



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ _____ Фундаментальные науки

КАФЕДРА _____ Прикладная математика

РАСЧЕТНО-ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА
К КУРСОВОЙ РАБОТЕ
НА ТЕМУ:

*Решение уравнения Рейнольдса
в рамках теории газовой смазки
методом конечных элементов*

Студент _____
ФН2-71Б
(Группа)

(Подпись, дата)

В. Г. Пиневич

(И. О. Фамилия)

Руководитель курсовой работы

(Подпись, дата)

А. В. Селиванов

(И. О. Фамилия)

2024 г.

Оглавление

1. Введение	3
1.1. Постановка задачи	3
2. Вывод уравнения Рейнольдса	3
3. Метод конечных элементов	6
3.1. Методика решения уравнения Рейнольдса с помощью слабой формы Галеркина	7
4. Программная реализация решения уравнения Рейнольдса методом конечных элементов	9
4.1. Построение метода конечных элементов	9
4.2. Сетка 10 на 10 элементов	13
4.3. Сетка 20 на 20 элементов	14
4.4. Сравнение полученного решения с решением Wolfram Mathematica	15
Заключение	16
Список использованных источников	17

1. Введение

Задачи расчёта подшипников газодинамического типа с зазорами разнообразной формы до сих пор остаются весьма актуальными. По сути, они сводятся к изучению газового смазочного слоя в тонком зазоре произвольной формы. Решением таких задач занимается гидродинамическая теория смазки. Этот раздел механики жидкости и газа начал развиваться в конце XIX века вслед за потребностями техники. Начало теоретическому исследованию течений в тонких зазорах положили работы Н. П. Петрова и британского учёного Осборна Рейнольдса, уточнённые и доведённые до возможности практического применения А. Зоммерфельдом, А. Мичелем. Дальнейшие исследования позволили распространить результаты созданной Рейнольдсом теории на газодинамические подшипники. Были даже предприняты успешные попытки получения общего вида уравнения Рейнольдса для смазочного слоя без привязки к конкретной системе координат. Данная работа посвящёна получению пригодной к использованию в практических задачах формы уравнения Рейнольдса и решению его методом конечных элементов.

1.1. Постановка задачи

Задача данной работы — вывести, а затем показать методику решение дифференциального уравнения Рейнольдса методом конечных элементов.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\mu U \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (1)$$

где $h = h(x)$ — толщина слоя, $p = p(x, z)$ — давление, μ — коэффициент вязкости. Граничные условия: U — скорость в направлении x на одной из пластин, p_v — повышенное давление, p_n — пониженное давление.

Уравнения будем рассматривать в квадратной области. Схематичное изображение области и граничных условий изображено на рис. 1.

2. Вывод уравнения Рейнольдса

Гидродинамические уравнения несжимаемой жидкости с внутренним трением могут быть представлены в очень простой форме, если пренебречь силами, пропорциональными массам, равно как и силами инерции.

Обозначая через x, y, z прямоугольные координаты точки, через p — гидродинамическое давление в этой точке,

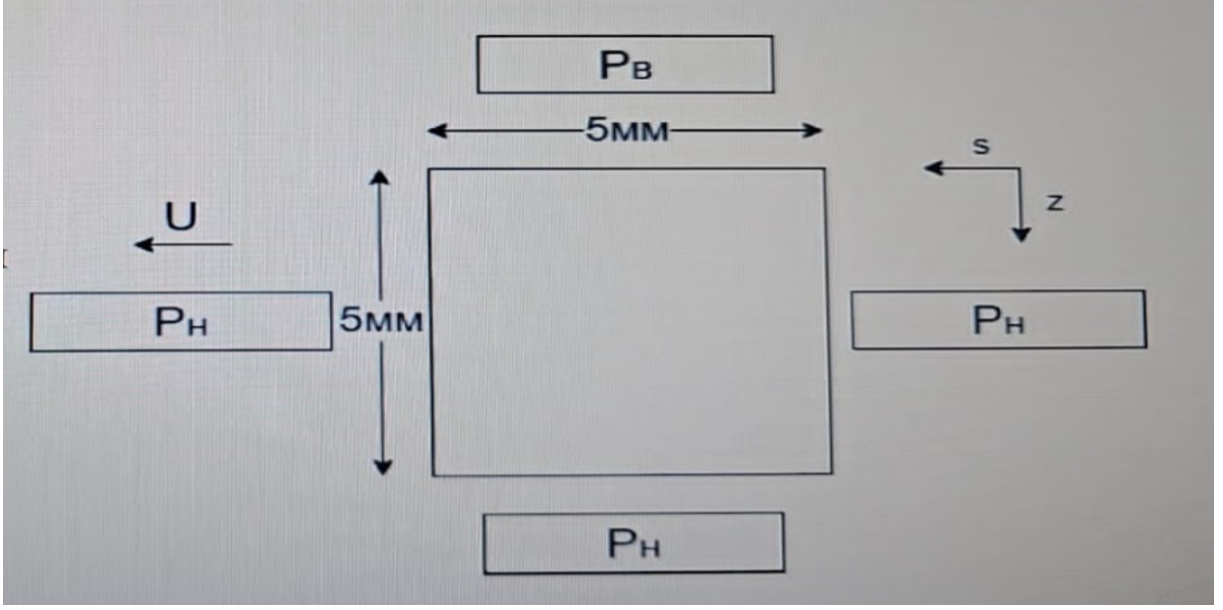


Рис. 1. Схема области решения и граничных условий уравнения Рейнольдса

Силы трения $p_{xy}, p_{xz}, p_{yx}, p_{yz}, p_{zx}, p_{zy}$, перпендикулярные к оси силы, обозначенной первой буквой индекса и параллельные оси силы, обозначенной второй буквой индекса.

