}$$

Prin comparație cu forma anterioară a lui $G_0(s)$ vom avea:

$$\begin{cases} \omega_0^2 = \frac{k_R k_F}{T_f} \ (1) \\ \sqrt{2}\omega_0 = \frac{1}{T_f} \ (2) \end{cases}$$

Din $\omega_0 t_{c2} = 2.63$ și t_c impus rezultă $\omega_0 = \frac{2.63}{t_c}$, apoi din (2) rezultă

$$T_f = \frac{1}{\sqrt{2}\omega_0} = 0.707 \frac{t_c}{2.63}$$

Iar din (1) vom avea

$$\left(\omega_0 T_f\right)\omega_0 = k_R k_F \rightarrow 0.707\omega_0 = k_R k_F \rightarrow k_R = \frac{0.707\omega_0}{k_F}$$

Performanțele realizate de sistemul de reglare automat proiectat sunt:

- $M_v = 4.31\%$ (deoarece $\zeta = 0.707$)
- $t_c -$ valoarea impusă
- $\omega_n = \omega_0$
- $t_s = \frac{4}{\omega_n \zeta} = \frac{4}{0.707\omega_0}$
- $\varepsilon_{st}^1 = 0$

Problemă: Să se proiecteze folosind criteriul modulului un sistem de reglare autmoată pentru procesul cu modelul părții fixate descris prin funcția de transfer:

$$G_F(s) = \frac{b_0}{1 + a_1 s + a_2 s^2}$$

Obiectivele reglării sunt:

- Performanțele implicite ale CM,
- Eroare staționară nulă la referință treaptă
- Timp de creștere impus

Se va utiliza un regulator PIDT1 standard.

3. Criteriul Modulului varianta Kessler (CMVK)

Această variantă se aplică proceselor rapide (de exemplu acționări electrice sau servosisteme electrice) care pot fi identificate și modelate cu precizie. În acest caz funcția de transfer va conține pe lângă constantele de timp principale (mari, dominante), una sau mai multe constante de timp care nu pot fi compensate de regulator. Astfel de constante necompensabile pot fi de exemplu determinate de elementele de filtare din bucla de reglare (de obicei asociate elementelor de măsură).

De regulă constantele de timp necompensabile au valori mult mai mici decât constantele de timp principale, mtoiv pentru care se numesc și constante de timp parazite.

Varianta Kessler a CM se sprijină în mod esențial pe existența, în modelul părții fixate, a acestor constante necompensabile (parazite).

În prima etapă se determină funcția de transfer a părții fixate. Este necesar ca în acest model să se pună în evidență constantele parazite, care au un rol esențial în aplicarea variantei Kessler a criteriului modulului. Funcția de transfer a părții fixate trebuie să fie de forma:

$$G_F(s) = \frac{k_F}{s^{\alpha} \prod_{k=1}^{p}(sT_k + 1) \prod_{i=1}^{q}\left(sT_{\gamma i} + 1\right)}, \alpha = 0 \; sau \; 1$$

Unde T_k sunt constantele de timp principale, iar $T_{\gamma i}$ sunt constantele de timp parazite. Se înlocuiște:

$$\prod_{i=1}^{q}\left(sT_{\gamma i} + 1\right) \cong sT_{\Sigma} \; + 1$$

Unde $T_{\Sigma} = T_{\gamma 1} + \cdots + T_{\gamma q}$ este constanta de timp mică echivalentă. Se obține:

$$G_F(s) = \frac{k_F}{s^{\alpha}\left(sT_{\Sigma} \; + 1\right) \prod_{k=1}^{p}(sT_k + 1)}$$

Cunoscând T_{Σ} putem scrie funcția de transfer în buclă deschisă optimă în sensul CMVK care are întotdeauna expresia:

$$G_d^{CM}(s) = \frac{1}{s2T_{\Sigma}\left(sT_{\Sigma} \; + 1\right)}$$

Pe de altă parte:

$$G_d(s) = G_R(s)G_F(s) = \frac{1}{s2T_{\Sigma}\left(sT_{\Sigma} \; + 1\right)} = G_d^{CM}(s)$$

Înlocuind $G_F(s)$ în relația de mai sus rezultă funcția de transfer a regulatorului:

$$G_R(s) = \frac{s^{\alpha} \prod_{k=1}^{p}(1 + sT_k)}{s2T_{\Sigma}k_F} = k_R \frac{\prod_{k=1}^{p}(1 + sT_k)}{s^{1-\alpha}}, k_R = \frac{1}{2T_{\Sigma}k_F}$$

