**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации**
**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования**
**«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»**
**(МГТУ им. Н. Э. Баумана)**

ФАКУЛЬТЕТ Фундаментальные науки

КАФЕДРА Прикладная математика

# ДОМАШНЯЯ РАБОТА ПО КУРСУ

## ***«Математические модели прикладной механики»***

## ***НА ТЕМУ:***

## ***Раскрытие статической неопределимости балки при поперечном изгибе***

## ***Вариант 15***

Студент ФН2-71Б (Группа) ________ (Подпись, дата) В. Г. Пиневич (И. О. Фамилия)

Преподаватель ________ (Подпись, дата) Е. А. Максимова (И. О. Фамилия)

2023 г.

# Оглавление

# Обозначения

$L$ — длина трети балки, м;

$b$ — основание прямоугольного поперечного сечения балки, м;

$h$ — высота прямоугольного поперечного сечения балки, м;

$E$ — продольный модуль упругости (модуль Юнга), Па;

$J_3$ — осевой момент инерции относительно нейтральной оси, м$^4$;

$W_3$ — момент сопротивления сечения при изгибе, м$^3$;

$R_3$ — сила реакции, приложенная вместо отброшеной связи, Н;

$M_i$ — момент, Н·м;

$P_i$ — сила или реакция, Н;

$q^\circ$ — равномерно распределённая нагрузка, Н/м;

$M_3$ — изгибающий момент, Н·м;

$Q$ — перерезывающая сила, Н;

$w$ — величина прогиба балки, м;

$\sigma_{11}^{max}$ — максимальное растягивающее напряжение, Па.

# 1. Постановка задачи

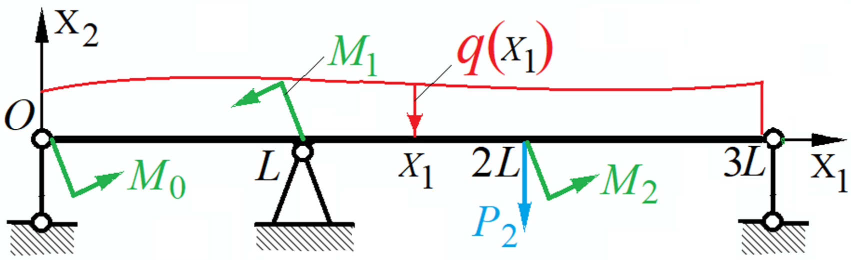


Рис. 1. Общая схема нагружения статически неопределимой балки

В соответствии с индивидуальным заданием необходимо использовать тип связи $R_3$. Это означает, что при раскрытии статической неопределимости шарнирную опору балки при $x_1 = 3L$ следует заменить подлежащей определению реакцией $R_3$ с положительным направлением вдоль положительного направления координатной оси $Ox_2$. Положительные направления нагружающих силовых факторов соответствуют их направлениям, отмеченным на рис. 1 стрелками.

Для индивидуального варианта заданы моменты $M_0 = M$, $M_1 = -M$, $M_2 = 0$, прикладываемая сила $P_2 = -P$ и распределённая нагрузка $q(x_1) = q^\circ$, $x_1 \in (0, 2L)$.

При этом $M = 2000$ Н·м, $P = 1000$ Н, $q^\circ = 1000$ Н/м, $L = 1$ м. Прямоугольное поперечное сечение балки имеет основание $b = 30$ мм и высоту $h = 65$ мм. Балка выполнена из малоуглеродистой стали с продольным модулем упругости (модулем Юнга) $E = 210$ ГПа.

