Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ Фундаментальные науки

КАФЕДРА Прикладная математика

РАСЧЕТНО-ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

К КУРСОВОЙ РАБОТЕ

НА ТЕМУ:

Кручение стержня прямоугольного сечения

Студент ФН2-51Б (Группа) | (Подпись, дата) | В. Г. Пиневич (И. О. Фамилия)

Руководитель курсовой работы | (Подпись, дата) | А. В. Котович (И. О. Фамилия)

2023 г.

Оглавление

Введение

Проблема решения задачи о скручивании балки возникает во многих задачах, в частности в строительной механике. <Что-то написать здесь>. Данная работа посвящена изучению двух численных методов решения таких задач, оценке их точности.

1. Постановка задачи

1.1. Кручение

Кручением называется такой вид нагружения стержня, при котором из всех шести внутренних силовых факторов в его поперечных сечениях не равен нулю только крутящий момент $M_{\text{кр}}$.

Рассмотрим стержень прямоугольного сечения. Такой стержень при закручивании подвержен депланациям («выходят из плоскости»). Другими словами депланация означает, что точки сечения перемещаются вдоль оси стержня в различных направлениях.

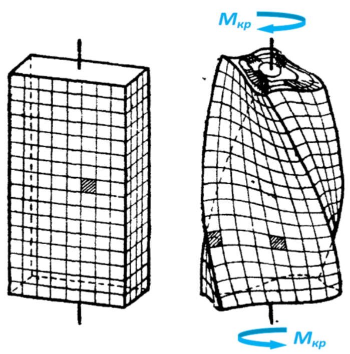

Рис. 1. Кручение стержня прямоугольного сечения

Будем решать задачу о его кручении двумя способами: энергетическим методом (в виде ряда по ортогональной системе функций) и методом Ритца (в виде ряда по степенным функциям).

Совместим ось z с осью кручения, оси x и y расположим произвольно в плоскости поперечного сечения. Задача кручения сходится к поиску функции ψ (1) [2]. Эта функция должна быть постоянна вдоль границы поперечного сечения, константу можно выбирать произвольно. Мы будем принимать ее равной нулю.

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = -2G\theta, \tag{1}$$

где G — модуль сдвига, θ — угол закручивания на единицу времени.

1.2. Положительные и положительно определенные операторы

Рассмотрим некоторый симметричный оператор A гильбертова пространства.

- Оператор A называется положительным, если для любого элемента u из области определения оператора выполняется неравенство

$$(Au, u) \geqslant 0,$$

причем знак равенства имеет место только тогда, когда $u = 0$.

- Оператор A называется положительно определенным, если существует такая положительная постоянная γ^2, что для любого элемента u из области определения оператора A справедливо неравенство

$$(Au, u) \geqslant \gamma^2 \|u\|^2$$

Физический смысл понятия положительно определенного операторов заключается в том, что невозможно сообщить системе смещение, не затратив на это некоторой энергии [3]. Если же оператор положительный, но не положительно определенный, то, системе можно придать сколь угодно большое смещение, затратив на это сколь угодно малую энергию

2. Энергетический метод

Рассмотрим положительно определенный оператор A в гильбертовом пространстве H. Требуется решить уравнение

$$Au = f, f \in H. \tag{2}$$

Пусть A — положительный оператор в гильбетровом протестантстве. Тогда энергетическим произведение назовем

$$[u, v] = (Au, v),$$

где u и v элементы из области определения D оператора A.

Множество $D(A)$ является гильбертовом пространством, навезем его энергетическим пространством H_A. Оно также является сепарабельным.

Тогда мы можем свести решение краевой задачи к задаче о поиске минимума функционала.

Если A — положительный оператор, уравнение (2) можно свести к поиску минимума функционала

$$F(u) = (Au, u) - 2(u, f). \tag{3}$$

Такой метод решения краевой задачи и называют энергетическим.

Чтобы решение задачи (3) существовало расширим функционал $F(u)$ на все пространство H_A и будем искать минимум u_0 на нем. Пространство H_A сепарабельно, то в нем найдется полная ортонормированная система ω_n и решение u_0 можно представить в виде

$$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty}(f, \omega_n)\omega_n.$$

3. Метод Ритца

4. Решение задачи о кручении стержня энергетическим методом

Рассмотрим задачу [1] о кручении стержня, основание которого представляет собой прямоугольник $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$. Функция кручения $\psi(x, y)$ удовлетворяет условию $-\Delta\psi = 2G\theta$ (1).

Функция $\psi(x, y)$ обращается в нуль на сторонах прямоугольника $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$.

