

Аэроупругая модель сегментного надроторного кольца

Докладчик: Пиневич В. Г.

Научный руководитель: Селиванов А. В.

группа ФН2-81Б

26 июня 2024 г.



Постановка задачи

Данная работа посвящена получению пригодной к использованию в практических задачах формы уравнения Рейнольдса, решению его методом конечных элементов и поиску равновесного состояния для динамической системы дополненной пружиной как ограничителем сверху.

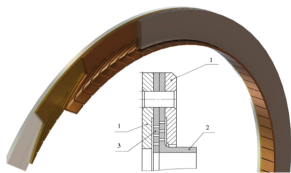


Рис. Схема бесконтактного пальчикового уплотнения: 1 – корпусные диски; 2 и 3 – задняя и передняя уплотняющие пластины

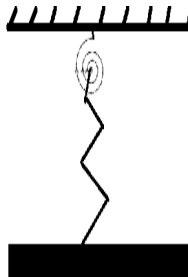


Рис. Схема модели пластины с пружиной

Получение уравнения Рейнольдса

Гидродинамическое давление p в точках x, y, z

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial p}{\partial y} = \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial p}{\partial z} = \mu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} \right) \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} = \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Проекции} \\ \text{скорости} \\ u, v, \omega \text{ на} \\ \text{оси } x, y, z. \end{array}$$

Силы трения $p_{xy}, p_{xz}, p_{yx}, p_{yz}, p_{zx}, p_{zy}$

$$\begin{cases} p_{yz} = p_{zy} = \mu \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ p_{zx} = p_{xz} = \mu \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ p_{xy} = p_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{cases} \quad \begin{cases} p_{yz} = p_{xy} = \mu \frac{\partial \omega}{\partial y} \\ p_{zx} = p_{xz} = 0 \\ p_{xy} = p_{yx} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

Условие несжимаемости жидкости, выраженное уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0.$$

Уравнение Рейнольдса

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\mu U \frac{\partial h}{\partial x}$$

Граничные условия

U — скорость в направлении x ,
 $p_{\text{в}}$ — повышенное давление,
 $p_{\text{н}}$ — пониженное давление

Описание величин

$h = h(x)$ — толщина слоя,
 $p = p(x, z)$ — давление,
 μ — коэффициент вязкости

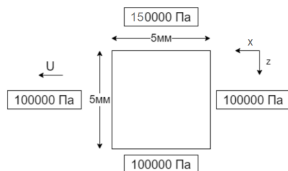


Рис. Схема области решения задачи

Решение уравнения Рейнольдса с помощью слабой формы Галеркина

Функции формы

$$\begin{cases} N_1 = 1 - \frac{x}{l} - \frac{z}{h} + \frac{xz}{lh}, \\ N_2 = \frac{x}{l} - \frac{xz}{lh}, \\ N_3 = \frac{xz}{lh}, \\ N_4 = \frac{z}{h} - \frac{xz}{lh} \end{cases}$$

Аппроксимирующая функция

$$\phi = c_0 N_1 + c_1 N_2 + c_2 N_3 + c_3 N_4$$

Приведение к форме Галеркина

$$\int_{S_i} \left(\frac{\partial [N]^T}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial [N]^T}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) - [N]^T 6\mu U \frac{\partial h}{\partial x} \right) dx dz = 0$$

Сравнение постоянного и зазора с положительным коэффициентом

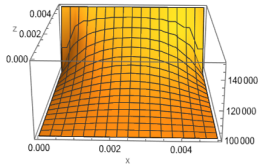


Рис. Решение для
 $h = 0.001$ м

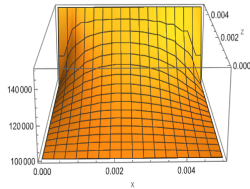


Рис. Решения для
 $h = 0.15x + 0.001$ м

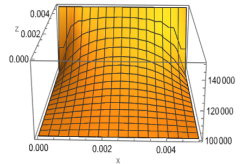


Рис. Решение для
 $h = -0.15x + 0.001$ м

Сравнение результатов при постоянном давлении на границе

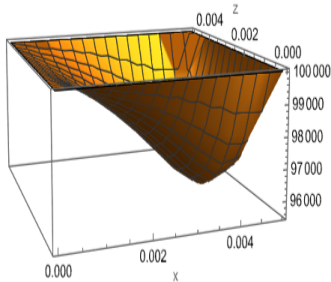


Рис. График для
 $h = -0.15x + 0.001$ м с
одинаковыми ГУ

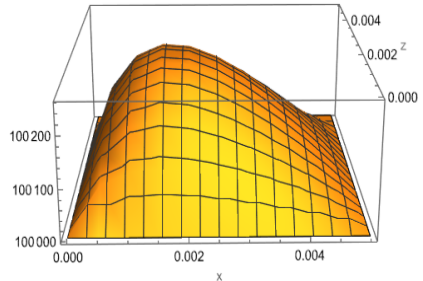


Рис. График для $h = 0.15x + 0.001$
м с одинаковыми ГУ

Верификация подстановкой правой части

Проверочная функция

$$f(x, z) = -2 \frac{\pi}{0.005} \sin\left(\frac{\pi z}{0.005}\right) x (x - 0.005)$$