Dacă $p > 1 - \alpha$ se completează funcția de transfer cu elemente de ordinul cu constante de timp $\ll$ decât T_{Σ}. Funcția de transfer în buclă închisă optimizată cu CMVK va avea întotdeauna expresia aproximativă (dacă se introduc poli suplimentari în funcția de transfer a regulatorului pentru a asigura realizabilitatea fizică a acestuia):

$$G_0^{CM}(s) = \frac{1}{s^2 2T_{\Sigma}^2 \; + s2T_{\Sigma} + 1}$$

Determinarea performanțelor procesului se deduce prin aducerea funcției de transfer $G_0^{CM}(s)$ în forma standard a elementelor de ordin 2:

$$G_0^{CM}(s) = \frac{1}{s^2 2T_\Sigma^2 + s2T_\Sigma + 1} = \frac{\frac{1}{2T_\Sigma^2}}{s^2 + s\frac{1}{T_\Sigma} + \frac{1}{2T_\Sigma^2}} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Prin identificare rezultă:

$$\omega_\mathrm{n} = \sqrt{\frac{1}{2T_\Sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}T_\Sigma}, 2\zeta\omega_n = 2\zeta\frac{1}{\sqrt{2}T_\Sigma} = \frac{1}{T_\Sigma} \Rightarrow \zeta = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707$$

Pentru $\zeta = 0.707$ rezultă $M_v\% = 4.3\%$ și $\omega_n t_c = 2.63$, și prin urmare

$$t_c = 2.63\sqrt{2}T_\Sigma \cong 3.72T_\Sigma, t_s \cong \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}T_\Sigma}\right)} = 8T_\Sigma$$

Pentru $\zeta = 0.707$ banda de trecere este $\omega_B = \omega_n = \frac{1}{\sqrt{2}T}$, iar eroarea staționară la rampă va fi $\varepsilon_{\mathrm{st}}^2 = \frac{2}{\zeta\omega_n} = \frac{2}{(\sqrt{2}/2)\cdot(1/\sqrt{2}T_\Sigma)} = 4T_\Sigma$.

Exemplu. Fie procesul modelat prin funcția de transfer:

$$H_F(s) = \frac{5}{(8s+1)(2s+1)(0.1s+1)}$$

Să se proiecteze un regulator astfel încât SRA cu reacție negativă unitară să îndeplinească următoarele specificații de performanță: $M_{v_{imp}}\% < 5\%$, $t_{s_{imp}} < 1sec$ și $\varepsilon_{st}{}_{imp}^{1} = 0$. Să se calculeze eroarea staționară $\varepsilon_{\mathrm{st}}^t$ la mărime de intrare cu variație rampă.

Rezolvare.

Din funcția de transfer, prin identificare cu forma standard a criteriului modulului, avem:

$$K_F = 5, T_1 = 8s, T_2 = 2s, T_\Sigma = 0.1s$$

Funcția de transfer a sistemului în buclă deschisă optimă în sensul CMVK este pe de o parte

$$G^{CM}(s) = \frac{1}{s2T_\Sigma\left(sT_\Sigma + 1\right)}$$

Iar pe de altă parte avem:

$$G^{CM}(s) = G_R(s)G_F(s) = G_R(s)\frac{k_F}{(sT_1+1)(sT_2+1)\left(sT_\Sigma+1\right)} = \frac{1}{s2T_\Sigma\left(sT_\Sigma+1\right)}$$

Prin identificare rezultă:

$$G_R(s) = \frac{(sT_1+1)(sT_2+1)}{s2T_\Sigma k_F}$$

Pentru a asigura realizabilitatea fizică se introduce un pol suplimentar (element de ordin 1) în funcția de transfer a regulatorului care devine:

$$G_R(s) = \frac{(sT_1+1)(sT_2+1)}{s2T_\Sigma\ k_F(sT_F+1)}, T_f = (0.1 \div 0.2)T_\Sigma$$

Respectiv

$$G_R(s) = \frac{(8s+1)(2s+1)}{s \cdot 2 \cdot 0.1 \cdot 5(0.02+1)} = \frac{(8s+1)(2s+1)}{s(0.02s+1)}$$

Regulatorul se va implementa cu o structură PIDT1 cu interinfluență care are funcția de transfer:

$$G_R(s) = k_R\frac{sT_D+1}{sT_f+1}\left(1+\frac{1}{sT_i}\right)$$

Prin identificarea cu funcția de transfer inițială rezultă:

$$T_D = 2, T_i = 8, k_R = 8, T_f = 0.02$$

Performanțele realizate de sistemul proiectat sunt:

- $M_v\% = 4.3\%$
- $t_s \cong 8T_\Sigma = 8 \cdot 0.1 = 0.8s < t_{s_{imp}} = 1s$
- $e_{st}^t = 4T_\Sigma = 0.4$