# 2. Схема нагружения в соответствии с индивидуальным заданием

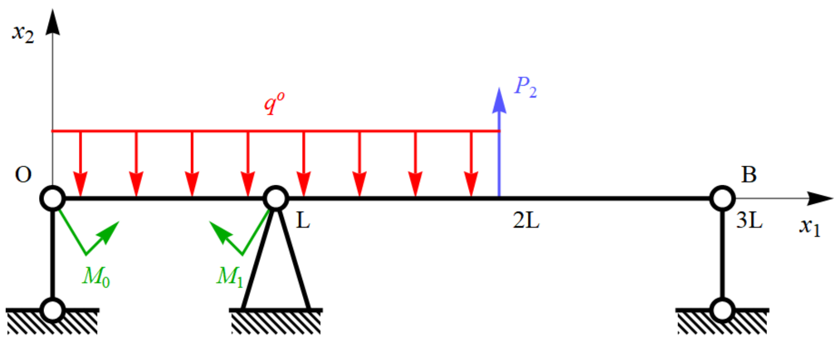


Рис. 2. Схема нагружения балки для заданного варианта

# 3. Степень статической неопределимости балки

Для полученной системы неизвестными являются 3 реакции в шарнирах. Однако можем записать всего 2 уравнения равновесия, а именно уравнение равновесия сил в проекции на вертикальную ось и уравнение равновесия моментов относительно точки. Значит, система является 1 раз статически неопределимой, то есть для определения всех возникающих реакций недостаточно только уравнений статики.

# 4. Переход к статически определимой балке

В соответствии с индивидуальным вариантом отбросим указанную в задании наложенную связь $P_3$ и заменим её соответствующей реакцией $R_3$. Таким образом осуществим переход к статически определимой балке.

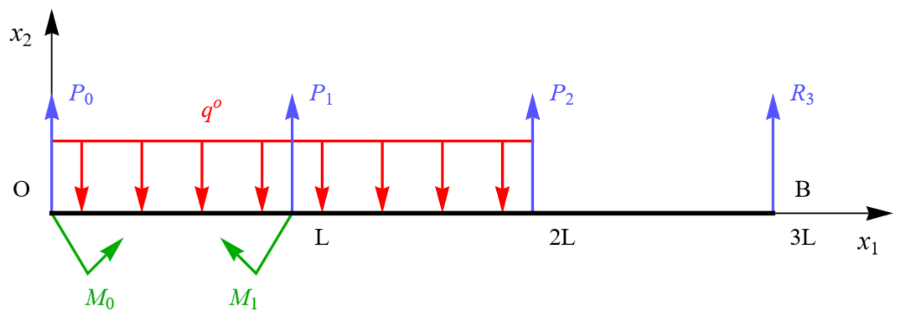


Рис. 3. Нагружение для статически определимой балки

Уравнение равновесия сил в проекции на вертикальную ось $Ox_2$ имеет вид

$$\sum P = 0 \;\Rightarrow\; R_3 + P_1 + P_2 + P_0 - 2L \cdot q^\circ = 0.$$

Аналогично уравнение равновесия моментов относительно точки $B$

$$\sum M = 0 \;\Rightarrow\; M_0 - M_1 + 2L \cdot P_1 + L \cdot P_2 + 3L \cdot P_0 - L^2 \cdot q^\circ = 0.$$

Откуда получим

$$\begin{cases} P_1 = \dfrac{1}{L}\,(M_0 - M_1) - 3R_3 - 2P_2 + 5L \cdot q^\circ, \\ P_0 = \dfrac{1}{L}\,(M_1 - M_0) + 2R_3 + P_2 - 3L \cdot q^\circ. \end{cases} \tag{1}$$

# 5. Балка под действием только реакции $R_3$

Будем считать, что на балку действует только реакция $R_3$, приложенная вместо отброшенной связи, а все остальные нагружающие силовые факторы отсутствуют.

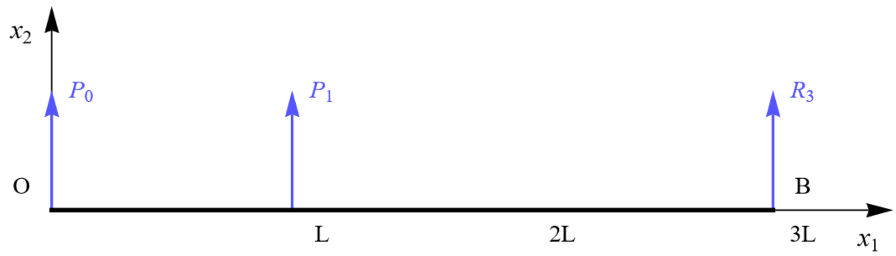


Рис. 4. Нагружение балки только реакцией $R_3$

Уравнения равновесия сил в проекции на вертикальную ось $Ox_2$ и моментов относительно точки $B$ в этом случае имеют вид

$$\begin{cases} R_3 + P_1 + P_0 = 0, \\ 2L \cdot P_1 + 3L \cdot P_0 = 0. \end{cases}$$