Энергетическое произведение функций $u(x, y)$, $v(x, y)$ выражается формулой

$$[u, v] = -\int_0^a\int_0^b (v(x, y)\Delta u(x, y))\, dxdy, \tag{4}$$

энергетическая норма

$$\|u\|^2 = -\int_0^a\int_0^b (u(x, y)\Delta u(x, y))\, dxdy, \tag{5}$$

Функции

$$\varphi_{mn}(x, y) = \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}, \quad m, n = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

- непрерывно дифференцируемы сколько угодно раз и обращаются в нуль на контуре прямоугольника и потому входят в область определения оператора данной задачи;
- ортогональны по энергии;
- не нормированы.

Докажем ортогональность, для этого заметим, что

$$\Delta\varphi_{mn}(x, y) = -\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)\varphi_{mn}(x, y). \tag{7}$$

Тогда

$$[\varphi_{mn}, \varphi_{rs}] = -\int\limits_0^a \int\limits_0^b \varphi_{mn} \Delta \varphi_{rs} dx dy$$

$$[\varphi_{mn}, \varphi_{rs}] = \pi^2 (\frac{r^2}{a^2} + \frac{s^2}{b^2}) \int\limits_0^a \sin\left(\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{r\pi x}{a}\right) dx \int\limits_0^a \sin\left(\frac{n\pi y}{b} \sin\frac{s\pi y}{b}\right) dy.$$

Если $m \neq r$ или $nx \neq s$, то $[\varphi_{mn}, \varphi_{rs}] = 0$. Пологая, что $r = m$ и $s = n$, найдем

$$\|\varphi_{mn}\|^2 = \frac{\pi^2 \left(b^2 m^2 + a^2 n^2\right)}{4ab},$$

следовательно система функций (6) не нормированная. Поделим φ_{mn} на $\|\varphi_{mn}\|$, получим систему

$$\psi_{mn}(x, y) = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{ab}{b^2 m^2 + a^2 n^2}} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}. \tag{8}$$

По формуле (**??**) функция кручения представляется рядом

$$\psi(x, y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} (2G\theta, \psi_{mn}) \, \psi_{mn}(x, y), \tag{9}$$

коэффициенты которого равны

$$(2G\theta, \psi_{mn}) = \frac{4G\theta}{\pi} \int\limits_0^a \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) dx \int\limits_0^b \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy =$$

$$= \frac{4abG\theta}{\pi^3 mn} \sqrt{\frac{ab}{b^2 m^2 + a^2 n^2}} [1 - (-1)^m][1 - (-1)^n].$$

Заметим, что коэффициенты ряда (9) равны нулю, если хотя бы одно из чисел m или n четное. В противном случае

$$(2G\theta, \psi_{mn}) = \frac{4abG\theta}{\pi^3 mn} \sqrt{\frac{ab}{b^2 m^2 + a^2 n^2}},$$

откуда, соотношение (9) примет итоговый вид

$$\psi(x, y) = \frac{32 a^2 b^2 G\theta}{\pi^4} \sum_{m,n=1,3,5,\ldots} \frac{\sin\dfrac{m\pi x}{a} \sin\dfrac{n\pi y}{b}}{mn(b^2 m^2 + a^2 n^2)}. \tag{10}$$

Рассмотрим график и линии уровни функции (10)

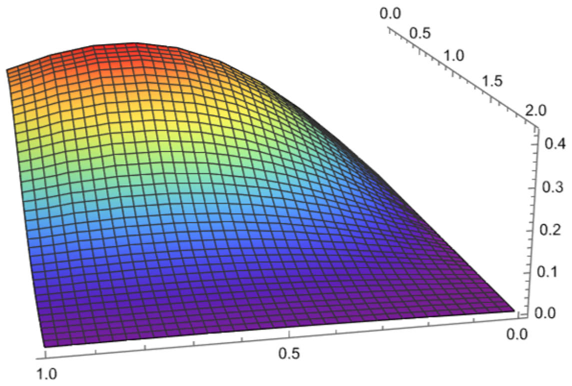

Рис. 2. Кручение стержня прямоугольного сечения

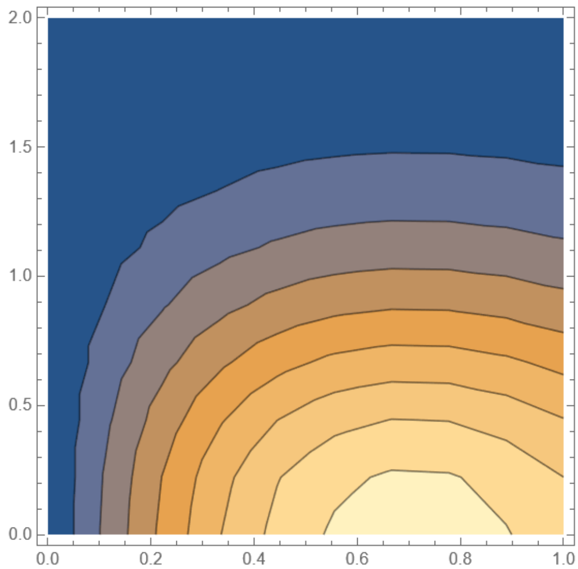

Рис. 3. Кручение стержня прямоугольного сечения

5. Решение задачи о кручении стержня методом Ритца

Решение задачи кручения стержня прямоугольного сечения [1], как уже было показано выше, сводится к интегрированию уравнения Пуассона (1)

