Powerful Fever!

writer : MMNMM

問題概様

- ゲームをする
- ゲームに勝つと1回目は1点、n+1回目にはn回目の得点x点についてa^x点をもらえます
- 負けると0点をもらい終了
- K回ゲームをしました、何点もらえるでしょう

- つまり、1+a+a^a+a^a^a+a^a^a^a+…+a^a^a^…^a^a mod Mを求める

部分問題

- 求めるものはSum[a↑↑k, k = 0 to K-1] mod M
- 部分問題としてa^a^a^...^a^a^a = a↑↑k mod Mを考えます
- aとMが互いに素のとき、a^φ(M) = 1 mod M (フェルマーの小定理)なので
  a↑↑k = a^(a↑↑(k - 1)) mod Mを求めるには
  a↑↑(k - 1) mod φ(M)を求められればいいです

部分問題

- これを繰り返していけば求めたいものが求まるはず
- 計算量は？
- $\phi(\phi(\ldots(M)\ldots))$ を前計算しておけば $O(K)$ になる
- $K<=10^{18}$ なので間に合わない！

部分問題

- でも、実はうまくいくことがわかります
- $\phi(M)$ について、
  - M が偶数のとき、 $\phi(M)$ は M/2 未満
  - M が3以上のとき、$\phi(M)$ は偶数
- であることを踏まえると、logM 回程度の繰り返しで mod 1 の値を求めることになり、これは自明に0です

部分問題

- よって、これは O(min{K, logM}) で解けました
- 何か忘れていませんか?

部分問題の部分問題

- ここまでの話は、aとM(or ϕ(M) or ϕ(ϕ(M)) or …)が互いに素でなければうまくいきません
- aとMが互いに素でないとき、
  M = AB, Aはgcd(a, A) = 1なる最大のA
  のようにして考えると、a^x = 0 mod B となるようなxが存在します
- なので、単純に周期的な変化をするわけではありません

解決法

- すべてのφ(φ(...φ(M)...)) に対する x の値を求めておいて、その最大値について考えます
- そして、a^a^a^...^a が x 以上かを同時に計算します

- x 以下の場合、そのまま計算してしまいます
- x 以上の場合、M = AB についてmod Aの値を求めてmod Bで0であることとあわせて値を求めましょう (実はもう少し楽な方法もあります)

まとめ

- 以上のことをあわせると、一般の(a, M, k)について、a↑↑k mod M が O(min{k, logM})で求められました
- これを k について 0 から K – 1 まで足しますが、
  φ(φ(…φ(M)…)) が 1 になったあとは a↑↑k mod M が変動しないので
  かけ算で答えを出すことができます
- よって、この問題の答えを O(min{K, logM}^{2}) で求めることができました。
- a^a^…^a mod M が早く収束することは有名事実なので、覚えておきましょう