Откуда получим

$$\begin{cases} P_1 = -3R_3, \\ P_0 = 2R_3. \end{cases} \tag{2}$$

Для упрощения выкладок введём функции

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x^n}{n!}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0, \end{cases} \qquad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Эти функции для $a \geq 0$ обладают свойствами:

1) $f_n'(x-a) = f_{n-1}(x-a)$ для $n \in \mathbb{N}$, причём $f_0'(x-a) = 0$.

2) $\int\limits_0^x f_n(\xi - a)\, d\xi = f_{n+1}(x-a)$ для $n \in \mathbb{Z}_+$.

Тогда можно записать выражение для изгибающего момента

$$M_(x_1) = R_3 f_1(x_1 - 3L) + P_1 f_1(x_1 - L).$$

Перерезывающая сила связана с изгибающим моментом следующим образом:

$$Q(x_1) = \frac{\mathrm{d}M_3(x_1)}{\mathrm{d}x_1}. \tag{3}$$

Тогда

$$Q(x_1) = R_3 f_0(x_1 - 3L) + P_1 f_0(x_1 - L).$$

С учётом (2) имеем

$$\begin{cases} M_3(x_1) = R_3\left(f_1\left(x_1\right) - 3f_1\left(x_1 - L\right)\right), \\ Q(x_1) = R_3\left(f_0(x_1) - 3f_0(x_1 - L)\right). \end{cases} \tag{4}$$

Построим в безразмерных переменных эпюры изгибающего момента и перерезывающей силы в случае, когда действует только сила реакции $R_3$, приложенная вместо отброшенной связи.