Правая часть

$$g = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

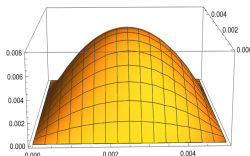


Рис. Проверочная функция

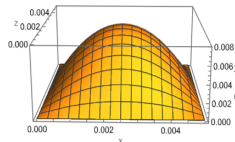


Рис. Результат на сетке 20 на 20

Размерность сетки	Разность, Па	Погрешность, %
5 на 5	0.0002	3.3
10 на 10	0.0001	0.8
20 на 20	0.0000	0.2

Результаты верификации подстановкой правой части

Проверочная функция

$$f(x, z) = -2 \frac{\pi z}{0.005} \sin \frac{2\pi z}{0.005} \sin \frac{4\pi x}{0.005}$$

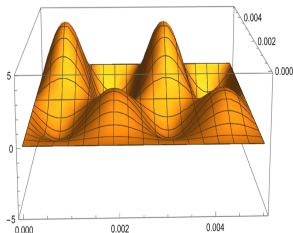


Рис. Проверочная функция

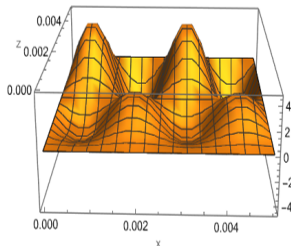


Рис. Решение на сетке 20 на 20

Размерность сетки	Разность, Па	Погрешность, %
5 на 5	0.969	21.31
10 на 10	0.260	5.7
20 на 20	0.065	1.4

Поиск положения равновесия

Уравнение Лагранжа

$$\begin{cases} m\ddot{x} + kx + F_{fr} = F \\ I\ddot{\psi} + c\psi = M \end{cases}$$

Поиск положения равновесия

$$\begin{cases} kx = F \\ c\psi = M \end{cases}$$

Давление

$$s_i = p_i - p_{ext}$$

Сила

$$F_i = \int_{S_i} (N_1 s_1 + N_2 s_2 + N_3 s_3 + N_4 s_4) dx dz$$

Момент

$$M_i = \int_{S_i} (N_1 s_1 + N_2 s_2 + N_3 s_3 + N_4 s_4) \sqrt{x^2 + y^2} dx dz$$

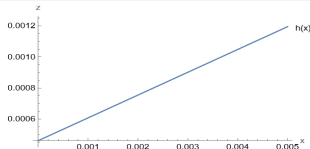


Рис. Положение равновесия при $h(x) = 0.147x + 0.00046$

Устойчивость положения равновесия

Давление

$$F = F_0 + a_1 l + a_2 \psi$$

Замена l

$$l = l_c + l_c \exp w_1 t$$

Характ-ое уравнение для l

$$a_1 w_1^2 + a_2 w_1 + a_3 = 0$$

Общее характ-ое уравнение

$$w^2 + 256.41w + 0.12 = 0.$$

Давление

$$M = M_0 + b_1 l + b_2 \psi$$

Замена ψ

$$\psi = \psi_c + \psi_c \exp w_2 t$$








Характ-ое уравнение для ψ

$$b_1 w_2^2 + b_2 w_2 + b_3 = 0$$

Корни уравнения

$$\begin{cases} w_1 = -256, \\ w_2 = -0.00047. \end{cases}$$

- 1 Было показано, что с помощью полученной модели решения уравнения Рейнольдса возможно получить положение оценки положения равновесия динамической системы в первом инженерном приближении и доказать ее асимптотическую устойчивость в данном положении
- 2 Представлены расчеты уравнения Рейнольдса для различных функций зазора. Показано отличие смещения пластины при различных зазорах и граничных условиях.
- 3 Полученная математическая модель может быть расширена для учета неравномерного распределения давления на сегменты кольца при не симметричного вращении ротора относительно центра кольца.

-  Петров Н.П. Гидродинамическая теория смазки, М.: из-во академии наук СССР, 1948. — 558 с.
-  Слезкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости, М.: из-во техно-теоретической литературы, 1955. — 521 с.
-  Селегринд Л. Применение метода конечных элементов, М.: из-во МИР, 1979. — 195 с.
-  Seshu P. Textbook of Finite Element Analysis, New Dehli: PHI Learning Private Limited, 2012. — 340 с.
-  Григорьев А.Ю., Григорьев К.А., Малявко Д.П. Колебания и виброактивность элементов машин: Учеб. пособие. СПб.: Университет ИТМО, 2016. — 136 с.
-  Селиванов А.В., Дзева И.Ю., Многодисциплинарная математическая модель пальчикового уплотнения Уфа:, 2011 — 17 с.
-  Феодосьев В.И. Сопротивление материалов: Учеб. для вузов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. — 592 с.