Обозначим проекции скорости на осях x, y, z соответственно u, v, w .

Введем μ как коэффициент внутреннего трения жидкости. Тогда можно записать три системы уравнений:

- 1) Система, определяющая гидродинамическое давление в точке x, y, z :

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial p}{\partial y} = \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial p}{\partial z} = \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right). \end{cases} \quad (2)$$

- 2) Система, определяющая силы трения в той же точке:

$$\begin{cases} p_{yz} = p_{zy} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), \\ p_{zx} = p_{xz} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right), \\ p_{xy} = p_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \end{cases} \quad (3)$$

- 3) Условие несжимаемости жидкости, выраженное уравнением:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (4)$$

Примем, что скорость $v = 0$, поскольку она мала по сравнению со скоростями $u = 0, w = 0$.

Изменения скоростей u и ω со при заданном значении y для всех изменений x и z могут рассматриваться как чрезмерно малые, поэтому примем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = 0, \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} = 0.$$

Ограничиваясь приближенным решением, которое можно получить при указанных выше предположениях, уравнения (2), (3) и (4) могут быть приведены к следующей форме.

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial p}{\partial z} = \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}. \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} p_{yz} = p_{xy} = \mu \frac{\partial \omega}{\partial y}, \\ p_{zx} = p_{xz} = 0, \\ p_{xy} = p_{yx} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}. \end{cases} \quad (6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \nu}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0.$$

Для определения давления необходимо интегрировать выражения (5), (6). Для этого определим граничные условия.

Для $y = 0$ имеем

$$\begin{cases} u = U_0, \\ \nu = 0, \\ \omega = 0. \end{cases}$$

Для $y = h$ имеем

$$\begin{cases} u = U_1, \\ \nu = U_1 - U_1 \frac{\partial h}{\partial h}, \\ \omega = 0. \end{cases}$$

Поскольку p не зависит от y , то интегрирование уравнений (5) приводит к уравнениям

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (y - h) y + U_0 \frac{h-y}{h} + U_1 \frac{y}{h}, \\ \omega = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} (y - h) y. \end{cases} \quad (7)$$

Первые производные вторых членов этих уравнений, перенесенные в соответствующие уравнения группы (6), приводят к уравнениям

$$\begin{cases} p_{yz} = p_{zy} = \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial z} (2y - h), \\ p_{xy} = p_{yx} = \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} (2y - h) + \mu \frac{U_1 - U_0}{h}. \end{cases} \quad (8)$$

Если давление p считать независимым от координаты z , то четыре последних уравнения сокращаются до двух: первое из системы (7) и второе из системы (8).

Взяв производные от первого из этих уравнений по x и от второго по z и подставляя это в уравнение (4), находим, что

$$\frac{\partial \nu}{\partial y} = -\frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial x} (y-x)y \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial p}{\partial z} (y-h)h \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(U_0 \frac{h-y}{h} + U_1 \frac{y}{h} \right) \right).$$

Интегрируя это уравнение в пределах от $y = 0$ до $y = h$ и принимая во внимание граничные условия, получаем

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\mu \left((U_0 - U_1) \frac{\partial h}{\partial x} \right) + 2V_1.$$

$2V_1$ используется для учёта движений одной из стенок зазора, меняющих значение функции. Если пренебречь этим, и обозначить $U_0 - U_1$ как U , то получим искомое уравнение (1).

3. Метод конечных элементов

Основная идея метода конечных элементов состоит в том, что любую непрерывную величину, такую как температура, давление и перемещение, можно аппроксимировать дискретной моделью, которая строится на множестве кусочно-непрерывных функций, определенных на конечном числе подобластей. Кусочно-непрерывные функции определяются с помощью значений непрерывной величины в конечном числе точек рассматриваемой области. В общем случае непрерывная величина заранее неизвестна и нужно определить значения этой величины в некоторых внутренних точках области. Дискретную модель, однако, не сложно построить, если сначала предположить, что числовые значения этой величины в каждой внутренней точке области известны. После этого можно перейти к общему случаю. Итак, при построении дискретной модели непрерывной величины поступают следующим образом:

- 1) В рассматриваемой области фиксируется конечное число точек. Эти точки называются узловыми точками или просто узлами.
- 2) Значение непрерывной величины в каждой узловой точке считается переменной, которая должна быть определена.
- 3) Область определения непрерывной величины разбивается на конечное число подобластей, называемых элементами. Эти элементы имеют общие узловые точки и в совокупности аппроксимируют форму области.
- 4) Выбор функций формы и аппроксимирующей функции.

