目次

1 フィボナッチ数 黄金比に関する証明

$$Fib(n) = \frac{\phi^n - \psi^n}{\sqrt{5}} \tag{1}$$

を証明する.

1.1 定義

n は 0 以上の整数とする.

$$Fib(n) = \begin{cases} 0 & \text{if } n = 0 \\ 1 & \text{if } n = 1 \\ Fib(n-1) + Fib(n-2) & else \end{cases} \tag{2}$$

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \tag{3}$$

$$\phi^2 = \phi + 1 \tag{4}$$

$$\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \tag{5}$$

1.2　事前準備

$$
\begin{aligned}
\psi^2 &= (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^2 \\
&= \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4} \\
&= \frac{3-\sqrt{5}}{2} \\
&= \psi + 1
\end{aligned}
$$

$$\psi^2 = \psi + 1 \tag{6}$$

1.3　証明 (数学的帰納法らしい)

1.3.1　n = 0 の時

略

1.3.2　n = 1 の時

略

1.3.3　k+1 でも成り立つことを証明

Fib(n) = Fib(n-1) + Fib(n-2)
に対して,n = k + 1 とすると 右辺は 以下となる.

$$
\begin{aligned}
Fib(k) + Fib(k-1) &= \frac{\phi^k - \psi^k}{\sqrt{5}} + \frac{\phi^{k-1} - \psi^{k-1}}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\{\phi^{k-1}(\phi+1) - \psi^{k-1}(\psi+1)\} \\
\text{式 } 4, 6 \text{ より} & \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\{\phi^{k-1}\phi^2 - \psi^{k-1}\psi^2\} \\
&= \frac{\phi^{k+1} - \psi^{k+1}}{\sqrt{5}}
\end{aligned}
$$

$\frac{\phi^{k+1}-\psi^{k+1}}{\sqrt{5}} = Fib(k+1)$ となるため. 証明できた.