Tu 多様体 回答

tRue

2025 年 10 月 27 日

節末問題

§1　ユークリッド空間上の滑らかな関数

1.1 C^2 級だが C^3 級でない関数

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = x^{1/3}$ とし，$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$g(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x t^{1/3}dt = \frac{3}{4}x^{4/3}$$

とする．関数 $h(x) = \int_0^x g(t)dt$ は C^2 級だが $x = 0$ で C^3 級ではないことを示せ．

Proof. $h(x)$ の 1 階微分，2 階微分，3 階微分を計算する．

$$\begin{aligned} h'(x) &= g(x) = \frac{3}{4}x^{4/3}, \\ h''(x) &= g'(x) = f(x) = x^{1/3}, \\ h'''(x) &= f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}. \end{aligned}$$

したがって，$h''(x)$ は全ての x で定義されるが，$h'''(x)$ は $x = 0$ で定義されない．よって，$h(x)$ は C^2 級だが $x = 0$ で C^3 級ではない．　□

§8　接空間

8.10 極大値

多様体上の実数値関数 $f\colon M \to \mathbb{R}$ が $p \in M$ において極大値をもつとは，$f(p) \geq f(q)$ がすべての $q \in U$ について成り立つような p の近傍 U が存在することである．

(a) 開区間 I 上で定義されている微分可能な関数 $f\colon I \to \mathbb{R}$ が $p \in I$ において極大値をもつならば，$f'(p) = 0$ であることを示せ．

Proof. $f(p) \geq f(q)$ がすべての $q \in I$ について成り立つように I として取り直しても良い．

$q < p$ で $f(q)$ が増加，$p < q$ で $f(q)$ が減少することを踏まえると以下 2 つが成り立つ．

$$\lim_{q \to p^-} \frac{f(q) - f(p)}{q - p} \leq 0$$
$$\lim_{q \to p^+} \frac{f(q) - f(p)}{q - p} \geq 0$$

f が微分可能であるため，左極限と右極限は等しくなければならず，$f'(p) = 0$ が従う． □

(b) C^∞ 級関数 $f\colon M \to \mathbb{R}$ が極大値をとる点は f の臨界点であることを証明せよ．

Proof. $p \in M$ を f が極大値をとる点とし，$X_p \in T_pM$ を接ベクトルとする．$c(t)$ を始点 p における速度ベクトルが X_p であるような M 上の曲線とすると，$f \circ c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は 0 において極大値をもち，(a) より

$$\begin{aligned} &(f \circ c)'(0) = 0 \\ \Longrightarrow\ &(f \circ c)_*\left(\frac{d}{dt}\right) = f_{*,p}(X_p) = 0 \end{aligned}$$

となる．これは任意の $X_p \in T_pM$ について成り立つため，$f_{*,p}$ は零写像であり，p は f の臨界点である． □

§11 滑らかな写像の階数

11.1 球面の接ベクトル

$\mathbb{R}^{n+1}$ における単位球面 S^n は，方程式 $\sum_{i=1}^{n+1}(x^i)^2 = 1$ によって定義される．$p = (p^1, \ldots, p^{n+1}) \in S^n$ に対して，

$$X_p = \sum a^i \partial/\partial x^i\Big|_p \in T_p\mathbb{R}^{n+1}$$

が点 p で S^n に接するための必要十分条件は，$\sum a^i p^i = 0$ であることを示せ．

Proof. $f\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ を

$$f(x^1, \ldots, x^{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} (x^i)^2 - 1$$

とすると，$S^n = f^{-1}(0)$ である．

X_p が点 p で S^n に接するなら，ある曲線 $c\colon \mathbb{R} \to S^n$ が存在して，$c(0) = p$, $c'(0) = X_p$ を満たす (命題 8.16) [*1]．$i\colon S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ を包含写像とすると，このような曲線 $c(t)$ につい

[*1] ここは必要十分条件だと思うが，Tu 多様体の回答では必要性のみを用いていたのでそれに沿った．一般には十分ではないのかもしれないが，私はよくわかっていない．

て，ここで，$f \circ i \circ c \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は全ての t で 0 となるため，

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}(f \circ i \circ c)(t) \\ &= (f \circ i \circ c)_* \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_t \right) \\ &= f_{*,c(t)}(c'(t)) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \left. \frac{\partial f}{\partial x^i} \right|_{c(t)} \dot{c}^i(t) \end{aligned}$$

