

# Uranai Integer

writer : MMNMM

# 問題概様

- ▶ N枚の札があって、次のことをします
  - ▶ ランダムに2枚とってX, Yとする
  - ▶  $XY+2+2X+2Y \bmod 10^9+7$ を戻す
- ▶ 最後に1枚残るので、これの期待値を求めましょう
- ▶ 簡単のため、二項演算 $\otimes$ を $X \otimes Y := XY+2+2X+2Y$ と定めます

# 睨むとわかること

- ▶ 可換性 :  $X \otimes Y = Y \otimes X$ 
  - ▶ 対称なので自明
- ▶ 結合性 :  $X \otimes (Y \otimes Z) = (X \otimes Y) \otimes Z$ 
  - ▶ ちょっと非自明
  - ▶ どちらも  $XYZ+2XY+2XZ+2YZ+4X+4Y+4Z+6$  になります

# これがわかるとなにがうれしいのか

- ▶ 例えば、1,2,3,4が(2,4),(22,1),(70,3)の順に取り出されたとき、答えは $((2 \otimes 4) \otimes 1) \otimes 3$ ですが、これは可換性と結合性から $((1 \otimes 2) \otimes 3) \otimes 4$ と等しいことが示せます
- ▶ 一般に可換性と結合性をもつ演算はどの順番で演算を行っても結果が変わらないことが知られています
- ▶ つまり、どのようにお札を取り出しても結果は変わらないため、お札に書かれた数字を最初から順に取り出した時の結果が答えです。

# 実装

- ▶ やるだけ
- ▶ writer実装
  - ▶ MMNMM : 96byte (C)