- 5) Построение локальной матрицы.
- 6) Построение глобальной матрицы путем сшивания локальных матриц элементов друг с другом.
- 7) Учет граничных условий путем заменой коэффициентов в полученной матрице или же вектора правых частей.
- 8) Решение системы линейных уравнений для получения решения в узловых точках.

3.1. Методика решения уравнения Рейнольдса с помощью слабой формы Галеркина

Существуют разные подходы к реализации идеи метода конечных элементов. В данной работе рассмотрим методику решения с помощью слабой формы Галеркина. Для разбиения области на элементы требуется выбрать форму элемента. Поскольку рассматриваемая область прямоугольная, то удобно взять элементы прямоугольной формы. Пусть l — горизонтальная длинная области, а h — вертикальная. Тогда функции формы будут иметь следующий вид:

$$\begin{cases} N_1 = 1 - \frac{x}{l} - \frac{z}{h} + \frac{xz}{lh}, \\ N_2 = \frac{x}{l} - \frac{xz}{lh}, \\ N_3 = \frac{xz}{lh}, \\ N_4 = \frac{z}{h} - \frac{xz}{lh}. \end{cases} \quad (9)$$

Аппроксимирующую функцию зададим в виде:

$$\phi = c_0 N_1 + c_1 N_2 + c_2 N_3 + c_3 N_4.$$

Далее будем искать локальную матрицу из выражения:

$$\int_{S_i} [N] \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) - 6\mu U \frac{\partial h}{\partial x} \right) dx dz = 0.$$

S_i — область, содержащая элемент. Подставим аппроксимирующую функцию ϕ вместо p .

$$\int_{S_i} [N] \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) - 6\mu U \frac{\partial h}{\partial x} \right) dx dz = 0.$$

Далее рассмотрим сумму интегралов:

$$\int_{S_i} [N] \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right) dx dz + \int_{S_i} [N] \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right) dx dz - \int_{S_i} [N] \left(6\mu U \frac{\partial h}{\partial x} \right) dx dz = 0.$$

Будем вычислять интегралы в которых участвует функция ϕ по частям:

$$\int_{S_i} [N] \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right) dx dz = [N] h^3 \frac{d\phi}{dx} \Big|_{S_i} - \int_{S_i} \frac{d[N]}{dx} \left(h^3 \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx dz,$$

$$\int_{S_i} [N] \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right) dx dz = [N] h^3 \frac{d\phi}{dz} \Big|_{S_i} - \int_{S_i} \frac{d[N]}{dz} \left(h^3 \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) dx dz.$$

Суть такого подхода в том, что мы снижаем требования по дифференцируемости со второго до первого порядка.

После вычислений этих интегралов и их сложении можно получить матричное уравнение в локальных координатах относительно ϕ следующего вида:

$$W_i \phi = F_i, \tag{10}$$

где F_i - правая часть, полученная из интеграла, не содержащего ϕ :

$$F_i = \int_{S_i} [N] \left(6\mu U \frac{\partial h}{\partial x} \right) dx dz.$$

Для вычисления глобальной матрицы требуется для каждого элемента подставить в вырождение (10) для локальных координат узловые границы области и вычислить их значения. Далее нужно объединить все матрицы полученные в одну глобальную.

После объединения получаем матричное уравнение

$$W\phi = F,$$

Далее заменяем значения в матрице F и матрице W так, чтобы решения совпадали с граничными условиями. После подстановки граничных условий решением уравнения будут являться искомые значения давления p в узловых точках.

4. Программная реализация решения уравнения Рейнольдса методом конечных элементов

Рассмотрим задачу со следующими входными данными

$$\begin{cases} h = 0.0001 \text{ м}, \\ verticalLength = 0.005 \text{ м}, \\ horizontalLength = 0.005 \text{ м}, \\ \mu = 8.90 * 10^{-4} \text{ Па} * \text{с}, \\ U = 10 \text{ м/с}, \\ p_n = 100 \text{ кПа}, \\ p_v = 150 \text{ кПа}, \end{cases}$$

μ — коэффициент вязкости воды.

4.1. Построение метода конечных элементов

В работе уже был описан принцип решения уравнения Рейнольдса с помощью слабой формы Галеркина, однако его программная реализация требует дополнительных пояснений.

На первом этапе получаются интегралы согласно слабой формы Галеркина для каждого узла конечного элемента в общей форме: границы интегралов остаются переменными, но подынтегральные выражения упрощаются как возможно: вычисляются производные, приводятся общие слагаемые.

Вторым этапом происходит вычисление значений узлов конечных элементов, учет граничных условий и их объединение. Так много действий объединено в один этап, поскольку в ином случае для выполнения всех перечисленных действий требовались бы дополнительные вычислительные затраты и использование дополнительной памяти для хранения информации о структуре полученных узлов. Для иллюстрации будем рассматривать решение для сетки с 2 элементами по вертикали и 2 по горизонтали.

