

Решение жесткой системы дифференциальных уравнений Робертсона

Докладчик: Пиневич В. Г.

Научный руководитель: Котович А. В.

группа ФН2-61Б

7 июня 2023 г.



Задача Робертсона

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -0,04y_1 + 10^4 y_2 y_3, \\ \dot{y}_2 = 0,04y_1 - 10^4 y_2 y_3 - 3 * 10^7 y_2^2, \\ \dot{y}_3 = 3 * 10^7 y_2^2. \end{cases}$$

Требуется найти решение задачи Робертсона, построить фазовые траектории решений, полученных с помощью рассмотренных методов.

Начальные условия

$$\begin{cases} y_1(0) = 1, \\ y_2(0) = 0, \\ y_3(0) = 0. \end{cases}$$

Интервал интегрирования

$$t \in [0; T], T = 40, 100$$

Расчетная формула

$$y_{n+2} = y_{n+1} + h \left(\frac{5}{12} f(t_{n+2}, y_{n+2}) + \frac{8}{12} f(t_{n+1}, y_{n+1}) - \frac{1}{12} f(t_n, y_n) \right)$$

Шаг	Разность	Порядок
0.1	1.66E-07	3.00
0.05	2.08E-08	3.00
0.025	2.60E-09	3.00
0.0125	3.25E-10	

Таблица Порядки аппроксимации
двухшажного метода
Адамса-Муолтона

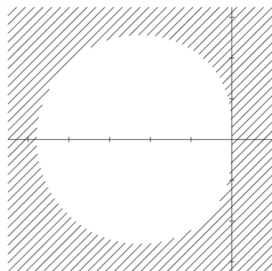


Рис. Область устойчивости
двухшажного метода
Адамса-Муолтона

Расчетная формула для метода BDF-2

$$y_{n+2} - \frac{4}{3}y_{n+1} + \frac{1}{3}y_n = \frac{2}{3}hf(t_{n+2}, y_{n+2})$$

Расчетная формула для метода BDF-4

$$y_{n+4} - \frac{48}{25}y_{n+3} + \frac{36}{25}y_{n+2} - \frac{16}{25}y_{n+1} + \frac{3}{25}y_n = \frac{12}{25}hf(t_{n+4}, y_{n+4})$$

Шаг	Разность	Порядок
0.1	2.57E-06	1.95
0.05	7.36E-07	1.91
0.025	1.96E-07	1.96
0.0125	5.04E-08	

Таблица Порядки аппроксимации
метода BDF-2

Шаг	Разность	Порядок
0.1	1.27E-10	3.94
0.05	1.02E-11	3.99
0.025	7.06E-13	3.93
0.0125	4.64E-14	

