Food Stall Collision

Writer : platypus

概要

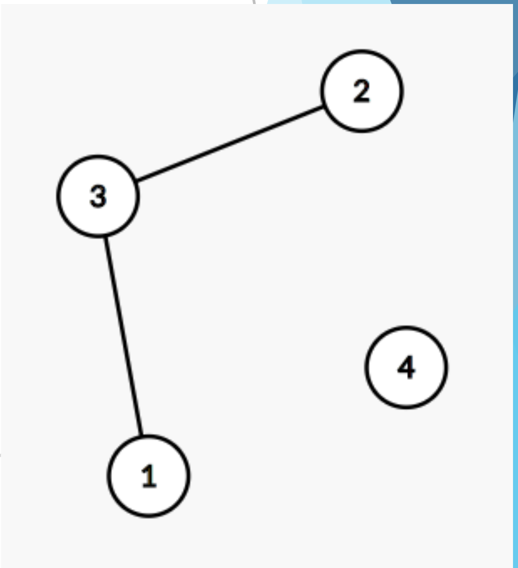
- 1~Nの整数を2つずつ含む数列{1,1,2,2,3,3,…,N,N}のシャッフルを考える。
- 以下のようにして、シャッフルされた数列から頂点数Nの無向グラフへと変換する

1. すべての1≦i<j≦Nを満たす整数i,jを考える
2. 数列中にiがいる位置をAi,Bi(Ai<Bi)、数列中にjがいる位置をAj,Bj(Aj<Bj)とする。この時、Ai≦p≦BiかつAj≦p≦Bjを満たす整数pが存在するならば、頂点iと頂点jを辺で結ぶ

- 連結な無向木が与えられる。シャッフルされてできる(2N)! / ((2!)^N)通りの数列の中で、上記の変換後与えられた木と同じになるような数列は何通りあるか？

グラフ生成

- 「Ai≦p≦BiかつAj≦p≦Bjを満たす整数pが存在する」という部分が少しわかりにくい。
- 簡単に言うと、「区間[Ai,Bi]と区間[Aj,Bj]が重なっている」こと
- 下の数列では、区間1と区間3、区間2と区間3が重なっているため、右のようなグラフになる



与えられるグラフ

- 与えられたグラフ**に変換されるような数列**の通り数を知りたい
- 今回の問題では、与えられるグラフは**連結な木**
  - 非常に特殊なケース！
- 木の性質といえば…

オイラーツアー

N頂点N-1辺

閉路が存在しない

任意の2頂点を結ぶパスは1通り

与えられるグラフ

- 与えられたグラフ**に変換されるような数列**の通り数を知りたい
- 今回の問題では、与えられるグラフは**連結な木**
  - 非常に特殊なケース！
- 木の性質といえば…

オイラーツアー

今回はこれに注目！

N頂点N-1辺

閉路が存在しない

任意の2頂点を結ぶパスは1通り

閉路が存在しない

- 3つ以上の区間が同一箇所で重なっているような数列は木になりえない！
  - なぜ？その区間同士がグラフ上で長さ3の閉路を形成してしまうから
- では、任意の場所について、区間は高々2つしか重なっていない。
- ある区間[Ax,Bx]を数列から取り出した部分数列を考える

…x　？　？　？　？　？　？　x…

閉路が存在しない

- 3つ以上の区間が同一箇所で重なっているような数列は木になりえない！
  - なぜ？その区間同士がグラフ上で長さ3の閉路を形成してしまうから
- では、任意の場所について、区間は高々2つしか重なっていない。
- ある区間[Ax,Bx]を数列から取り出した部分数列を考える
- 二つの数字が離れて区間中に存在するのはダメ

…x　？　y　？　y　？　？　x…

閉路が存在しない

- 3つ以上の区間が同一箇所で重なっているような数列は木になりえない！
  - なぜ？その区間同士がグラフ上で長さ3の閉路を形成してしまうから
- では、任意の場所について、区間は高々2つしか重なっていない。
- ある区間[Ax,Bx]を数列から取り出した部分数列を考える
- 二つの数字が離れて区間中に存在するのはダメ(くっついていればOK)