Итак, вычисления происходят следующим образом: вначале рассчитывается самый нижний левый конечный элемент. В качестве результата вычисления одного элемента получаем систему из 4 однородных уравнений. Записываем полученную систему в массив решений и сохраняем данные об индексах двух крайних правых узлах $\{2, 3\}$ и двух верхних $\{3, 4\}$. Важно, что крайние правый элемент мы будем хранить только для самого последнего вычисленного элемента, а значение индексов

верхних узлов для всего ряда конечных элементов. По какой причине это происходит именно так стане яснее на следующих этапах вычисления. Поскольку мы имеем граничные условия по условию задачи, то для граничных узлов имеет смысл сразу их учесть. Граничными узлами для рассматриваемого элемента будут являться узлы $\{1, 2, 4\}$. Заменяем уравнения в системе, соответствующие этим узлам, так, чтобы они удовлетворяли граничным условиям. В программе это реализовано в виде уравнения $nodeValue - boundaryValue = 0$, где $nodeValue$ — неизвестное значение в узле, а $boundaryValue$ — граничное значение.

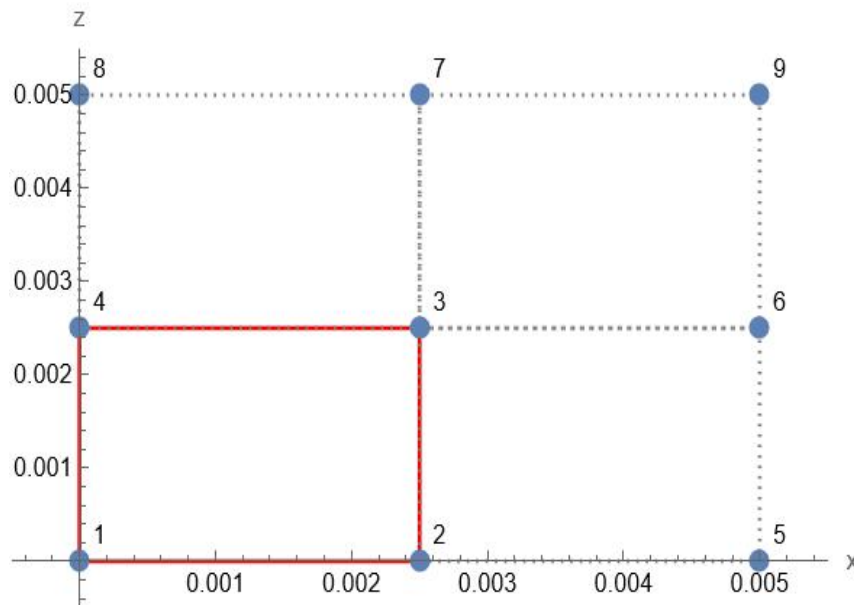


Рис. 2. Нижний левый конечный элемент на сетке 2 на 2 элементов

Далее в цикле вычисляем все оставшиеся конечные элементы в этом ряду, на выбранной сетке их всего один. Поскольку новых элементов в сетке будет всего два, то необходимо будет использовать те же переменные для обозначения уже используемых узлов сетки. Как раз для этого и было сохранено значение индексов крайних правых элементов. Для осуществления слияния двух узлов разных конечных элементов уравнения для этих узлов складываются. В случае, если общие узлы оказываются граничными, то в сложение уравнений смысла не имеет — они и так отвечают граничным условиям. Добавляем в массив индексов верхних элементов новую пару узлов и сохраняем новые крайние правые узлы аналогично прошлому этапу. Аналогично с прошлым этапом учитываем граничные условия