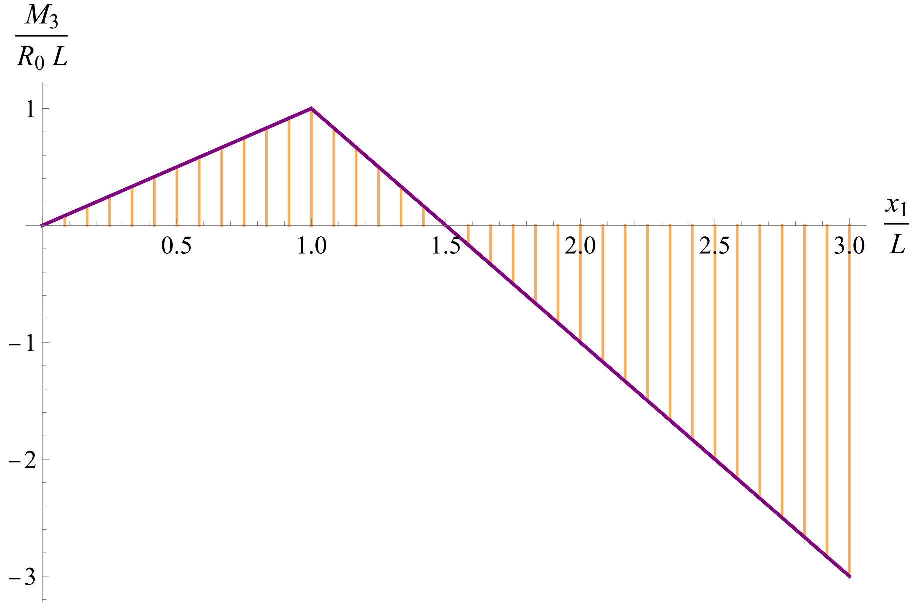


Рис. 5. Эпюра изгибающего момента при действии только $R_3$

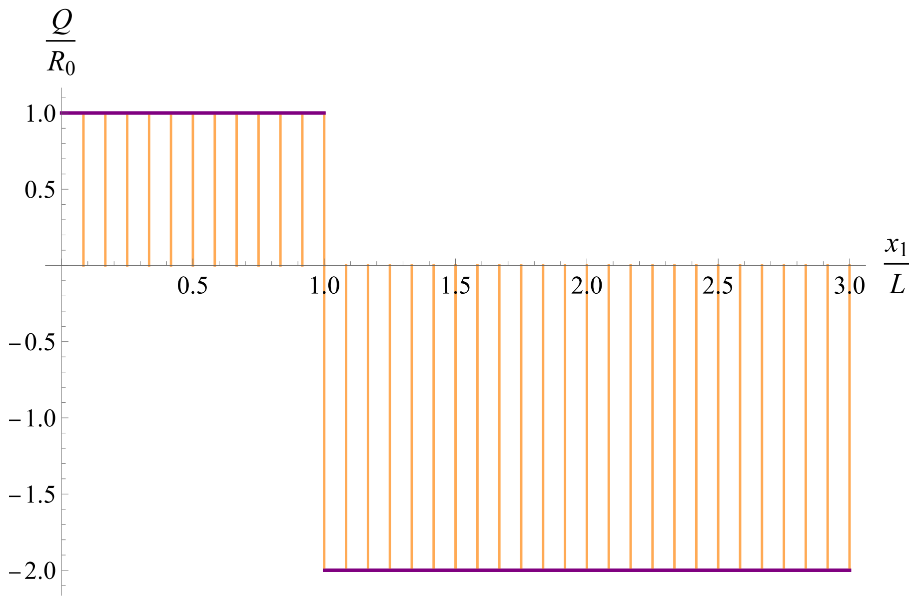


Рис. 6. Эпюра перерезывающей силы при действии только $R_3$

# 6. Прогиб балки только при реакции $R_3$

Дифференциальное уравнение для прогиба балки

$$\frac{\mathrm{d}^2 w(x_1)}{\mathrm{d}x_1^2} = \frac{M_3(x_1)}{EJ_3}.$$

Общее решение имеет вид

$$w(x_1) = w(0) + w'(0)x_1 + \int\limits_0^{x_1} dt \int\limits_0^{t} \frac{M_3(\xi)}{EJ_3}\, d\xi. \tag{5}$$

Ранее была отброшена одна связь в точке $x_1 = 3L$. Тогда остаётся 2 закрепления в точках $x_1 = L$ и $x_1 = 0$, в которых балка не должна прогибаться. В этом случае имеем следующие граничные условия:

$$w(L) = 0, \quad w(0) = 0. \tag{6}$$

С учётом (4) прогиб балки под действием только реакции $R_3$

$$w(x_1) = \frac{R_3}{EJ_3}\left(f_3(x_1) - 3f_3(x_1 - L) + L^3 - \frac{1}{6}L^2 x_1\right). \tag{7}$$

В точке $x_1 = 0$

$$w_{R_3} = w(0) = \frac{L^3}{3EJ_3}R_3. \tag{8}$$

# 7. Статически определимая балка без реакции $R_3$

Будем считать, что на балку действуют все силовые факторы, кроме реакции $R_3$, приложенной вместо отброшенной связи.

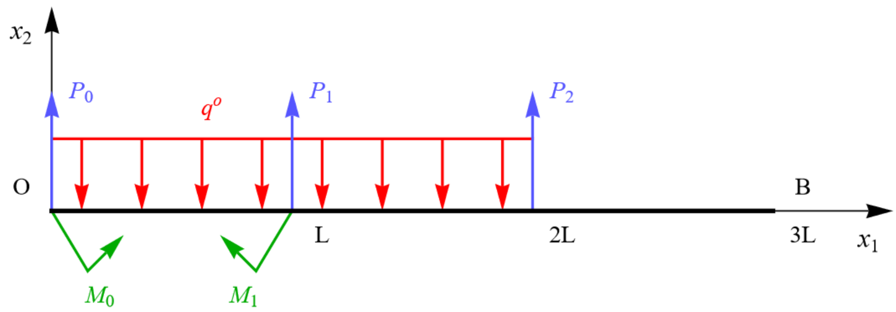


Рис. 7. Нагружение балки без учёта реакции $R_3$

Уравнения равновесия сил в проекции на вертикальную ось $Ox_2$ и моментов относительно точки $O$ в этом случае имеют вид

$$\begin{cases} P_1 + P_2 + P_0 - 2L \cdot q^\circ = 0, \\ M_0 - M_1 + L \cdot P_1 + 2L \cdot P_2 - 2L^2 \cdot q^\circ = 0. \end{cases}$$

