Решение уравнения Рейнольдса в рамках теории газовой смазки методом конечных элементов

Докладчик: Пиневич В. Г.
Научный руководитель: Селиванов А. В.

группа ФН2-71Б

15 марта 2024 г.

Постановка задачи

Уравнение Рейнольдса

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial z}\right)=6\mu U\frac{\partial h}{\partial x}$$

Граничные условия

U — скорость в направлении x,
$p_{\text{в}}$ — повышенное давление,
$p_{\text{н}}$ — пониженное давление

Описание величин

$h = h(x)$ — толщина слоя,
$p = p(x, z)$ — давление,
μ — коэффициент вязкости

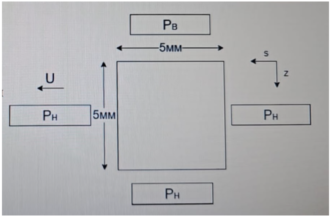

Рис. Схема области решения задачи

Вывод уравнения Рейнольдса

Проекции скорости

u, ν, ω – проекции скорости скорости на осях x, y, z соответственно

Условие несжимаемости жидкости

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \nu}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0$$

Силы трения в точке

$$\begin{cases} p_{yz} = p_{zy} = \mu\left(\frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial \nu}{\partial z}\right), \\ p_{zx} = p_{xz} = \mu\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right), \\ p_{xy} = p_{yx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \nu}{\partial x}\right) \end{cases}$$

Давление в точке

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right), \\ \frac{\partial p}{\partial y} = \mu\left(\frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial z^2}\right), \\ \frac{\partial p}{\partial z} = \mu\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2}\right) \end{cases}$$

Изменения скоростей u и ω со при заданном значении y для всех изменений x и z могут рассматриваться как чрезмерно малые, поэтому примем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = 0, \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} = 0$$

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial p}{\partial z} = \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_{yz} = p_{xy} = \mu \frac{\partial \omega}{\partial y}, \\ p_{zx} = p_{xz} = 0, \\ p_{xy} = p_{yx} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \nu}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0$$

Для $y = 0$

$$u = U_0, \nu = 0, \omega = 0$$

Для $y = h$

$$u = U_1, \nu = U_1 - U_1 \frac{\partial h}{\partial h}, \omega = 0$$

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\left(y - h\right)y + U_0\frac{h-y}{h} + U_1\frac{y}{h}, \\ \omega = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial z}(y - h)y \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_{yz} = p_{zy} = \frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial z}\left(2y - h\right), \\ p_{xy} = p_{yz} = \frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}\left(2y - h\right) + \mu\frac{U_1 - U_0}{h} \end{cases}$$

$$\frac{\partial \nu}{\partial y} = -\frac{1}{2\mu}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial p}{\partial x}(y-x)y\right) +$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial p}{\partial z}(y-h)h\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(U_0\frac{h-y}{h} + U_1\frac{y}{h}\right)$$

Интегрируем это уравнение в пределах от $y = 0$ до $y = h$.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial z}\right) = 6\mu\left((U_0 - U_1)\frac{\partial h}{\partial x}\right) + 2V_1$$

$2V_1$ используется для учёта движений одной из стенок зазора, меняющих значение функции. Если пренебречь этим, и обозначить $U_0 - U_1$ как U, то получим искомое уравнение

Решение уравнения Рейнольдса с помощью слабой формы Галеркина

Функции формы

$$\begin{cases} N_1 = 1 - \frac{x}{l} - \frac{z}{h} + \frac{xz}{lh}, \\ N_2 = \frac{x}{l} - \frac{xz}{lh}, \\ N_3 = \frac{xz}{lh}, \\ N_4 = \frac{z}{h} - \frac{xz}{lh} \end{cases}$$