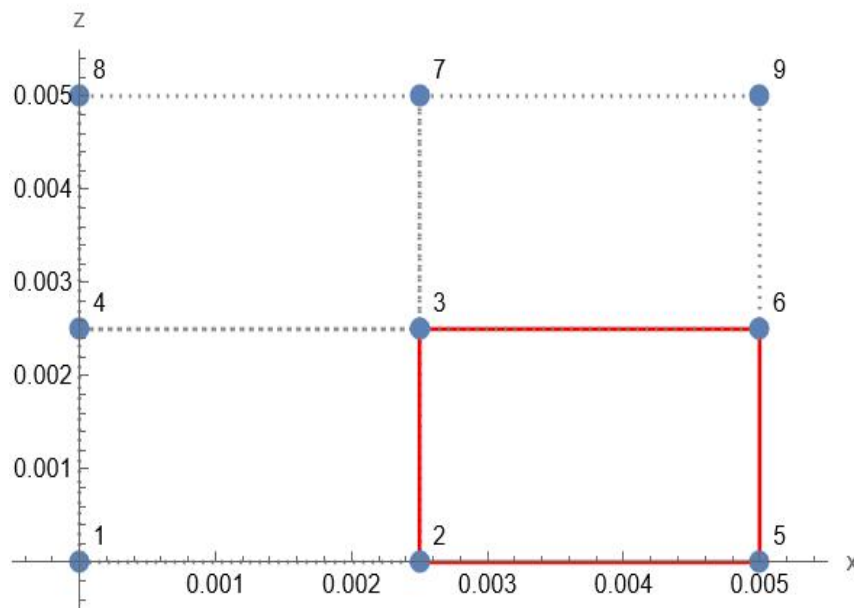


Рис. 3. Нижний правый конечный элемент на сетке 2 на 2 элементов

После этого переходим к вычислению конечных элементов выше по оси z . Для этого будет использоваться цикл по вертикальной оси z . В рассматриваемом случае в этом цикле будет всего один ряд элементов, лежащих между 0.003 и 0.005 по оси z . Рассмотрим вычисление элемента с узлами $\{4, 3, 7, 8\}$. Для него большая часть действий аналогично, не будем их повторять. Главной отличительной чертой алгоритма относительно прошлых конечных элементов будет использования массива индексов верхних узлов, который был заполнен на ранних этапах. Он нужен добавления в систему решения общих нижних узлов элементов - $\{4, 3\}$. Добавление происходит путем складывания имеющегося уравнения в системе с новым уравнением для вычисляемого узла. После все вычислений мы как и ранее сохраняем значение крайне правых узлов и обновляем индекс для крайне верхних узлов в массиве. Стоит заметить, что массив индексов крайне верхних узлов имеет размерность в число горизонтальных элементов сетки, то есть размерность 2 для рассматриваемого случае. В нем хранятся только актуальные для вычисления индексы.

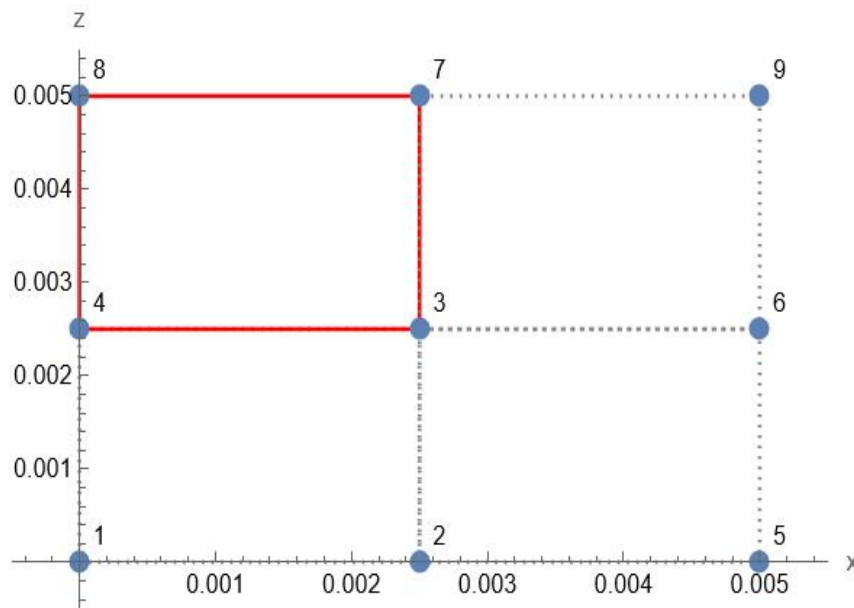


Рис. 4. Верхний левый конечный элемент на сетке 2 на 2 элементов

Для получения последующих уравнений для узлов конечных элементов используется цикл по оси x . Каких-то новых приемов для его вычисления не используется, расчет ведется аналогично с прошлыми элементами. В рассматриваемом случае такой элемент всего один.

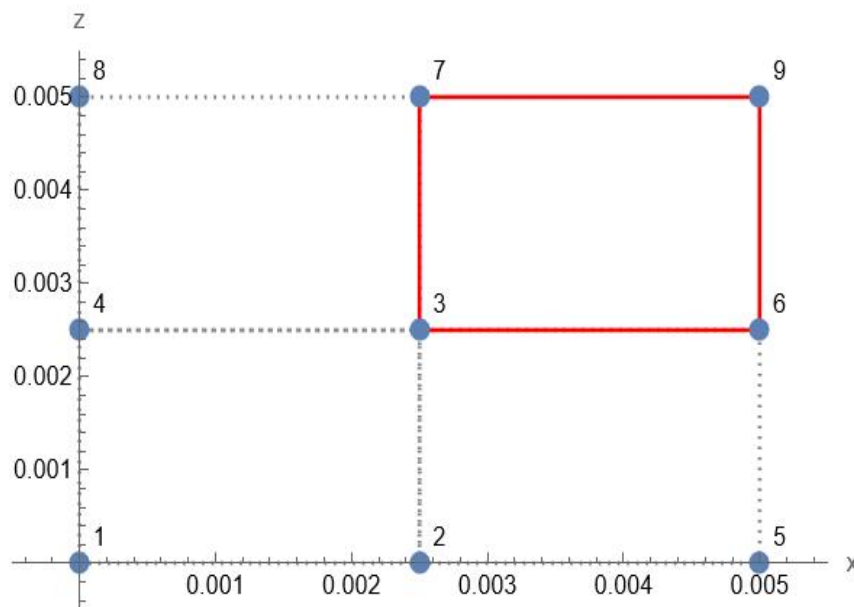


Рис. 5. Верхний правый конечный элемент на сетке 2 на 2 элементов

Итого получаем систему линейных алгебраических уравнений, которая позволит получить нам давления в каждом из узлов сетки. Решаем систему с помощью встроенной в Wolfram Mathematica функции Solve и получаем решение задачи – набор значений давлений в заданных узлах сетки.

