Tu 多様体 回答

tRue

2025 年 10 月 27 日

節末問題

§1　ユークリッド空間上の滑らかな関数

1.1 C^2 級だが C^3 級でない関数

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = x^{1/3}$ とし，$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$g(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x t^{1/3}dt = \frac{3}{4}x^{4/3}$$

とする．関数 $h(x) = \int_0^x g(t)dt$ は C^2 級だが $x = 0$ で C^3 級ではないことを示せ.

Proof. $h(x)$ の 1 階微分，2 階微分，3 階微分を計算する．

$$\begin{aligned} h'(x) &= g(x) = \frac{3}{4}x^{4/3}, \\ h''(x) &= g'(x) = f(x) = x^{1/3}, \\ h'''(x) &= f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}. \end{aligned}$$

したがって，$h''(x)$ は全ての x で定義されるが，$h'''(x)$ は $x = 0$ で定義されない．よって，$h(x)$ は C^2 級だが $x = 0$ で C^3 級ではない. □

§8　接空間

8.10 極大値

多様体上の実数値関数 $f\colon M \to \mathbb{R}$ が $p \in M$ において極大値をもつとは，$f(p) \geq f(q)$ がすべての $q \in U$ について成り立つような p の近傍 U が存在することである．

(a) 開区間 I 上で定義されている微分可能な関数 $f\colon I \to \mathbb{R}$ が $p \in I$ において極大値をもつならば，$f'(p) = 0$ であることを示せ.

Proof. $f(p) \geq f(q)$ がすべての $q \in I$ について成り立つように I として取り直しても良い.

$q < p$ で $f(q)$ が増加，$p < q$ で $f(q)$ が減少することを踏まえると以下 2 つが成り立つ．

$$\lim_{q \to p^-} \frac{f(q) - f(p)}{q - p} \leq 0$$
$$\lim_{q \to p^+} \frac{f(q) - f(p)}{q - p} \geq 0$$

f が微分可能であるため，左極限と右極限は等しくなければならず，$f'(p) = 0$ が従う． □

(b) C^∞ 級関数 $f\colon M \to \mathbb{R}$ が極大値をとる点は f の臨界点であることを証明せよ．

Proof. $p \in M$ を f が極大値をとる点とし，$X_p \in T_pM$ を接ベクトルとする．$c(t)$ を始点 p における速度ベクトルが X_p であるような M 上の曲線とすると，$f \circ c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は 0 において極大値をもち，(a) より

$$\begin{aligned} &(f \circ c)'(0) = 0 \\ \implies &(f \circ c)_* \left(\frac{d}{dt} \right) = f_{*,p}(X_p) = 0 \end{aligned}$$

となる．これは任意の $X_p \in T_pM$ について成り立つため，$f_{*,p}$ は零写像であり，p は f の臨界点である． □

§11 滑らかな写像の階数

11.1 球面の接ベクトル

$\mathbb{R}^{n+1}$ における単位球面 S^n は，方程式 $\sum_{i=1}^{n+1} (x^i)^2 = 1$ によって定義される．$p = (p^1, \ldots, p^{n+1}) \in S^n$ に対して，

$$X_p = \sum a^i \partial/\partial x^i \Big|_p \in T_p\mathbb{R}^{n+1}$$

が点 p で S^n に接するための必要十分条件は，$\sum a^i p^i = 0$ であることを示せ．

Proof. $f\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ を

$$f(x^1, \ldots, x^{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} (x^i)^2 - 1$$

とすると，$S^n = f^{-1}(0)$ である．

X_p が点 p で S^n に接するなら，ある曲線 $c\colon \mathbb{R} \to S^n$ が存在して，$c(0) = p$, $c'(0) = X_p$ を満たす (命題 8.16) [*1]．$i\colon S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ を包含写像とすると，このような曲線 $c(t)$ につい

[*1] ここは必要十分条件だと思うが，Tu 多様体の回答では必要性のみを用いていたのでそれに沿った．一般には十分ではないのかもしれないが，私はよくわかっていない．

て，ここで，$f\circ i\circ c\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は全ての t で 0 となるため，

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dt}(f\circ i\circ c)(t)\\
&= (f\circ i\circ c)_*\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_t\right)\\
&= f_{*,c(t)}(c'(t))\\
&= \sum_{i=1}^{n+1}\left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_{c(t)}\dot{c}^i(t)
\end{aligned}
$$

となる[*2]．$t=0$ のとき，

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n+1}\frac{\partial f}{\partial x^i}(p)\cdot a^i = 0\\
\iff &\sum_{i=1}^{n+1} 2p^i\cdot a^i = 0\\
\iff &\sum_{i=1}^{n+1} a^i p^i = 0
\end{aligned}
$$

