



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ _____ Фундаментальные науки

КАФЕДРА _____ Прикладная математика

РАСЧЕТНО-ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА
К КУРСОВОЙ РАБОТЕ
НА ТЕМУ:

Нахождение уравнения
изгиба балки

Студент _____
ФН2-41Б
(Группа)

(Подпись, дата)

В. Г. Пиневич

(И. О. Фамилия)

Руководитель курсовой работы

(Подпись, дата)

А. В. Чередниченко

(И. О. Фамилия)

2022 г.

Оглавление

Введение	3
1. Постановка задачи	3
1.1. Чистый изгиб	3
1.2. Дифференциальное уравнение равновесия стержня	7
2. Теоретическая часть	8
2.1. Метод интегрирования	8
2.2. Метод обобщенных функций	8
3. Практическая часть	10
3.1. Балка в заделке	10
3.1.1. Решение методом интегрирования	10
3.1.2. Решение методом обобщенных функций	12
3.2. Двух опорная балка	12
3.2.1. Решение методом интегрирования	13
3.2.2. Решение методом обобщенных функций	14
Заключение	17
Список использованных источников	18

Введение

Проблема вычисления уравнение прогиба балки возникает во многих задачах, в частности в строительной механике. В силу наличия большого числа действующих сил и моментов решение такой задачи классическим методом, т.е. вычислением дифференциального уравнения, вызывает сложности в виду большого числа граничных условий. Однако с развитием теории обобщенных функций и сопротивления материалов был найден более удобный способ расчета прогиба балки. Данная работа посвящена изучению методов решения подобных задач, выделение их недостатков и преимуществ.

1. Постановка задачи

Для расчета уравнения гибкого стержня необходимо ввести несколько понятий. q — распределенная нагрузка, Q — сосредоточенная сила, M — момент.

1.1. Чистый изгиб

Обратимся к источнику [1]. Рассмотрим стержень, закрепленный произвольным образом. Выделим часть стержня длиной dz и приложим поперечные силы $Q + dQ$ и моменты $M + dM$. Поскольку dz мало, то можно считать нагрузку равно распределенной (рис. 1).

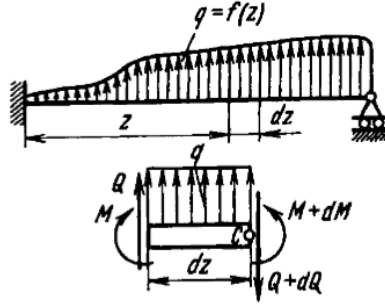


Рис. 1. Равно распределенная нагрузка

Имеем состояния равновесия:

$$\begin{cases} \sum F_z = 0 \\ \sum M_z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Q + qdz - Q - Qdz = 0 \\ M + Qdz + qdz \frac{dz}{z} - M - dM = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Выражение $qdz \frac{dz}{z}$ можно отбросить, как величину высшего порядка малости.

Из системы (1) следует, что если балка нагружена только сосредоточенными силами, то $q = 0$, $Q = const$, M — линейная функция от z .

Итого из системы (1) получаем:

$$\frac{dQ}{dz} = q, \frac{dM}{dz} = Q, \quad (2)$$

Далее рассмотрим наиболее простой случай изгиба — чистый изгиб. Под таким видом изгиба понимаются случаи, при которых в поперечных сечениях стержня возникают только изгибающие моменты, а $Q = 0$. Для участка балки, где это условия выполняются $M = \text{const}$ (2). Рассмотрим только этот участок. На нем стержень изогнется под действием моментов M . Тогда при условии, что сечение балки однородное, в любом сечении будет одинаковый момент, а значит изменение кривизны стержня будет одинаковым. Следовательно, при чистом изгибе ось однородной балки принимает форму дуги окружности.

Разрезая стержень на равные части сечением $A-A$, получаем участки вдвое меньше (рис. 2), которые все еще остаются плоским в силу того, что обе стороны являются полностью равноценными. Процесс деления можно проложить дальше. Таким образом доказано, что в неограниченной области близости от любого заданного сечения можно задать бесконечно много сечений, которые в совокупности будут эквивалентны искомому. Это утверждение является точным для чистых сечений, для остальных видов является приближенным.