4.2. Сетка 10 на 10 элементов

Для сетки 10 на 10 элементов получаем следующие значения графики:

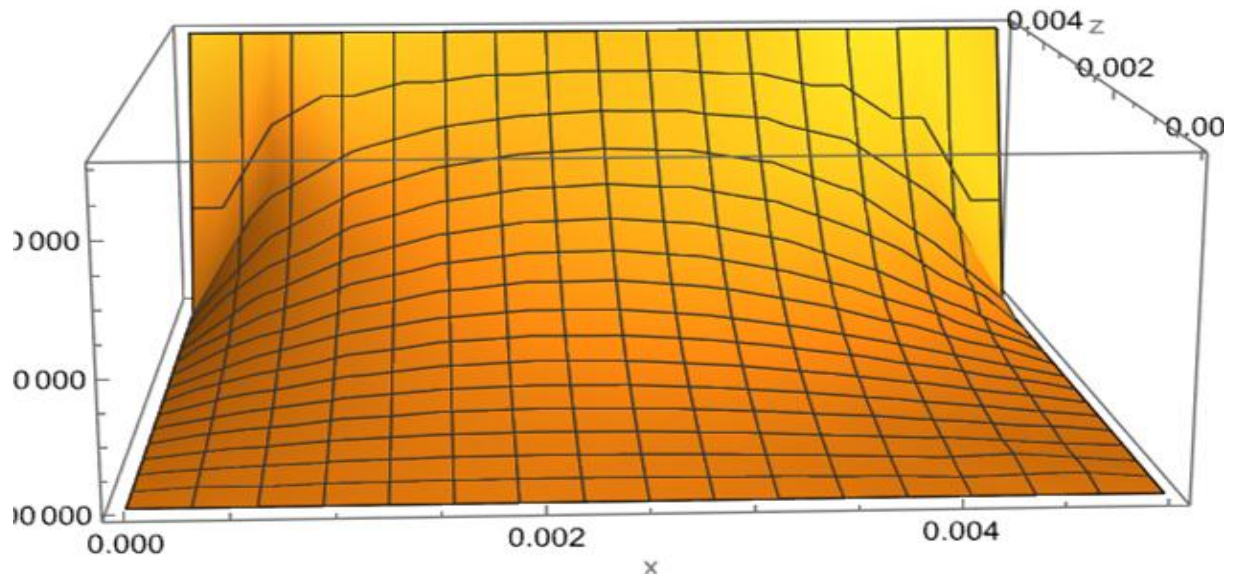


Рис. 6. График решения уравнения Рейнольдса для $h = 0.0001$ м на сетке 10 на 10 элементов

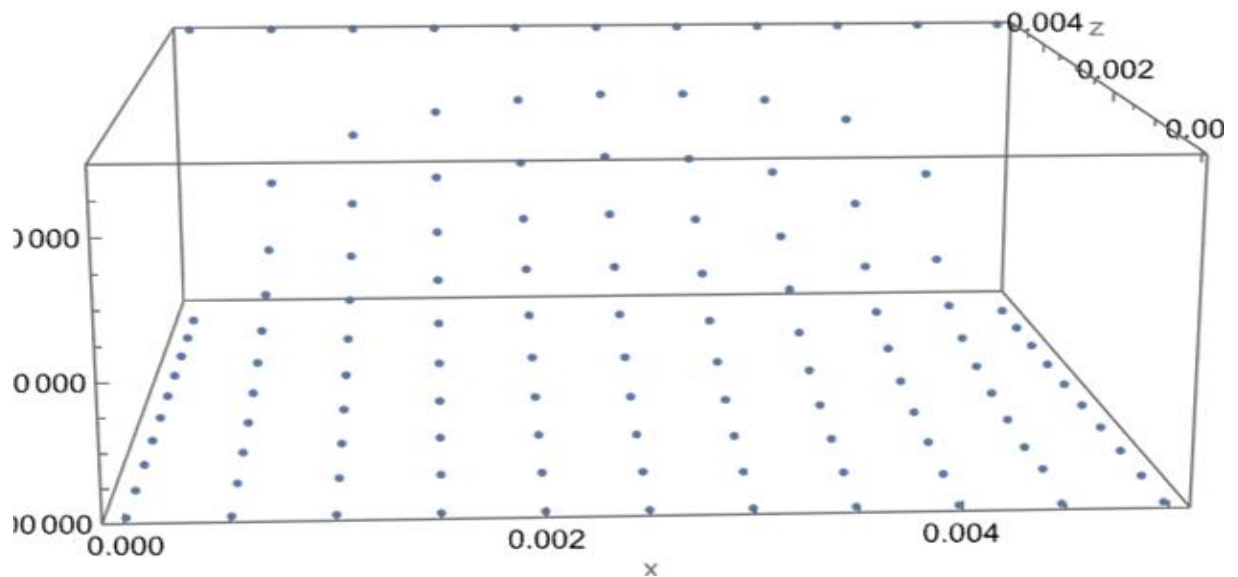


Рис. 7. График значений узлов решения уравнения Рейнольдса для $h = 0.0001$ м на сетке 10 на 10 элементов

Из полученных графиков видно, что граничные условия выполняются.