Таблица Порядки аппроксимации
метода BDF-4

Области устойчивости методов BDF

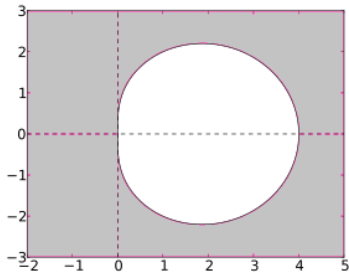


Рис. Область устойчивости метода BDF-2

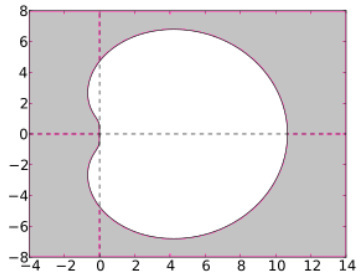


Рис. Область устойчивости метода BDF-4

Фазовые траектории

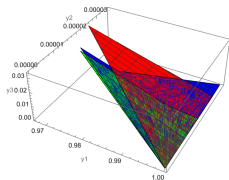


Рис. Фазовые траектории
при $T = 40$, $h = 10^{-3}$

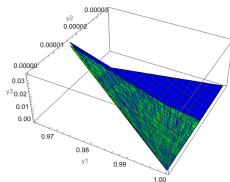


Рис. Фазовые траектории
при $T = 100$, $h = 10^{-3}$

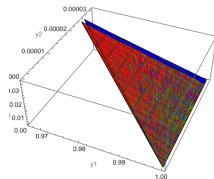


Рис. Фазовые траектории
при $T = 40$, $h = 10^{-4}$

- метод BDF-2
- метод BDF-4
- метод Адамса-Моульсона

Графики зависимости y_1 от t

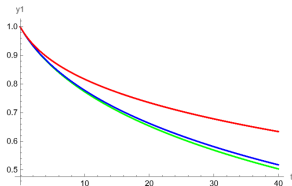


Рис. Зависимость y_1 от t
при $T = 40$, $h = 10^{-3}$

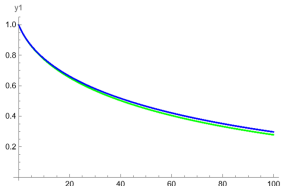


Рис. Зависимость y_1 от t
при $T = 100$, $h = 10^{-3}$

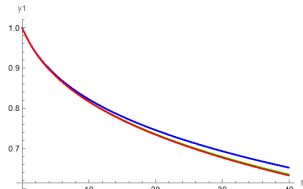


Рис. Зависимость y_1 от t
при $T = 40$, $h = 10^{-4}$

- метод BDF-2
- метод BDF-4
- метод Адамса-Моульона

Графики зависимости y_2 от t

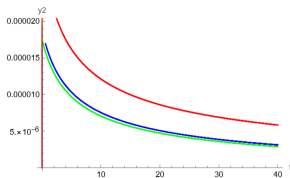


Рис. Зависимость y_2 от t
при $T = 40$, $h = 10^{-3}$

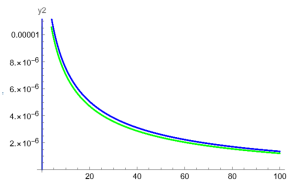


Рис. Зависимость y_2 от t
при $T = 100$, $h = 10^{-3}$

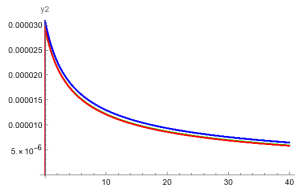


Рис. Зависимость y_2 от t
при $T = 40$, $h = 10^{-4}$

- метод BDF-2
- метод BDF-4
- метод Адамса-Моульона

Графики зависимости y_3 от t

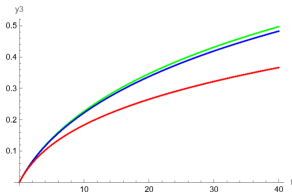


Рис. Зависимость y_3 от t
при $T = 40$, $h = 10^{-3}$

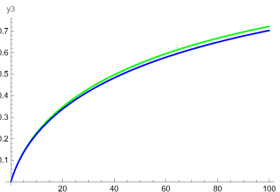


Рис. Зависимость y_3 от t
при $T = 100$, $h = 10^{-3}$

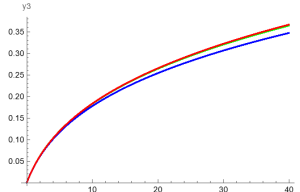


Рис. Зависимость y_3 от t
при $T = 40$, $h = 10^{-4}$

- метод BDF-2
- метод BDF-4
- метод Адамса–Моульона

В ходе работы получены следующие результаты:

- 1 Метод Адамса-Моултона является плохим выбором при решении жестких задач, так как он не является абсолютно устойчивым.
- 2 В результатах расчетов решение для рассматриваемой задачи методом Адамса-Моултона удалось получить лишь на интервале $[0; 40]$.
- 3 Методы BDF-2 и BDF-4 позволили получить решение на поставленную задачу как на интервале $[0; 40]$, так и на интервале $[0; 100]$.