となる[*2]．$t = 0$ のとき，

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \cdot a^i = 0 \\ \iff & \sum_{i=1}^{n+1} 2p^i \cdot a^i = 0 \\ \iff & \sum_{i=1}^{n+1} a^i p^i = 0 \end{aligned}$$

となる．

T_pS^n と $\sum_{i=1}^{n+1} a^i p^i = 0$ を満たす $T_p\mathbb{R}^{n+1}$ の部分集合はどちらも同じ次元をもつベクトル空間で，上述の議論から前者は後者に含まれるため，同型である． □

11.2 平面曲線の接ベクトル

(a) $i \colon S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ を単位円周の包含写像とする．この問題では，x, y を $\mathbb{R}^2$ の標準座標とし，$\overline{x}, \overline{y}$ をその S^1 への制限とする．よって，$\overline{x} = i^*x, \overline{y} = i^*y$ である．上半円周 $U = \{(a, b) \in S^1 \mid b > 0\}$ においては，$\overline{x}$ は局所座標であり，ゆえに $\partial/\partial\overline{x}$ が定義されている．$p \in U$ に対して

$$i_* \left(\left. \frac{\partial}{\partial \overline{x}} \right|_p \right) = \left. \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \overline{y}}{\partial \overline{x}} \frac{\partial}{\partial y} \right) \right|_p$$

を証明せよ．したがって，$i \colon T_pS^1 \to T_p\mathbb{R}^2$ は単射であるが，$\partial/\partial\overline{x}|_p$ は $\partial/\partial x|_p$ と同一視することはできない．

[*2] 本来は終域の接空間の基底 $\left. \frac{\partial}{\partial z} \right|_0$ を掛ける必要があるが，ここでは省略している．

Proof.

$$\begin{aligned} i_*\left(\left.\frac{\partial}{\partial \overline{x}}\right|_p\right) &= \left.\left(\frac{\partial x \circ i}{\partial \overline{x}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y \circ i}{\partial \overline{x}}\frac{\partial}{\partial y}\right)\right|_p \\ &= \left.\left(\frac{\partial \overline{x}}{\partial \overline{x}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \overline{y}}{\partial \overline{x}}\frac{\partial}{\partial y}\right)\right|_p \\ &= \left.\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \overline{y}}{\partial \overline{x}}\frac{\partial}{\partial y}\right)\right|_p \end{aligned}$$

□

(b) $\mathbb{R}^2$ における滑らかな曲線 C について，x の C への制限である $\overline{x}$ が局所座標になるような C のチャート U をとり，(a) の結果を一般化せよ．

Proof. (a) の変形は曲線の方程式に依らない．適切にチャートが取れていれば結果は同様． □

11.3 コンパクトな多様体上の滑らかな写像の臨界点

コンパクトな多様体 N から $\mathbb{R}^m$ への滑らかな写像 f は臨界点をもつことを示せ．

Proof. 第 1 成分への射影 $\pi\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ を用いて，$\pi \circ f\colon N \to \mathbb{R}$ を考える．N はコンパクトで，f と π は連続であるから $\pi \circ f(N)$ はコンパクトで，そのため有界閉集合．よって，$\pi \circ f$ は最大値 (と最小値) をもつ．
$p \in N$ を $\pi \circ f$ の最大値を与える点とし，$(U, x^1, \ldots, x^n)$ を p を含むチャートとする．以下を考える．

$$\begin{aligned} (\pi \circ f)_*\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right) &= \frac{\partial f^1}{\partial x^i}(p) \cdot \left.\frac{\partial}{\partial f^1}\right|_{f(p)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

したがって，$f_*\big(\partial/\partial x^i|_p\big)$ の第 1 成分は全ての i について 0 であり，そのため f_* は p で全射でない．つまり，p は臨界点である． □

別解 1[*3]

Proof. f が臨界点をもたないと仮定すると，f は沈め込み (つまり，適切なチャートを取れば f は射影)．ここで $\pi\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ を第 1 成分への射影とすると，$\pi \circ f\colon N \to \mathbb{R}$ も沈め込みである (つまり，適切なチャートを取れば $\pi \circ f$ は x^1)．しかし，$\pi \circ f(N)$ はコンパクトであるから最大値を持ち，その点で臨界点となってしまう[*4]ため矛盾． □