Входные данные

$$\begin{cases} h = 0.0001 \text{ м}, \\ verticalLength = 0.005 \text{ м}, \\ horizontalLength = 0.005 \text{ м}, \\ \mu = 8.90 * 10^{-4} \text{ Па} * \text{с}, \\ U = 10 \text{ м/с}, \\ p_{\text{н}} = 100 \text{ кПа}, \\ p_{\text{в}} = 150 \text{ кПа} \end{cases}$$

Аппроксимирующая функция

$$\phi = c_0 N_1 + c_1 N_2 + c_2 N_3 + c_3 N_4$$

Решение на сетке 10 на 10

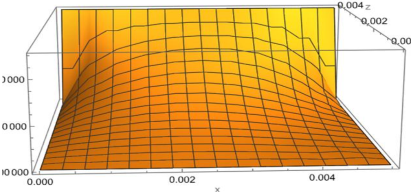

Рис. График решения уравнения Рейнольдса для h = 0.0001 м на сетке 10 на 10 элементов

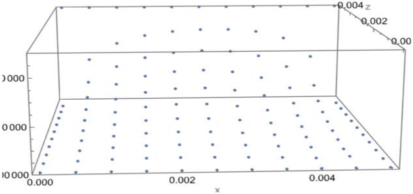

Рис. График значений узлов решения уравнения Рейнольдса для h = 0.0001 м на сетке 10 на 10 элементов

Решение на сетке 20 на 20

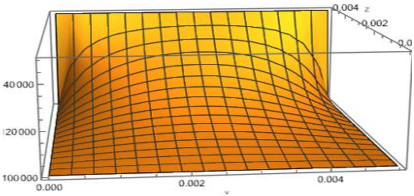

Рис. График решения уравнения Рейнольдса для h = 0.0001 м на сетке 20 на 20 элементов

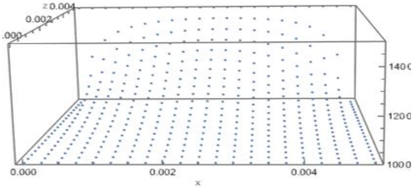

Рис. График значений узлов решения уравнения Рейнольдса для h = 0.0001 м на сетке 20 на 20 элементов

Сравнение решения с Wolfram Mathematica

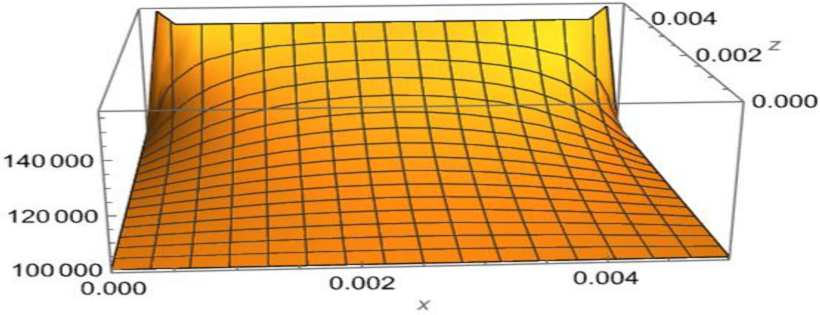

Рис. График решения уравнения Рейнольдса для h = 0.0001 м полученный с помощью Wolfram Mathematica

Размерность сетки	Разность, Па	Погрешность, %
5 на 5	4612	4.51
10 на 10	1538	1.38
20 на 20	1290	1.02

Заключение

В работе представлен вывод уравнения Рейнольдса для установившегося течения в газовом смазочном слое и методика решения уравнения Рейнольдса с помощью метода конечных элементов. В ходе работы получены следующие результаты:

1. Создана программная реализация метода конечного элемента для решение уравнения Рейнольдса
2. Полученные значения решения уравнения Рейнольдса были сравнены с результатами решения, полученного с помощью функции NDSolve в Wolfram Mathematica
3. В результате сравнения для сетки 5 на 5 погрешность равна 4.51 %, а для сетки 20 на 20 – 1.02 %.