Curs VI. Metode de acordare experimentală. Metoda Ziegler-Nichols

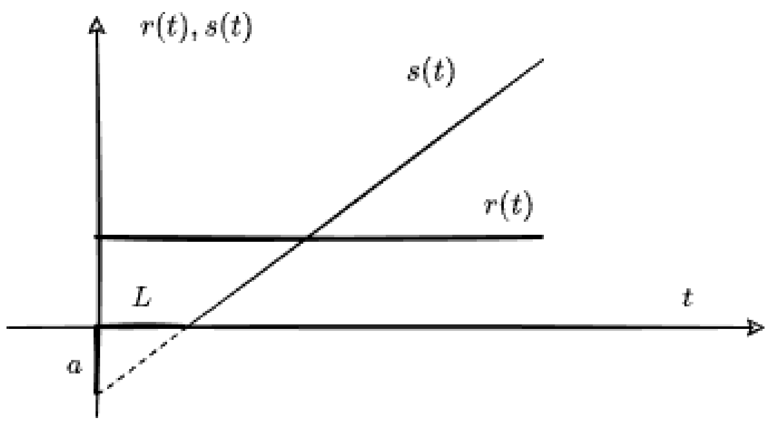
1. Procese lente și cu timp mort

Procesele lente sunt caracterizate prin modele aproximative, având constante de timp mai mari de 10 secunde și, cel mai adesea, conțin și timp mort. Pentru alegerea tipului de regulator, proiectantul de SRA are în general la dispoziție o serie de criterii verificate în practică, ținând seama de caracteristicile procesului și de performanțele impuse. Prezența timpului mort în funcționarea unui proces tehnologic impune o serie de precauții la alegerea tipului de regulator, putându-se recomanda atât regulatoarele liniare de tip PI și PID, cât și regulatoare neliniare de tip bipozițional sau tripozițional.

1. Elementul integrator cu timp mort I+TM

$$G_{iTM}(s) = \frac{a}{sL} e^{-sL} = \frac{K_F}{s} e^{-sL}$$

unde a și L sunt definite în figura următoare:



Sistemul $G_{iTM}(s)$ este definit complet cu ajutorul a doi parametrii și are răspunsul la treaptă ca figura anterioară.

2. Elementul de ordinul unu cu timp mort T1+TM

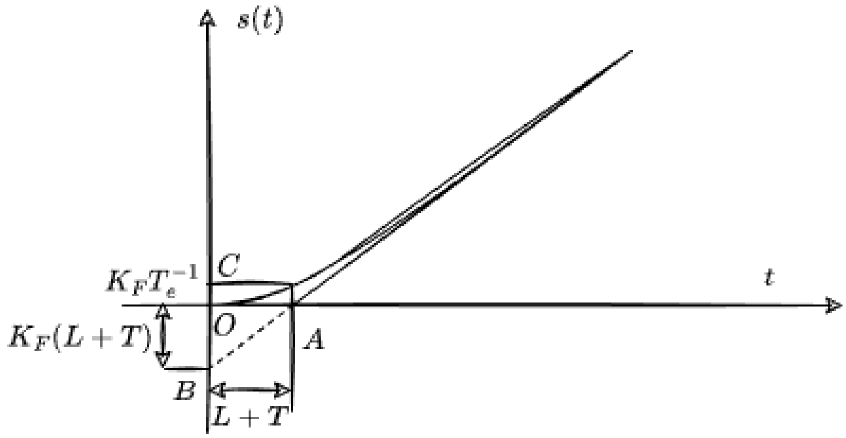
$$G_{1TM}(s) = \frac{K_F}{sT + 1} e^{-sL}$$

unde K_F este factorul de amplificare, T constanta de timp, iar L este notația pentru timpul mort.

3. Elementul de ordinul unu cu integrator și cu timp mort T1+I+TM

Un caz particular de element de ordinul doi cu timp mort se obține din combinația T1+I+TM, care are funcția de transfer conform relației:

$$G_{1iTM}(s) = \frac{K_F}{s(sT+1)} e^{-sL}$$



4. Elementul T2 amortizat cu timp mort, T2a+TM

$$G_{2aTM}(s) = \frac{K_F}{(1+sT_1)(1+sT_2)} e^{-sL}$$

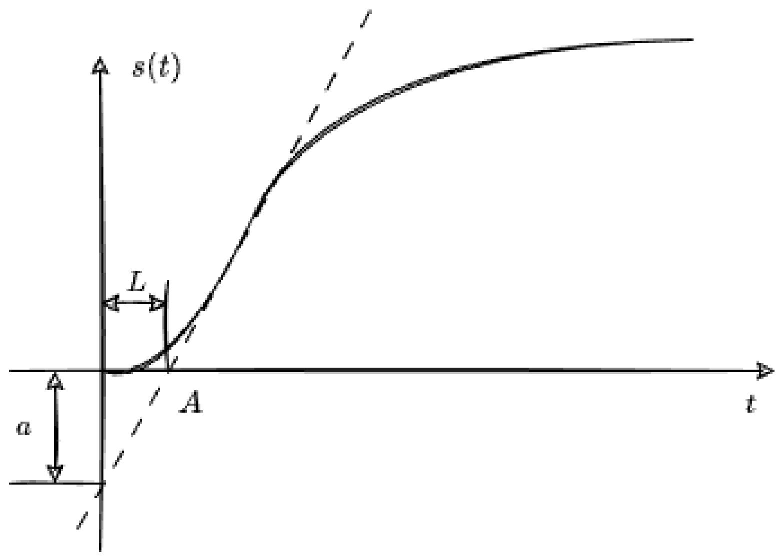
5. Elementul T2 oscilant neamortizat cu timp mort

$$G_{2oTM}(s) = \frac{K_F \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} e^{-sL}$$

2. Metoda Ziegler-Nichols a răspunsului la intrare treaptă

Metodele introduse de Ziegler și Nichols realizează acordarea experimentală a regulatoarelor pe baza unor proprietăți ale dinamicii procesului folosind relații simple de calcul. Datele necesare pentru relațiile de calcul se obțin părin efectuarea unor experimente de asemenea simple.