4.3. Сетка 20 на 20 элементов

Для сетки 20 на 20 элементов получаем следующий график решения

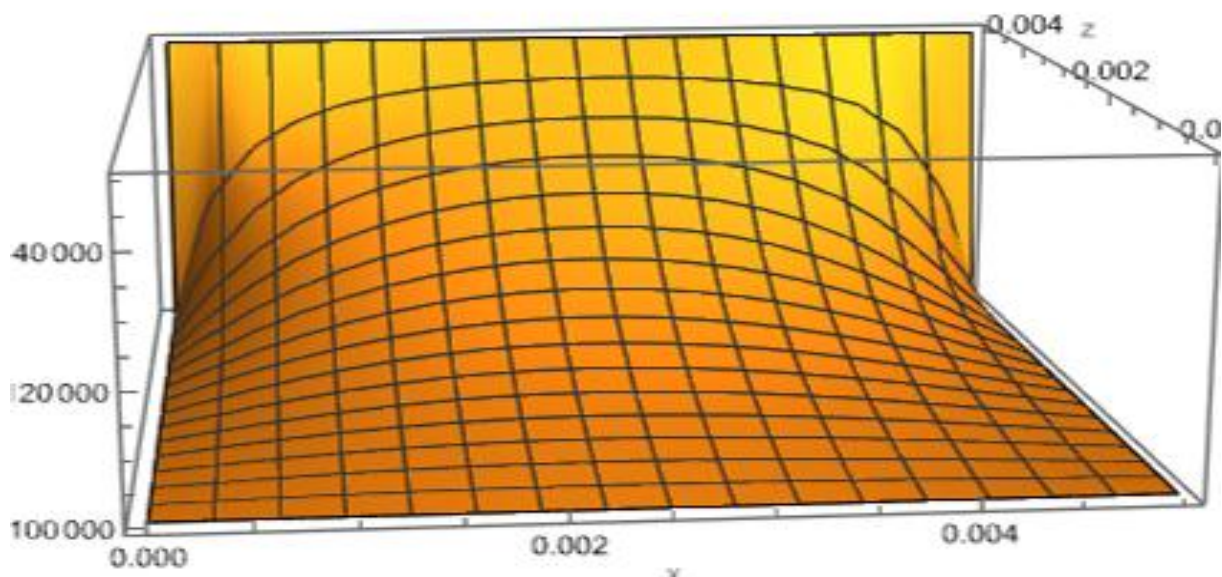


Рис. 8. График решения уравнения Рейнольдса для $h = 0.0001$ м на сетке 20 на 20 элементов

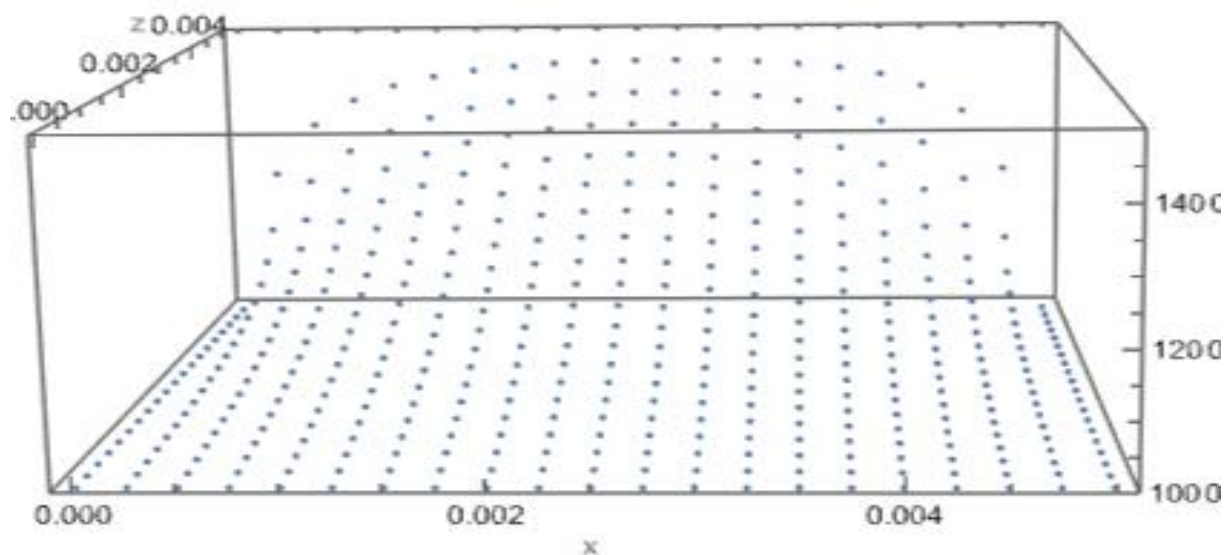


Рис. 9. График значений узлов решения уравнения Рейнольдса для $h = 0.0001$ м на сетке 20 на 20 элементов

Из полученных значений и графиков видно, что граничные условия выполняются.