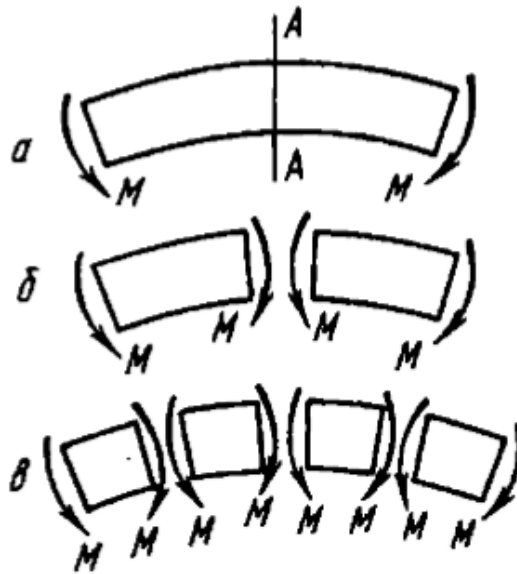


Рис. 2. Сечение $A-A$

Деформацию можно рассматривать как поворот плоских поперечных сечений относительно друг друга (рис. 3).

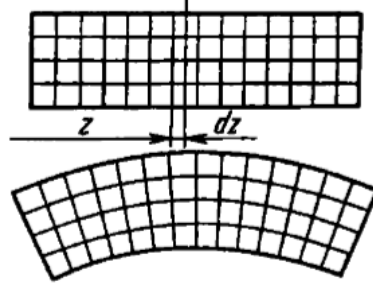


Рис. 3. Деформация плоского поперечного сечения

Рассмотрим два смежных сечения, расположенных на расстоянии dz (рис. 4). Примем левое сечение за неподвижное. При повороте правого сечения на угол $d\theta$ верхние слои удлинятся, нижние – укоротятся. Слой, который не изменится назовем нейтральным и обозначим CD . После поворота кривизна нейтрального слоя изменится следующим образом:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dz}, \quad (3)$$

Случайный отрезок $AB = dz$ (рис. 4) получит приращение $A'B' - AB$. С учетом того, что сечение остается плоским, $A'B' - AB = (\rho + y)d\theta - \rho d\theta = yd\theta$, где y – расстояние от AB до CD .

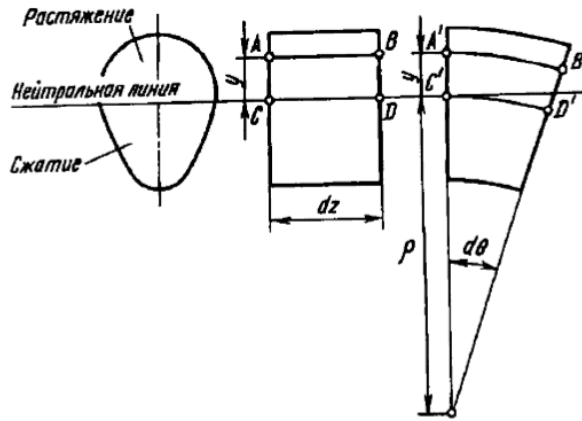


Рис. 4. Образование деформации при чистом изгибе

Относительное удлинение AB равно

$$\varepsilon = \frac{yd\theta}{dz} = \frac{y}{\rho}. \quad (4)$$

По закону Гука,

$$\sigma = E\varepsilon = E\frac{y}{\rho}. \quad (5)$$

Геометрическое место точек в сечении, где напряжение $\sigma = 0$, называется нейтральной линией сечения.

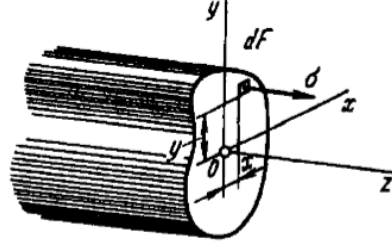


Рис. 5. Сечение балки

Сумма сил σdF (рис. 5) образует нормальную силу N в сечении. При чистом изгибе $N = 0$, поэтому $N = \int_F \sigma dF = 0$, с учетом 5, $\frac{E}{\rho} \int_F y dF = 0$, откуда

$$\int_F y dF = 0. \quad (6)$$

Получили статический момент относительно нейтральной линии. Поскольку он равен нулю, нейтральная линия проходит через центр тяжести сечения. Таким образом мы можем определить координату y в выражениях (4), (5): она отсчитывается от центральной оси, которая перпендикулярна плоскости кривизны. Аналогично определяется и кривизна $\frac{1}{\rho}$, как кривизна оси стержня.

Зададим систему координат x, y, z , связанную с сечением (рис. 5). Начало координат O совместим с центром тяжести сечения. Ось z направим по нормали к сечению, x — по нейтральной линии. Ось y лежит в плоскости кривизны.

Изгибающий момент в поперечном сечении стержня, как и нормальная сила, может быть выражен через напряжение σ .

$$\int_F \sigma x dF = M_y, \int_F \sigma y dF = M_x \quad (7)$$

Стоит отметить, что изменение кривизны стержня происходит не обязательно в плоскости изгибающего момента.