Metoda răspunsului la intrare treaptă folosește o înregistrare experimentală a răspunsului la mărime de intrare treaptă a sistemului în circuit deschis. Curba răspunsului indicial al sistemului deschis, cu funcție de transfer $G(s)$ este aproximată cu o dreaptă care se obține trasând trangenta la curbă în punctul de pantă maximă, ca în figura următoare.



În acest fel, funcția de transfer este aproximată cu un element integrator cu funcția de transfer:

$$G_{iTM}(s) = \frac{a}{sL}e^{-sL} = \frac{K_F}{s}e^{-sL}$$

unde a și L sunt definite ca în figura anterioară, iar $K_F = a/L$. Parametrii de acord ai regulatoarelor de tip P, PI sau PID se calculează pe baza parametrilor A și L cu formulele prezentate în tabelul următor.

Regulator	K_R	T_i	T_d	T_0
P	$1/a$	-	-	$4L$
PI	$0.9/a$	$3L$	-	$5.7L$
PID	$1.2/a$	$2L$	$L/2$	$3.4L$

În ultima coloană se dau valori estimate pentru constanta de timp din funcția de transfer a sistemului închis T_0.

3. Metoda Ziegler-Nichols a răspunsului în frecvență (a limitei de stabilitate)

Proiectarea în acest caz se bazează pe cunoașterea punctului de pe curba polară a funcției de transfer a sistemului deschis $G(s)$ la care aceasta intersectează semiaxa reală negativă, situație în care sistemul închis este la limita de stabilitate. Există două metode de determinare experimentală a punctului de la limita de stabilitate caracterizat de valorile K_u (factorul de ampliciare la care apar oscilații întreținute) și T_u (perioada oscilațiilor întreținute).

Experimentul se desfășoară setând parametrii regulatorului PID la valorile $T_i = 0$ și $T_d = 0$ și apoi mărind treptat valoarea factorului de amplificare K_R până când sistemul închis cu funcția de transfer dată și reacție negativă unitară ajunge la limita de stabilitate, moment în care se înregistrează oscilațiile întreținute. Vom nota factorul de amplificare al sistemului deschis la care apar oscilațiile întreținute cu K_u și pulsația de oscilație cu $\omega_{-\pi} = 2\pi/T_u$.

Notă: Dacă se cunoaște funcția de transfer a sistemului deschis $G(s)$, parametrii K_u și $\omega_{-\pi} = 2\pi/T_u$ se determină rezolvând ecuația complexă (care furnizează două ecuații cu numere reale) $K_u G(j\omega_{-\pi}) = -1$ sau ecuația $G(j\omega_{-\pi}) = -\frac{1}{K_u}$.

Parametrii de acord ai regulatoarelor P, PI și PID se calculează pe baza parametrilor K_u și T_u cu formulele din tabelul următor.

Regulator	K_R	T_i	T_d	T_0
P	$0.5K_u$	-	-	T_u
PI	$0.4K_u$	$0.8T_u$	-	$1.4T_u$
PID	$0.6K_u$	$0.5T_u$	$0.125T_u$	$0.85T_u$

Curs VII. Regulatoare numerice. Discretizare. Algoritmii numerici pentru legile tipizate de reglare. Metoda răspunsului impus.

1. Regulatoare numerice. Discretizare

Regulatoarele numerice sunt de regulă module software (programe) care implementează prin algoritmi numerici adecvați legile continue de reglare. Realizarea practică a regulatoarelor numerice nu implică echipamente hardware specializate. Legile de reglare sunt implementare prin programe în cadrul unui sistem numeric de calcul. Modelele dinamice alre regulatoarelor dinamice se determină folosind, de regulă, metodele de calcul aproximativ al FTZ, prin metodele Euler sau a trapezului. Proiectarea și implementarea regulatoarelor numerice utilizează frecvent, în paralel, toate formele modelelor discrete (funcția de transfer în z, forma operațională cu operatorul de întârziere q^{-1} și ecuația cu diferențe).

La calculul funcțiilor de transfer z ale regulatoarelor numerice nu este necesar să se pună în evidență explicit relațiile de legătură dintre parametrii regulatorului continuu și cei ai regulatorului numeric. Este nevoie să se cunoască pentru fiecare tip de lege de reglare (P, PT1, PI, PDT1, PIDT1) forma generală a funcției de transfer în z, numărul parametrului de la numărătorul și numitorul funcției de transfer și anumite valori ale acestora.

Se remarcă faptul că este posibila implementarea practică a unor legi de reglare cu componentă derivativă fără filtrare în cazul regulatoarelor numerice.

