Кручение стержня прямоугольного сечения

Докладчик: Пиневич В. Г.
Научный руководитель: Котович А. В.

группа ФН2-51Б

28 января 2023 г.

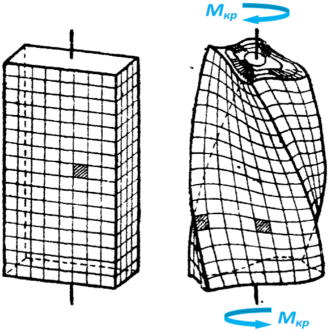
Постановка задачи

‘

Функция кручения

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = -2G\theta$$

Сравнить два решения задачи о кручении стержня прямоугольного сечения, полученных энергетическим методом и методом Ритца. Выяснить зависимости точности решения в обоих случаях от числа членов ряда и сравнить полученные результаты



Требуется решить уравнение

$$Au = f, f \in H$$

Энергетическое произведение

$$[u, v] = (Au, v)$$

Решение сводится к поиску минимума функционала

$$F(u) = (Au, u) - 2(u, f)$$

Решение можно представить в виде

$$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \omega_n)\omega_n$$

Метод Ритца

Для вычисления коэффициентов a_i

$$F = -\int\limits_0^a \int\limits_0^b \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 - 2G\theta\psi \right) dxdy$$

Для получения минимума F

$$\frac{\partial F(u_n)}{\partial a_i} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

Ищем решение в виде

$$\psi_n = \varphi_0 + a_1\varphi_1 + \ldots + a_n\varphi_n$$

Задача

Условие

Рассмотрим задачу о кручении стержня, основание которого представляет собой прямоугольник $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$.

Функция кручения $\psi(x, y)$ удовлетворяет условию $-\Delta\psi = 2G\theta$.

Функция $\psi(x, y)$ обращается в нуль на сторонах прямоугольника $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$.

Решение энергетическим методом

Функция кручения

$$\psi(x,y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} (2G\theta, \psi_{mn})\, \psi_{mn}(x,y)$$

$$(2G\theta, \psi_{mn}) = \frac{4G\theta}{\pi} \int_0^a \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) dx \int_0^b \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy =$$

$$= \frac{4abG\theta}{\pi^3 mn} \sqrt{\frac{ab}{b^2 m^2 + a^2 n^2}}$$

Итоговое выражение

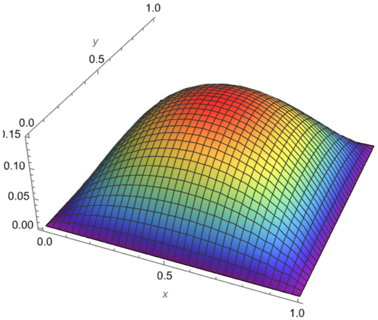
$$\psi(x,y) = \frac{32a^2 b^2 G\theta}{\pi^4} \sum_{m,n=1,3,5,\dots} \frac{\sin\dfrac{m\pi x}{a}\ \sin\dfrac{n\pi y}{b}}{mn(b^2 m^2 + a^2 n^2)}$$

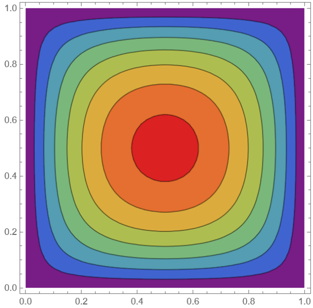
Значения функции кручения в середине прямоугольника

$$\psi\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = 0.144G\theta, \text{ при } n,m = 1,3,$$

$$\psi\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = 0.147G\theta, \text{ при } n,m = 1,3,\ldots 21,$$

$$\psi\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = 0.147G\theta, \text{ при } n,m = 1,3,\ldots 209.$$





Решение методом Ритца

Полагая для упрощения $\psi = 2G\theta u$, получим задачу в виде

$$\begin{cases} -\Delta u = 1, \\ \psi(a, y) = \psi(x, b) = 0, \\ \psi(0, y) = \psi(x, 0) = 0. \end{cases}$$

$$\psi(x, y) = x(x-a)y(y-b)\left(a_0 + a_1(x+y) + a_2\left(x^2 + a_3 y^2\right) + \ldots\right)$$

