

動的システムの情報理論的形式: 因果関係, モデリング, 操作

Adrián Lozano-Durán 

Gonzalo Arranz 

ABSTRACT

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem. Ut enim aequaeque doleamus animo, cum corpore dolemus, fieri tamen permagna accessio potest, si aliquod aeternum et infinitum impendere malum nobis opinemur. Quod idem licet transferre in voluptatem, ut postea variari voluptas distinguere possit.

1 情報理論の基礎

1.1 情報量

離散化されたランダムな事象 X が, x の値をとるとき, 確率密度関数 p は次式で表現できる.

$$p(x) = \Pr\{X = x\} \quad (1)$$

この時の情報量は,

$$\mathcal{I}(x) := \log_2[p(x)] \quad (2)$$

で定義される. 一般には, 事象 X に対しての平均を取る.

$$H(X) = \langle \mathcal{I}(x) \rangle = \sum_x -p(x) \log_2[p(x)] \geq 0 \quad (3)$$

この時, 記号 $\langle \cdot \rangle$ は期待値を求める操作を表す. これはシャノンエントロピーと呼ばれる.

1.2 同時エントロピー

これを複数の事象 $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_m]$ に拡張すると, 同時エントロピーが得られる.

$$H(\mathbf{X}) = \langle \mathcal{I}(\mathbf{x}) \rangle = \sum_{\mathbf{x}} -p(x_1, x_2, \dots, x_m) \log_2[p(x_1, x_2, \dots, x_m)] \quad (4)$$

特に, 事象が2つの場合には次のように記述できる.

$$H(X, Y) = \langle \mathcal{I}(x, y) \rangle = \sum_{x, y} -p(x, y) \log_2[p(x, y)] \quad (5)$$

この時, 確率分布の性質は利用できる. 例えば, x は y に対して規格化条件を満たす必要がある.

$$p(y) = \sum_x p(x, y) \quad (6)$$

1.3 条件付きエントロピー

1.3.1 条件付きエントロピーの定義

x に関する y の条件付き確率を次式で定めることができる.

$$p(x|y) = \frac{p(x, y)}{p(y)} \quad (7)$$

これによって定められる条件付きエントロピーは

$$H(X|Y) = \sum_{x,y} -p(x, y) \log_2[p(x|y)] \quad (8)$$

となる.

1.3.2 条件付きエントロピーの性質

もし, x が y に対して独立であるなら,

$$p(x, y) = p(x)p(y) \quad (9)$$

が成立するから,

$$p(x|y) = \frac{p(x)p(y)}{p(y)} = p(x) \quad (10)$$

となるので,

$$\begin{aligned} H(X|Y) &= \sum_{x,y} -p(x)p(y) \log_2[p(x)] \\ &= \sum_x -p(x) \log_2[p(x)] \\ &= H(X) \end{aligned} \quad (11)$$

となる. 逆に, x が y に対して完全に従属であるなら,

$$p(x, y) = p(y) \quad (12)$$

となり, 条件付き確率は,

$$p(x|y) = \frac{p(y)}{p(y)} = 1 \quad (13)$$

となる. これより, 条件付きエントロピーは

$$\begin{aligned} H(X|Y) &= \sum_{x,y} -p(y) \log_2[1] \\ &= \sum_x 0 \\ &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

となる. これらから, 相互情報量は以下で定義できる.

$$\begin{aligned} I(X : Y) &= H(X) - H(X|Y) \\ &= H(Y) - H(Y|X) \end{aligned} \tag{15}$$

2 動的システムにおける情報