Откуда получим

$$\begin{cases} P_1 = \dfrac{1}{L}(M_1 - M_0) - 2P_2 + 2L \cdot q^\circ, \\ P_0 = \dfrac{1}{L}(M_0 - M_1) + P_2. \end{cases} \tag{9}$$

В этом случае выражение для изгибающего момента имеет вид

$$\begin{aligned} M_3(x_1) = M_1 f_0(x_1 - L) - M_0 f_0(x_1) + P_1 f_1(x_1 - L) + \\ + P_2 f_1(x_1 - 2L) - q^\circ f_2(x_1) + q^\circ f_2(x_1 - 2L). \end{aligned} \tag{10}$$

С учётом (3) перерезывающая сила

$$Q(x_1) = P_1 f_0(x_1 - L) + P_2 f_0(x_1 - 2L) - q^\circ f_1(x_1) + q^\circ f_1(x_1 - 2L). \tag{11}$$

Построим эпюры изгибающего момента и перерезывающей силы для статически определимой балки в случае, когда действуют все силовые факторы, кроме реакции $R_3$, приложенной вместо отброшенной связи, с учётом (9) при значениях параметров в соответствии с индивидуальным заданием.

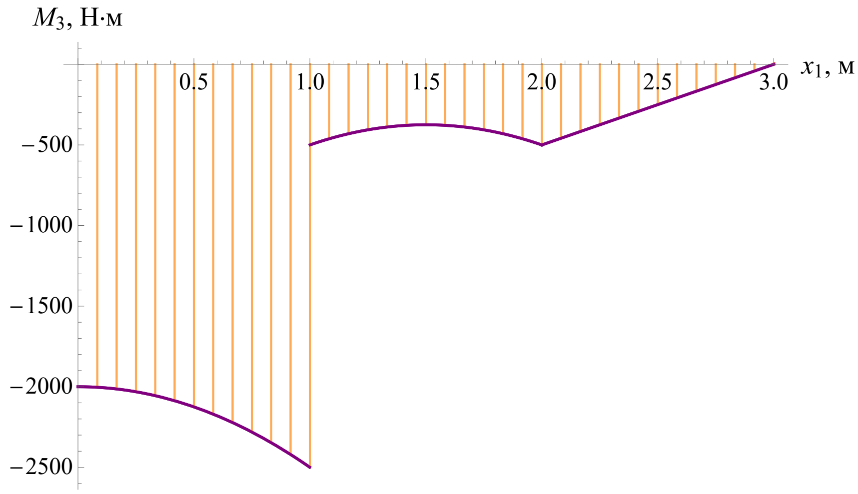


Рис. 8. Эпюра изгибающего момента без учёта реакции $R_3$

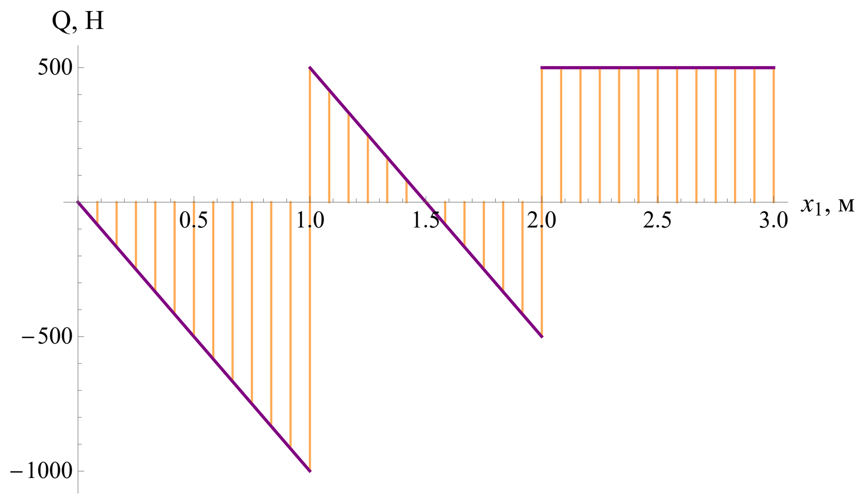


Рис. 9. Эпюра перерезывающей силы без учёта реакции $R_3$

# 8. Прогиб статически определимой балки без $R_3$

С учётом (5), (6) и (10) прогиб статически определимой балки без реакции $R_3$

$$w(x_1) = \frac{1}{EJ_3}\Big[M_1 f_2(x_1 - L) - M_0 f_2(x_1) + P_1 f_3(x_1 - L) + P_2 f_3(x_1 - 2L) - q^\circ f_4(x_1) + q^\circ f_4(x_1 - 2L) + \frac{L^2}{24}\big(32M_1 - 56M_0 - 12LP_2 - 13L^2 q^\circ\big) + \frac{L}{24}\big(80M_0 - 32M_1 + 12LP_2 + 15L^2 q^\circ\big)x_1\Big]. \tag{12}$$

В точке $x_1 = 3L$

$$w_0 = w(3L) = \frac{L^2}{24EJ_3}\left(-24M_0 - 2L^2 q^\circ\right). \tag{13}$$

