Careless Nim

writer : MMNMM

問題概様

- ニムをする
- platypusはミスなく最善手を選ぶ
- MMNMMは確率 P = p/q で最悪の手を選択してしまう

- MMNMMはどれくらいの確率で勝つことができるでしょう？(mod 10^9+7)

基本事項：うっかりしないニム

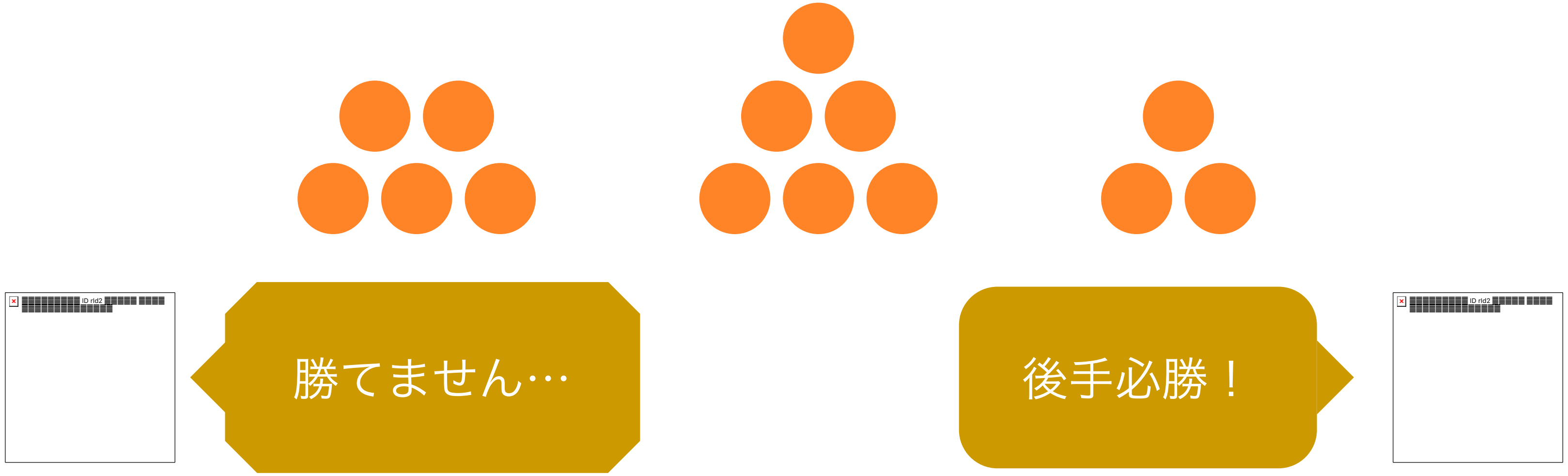
- 山にある石の数を総bitwise xorした値が0でない → 先手必勝

  0 → 後手必勝

- わからない人はGrundy数(Nimber)で検索しましょう

自明ケース①

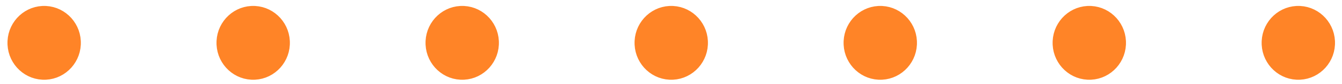
- 最初から後手必勝 ⇔ 総xor = 0



- 最善手をとってもplatypusが勝つので p によらず勝つ確率は0

自明ケース②

- すべて1のとき



間違えません！

勝てない…

- 取れる手が1通りしかない → 最悪手=最善手 → 普通のニムと同じ
- これ以降非自明なケースのみ考えます

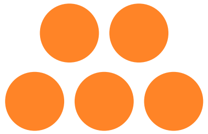
platypusの戦略

- 「1より多い石がある山がある状態」が長く続くほどMMNMMは勝ちにくくなります
（最悪手が負けにつながる回が1回増えると勝率が1-P倍になってしまうため）

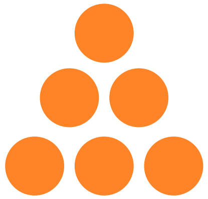
- なるべくゲームを長引かせたい
- 一番長く続くのは両者1個づつ取ったとき
- そのようにできるでしょうか? → できます

platypusの戦略

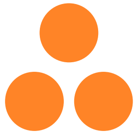
- 「立っているビット全体の中で最も低いビットが立っている山」から1つ取るがplatypusのとるべき戦略です



101　　← 取るべき山



110



011　　← 取るべき山

platypusの戦略

- こうするとMMNMMも1つ石を取るしか必勝戦略がなくなります

- 取るべき山の中で石が最小である山から石を取ることにすると
MMNMMが1だけの状態で回すことも(最後の{1, 1}を除いて)できません

- よってこれがplatypusのとるべき最良の戦略です

MMNMMの戦略

- platypusの戦略から、2手目以降はほとんど自由な手を打つことができません（1つ石を取るべきところから1つ石を取るだけ）
- 1手目について考えると、MMNMMの取るべき戦略は次のようになります
  - 1の山だけにできるなら1の山だけにする
  - そうでないなら、なるべく残る石の数が少なくなるようにする
  - （当然grundy数が0になるようにすることが必要）

結論

- ここまでのことをまとめると、以下のようになります
  1. 全体のgrundy数が0のとき：MMNMMは確率0で勝つ
  2. 1.でなく、山が全て1のとき：MMNMMが確率1で勝つ
  3. 一つの山だけ1でないとき：MMNMMが確率Pで勝つ
  4. それ以外のとき：　1手目終了時の石の個数の総和を最小にするように1手目を打ったときの石の個数の総和をSとするとそのあとゲームはS回続いて、MMNMMは(S-2)/2回のあいだ、1でない山がある状態で手を打つので、MMNMMは確率$P^{S/2}$で勝つ
- これを実装すると答えが出ます

おまけ

- ところで答え P/Q に対して MQ = P mod 10^9+7 なる M は一意に定まります
- モジュロ逆元とかいって競プロでも色々使います 覚えておきましょう