Discretizarea funcțiilor de transfer se realizează urmărind pașii următori:

1. Obținerea funcției de transfer în z prin utilizarea uneia dintre metodele de mai jos și substituția asociată.

Zero-order Holder (ZoH)	$s = \dfrac{1 - z^{-1}}{T_e}$
First-order Holder (FoH)	$s = \dfrac{1 - z^{-1}}{z^{-1} T_e}$
Aproximarea Tustin	$s = \dfrac{2(1 - z^{-1})}{T_e(1 + z^{-1})}$

$$G(z^{-1}) = G(s)\big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T_e}}$$

2. Obținerea funcției operaționale folosind operatorul q^{-1}

$$G(q^{-1}) = G(z^{-1})|_{z^{-i}=q^{-i}}$$

3. Determinarea ecuației cu diferențe folosind operatorul de întârziere

$$q^{-i}x[k] = x[k-i]$$

4. Obținerea funcției de ieșire în funcție de semnalul de intrare

2. Modelul discret al regulatoarelor de tip P, PT1

Regulatoarele de tip P au funcția de transfer în z:

$$\frac{U(z^{-1})}{E(z^{-1})} = G_R(z^{-1}) = k_R, E(z^{-1}) = \mathcal{Z}\{\varepsilon(t)\}, \varepsilon(t) = r(t) - y(t)$$

Transferul operațional sau ecuația cu diferențe a elementului P este:

$$u[k] = k_R\varepsilon[k]$$

Pentru regulatoarele de tip PT1, funcția de transfer în z se poate obține în mai multe moduri. Cea mai simplă metodă de a obține funcția de transfer este din calcul aproximativ pornind de la funcția de transfer:

$$G_R(s) = \frac{k_R}{sT_f + 1}$$

Cu substituția:

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{T_e}$$

Și obținem:

$$G_R(z^{-1}) = \frac{k_R}{sT_f + 1}\Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T_e}} = \frac{k_R}{\frac{T_f}{T_e}(1 - z^{-1}) + 1} = \frac{k_R}{1 + \frac{T_f}{T_e} - \frac{T_f}{T_e}z^{-1}} = \frac{\frac{k_R T_e}{T_e + T_f}}{1 - \frac{T_f}{T_e + T_f}z^{-1}}$$

$$G_R(z^{-1}) = \frac{T(z^{-1})}{R(z^{-1})} = \frac{t_0}{1 + r_1 z^{-1}}, T(z^{-1}) = t0, R(z^{-1}) = 1 + r_1 z^{-1}$$

$$t_0 = \frac{k_R T_e}{T_e + T_f} > 0, r_1 = -\frac{T_f}{T_e + T_f} < 0$$

Funcțiile de transfer operaționale sunt de aceeași formă ca și în funcția de transfer în z^{-1}.

$$G(z^{-1}) = \frac{t_0}{1 + r_1 q^{-1}} = \frac{U(z^{-1})}{E(z^{-1})}$$

$$(1 + r_1 q^{-1})u[t] = t_0 \varepsilon[t]$$

$$u[t] = -r_1 u[t-1] + t_0 \varepsilon[t]$$

3. Modelul discret al regulatoarelor de tip PI

Regulatorul PI are funcția de transfer:

$$G_R(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = k_R\left(1 + \frac{1}{sT_i}\right)$$

Făcând substituția folosind ZoH, obținem:

$$G_R(z^{-1}) = \frac{k_R\left(\frac{T_e}{T_i} + 1\right) - k_R z^{-1}}{1 - z^{-1}} = \frac{t_0 + t_1 z^{-1}}{1 + r_1 z^{-1}} = \frac{T(z^{-1})}{R(z^{-1})}$$

$$t_0 = k_R\left(\frac{T_e}{T_i} + 1\right) > 1, t_1 = -k_r < 0, r_1 = -1$$

Transferul opera'ional se realizează conform ecuației:

$$R(q^{-1})u[t] = T(q^{-1})\varepsilon[t] \rightarrow (1 + r_1 q^{-1})u[t] = (t_0 + t_1 q^{-1})\varepsilon[t]$$

$$u[t] = -r_1 u[t-1] + t_0 \varepsilon[t] + t_1 \varepsilon[t-1]$$

4. Modelul discret al regulatoarelor de tip PDT1

Funcția de transfer a regulatorului PDT1 este:

$$G_R(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = k_R \frac{1 + sT_d}{1 + sT_f}$$

Folosind ZoH obținem funcția de transfer în z^{-1}:

$$G_R(z^{-1}) = \frac{k_R \frac{T_e + T_d}{T_e + T_f} - k_R \frac{T_d}{T_e + T_f} z^{-1}}{1 - \frac{T_f}{T_e + T_f} z^{-1}} = \frac{t_0 + t_1 z^{-1}}{1 + r_1 z^{-1}} = \frac{T(z^{-1})}{R(z^{-1})}$$

Ecuația operațională de transfer intrare-ieșire a regulatorului numeric este:

$$(1 + r_1 q^{-1})u[t] = (t_0 + t_1 q^{-1})\varepsilon[t]$$

$$u[t] = -r_1 u[t-1] + t_0 \varepsilon[t] + t_1 \varepsilon[t-1]$$

Filtrul se poate elimina dacă se setează $T_f = 0$, fapt care implică $r_1 = 0$, iar în acest caz rezultă funcția de transfer:

$$G_R(z^{-1}) = t_0 + t_1 z^{-1}$$

4. Modelul discret al regulatoarelor de tip PIDx

Funcția de transfer generală a unui regulator PID fără filtru este:

$$G_R(s) = k_R \left(1 + sT_d + \frac{1}{sT_i}\right)$$

Folosind ZoH obținem:

$$G_R(z^{-1}) = \frac{k_R \left[\left(1 + \frac{T_d}{T_e} + \frac{T_e}{T_i}\right) - \left(1 + \frac{2T_d}{T_e}\right) z^{-1} + \frac{T_d}{T_e} z^{-2}\right]}{(1 - z^{-1})}$$