…x　？　y　y　？　？　？　x…

閉路が存在しない

- 3つ以上の区間が同一箇所で重なっているような数列は木になりえない！
  - なぜ？その区間同士がグラフ上で長さ3の閉路を形成してしまうから
- では、任意の場所について、区間は高々2つしか重なっていない。
- ある区間[Ax,Bx]を数列から取り出した部分数列を考える
- 二つの数字が離れて区間中に存在するのはダメ(くっついていればOK)
- xに隣接していない数字がペアを成していないのもダメ(z≠uなのでダメ)

…x　y　z　u　？　？　？　x…

閉路が存在しない

- よって、中身は以下のように、
  1. xと隣接している箇所を除き、すべての数字は隣り合うペアとして存在し、
  2. かつxと隣接している数字は、ペアを形成していないならば、xを一つ挟む形で別のところと区間を形成している
- という考察ができる

…x y z z u u v x…

連結である

- それに加え、今回の制約では木は**連結**である。
- この時、以下のように区間[Ax,Bx]中の数字がすべて隣接する数同士でペアを形成してしまうと、区間外の頂点と連結になることができない。

・・・x　z　z　v　v　u　u　x・・・

連結である

- それに加え、今回の制約では木は**連結**である。
- この時、以下のように区間[Ax,Bx]中の数字がすべて隣接する数同士でペアを形成してしまうと、区間外の頂点と連結になることができない。
- よって、xが数列全体の端にある場合を除き、ペアを作る数は区間[Ax+2,Bx-2]上に存在し、位置Ax+1,Bx-1にある数字(下の図ではyとv)は隣接するペアを形成しない

…x　y　z　z　u　u　v　x…

通り数を絞る

- 以上の考察から言えること

1. 隣接するペアを形成している数字は、グラフ上で次数1の頂点(葉)である。
2. 隣接するペアを形成していない数字は、グラフ上で一つながりのパスを形成している。

- 隣接するペアを形成していない数字⇔グラフ上で次数2以上の頂点
- よって、まずは木の上にある次数2以上の頂点が一つながりのパスになっているかを確認し、なっていなければ答えは0通り
- なっていれば答えは1通り以上
- 以下では1通り以上の場合を議論する

答えが1通り以上の場合

- グラフ上で次数が2以上の頂点を**黒頂点**、次数が1の頂点を**白頂点**という。
- 仮定より、黒頂点は一つながりのパスを形成している。
  - 黒頂点が存在しない場合(N=2の時)や黒頂点が1個しかない場合は例外なので、あとで処理する
- 黒頂点を形成するパスの中で端っこの２つの頂点をV1,V2と置く。
- この時、数列の左端における数字は、

1. V1,V2自身　と
2. V1,V2に隣接している白頂点

である。

V1自身が数列の左端の場合

- それ以降の数字は比較的単純に並べられる。
- まずはV1に隣接している白頂点を隣接するペアとして列挙し、最後にV1に隣接する黒頂点を一つ置いた後V1区間を閉じる。
- 次に、前置いた黒頂点に隣接する白頂点を隣接するペアとして列挙し、最後に子の黒頂点に隣接する別の黒頂点を置いた後この区間を閉じる
- 以下の操作を最後まで繰り返せばよい。通り数は黒頂点に隣接している白頂点のペアを置く順番、また、数列の最後の2要素のみ交換可能なので、

$$2\times \prod_{b\in B} (b\text{に隣接している白頂点の個数})!$$

- が求める通り数である。V2から始める場合も同様に答えられる。

一例：黒頂点をBと置き、白頂点をwと置くと
B1,w1,w1,w2,w2,B2,B1,w3,w3,w4,w4,w5,w5,B3,B2,w6,…

V1に隣接する白頂点が左端の場合

- この白頂点はV1を一個だけ挟んだ小さな区間になる
- 実は、形成される数列は、V1自身が数列の左端の場合の時に形成した数列の最初の2個の数字を交換したものと同じであることがわかる。

- よってこの場合も通り数は

$$2\times \underset{b\in B}{\boldsymbol{\Phi}}\,\mathfrak{o}b\text{に隣接している白頂点の個数}\mathfrak{p}\,!$$

- である。V2についても同様に議論できる。

まとめ

- よって、全体の答えは

$$2\times2\times2\times \underset{b\in B}{\Theta}\ \mathrm{F}b\text{に隣接している白頂点の個数}\mathrm{G}!$$

- である。
- ただし、黒頂点の個数が0個の場合(N=2の場合)答えは4通り、
- 黒頂点の個数が1個の場合V1とV2が同一のため答えは(N-1)!×4通りである