# 9. Определение силы реакции $R_3$

Для статически неопределимой балки в точке $x_1 = 0$ имеем закрепление, поэтому прогиб в этой точке отсутствует. Тогда для определения силы реакции $R_3$ можно воспользоваться условием

$$w_{R_3} + w_0 = 0.$$

С учётом (8) и (13) имеем

$$R_3 = \frac{L^2}{24EJ_3}\left(24M_0 + 2L^2q^\circ\right)\frac{3EJ_3}{L^3}.$$

Тогда из (1) получим силы реакции для статически неопределимой балки

$$\begin{cases} P_1 = \dfrac{51}{32}Lq^\circ - \dfrac{7}{8}P_2 + \dfrac{1}{12L}(14M_0 + M_2), \\ P_0 = \dfrac{13}{96}Lq^\circ - \dfrac{3}{8}P_2 + \dfrac{1}{12L}(M_0 + 2M_1). \end{cases}$$

При значениях параметров в соответствии с индивидуальным заданием

$$R_3 = 6250 \text{ Н}, \quad P_1 = -15750 \text{ Н}, \quad P_0 = 10500 \text{ Н}.$$

# 10. Расчёт статически неопределимой балки

## 10.1. Изгибающий момент и перерезывающая сила

Выражения для изгибающего момента и перерезывающей силы статически неопределимой балки можно получить путём сложения соответствующих выражений для балки под действием только силы реакции $R_3$, приложенной вместо отброшенной связи, а также статически определимой балки без учёта силы реакции $R_3$.

После сложения (4) с (10) и (11) соответственно с учётом (9) получим

$$M_3(x_1) = M_1f_0(x_1 - L) - M_0f_0(x_1) + R_3f_1(x_1) + \left(P_1 - \frac{3}{2}R_3\right)f_1(x_1 - L) + \\ + P_2f_1(x_1 - 2L) - q^\circ f_2(x_1) + q^\circ f_2(x_1 - 2L).$$

С учётом (3) перерезывающая сила

$$Q(x_1) = R_3f_0(x_1) + \left(P_1 - \frac{3}{2}R_3\right)f_0(x_1 - L) - P_2f_0(x_1 - 2L) - q^\circ f_1(x_1) + q^\circ f_2(x_1 - 2L).$$

Построим эпюры полученных изгибающего момента и перерезывающей силы для статически неопределимой балки при значениях параметров в соответствии с индивидуальным заданием.