Pentru un regualtor PIDT1, avem funcția de transfer:

$$G_R(s) = k_R \left(1 + sT_d + \frac{1}{sT_i}\right) \frac{1}{1 + sT_f}$$

Din nou, folosind ZoH obținem funcția de transfer:

$$G_R(z^{-1}) = \frac{k_R \frac{T_e}{T_e + T_f} \left[\left(1 + \frac{T_d}{T_e} + \frac{T_e}{T_i}\right) - \left(1 + \frac{2T_d}{T_e}\right) z^{-1} + \frac{T_d}{T_e} z^{-2}\right]}{(1 - z^{-1})\left(1 - \frac{T_f}{T_e + T_f} z^{-1}\right)}$$

$$G_R(z^{-1}) = \frac{t_0 + t_1 z^{-1} + t_2 z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 + r_1 z^{-1})} = \frac{T(z^{-1})}{R(z^{-1})}$$

Forme generale pentru funcțiile de transfer în z ale legilor de reglare tipizate:

Tip regulator	$G(z^{-1})$	Restricțiile parametrilor	Observații
P	t_0	$t_0 > 0$	

PT1	$\frac{t_0}{1+r_1z^{-1}}$	$t_0>0, r_1<0$	$s=\frac{1-z^{-1}}{T_e}$
	$\frac{t_1z^{-1}}{1+r_1z^{-1}}$	$t_1>0, r_1<0$	$s=\frac{1-z^{-1}}{z^{-1}T_e}$
	$\frac{t_0+t_1z^{-1}}{1+r_1z^{-1}}$	$t_0=t_1>0, r_1<0$	$s=\frac{2}{T_e}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$
PI	$\frac{t_0+t_1z^{-1}}{1-z^{-1}}$	$t_0>1, t_1<0$	$s=\frac{1-z^{-1}}{T_e}$
PD	$t_0+t_1z^{-1}$	$t_0>1, t_1<0$	$s=\frac{1-z^{-1}}{T_e}$
PDT1	$\frac{t_0+t_1z^{-1}}{1+r_1z^{-1}}$	$t_0>1, t_1<0, r_1<0$	$s=\frac{1-z^{-1}}{T_e}$
PID	$\frac{t_0+t_1z^{-1}+t_2z^{-2}}{1-z^{-1}}$	$t_0>0, t_1<0, t_2>0$	$s=\frac{1-z^{-1}}{T_e}$
PIDT1	$\frac{t_0+t_1z^{-1}+t_2z^{-1}}{(1-z^{-1})(1+r_1z^{-1})}$	$t_0>0, t_1<0, t_2>0$ $r_1<0$	$s=\frac{1-z^{-1}}{T_e}$

Curs VIII. Metoda răspunsului impus. Algoritmul Dead-Beat

1. Sinteza regulatoarelor numerice în domeniul timp discret

Sinteza directă în domeniul timp discret se bazează pe un model discret al procesului condus (obținut în urma discretizării unui model continuu). Acest model îl vom nota:

$$G_P(z^{-1})$$

În forma sa generală, acest model poate fi scris:

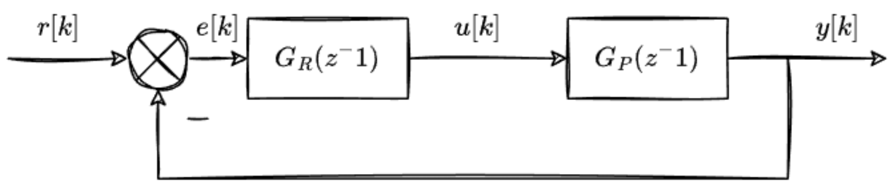
$$G_P(z^{-1}) = \frac{B_P(z^{-1})}{A_P(z^{-1})} z^{\lambda}$$

$$B_P(z^{-1}) = b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m}$$

$$A_P(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}$$

$$\lambda \geq 0, \lambda \in \mathbb{N}$$

Structura unui SRA în domeniul discret este similară celei cunoscute deja, cu diferența că notațiile de pe schemă sunt specificate în domeniul discret.



Presupunem cunoscut modelul părții fixate și dorim proiectarea unui sistem de reglare astfel încât ecuația în timp a mărimii de ieșire să respecte o formă impusă definită prin valorile mărimii de ieșire pentru fiecare eșantion. Acest răspuns impus se dă în forma:

$$y[0] = 0, y[T_e] = y_1, y[2T_e] = y_2, \ldots, y[kT_e] = y_k$$

$y[0]$ desemnează condițiile inițiale

Să presupunem că mărimea de referință este treaptă unitară. Dacă sistemul de reglare automat trebuie să aibă $e_{st} = 0$, atunci de la un anumit eșantion k valorile impuse ale mărimii de ieșire vor fi egale cu 1, adică egale cu referința. Înseamnă că eșantioanele date vor fi până la eșantionul k, iar acestea vor desemna regimul tranzitoriu.