При указанных условиях момент сил σdF относительно оси y равен нулю, а относительно x — полному изгибающему моменту M . Тогда получаем:

$$\frac{E}{\rho} \int_F y x dF = 0, \frac{E}{\rho} \int_F \sigma y^2 dF = M. \quad (8)$$

Первое выражение сводится к $J_{xy} = 0$, т.е. изменение кривизны стержня происходит в плоскости момента в том случае, если последняя проходит через одну из главных осей сечения.

Из выражений (8) получаем зависимость кривизны стержня от изгибающего момента:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ_x}, \quad (9)$$

где J_x — момент инерции сечения относительно главной центральной оси, перпендикулярной плоскости изгибающего момента, E — модуль упругости, M — изгибающий момент. Величина EJ_x называется жесткостью стержня при изгибе.

Для стержня круглого сечения с диаметром D :

$$J_x = \frac{\pi D^4}{64}. \quad (10)$$

Для стержня прямоугольного сечения со сторонами b, h :

$$J_x = \frac{bh^3}{12}. \quad (11)$$

1.2. Дифференциальное уравнение равновесия стержня

Форму изогнутого стержня можно определить при помощи выражения (9). В неподвижной системе координат yOz (рис. 6).

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (12)$$

Поскольку мы рассматриваем случай малых перемещений, то тангенс θ между касательной к упругой линии изгиба и осью z мал. Поэтому квадратом y' можно пренебречь. и принять

$$\frac{1}{\rho} \approx y'', \quad (13)$$

откуда

$$y'' = \frac{M}{EJ_x}. \quad (14)$$

Таким образом, мы получили дифференциальное уравнение стержня (14). Сопоставим выражения (2) и (14), получаем четыре выражения, которые объясняют физический смысл производных 1–4 порядков соответственно:

$$\theta = y', \quad M = EJ_x y'', \quad Q = EJ_x y''', \quad q = EJ_x y^{IV}. \quad (15)$$

$y' = \theta$ — угол поворота сечения, y'' , y''' , y^{IV} прямо пропорционально зависят от момента M , точечной силы Q , распределенной нагрузки q соответственно. В свою очередь, y — отклонение точек осевой линии стержня от ее положения в недеформированном состоянии.

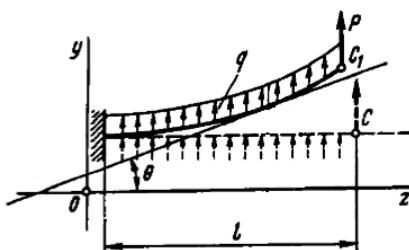


Рис. 6. Упругая линия изгиба балки

Целью данной работы является изучение двух методов его решения: интегрирования и обобщенных функций. Будут рассмотрены два вида задач: балка в консольной заделке и двух опорный стержень. После решения этих задач будут сделаны выводы о эффективности и удобности рассмотренных методов.

2. Теоретическая часть

2.1. Метод интегрирования

Обратимся к источнику [1]. Выражения (15) можно представить в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dz} = q(z) \\ \frac{dM}{dz} = P \\ \frac{d\theta}{dz} = \frac{M}{EJ_x} \\ \frac{dy}{dz} = \theta \end{cases} \quad (16)$$

В результате решения системы (16) получаем отклонение точек осевой линии стержня от ее положения в недеформированном состоянии y , что и будет являться ответом.

2.2. Метод обобщенных функций

Обратимся к источнику [2]. В 1926 г. английский физик Дирак ввёл в квантовой механике символ $\delta(z)$, названный им дельта функцией. Она определяется как непрерывный линейный функционал на пространстве дифференцируемых функций.

Дельта функцию (рис. 7) можно определить как

$$\delta(z - a) = \begin{cases} \infty, z = a \\ 0, z \neq a \end{cases} \quad (17)$$

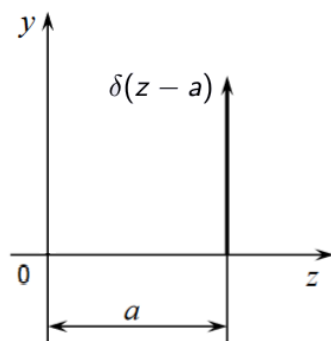


Рис. 7. Функция Дирака

Функция Хевисайда (рис. 8) определяется как

$$H(z - a) = \begin{cases} 0, & z < a \\ 1, & z \geq a \end{cases} \quad (18)$$

Она обладает следующими свойствами:

$$[H(z - a)]^\alpha = H(z - a), \quad H(z - a)H(z - b) = H(z - b),$$

т. е. при возведении в любую степень $0 > \alpha$ функция Хевисайда остаётся неизменной, при перемножении двух функций Хевисайда результат равен тому сомножителю, у которого сдвиг координаты больше: $a > b$.

