

目次

1	フィボナッチ数 黄金比に関する証明	1
1.1	定義	1
1.2	事前準備	2
1.3	証明 (数学的帰納法らしい)	2
1.3.1	$n = 0$ の時	2
1.3.2	$n = 1$ の時	2
1.3.3	$k+1$ でも成り立つことを証明	2

1 フィボナッチ数 黄金比に関する証明

$$Fib(n) = \frac{\phi^n - \psi^n}{\sqrt{5}} \quad (1)$$

を証明する.

1.1 定義

n は 0 以上の整数とする.

$$Fib(n) = \begin{cases} 0 & \text{if } n = 0 \\ 1 & \text{if } n = 1 \\ Fib(n-1) + Fib(n-2) & \text{else} \end{cases} \quad (2)$$

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad (3)$$

$$\phi^2 = \phi + 1 \quad (4)$$

$$\psi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \quad (5)$$

1.2 事前準備

$$\begin{aligned}\psi^2 &= \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4} \\ &= \frac{3-\sqrt{5}}{2} \\ &= \psi + 1\end{aligned}$$

$$\psi^2 = \psi + 1 \quad (6)$$

1.3 証明 (数学的帰納法らしい)

1.3.1 $n = 0$ の時

略

1.3.2 $n = 1$ の時

略

1.3.3 $k+1$ でも成り立つことを証明

$$\text{Fib}(n) = \text{Fib}(n-1) + \text{Fib}(n-2)$$

に対して, $n = k + 1$ とすると 右辺は 以下となる.

$$\begin{aligned}\text{Fib}(k) + \text{Fib}(k-1) &= \frac{\phi^k - \psi^k}{\sqrt{5}} + \frac{\phi^{k-1} - \psi^{k-1}}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \{ \phi^{k-1}(\phi + 1) - \psi^{k-1}(\psi + 1) \}\end{aligned}$$

式 4, 6 より

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{\sqrt{5}} \{ \phi^{k-1}\phi^2 - \psi^{k-1}\psi^2 \} \\ &= \frac{\phi^{k+1} - \psi^{k+1}}{\sqrt{5}}\end{aligned}$$

$$\frac{\phi^{k+1} - \psi^{k+1}}{\sqrt{5}} = \text{Fib}(k+1) \text{ となるため. 証明できた.}$$