Având eșantioanele date, transformata $\mathcal{Z}$ a mărimii de ieșire va fi:

$$Y_d(z^{-1}) = y_1 z^{-1} + y_2 z^{-2} + \cdots + y_k z^{-k} + \cdots$$

y_d = transformata $\mathcal{Z}$ a evoluției dorite a mărimii de ieșire. Transformata $\mathcal{Z}$ a semnalului de referință treaptă unitară este:

$$R(z^{-1}) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

Din cele două ecuații avem funcția de transfer în circuit închis:

$$G_{0d}(z^{-1}) = \frac{Y_d(z^{-1})}{R(z^{-1})} = \frac{y_1 z^{-1} + y_2 z^{-2} + \cdots + y_k z^{-k} + \cdots}{\frac{1}{1 - z^{-1}}}$$

$$G_{0d}(z^{-1}) = \sum (y_k - y_{k-1}) z^{-k}$$

Doarece de la un anumit eșantion valorile impuse mărimii de ieșire sunt toate egale cu 1 rezultă că $y_k - y_{k-1} = 0$, iar suma va fi finită.

Vom nota în continuare $y_k - y_{k-1} = p_k$, iar funcția de transfer dorită/impusă a SRA va fi:

$$G_{0d}(z^{-1}) = \sum p_k$$

Având $G_{0d}(z^{-1})$ putem calcula funcția de transfer impusă sistemului deschis:

$$G_{dd}(z^{-1}) = \frac{G_{0d}(z^{-1})}{1 - G_{0d}(z^{-1})}$$

Apoi funcția de transfer a regulatorului care conduce la obținerea răspunsului impus va fi:

$$G_R(z^{-1}) = \frac{G_{dd}(z^{-1})}{G_P(z^{-1})}$$

Să presupunem funcția de transfer a regulatorului scrisă sub forma:

$$G_R(z^{-1}) = \frac{t_0 + t_1 z^{-1} + \cdots + t_m z^{-m}}{1 + r_1 z^{-1} + \cdots + r_n z^{-n}}$$

Valoarea inițială a semnalului de comandă este raportul termenilor liberi de la numărătorul și numitorul funcției de transfer, adică:

$$u[0] = \frac{t_0}{1}$$

Funcția de transfer a regulatorului trebuie prelucrată astfel încât termenul liber de la numitor să fie 1.

$$G_R(z^{-1}) = \frac{t_0 + t_1 z^{-1}}{r_0 + r_2 z^{-1}} \Rightarrow G_R(q^{-1}) = \frac{t_0 + t_1 q^{-1}}{r_0 + r_1 q^{-1}} = \frac{u[k]}{e[k]}$$

$$\Rightarrow r_0 u[k] + r_1 q^{-1} u[k] = t_0 e[k] + t_1 q^{-1} e[k]$$

$$\Rightarrow r_0 u[k] + r_1 u[k-1] = t_0 e[k] + t_1 e[k-1]$$

$$\Rightarrow u[k] = \cdots$$

Exemplu

Se consideră un proces descris de funcția de transfer

$$G_F(s) = \frac{K_F}{T_F s + 1}$$

unde $K_F = 1$, $T_F = 10s$ și $T_e = 1s$.

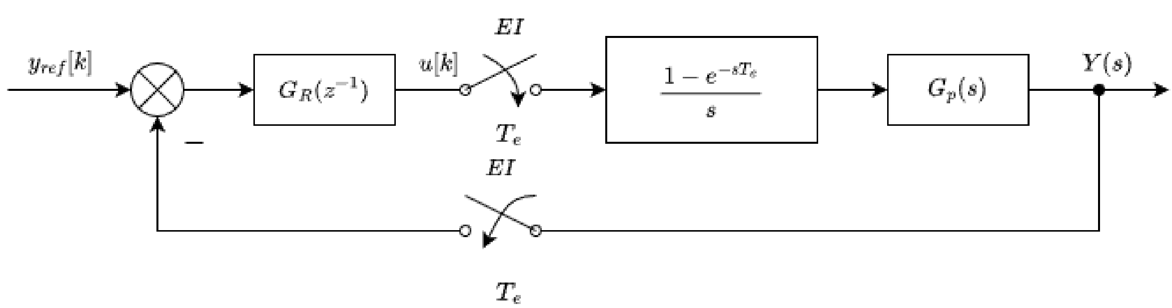
Se cere să se proiecteze un algoritm de reglare numeric, astfel încât, pentru referință treaptă unitară să se obțină un răspuns caracterizat prin valorile:

$$y_1 = y(T_e) = 0.2, y(2T_e) = y(3T_e) = \cdots = y(nT_e) = 1$$

Astfel, răspunsul sistemului atinge regimul staționar după două intervale de timp egale cu T_e. Se impune ca $u_0 \leq u_a$, unde pentru această aplicație $u_a = 2.5$.