となる．

T_pS^n と $\sum_{i=1}^{n+1} a^ip^i = 0$ を満たす $T_p\mathbb{R}^{n+1}$ の部分集合はどちらも同じ次元をもつベクトル空間で，上述の議論から前者は後者に含まれるため，同型である． □

11.2 平面曲線の接ベクトル

(a) $i\colon S^1\hookrightarrow\mathbb{R}^2$ を単位円周の包含写像とする．この問題では，x,y を $\mathbb{R}^2$ の標準座標とし，$\overline{x},\overline{y}$ をその S^1 への制限とする．よって，$\overline{x}=i^*x, \overline{y}=i^*y$ である．上半円周 $U=\{(a,b)\in S^1 \mid b>0\}$ においては，$\overline{x}$ は局所座標であり，ゆえに $\partial/\partial\overline{x}$ が定義されている．$p\in U$ に対して

$$
i_*\left(\left.\frac{\partial}{\partial\overline{x}}\right|_p\right) = \left.\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial\overline{y}}{\partial\overline{x}}\frac{\partial}{\partial y}\right)\right|_p
$$

を証明せよ．したがって，$i\colon T_pS^1\to T_p\mathbb{R}^2$ は単射であるが，$\partial/\partial\overline{x}|_p$ は $\partial/\partial x|_p$ と同一視することはできない．

[*2] 本来は終域の接空間の基底 $\left.\frac{\partial}{\partial z}\right|_0$ を掛ける必要があるが，ここでは省略している．

Proof.

$$
\begin{aligned}
i_*\left(\left.\frac{\partial}{\partial \overline{x}}\right|_p\right) &= \left.\left(\frac{\partial x\circ i}{\partial \overline{x}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y\circ i}{\partial \overline{x}}\frac{\partial}{\partial y}\right)\right|_p \\
&= \left.\left(\frac{\partial \overline{x}}{\partial \overline{x}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \overline{y}}{\partial \overline{x}}\frac{\partial}{\partial y}\right)\right|_p \\
&= \left.\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \overline{y}}{\partial \overline{x}}\frac{\partial}{\partial y}\right)\right|_p
\end{aligned}
$$

□

(b) $\mathbb{R}^2$ における滑らかな曲線 C について，x の C への制限である $\overline{x}$ が局所座標になるような C のチャート U をとり，(a) の結果を一般化せよ．

Proof. (a) の変形は曲線の方程式に依らない．適切にチャートが取れていれば結果は同様． □

11.3 コンパクトな多様体上の滑らかな写像の臨界点

コンパクトな多様体 N から $\mathbb{R}^m$ への滑らかな写像 f は臨界点をもつことを示せ．

Proof. 第 1 成分への射影 $\pi\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ を用いて，$\pi\circ f\colon N \to \mathbb{R}$ を考える．N はコンパクトで，f と π は連続であるから $\pi\circ f(N)$ はコンパクトで，そのため有界閉集合．よって，$\pi\circ f$ は最大値 (と最小値) をもつ．
$p\in N$ を $\pi\circ f$ の最大値を与える点とし，$(U, x^1,\dots,x^n)$ を p を含むチャートとする．以下を考える．

$$
\begin{aligned}
(\pi\circ f)_*\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right) &= \frac{\partial f^1}{\partial x^i}(p)\cdot\left.\frac{\partial}{\partial f^1}\right|_{f(p)} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

したがって，$f_*\bigl(\partial/\partial x^i|_p\bigr)$ の第 1 成分は全ての i について 0 であり，そのため f_* は p で全射でない．つまり，p は臨界点である． □

別解 1[*3]

Proof. f が臨界点をもたないと仮定すると，f は沈め込み (つまり，適切なチャートを取れば f は射影)．ここで $\pi\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ を第 1 成分への射影とすると，$\pi\circ f\colon N\to\mathbb{R}$ も沈め込みである (つまり，適切なチャートを取れば $\pi\circ f$ は x^1)．しかし，$\pi\circ f(N)$ はコンパクトであるから最大値を持ち，その点で臨界点となってしまう[*4]ため矛盾． □

別解 2[*5]

[*3] Tu 多様体の回答
[*4] 8.10 参照.
[*5] Tu 多様体の別解

Proof. f が臨界点をもたないと仮定すると，f は沈めこみ．系 11.6 より f は開写像，滑らかという仮定も踏まえて同相写像となる．しかし，N はコンパクトであるから $f(N)$ は開なコンパクト集合となるが，$\mathbb{R}^m$ の部分集合でその条件を満たすものは空集合のみで，矛盾する． □