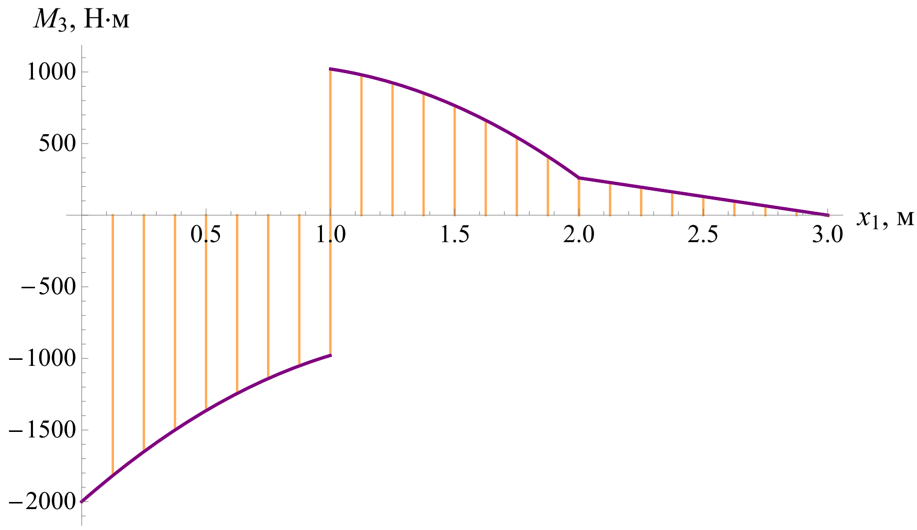


Рис. 10. Эпюра изгибающего момента статически неопределимой балки

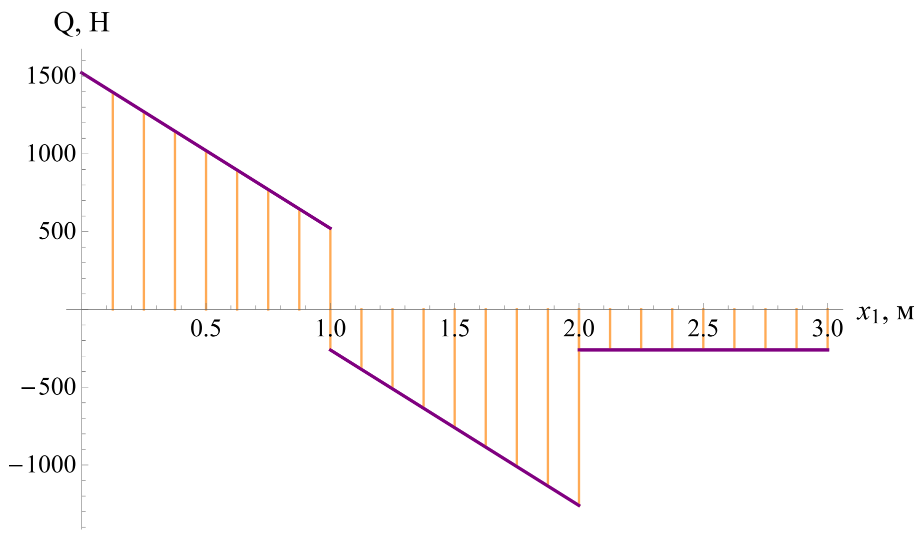


Рис. 11. Эпюра перерезывающей силы статически неопределимой балки

### 10.2. Прогиб исходной балки

Выражения для прогиба статически неопределимой балки также можно получить путём сложения соответствующих выражений для балки под действием только силы реакции $R_3$, а также статически определимой балки без учёта силы реакции $R_3$.

После сложения (7) и (13) с учётом (9) получим

$$w(x_1) = \frac{1}{EJ_3}\Bigg[M_1 f_2(x_1 - L) - M_0 f_2(x_1) + R_3 f_3(x_1) + \left(P_1 - \frac{3}{2}R_3\right) f_3(x_1 - L) + \\ + P_2 f_3(x_1 - 2L) - q^\circ f_4(x_1) + q^\circ f_4(x_1 - 2L) + \frac{L^2}{48}\big(32M_1 - 56M_0 - 12LP_2 - 13L^2 q^\circ\big) + \\ + \frac{L}{48}\big(80M_0 - 32M_1 + 12LP_2 + 15L^2 q^\circ\big)x_1\Bigg].$$

Для балки с прямоугольным поперечным сечением с основанием $b$ и высотой $h$ осевой момент инерции относительно нейтральной оси имеет вид

$$J_3 = \frac{bh^3}{12}.$$

Построим график зависимости прогиба для статически неопределимой балки при значениях параметров в соответствии с индивидуальным заданием.