$$-\Delta\psi = 2G\theta,$$

где G — модуль сдвига, θ — угол закручивания стержня на единицу его длины, в прямоугольнике

$$-a \leqslant x \leqslant a, -b \leqslant y \leqslant b$$

при краевых условиях

$$\psi(\pm a, y) = \psi(x, \pm b) = 0.$$

Полагая для упрощения $\psi = 2G\theta u$, получим задачу в виде

$$\begin{cases} -\Delta u = 1, \\ u(\pm a, y) = u(x, \pm b) = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Применим метод Ритца, взяв за координатные функции полиномы. Из соображений симметрии ясно, что функция $u(x, y)$ четна как по x, так и относительно y. Такие многочлены, равные нулю на контуре прямоугольника, т. е. на прямых $x = \pm a$, $y = \pm b$ имеют вид

$$(x^2 - a^2)(y^2 - b^2)(a_1 + a_2 x^2 + a_3 y^2 + \dots) \tag{12}$$

Ограничимся тремя членами и положим приближенно

$$u \approx u_3 = (x^2 - a^2)(y^2 - b^2)(a_1 + a_2 x^2 + a_3 y^2). \tag{13}$$

Найдя соответствующие производные и приравняв их нулю, получим систему линейных алгебраических уравнений Ритца, вида (**??**), решение которой в данном случае

$$\begin{cases} a_1 = \frac{35(9a^4+130a^2b^2+9b^4)}{16(45a^6+509a^4b^2+509a^2b^4+45b^6)}, \\ a_2 = \frac{105(9a^2+b^2)}{16(45a^6+509a^4b^2+509a^2b^4+45b^6)}, \\ a_3 = \frac{105(a^2+9b^2)}{16(45a^6+509a^4b^2+509a^2b^4+45b^6)}. \end{cases} \tag{14}$$

Рассмотрим график и линии уровни функции (13)

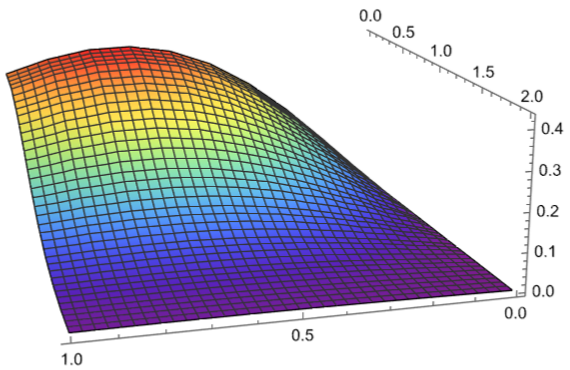

Рис. 4. Кручение стержня прямоугольного сечения

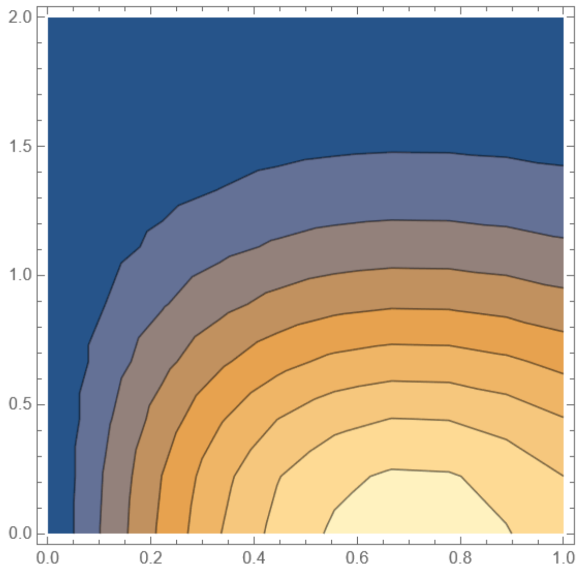

Рис. 5. Кручение стержня прямоугольного сечения

Заключение

В ходе выполнения курсовой были изучены методы интегрирования и обобщенных функций нахождения уравнения упругого изгиба стержня. С помощью этих методов были решены два типа задач, их результаты оказались идентичны. Метод интегрирования является более трудоемким и менее удобным по сравнению с методом обобщенных функций, так как требует учета большего количества граничных условий и большего объема вычислений.

Список использованных источников

1. С. Г. Михлин. Вариационные методы в математической физике, М.: Изд-во Наука, 1970. — 512 с.
2. С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер. Теория упругости, М.: Изд-во Наука, 1975. — 576 с.
3.