

Решение уравнения Рейнольдса в рамках теории газовой смазки методом конечных элементов

Докладчик: Пиневич В. Г.

Научный руководитель: Селиванов А. В.

группа ФН2-71Б

15 марта 2024 г.



Постановка задачи

Уравнение Рейнольдса

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\mu U \frac{\partial h}{\partial x}$$

Граничные условия

U — скорость в направлении x ,
 p_v — повышенное давление,
 p_n — пониженное давление

Описание величин

$h = h(x)$ — толщина слоя,
 $p = p(x, z)$ — давление,
 μ — коэффициент вязкости

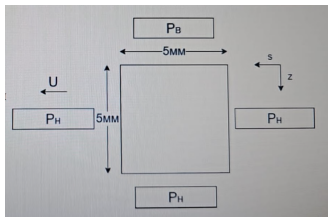


Рис. Схема области решения задачи

Вывод уравнения Рейнольдса

Проекции скорости

u, v, w – проекции скорости на осях x, y, z соответственно

Условие несжимаемости жидкости

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Силы трения в точке

$$\begin{cases} p_{yz} = p_{zy} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), \\ p_{zx} = p_{xz} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right), \\ p_{xy} = p_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \end{cases}$$

Давление в точке

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial p}{\partial y} = \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial p}{\partial z} = \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right). \end{cases}$$

Изменения скоростей u и ω со при заданном значении y для всех изменений x и z могут рассматриваться как чрезмерно малые, поэтому примем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = 0, \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} = 0.$$

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial p}{\partial z} = \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_{yz} = p_{xy} = \mu \frac{\partial \omega}{\partial y}, \\ p_{zx} = p_{xz} = 0, \\ p_{xy} = p_{yx} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}. \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0.$$

Для $y = 0$

$$u = U_0, \nu = 0, \omega = 0.$$

Для $y = h$

$$u = U_1, \nu = U_1 - U_1 \frac{\partial h}{\partial h}, \omega = 0.$$

Система давлений после интегрирования

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (y - h) y + U_0 \frac{h-y}{h} + U_1 \frac{y}{h}, \\ \omega = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} (y - h) y. \end{cases}$$

Система сил трений после интегрирования

$$\begin{cases} p_{yz} = p_{zy} = \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial z} (2y - h), \\ p_{xy} = p_{yx} = \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} (2y - h) + \mu \frac{U_1 - U_0}{h}. \end{cases}$$

$$\frac{\partial \nu}{\partial y} = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial x} (y-x)y \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial p}{\partial z} (y-h)h \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(U_0 \frac{h-y}{h} + U_1 \frac{y}{h} \right).$$

Интегрируем это уравнение в пределах от $y = 0$ до $y = h$.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\mu \left((U_0 - U_1) \frac{\partial h}{\partial x} \right) + 2V_1.$$

$2V_1$ используется для учёта движений одной из стенок зазора, меняющих значение функции. Если пренебречь этим, и обозначить $U_0 - U_1$ как U , то получим искомое уравнение

Решение уравнения Рейнольдса с помощью слабой формы Галеркина

Функции формы

$$\begin{cases} N_1 = 1 - \frac{x}{l} - \frac{z}{h} + \frac{xz}{lh}, \\ N_2 = \frac{x}{l} - \frac{xz}{lh}, \\ N_3 = \frac{xz}{lh}, \\ N_4 = \frac{z}{h} - \frac{xz}{lh}. \end{cases}$$

Входные данные

$$\begin{cases} h = 0.0001 \text{ м}, \\ \text{verticalLength} = 0.005 \text{ м}, \\ \text{horizontalLength} = 0.005 \text{ м}, \\ \mu = 8.90 * 10^{-4} \text{ Па * с}, \\ U = 10 \text{ м/с}, \\ p_H = 100 \text{ кПа}, \\ p_B = 150 \text{ кПа}, \end{cases}$$

Аппроксимирующая функция

$$\phi = c_0 N_1 + c_1 N_2 + c_2 N_3 + c_3 N_4.$$

Решение на сетке 5 на 5

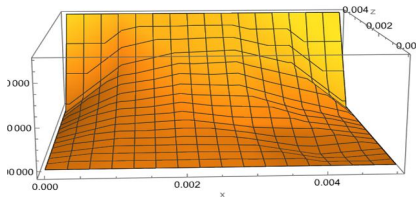


Рис. График решения уравнения Рейнольдса для $h = 0.0001$ м на сетке 5 на 5 элементов

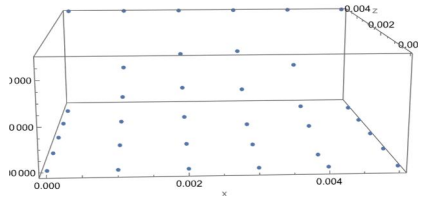


Рис. График значений узлов решения уравнения Рейнольдса для $h = 0.0001$ м на сетке 5 на 5 элементов

Решение на сетке 10 на 10

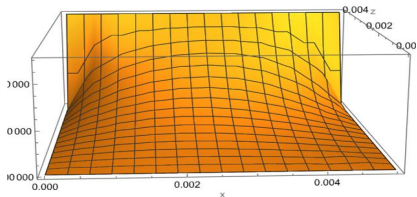


Рис. График решения уравнения Рейнольдса для $h = 0.0001$ м на сетке 10 на 10 элементов

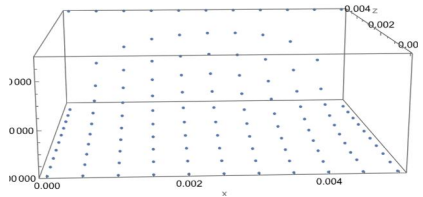


Рис. График значений узлов решения уравнения Рейнольдса для $h = 0.0001$ м на сетке 10 на 10 элементов

Сравнение решения с Wolfram Mathematica

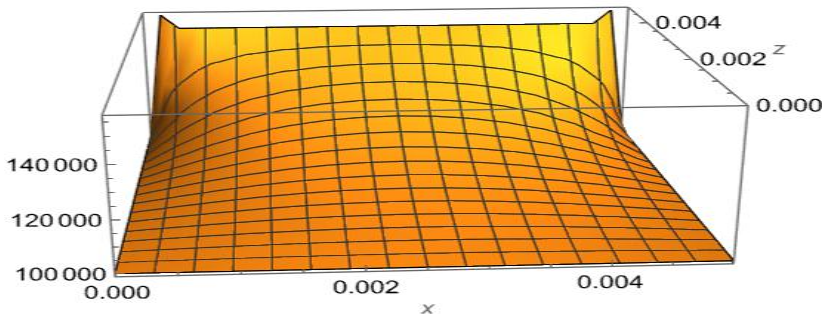


Рис. График решения уравнения Рейнольдса для $h = 0.0001$ м полученный с помощью Wolfram Mathematica

Размерность сетки	Разность, Па	Погрешность, %
5 на 5	4612	4.51
10 на 10	1538	1.38
20 на 20	1290	1.02

В работе представлен вывод уравнения Рейнольдса для установившегося течения в газовом смазочном слое и методика решения уравнения Рейнольдса с помощью метода конечных элементов. В ходе работы получены следующие результаты:

- 1 Создана программная реализация метода конечного элемента для решение уравнения Рейнольдса
- 2 Полученные значения решения уравнения Рейнольдса были сравнены с результатами решения полученного с помощью функции NDSolve в Wolfram Mathematica
- 3 В результате сравнения для сетки 5 на 5 погрешность равна 4.51 %, а для сетки 20 на 20 – 1.02 %.