Первый порядок точности

$$\psi_1(x, y) = a_0 x(x-a)y(y-b)$$

Второй порядок точности

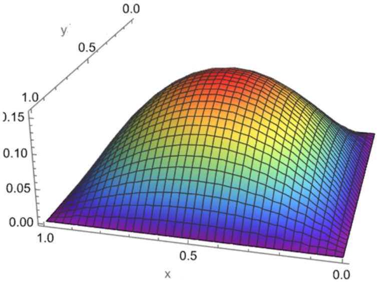
$$\psi_2(x, y) = x(x-a)y(y-b)\left(a_0 + a_1(x+y) + a_2\left(x^2 + a_3 y^2\right)\right)$$

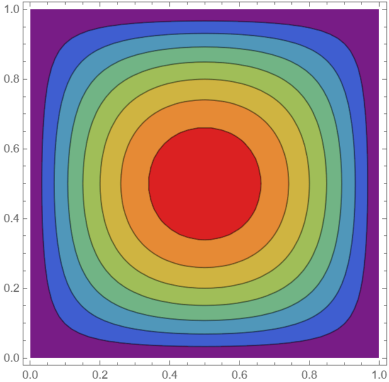
Первый порядок точности

$$\psi_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \approx 0.156G\theta$$

Второй порядок точности

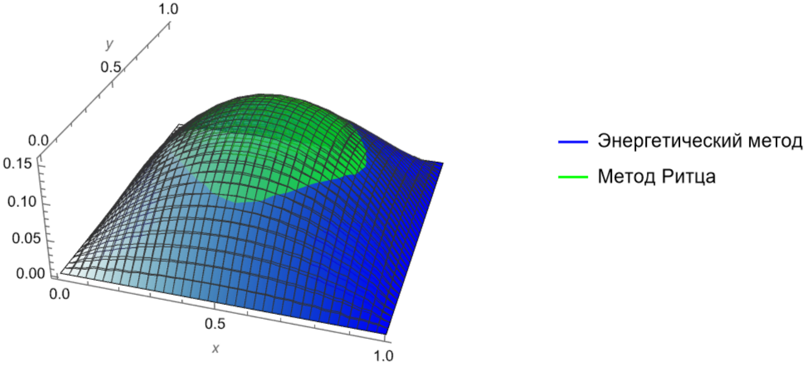
$$\psi_2\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \approx 0.146G\theta$$





Сравнение функций кручения

$\psi\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = 0.147G\theta$ для энергетического метода и $\psi\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = 0.146G\theta$ для метода Ритца, они отличаются на 1%. При этом при малой точности вычисления данные методы дают результат $0.144G$ и $0.156G$ соответственно. Точным решением является $\psi\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = 0.147G\theta$, из чего мы можем сделать вывод, что метод энергий более точный в рассматриваемом случае



Сравнение крутящих моментов

Крутящий момент определяется формулой

$$M = 2\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\varphi dxdy$$

Энергетический метод

$$M_{Э} = \frac{256G\theta a^4 b^4}{\pi^6}\sum_{m,n=1,3,5,\ldots}\frac{1}{(b^2m^2+a^2n^2)m^2n^2} = 0.140G\theta a^4$$

1-е приближение м. Ритца

$$M_{P_1} = 0.139a^4$$

2-е приближение м. Ритца

$$M_{P_2} = 0.140a^4$$

Результаты

В ходе работы получены следующие результаты:

1. С помощью рассмотренных методов была решена задача кручения прямоугольного стержня, их результаты оказались идентичны с точностью до второго знака.
2. Оба метода позволяют вычислить крутящий момент с точностью до третьего знака.
3. Энергетический метод позволяет получить ответ несколько точнее и быстрее, но каждый раз требует вычисления тригонометрического ряда.
4. Метод Ритца дает возможность получить функцию кручения в виде многочлена и получать ответ с другими параметрами задачи с меньшим количеством вычислений, что может быть полезно при большом объеме вычислений.