Рівневий набір гармонійних функцій

А. В. Тор

Для $\theta \in [0, \pi/2[$, розглянемо множини

$$\Sigma_{1,\theta} = \left\{ a \in \mathbb{C} \setminus]{-\infty}, -1] : \Re\left(\int_{[1,a]} e^{i\theta} \sqrt{p_a(z)}\, dz \right) = 0 \right\};$$
$$\Sigma_{-1,\theta} = \left\{ a \in \mathbb{C} \setminus [1, +\infty[: \Re\left(\int_{[-1,a]} e^{i\theta} \sqrt{p_a(z)}\, dz \right) = 0 \right\};$$
$$\Sigma_{\theta} = \left\{ a \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1] : \Re\left(\int_{[-1,1]} e^{i\theta} \sqrt{p_a(z)}\, dz \right) = 0 \right\};$$

де $p_a(z)$ — комплексний многочлен, визначений формулою

$$p_a(z) = (z - a)(z^2 - 1).$$

Лема 1. *Нехай $\theta \in [0, \pi/2[$. Тоді кожна з множин $\Sigma_{1,\theta}$ та $\Sigma_{-1,\theta}$ утворюється двома гладкими кривими, які локально ортогональні відповідно при $z = 1$ та $z = -1$, точніше:*

$$\lim_{a \to -1,\, a \in \Sigma_{-1,\theta}} \arg(a + 1) = \frac{-2\theta + (2k+1)\pi}{4}, \quad k = 0, 1, 2, 3;$$
$$\lim_{a \to +1,\, a \in \Sigma_{1,\theta}} \arg(a - 1) = \frac{-\theta + k\pi}{2}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Дві криві, що визначають $\Sigma_{1,\theta}$ (відповідно $\Sigma_{-1,\theta}$), перетинаються лише при $z = 1$ (відповідно $z = -1$). Більше того, для $\theta \notin \{0, \pi/2\}$, вони розходяться по-різному до ∞ в одному з напрямків

$$\lim_{|a| \to +\infty,\, a \in \Sigma_{\pm 1,\theta}} \arg a = \frac{-2\theta + 2k\pi}{5}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Для $\theta = 0$, (відповідно $\theta = \pi/2$), один промінь $\Sigma_{1,\theta}$ (відповідно $\Sigma_{-1,\theta}$) розходиться до $z = -1$ (відповідно $z = 1$).

Доведення. Нехай задано непостійну гармонічну функцію u, визначену в деякій області $\mathcal{D}$ of $\mathbb{C}$. Критичними точками u є саме ті, де

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0.$$

Вони ізольовані. Якщо v є гармонічним спряженням u у $\mathcal{D}$, скажімо, $f(z) = u(z) + iv(z)$ аналітична у $\mathcal{D}$, тоді за Коші-Ріманом,

$$f'(z) = 0 \iff u'(z) = 0.$$

Встановлений рівень

$$\Sigma_{z_0} = \{z \in \mathcal{D} : u(z) = u(z_0)\}$$

u через точку $z_0 \in \mathcal{D}$ залежить від поведінки f поблизу z_0. Точніше, якщо z_0 є критичною точкою u, $(u'(z_0) = 0)$, то існує околиця $\mathcal{U}$ околу z_0, голоморфної функції $g(z)$, визначена на $\mathcal{U}$, така, що

$$\forall z \in \mathcal{U}, \quad f(z) = (z - z_0)^m g(z), \quad g(z) \neq 0.$$

Взявши гілку m-го кореня з $g(z)$, f має локальну структуру

$$f(z) = (h(z))^m, \quad \forall z \in U.$$

Звідси випливає, що Σ_{z_0} локально утворена m аналітичними дугами які проходять через z_0 і перетинаються там під рівними кутами π/m. Через регулярну точку $z_0 \in \mathcal{D}$, $(u'(z_0) \neq 0)$, теорема про неявну функцію стверджує, що Σ_{z_0} є локально єдиною аналітичною дугою. Зауважте, що множина рівнів гармонічної функції не може закінчуватися у звичайній точці.

Розглянемо багатозначну функцію

$$f_{1,\theta}(a) = \int_1^a e^{i\theta}\sqrt{p_a(t)}\,dt, \quad a \in \mathbb{C}.$$

Інтегруючи вздовж відрізка $[1, a]$, можна припустити, що без без втрати загальності, що

$$f_{1,\theta}(a) = ie^{i\theta}(a-1)^2\int_0^1 \sqrt{t(1-t)}\sqrt{t(a-1)+2}\,dt = (a-1)^2 g(a), \quad g(1) \neq 0. \tag{1}$$

Очевидно, що:

$$\forall a \in \mathbb{C}\backslash]-\infty,-1], \quad \{t(a-1)+2 : t \in [0,1]\} = [2, a+1] \subset \mathbb{C}\backslash]-\infty, 0].$$

Отже, при фіксованому виборі аргументу та квадратного кореня всередині інтеграла, $f_{1,\theta}$ та g є однозначними аналітичними функціями в $\mathbb{C}\backslash]-\infty,-1]$.