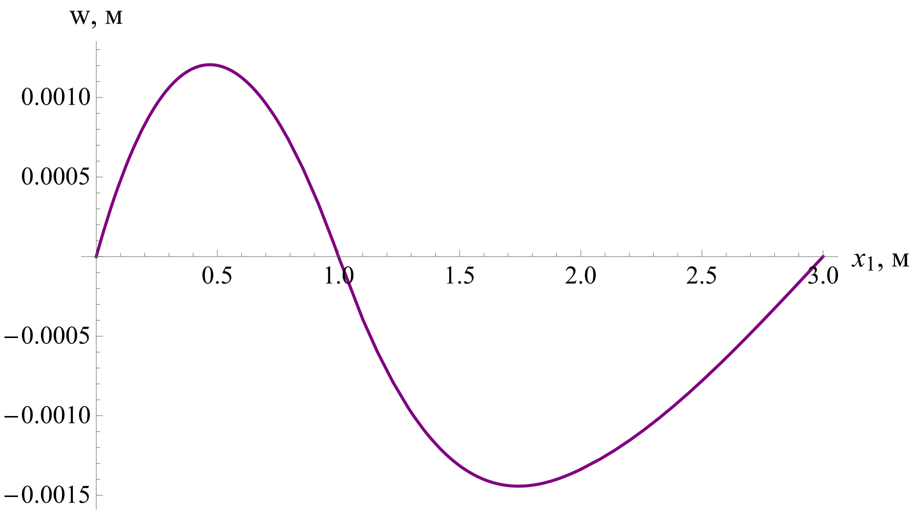


Рис. 12. Прогиб статически неопределимой балки

## 11. Наибольшее растягивающее напряжение

Максимальное растягивающее напряжение в поперечном сечении, симметричном относительно нейтральной оси, можно определить по формуле

$$\sigma_{11}^{max} = \frac{M_3}{W_3}.$$

Для прямоугольного поперечного сечения момент сопротивления сечения при изгибе имеет вид

$$W_3 = \frac{bh^2}{6}.$$

Наибольшее по абсолютной величине значение изгибающего момента $M_0$ достигается при $x_1 = 0$. Тогда

$$\sigma_{11}^{max} = 6\frac{|M_0|}{bh^2}.$$

При значениях параметров в соответствии с индивидуальным заданием

$$\sigma_{11}^{max} \approx 94{,}675 \text{ МПа}.$$

# 12. Заключение

В данной работе для заданной пары металлов были получены следующие результаты:

1) изображена схема нагружения статически неопределимой балки в соответствии с индивидуальным заданием;
2) проверена степень статической неопределимости балки;
3) в соответствии с индивидуальным вариантом осуществлён переход к статически определимой балке путём отбрасывания указанной в задании наложенной связи $P_0$ и замены её соответствующей реакцией $R_3$;
4) построены эпюры изгибающего момента и перерезывающей силы только от действия указанной выше реакции, приложенной вместо отброшенной связи (шарнирной опоры);
5) найдена однозначная аналитическая зависимость величины прогиба балки под действием только реакции $R_3$;
6) построены эпюры изгибающего момента и перерезывающей силы для статически определимой балки без учёта отброшенной связи и её силы реакции;
7) для статически определимой балки найдена аналитическая зависимость величины прогиба от продольной координаты;
8) из равенства нулю алгебраической суммы полученных в пп. 5 и 7 прогибов балки в сечении, соответствующем отброшенной опоре, получена зависимость реакции $R_3$ в этом сечении от остальных заданных параметров;
9) для исходной статически неопределимой балки построены эпюры изгибающего момента и перерезывающей силы, а также определена зависимость прогиба балки от продольной координаты и построен график этой зависимости;
10) для поперечного сечения балки с наибольшим по абсолютному значению изгибающим моментом найдено наибольшее растягивающее напряжение.

# Список использованных источников


1. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. 512 с.
2. Зарубин В. С., Кувыркин Г. Н., Станкевич И. В. Математические модели прикладной механики. М.: Изд-во МГТУ им Н. Э. Баумана, 2016. 282 с.
3. Феодосьев В. И. Сопротивление материалов. 15-е изд. М.: Изд-во МГТУ им Н. Э. Баумана, 2010. 590 с.