別解 2[*5]

[*3] Tu 多様体の回答
[*4] 8.10 参照.
[*5] Tu 多様体の別解

Proof. f が臨界点をもたないと仮定すると，f は沈めこみ．系 11.6 より f は開写像，滑らかという仮定も踏まえて同相写像となる．しかし，N はコンパクトであるから $f(N)$ は開なコンパクト集合となるが，$\mathbb{R}^m$ の部分集合でその条件を満たすものは空集合のみで，矛盾する． □

11.4 包含写像の微分

単位球面 S^2 の上半球面においては，

$$u(a,b,c) = a \text{ および } v(a,b,c) = b$$

で与えられる座標写像 $\phi = (u,v)$ がある．ゆえに，半球面上の任意の点 $p = (a,b,c)$ において，偏導関数 $\partial/\partial u|_p, \partial/\partial v|_p$ は S^2 の接ベクトルである．$i \colon S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ を包含写像とし，x, y, z を $\mathbb{R}^3$ の標準座標とする．微分 $i_* \colon T_pS^2 \to T_p\mathbb{R}^3$ は $\partial/\partial u|_p, \partial/\partial v|_p$ を $T_p\mathbb{R}^3$ に写す．したがって，定数 $\alpha^i, \beta^i, \gamma^i$ を用いて

$$\begin{aligned} i_*\left(\left.\frac{\partial}{\partial u}\right|_p\right) &= \alpha^1 \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_p + \beta^1 \left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_p + \gamma^1 \left.\frac{\partial}{\partial z}\right|_p, \\ i_*\left(\left.\frac{\partial}{\partial v}\right|_p\right) &= \alpha^2 \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_p + \beta^2 \left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_p + \gamma^2 \left.\frac{\partial}{\partial z}\right|_p \end{aligned}$$

と書ける．$i = 1, 2$ について，$(\alpha^i, \beta^i, \gamma^i)$ を求めよ．

$$\begin{aligned} i_*\left(\left.\frac{\partial}{\partial u}\right|_p\right) &= \left.\left(\frac{\partial x \circ \phi^{-1}}{\partial u}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y \circ \phi^{-1}}{\partial u}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z \circ \phi^{-1}}{\partial u}\frac{\partial}{\partial z}\right)\right|_p \\ &= \left.\left(\frac{\partial u}{\partial u}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial u}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial \sqrt{1-u^2-v^2}}{\partial u}\frac{\partial}{\partial z}\right)\right|_p \\ &= \left.\left(1 \cdot \frac{\partial}{\partial x} + 0 \cdot \frac{\partial}{\partial y} - \frac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \cdot \frac{\partial}{\partial z}\right)\right|_p \end{aligned}$$

同様に

$$i_*\left(\left.\frac{\partial}{\partial v}\right|_p\right) = \left.\left(0 \cdot \frac{\partial}{\partial x} + 1 \cdot \frac{\partial}{\partial y} - \frac{v}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \cdot \frac{\partial}{\partial z}\right)\right|_p$$

である．よって，

$$\begin{aligned} (\alpha^1, \beta^1, \gamma^1) &= \left(1, 0, -\frac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\right), \\ (\alpha^2, \beta^2, \gamma^2) &= \left(0, 1, -\frac{v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\right). \end{aligned}$$

11.5 コンパクトな多様体の 1 対 1 のはめ込み

N がコンパクトな多様体のとき，1 対 1 のはめ込み $f \colon N \to M$ は埋め込みであることを証明せよ．

Proof. $f(N)$ に部分空間位相を入れたものが f の下で N が同相であることを示せば良い．
連続であることは $V \in \mathcal{O}_{f(N)}$ に対して $f(N) \cap V' = V$ なる $V' \in \mathcal{O}_M$ が存在し，

$$f^{-1}(V) = f^{-1}(f(N) \cap V') = f^{-1}(V') \in \mathcal{O}_N$$

より従う．
開写像であることを示す．多様体の定義にハウスドルフ性が含まれていたことを踏まえると，f はコンパクト空間からハウスドルフ空間への連続写像であるから，閉写像である[*6]．
さて，任意に $U \in \mathcal{O}_N$ を取ると，以下が成り立つ．

$$\begin{aligned} U \in \mathcal{O}_N &\implies N \setminus U \in \mathcal{C}_N \\ &\implies f(N \setminus U) \in \mathcal{C}_M \\ &\implies M \setminus f(N \setminus U) \in \mathcal{O}_M \end{aligned}$$