Припустимо, що для деяких $a \in \mathbb{C}\backslash]-\infty,-1]$, $a \neq -1$,

$$u(a) = \Re f_{1,\theta}(a) = 0, \quad f'_{1,\theta}(a) = 0.$$

Тоді,

$$(a-1)^3 g'(a) + 2 f_{1,\theta}(a) = 0.$$

Беручи справжні деталі, ми отримуємо

$$0 = \int_0^1 \sqrt{t(1-t)}\,\Im\left(e^{i\theta}(a-1)^2\sqrt{t(a-1)+2}\right) dt,$$

$$0 = \Re\left((a-1)^3 g'(a)\right) = \int_0^1 t\sqrt{t(1-t)}\,\Im\left(e^{i\theta}(a-1)^3\sqrt{t(a-1)+2}\right) dt.$$

За неперервністю функцій всередині цих інтегралів на відрізку $[0,1]$, існують $t_1, t_2 \in [0,1]$ такі, що

$$\Im\left(e^{i\theta}(a-1)^2\sqrt{t_1(a-1)+2}\right) = \Im\left(e^{i\theta}(a-1)^3\sqrt{t_2(a-1)+2}\right) = 0,$$

а потім

$$e^{2i\theta}(a-1)^4(t_1(a-1)+2) > 0, \quad e^{2i\theta}(a-1)^6(t_2(a-1)+2) > 0.$$

Взявши їх співвідношення, отримуємо

$$\frac{(t_1(a-1)+2)(t_2(a-1)+2)}{(a-1)^2} > 0,$$

яка не може виконуватись, оскільки, якщо $\Im a > 0$, то

$$0 < \arg(t_1(a-1)+2) + \arg(t_2(a-1)+2) < 2\arg(a+1) < \arg((a-1)^2) < 2\pi.$$

Випадок $\Im a < 0$ є аналогічним, тоді як випадок $a \in \mathbb{R}$ можна легко відкинути. Таким чином, $a = 1$ є єдиною критичною точкою $\Re f_{1,\theta}$. Since $f''_{1,\theta}(1) = 2g(1) \neq 0$, ми виводимо локальну поведінку $\Sigma_{1,\theta}$ поблизу $a = 1$.

Припустимо, що для деяких $\theta \in]0, \pi/2[$, промінь $\Sigma_{\pm 1,\theta}$ розходиться до певного моменту в $]-\infty, -1[$; або наприклад,

$$(\Sigma_{1,\theta} \setminus \Sigma_{1,\theta}) \cap \{z \in \mathbb{C} : \Im z \geq 0\} = \{x_\theta\}.$$

Нехай $\epsilon > 0$ так, що $0 < \theta - 2\epsilon$. Для $a \in \mathbb{C}$, що задовольняє $\pi - \epsilon < \arg a < \pi$,

$$0 < \theta - 2\epsilon < \theta + 2\arg a + \arg \int_0^1 \sqrt{t(1-t)}\sqrt{t(a-1)+2}dt < \frac{\pi}{2} + \theta - \frac{\epsilon}{2} < \pi,$$

що суперечить (1). Інші випадки подібні. Таким чином, будь-який промінь з $\Sigma_{\pm 1,\theta}$ повинен розходитись на ∞. Випадок $\theta = 0$ є простішим.

Якщо $a \to \infty$, тоді $|f_{1,\theta}(a)| \to +\infty$; since $\Re f_{1,\theta}(a) = 0$, we have $|\Im f_{1,\theta}(a)| \to +\infty$. Звідси випливає, що

$$\arg(f(a)) \sim \arg\left(\frac{4}{15} e^{i\theta} a^{5/2}\right) \to \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \text{при } a \to \infty.$$

Ми отримуємо поведінку будь-якої дуги $\Sigma_{1,\theta}$, яка розходиться до ∞. Зокрема, з принципу максимуму модуля, два промені з $\Sigma_{,\theta}$ не можуть розходитись у ∞. $\Sigma_{,\theta}$ не можуть розходитися до ∞ в одному напрямку.

Якщо $\Sigma_{1,\theta}$ містить регулярну точку z_0 (наприклад, $\Im z_0 > 0$), яка не належить дугам $\Sigma_{1,\theta}$, що виходять з точки $a = 1$. Два промені кривої набору рівнів γ, що проходять через z_0 розходяться до ∞ у двох різних напрямках. Звідси випливає, що γ має проходити через $z_1 = 1 + iy$, для деяких $y > 0$, або $z_1 = y$, для деяких $y > 1$. Легко перевірити, що в обох випадках, для будь-якого вибору аргументу,

$$\Re \int_1^{z_1} e^{i\theta} \sqrt{p_{z_1}(t)} dt \neq 0,$$

і отримуємо протиріччя. Таким чином, $\Sigma_{1,\theta}$ утворюється лише двома двома кривими. Що проходять через $a = 1$. Таку ж саму ідею дає структура $\Sigma_{-1,\theta}$; навіть більше, з співвідношення

$$\Re f_{\pm 1,\theta}(a) = 0 \iff \Re f_{\pm 1,\pi/2-\theta}(-a) = 0, \tag{2}$$

доступних для довільного $\theta \in [\pi/4, \pi/2[$, можна легко побачити, що $\Sigma_{-1,\pi/2-\theta}$ і $\Sigma_{1,\theta}$ симетричні відносно уявної осі (2). Це приводить нас до того, щоб обмежити наше дослідження випадком. $\square$