4.4. Сравнение полученного решения с решением Wolfram Mathematica

Проверим полученный результат с помощью функции NDSolve в Wolfram Mathematica.

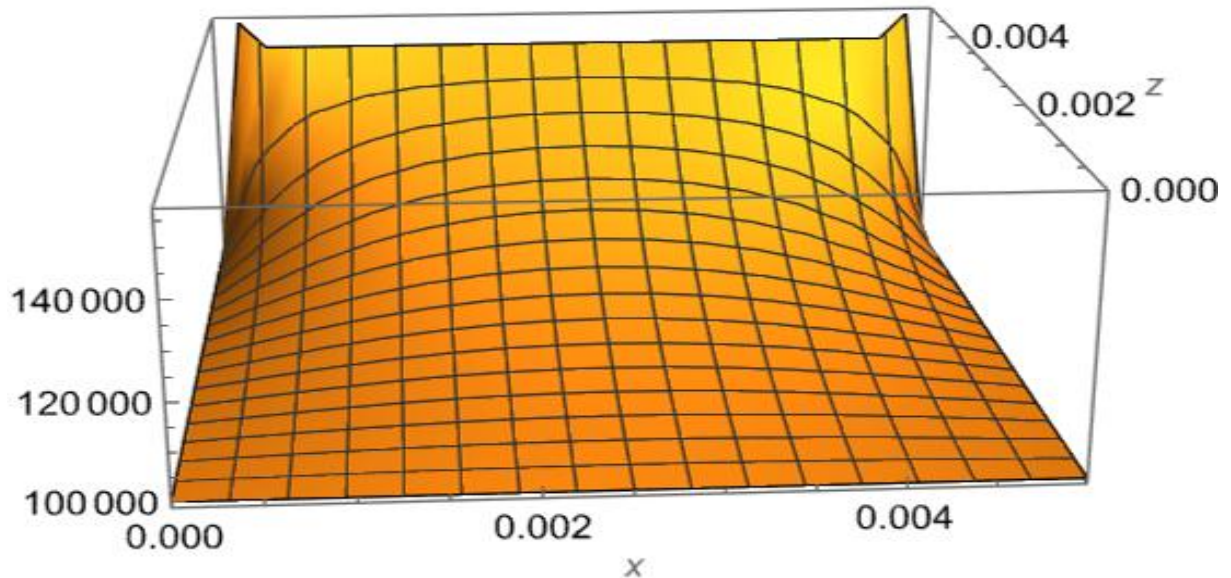


Рис. 10. График решения уравнения Рейнольдса для $h = 0.0001$ м полученный с помощью Wolfram Mathematica

Сравним решения полученные с помощью собственной реализацией с решением Wolfram Mathematica.

Размерность сетки	Разность, Па	Погрешность, %
5 на 5	4612	4.51
10 на 10	1538	1.38
20 на 20	1290	1.02

Погрешность была вычислена по формуле $\max_i \left| \frac{x_{wi} - x_{nodei}}{x_{wi}} \right|$, где x_{wi} – значение в узле i , полученное в Wolfram Mathematica, а x_{nodei} – значение в узле i , полученное в созданной программе. Максимум вычисляется по всем узловым элементам.

Можно заметить, что полученное решение отличается не более чем на 4.51 %, с увеличением числа элементов в сетке погрешность падает. Это свидетельствует о верности полученного решения.

Заключение

В работе представлен вывод уравнения Рейнольдса для установившегося течения в газовом смазочном слое и методика решения уравнения Рейнольдса с помощью метода конечных элементов. В ходе работы получены следующие результаты:

- 1) Создана программная реализация метода конечного элемента для решение уравнения Рейнольдса
- 2) Полученные значения решения уравнения Рейнольдса были сравнены с результатами решения, полученного с помощью функции `NDSolve` в Wolfram Mathematica
- 3) В результате сравнения для сетки 5 на 5 погрешность равна 4.51 %, а для сетки 20 на 20 – 1.02 %.

Список использованных источников

1. Петров Н. Гидродинамическая теория смазки, М.: из-во академии наук СССР, 1948. — 558 с.
2. Слезкин Н. Динамика вязкой несжимаемой жидкости, М.: из-во технотeorетической литературы, 1955. — 521 с.
3. Селегринд Л. Применение метода конечных элементов, М.: из-во МИР, 1979. — 195 с.
4. Seshu P. Textbook of Finite Element Analysis, М.: PHI Learning Private Limited, 2012. — 340 с.