ここで，$M \setminus f(N \setminus U)$ を V とおくと，$f(U) = f(N) \cap V$ である．よって任意の U に対して $f(U) = f(N) \cap V$ なる $V \in \mathcal{O}_M$ が存在し，これはすなわち $f(U)$ が $f(N)$ の部分空間位相に関して開であることを意味する．
以上より $f\colon N \to f(N)$ は $f(N)$ の部分空間位相に関して同相写像であり，したがって f は埋め込みである． □

11.6 $SLn, \mathbb{R}$ **における乗法写像**

$f\colon \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ を行列式写像 $f(A) = \det A = \det[a_{ij}]$ とする．$A \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ に対して，偏導関数 $\partial f/\partial a_{kl}(A)$ が 0 でないような (k,l) が少なくとも 1 つ存在する．補題 9.10 と陰関数定理を用いて，次を証明せよ．

(a) $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ における A の近傍で，$(i,j) \neq (k,l)$ なる a_{ij} たちが座標系をなし，a_{kl} はそれ以外の成分 $a_{ij}, (i,j) \neq (k,l)$ に関する C^∞ 級関数であるようなものが存在する．

Proof. $g = f - 1$ とおけば，$\mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) = g^{-1}(0)$ である．$\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ のチャートとして $(\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}), a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nn})$ を取ることができ，$\partial g/\partial a_{kl}(A)$ が 0 でないような (k,l) を取れる．補題 9.10 より，A のある近傍において a_{kl} を g で置換して $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ に適合する $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ のチャート $(U, g, a_{11}, \ldots, a_{nn})$ が得られる．この $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ への制限 $(U \cap \mathrm{SL}(n,\mathbb{R}), a_{11}, \ldots, a_{nn})$ は $(i,j) \neq (k,l)$ なる a_{ij} たちが座標系をなす $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ のチャートである．さらに，陰関数定理より $U' \subseteq U \cap \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ なる A の近傍 U' において

$$g(a_{11}, \ldots, a_{nn}) = 0 \iff a_{kl} = h(\{a_{ij}\}_{(i,j) \neq (k,l)})$$

となる C^∞ 級関数 h が存在する．この U' が求める近傍である． □

[*6] コンパクト空間の閉部分集合はコンパクトで，コンパクト空間の連続写像による像はコンパクトとなり，ハウスドルフ空間のコンパクト部分集合は閉集合であるため．

（b）乗法写像

$$\overline{\mu}\colon \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})\times\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})\to\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$$

は C^∞ 級である．

Proof. (a) のチャート及び関数 h を取ると，成分ごとに C^∞ 級関数であることが明らか．

丁寧に述べれば,$\overline{\mu}$ は $j\colon \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})\to\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ と $\mu\colon \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})\times\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})\to\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ とを用いて

$$\overline{\mu}=j^{-1}\circ\mu\circ(j\times j)$$

と書けて，j,j^{-1} が C^∞ 級であることが (a) より従い，μ も C^∞ 級であるから，合成も C^∞ 級であると言える． □

11.7 誘導位相と部分空間位相

N と M を滑らかな多様体とし，$f\colon N\to M$ を 1 対 1 のはめ込みとする．像 $f(N)$ には次の 2 種類の位相を与えることができる．

（a）誘導位相．集合 $V\subset f(N)$ が開集合であるための必要十分条件は，$f^{-1}(V)$ が N の開集合となることである．

（b）部分空間位相．集合 $V\subset f(N)$ が開集合であるための必要十分条件は，$V=U\cap f(N)$ となる M の開集合 U が存在することである．

誘導位相が部分空間位相より細かいこと，すなわち，誘導位相がより多くの開集合をもつことを証明せよ．

Proof. 部分空間位相の開集合 V を取ると，誘導位相でも必ず開集合となることを示せば良い．

$V=U\cap f(N)$ なる $U\in\mathcal{O}_M$ が存在するとする．f の連続性より，$f^{-1}(U)\in\mathcal{O}_N$ である．

ここで，$f^{-1}(U)=f^{-1}(U\cap f(N))=f^{-1}(V)$ であるから，$f^{-1}(V)\in\mathcal{O}_N$ となり，V は誘導位相に関しても開集合である． □