Rezolvare

Structura SRA cu regulator numeric pentru un proces continuu, caracterizat prin $G_p(s)$ este:



Modelul discret al părții continue în acest caz se obține folosind relația:

$$G_F(z^{-1}) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\{G_F(s)/s\}$$

sau

$$G_F(z^{-1}) = (1 - z^{-1})K_F\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1/T_F}\right] = (1 - z^{-1})K_F\left[\frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - z^{-1} \cdot e^{-T_e/T_F}}\right]$$

respectiv:

$$G_F(z^{-1}) = \frac{K_F\left(1 - e^{-\frac{T_e}{T_F}}\right)z^{-1}}{z - z^{-1}e^{-T_eT_F}}$$

Pentru $K_F = 1, T_F = 10s$, și $T_e = 1s$ se obține modelul discret sub forma:

$$G_F(z^{-1}) = \frac{b_1z^{-1}}{1 + a_1z^{-1}} = \frac{0.09516z^{-1}}{1 - 0.9048z^{-1}}$$

Se observă că pentru valori mari ale lui T_e, coeficientul b_1 are, de asemenea, valori mai mari. Funcția de transfer $G_{0d}(z^{-1})$ se obține sub forma:

$$G_{0d}(z^{-1}) = p_1z^{-1} + p_2z^{-2} = 0.2z^{-1} + 0.8z^{-2}$$

Cu aceste elemente calculate se obține algoritmul de reglare sub forma:

$$G_R(z^{-1}) = \frac{1 - 0.9048z^{-1}}{0.09516z^{-1}} \cdot \frac{z^{-1}(0.2 + 0.8z^{-1})}{1 - 0.2z^{-1} - 0.8z^{-2}} \cdot \frac{(1 - 0.9048z^{-1})(0.2 + 0.8z^{-1})}{0.09516(1 - 0.2z^{-1} - 0.8z^{-2})}$$

sau $8.4069 \quad -5.5048 \quad -1.9016$.

$$G_R(z^{-1}) = \frac{0.2 + 0.6194z^{-1} - 0.72384z^{-2}}{0.09517(1 - 0.2z^{1} - 0.8z^{-2})} = \frac{2.1017 + 6.5053z^{-1} - 7.6066z^{-2}}{1 - 0.2z^{-1} - 0.8z^{-2}}$$

Comanda inițială rezultă: $u_0 = 2.1017 < u_a = 2.5$.

2. Algoritmul Dead-Beat

Algoritmul Dead-Beat este o variantă a metodei răspunsului impus care furnizează un algoritm cu o structură puțin mai complexă decât cea obținută prin metoda standard. Ideea de bază a metodei este de a compensa complet polii procesului condus, motiv pentru care aplicarea acesteia este indicată mai ales pentru procese rapide care au modelul cunoscut cu precizie.

Fie modelul discret al procesului

$$G_P(z^{-1}) = \frac{B_P(z^{-1})}{A_P(z^{-1})}$$

Funcția de transfer dorită a sistemului închis este de forma $G_{0d}(z^{-1}) = q_0B_p(z^{-1})$, unde constanta q_0 se calculează astfel:

$$q_0 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} b_i}$$

b_i – coeficienții polinomului de la numaratorul lui $G_P(z^{-1})$

Această constantă se calculează astfel pentru a obține eroare staționară nulă. Având $G_{0d}(z^{-1})$ vom calcula $G_{dd}(z^{-1})$:

$$G_{dd}(z^{-1}) = \frac{G_{0d}(z^{-1})}{1 - G_{0d}(z^{-1})}, și$$

$$G_R(z^{-1}) = \frac{G_{dd}(z^{-1})}{G_P(z^{-1})}$$

$$G_R(z^{-1}) = \frac{q_0 B_P(z^{-1})}{1 - q_0 B_P(z^{-1})} \cdot \frac{A_P(z^{-1})}{B_P(z^{-1})} = \frac{q_0 A_P(z^{-1})}{1 - q_0 B_P(z^{-1})}$$

Valoarea inițială a semnalului de comandă se calculează și în acest caz cu raportul dintre termenii liberi ai polinoamelor de la numitor și numărător din funcția regulatorului $G_R(z^{-1})$.

Exemplu

Se consideră procesul din exemplul precedent cu funcția de transfer în z:

$$G_F(z^{-1}) = \frac{b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}} = \frac{0.09516 z^{-1}}{1 - 0.9048 z^{-1}}$$

Se cere algoritmul Dead-Beat pentru acest proces.

Rezolvare

$$G_R(z^{-1}) = \frac{q_0 A_F(z^{-1})}{1 - q_0 B_F(z^{-1})} = \frac{q_0(1 - 0.9048 z^{-1})}{1 - q_0 0.09516 z^{-1}} = \frac{t_0 + t_1 z^{-1}}{r_0 + r_1 z^{-1}}$$

$$q_0 = \frac{1}{b_1} = \frac{1}{0.09516} = 10.51, t_0 = q_0 = 10.51, t_1 = -10.51 \cdot 0.9048 = -9.51, r_0 = 1$$

$$r_1 = -0.09516 \cdot q_0 = 1$$

Astfel, se obține regulatorul cu funcția de transfer în z:

$$G_R(z^{-1}) = \frac{10.51 - 9.51 z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

Comanda inițială va avea valoarea: $u_0 = t_0 = 10.51 \gg u_a = 2.5$.