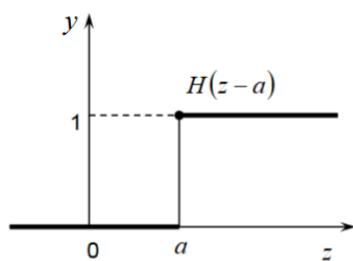


Рис. 8. Единичная функция Хевисайда

функцию Дирака и функцию Хевисайда (рис. 19).

При решении задач сопротивления материалов достаточно располагать двумя табличными интегралами, содержащими обобщенные функции Дирака и Хевисайда:

$$\int_b^z \delta(z - a) dz = H(z - a) \quad (19)$$

$$\int_b^z f(z) H(z - a) dz = H(z - a) \int_b^z f(z) dz. \quad (20)$$

Интеграл функции Хевисайда будет иметь следующий график:

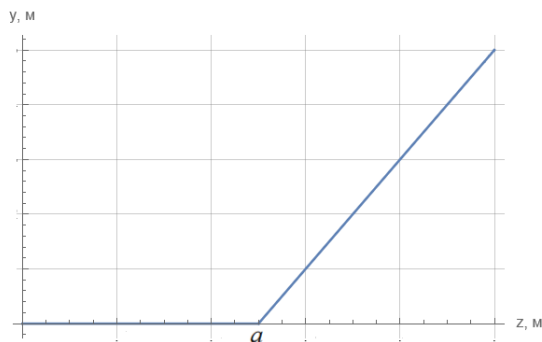


Рис. 9. Интеграл функции Хевисайда (19)

Повторный интеграл функции Хевисайда будет иметь следующий график:

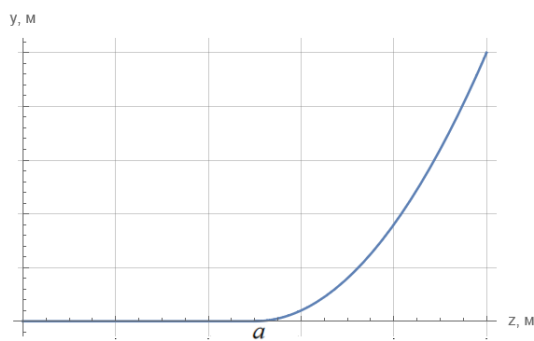


Рис. 10. Повторный интеграл функции Хевисайда (19)

Последний график (рис. 10) по форме напоминает изгиб упругого стержня, что и будет использовано для решения задач для нахождения уравнения изгиба балки.

3. Практическая часть

3.1. Балка в заделке

Балка в заделке (рис. 11). Составить уравнение упругой линии в заделке, нагруженной на конце сосредоточенной силой $P = 1$ Н. $E_{Al} = 70$ ГПа, $J_x = \frac{Lh^3}{12}$ кг · м², $h = 0.01$ м, $L = 1$ м.

3.1.1. Решение методом интегрирования

Рассмотрим граничные условия:

$$\begin{cases} y = 0; y'' = 0, \text{ при } z = 0 \\ y'' = 0; EJ_x y''' = P, \text{ при } z = L \end{cases} \quad (21)$$

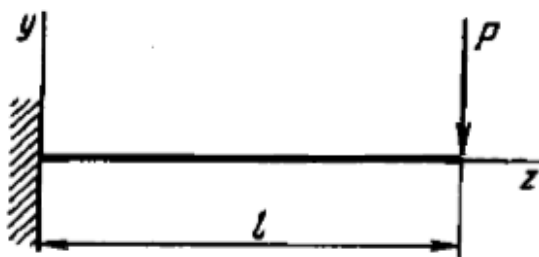


Рис. 11. Балка в заделке

Распределенная сила q равна 0, так как она не приложена. Найдём момент M :

$$M = \int_z^L P dz = P(L - z).$$

Далее ищем угол наклона сечения θ :

$$\theta = \frac{P}{EJ_x} \int_z^L (L - z) dz = \frac{P}{EJ_x} \left(\frac{z^2}{2} - Lz + c_1 \right).$$

Получаем уравнение изгиба балки:

$$y = \frac{P}{EJ_x} \int_z^L \left(\frac{z^2}{2} - Lz + c_1 \right) dz = \frac{P}{EJ_x} \left(\frac{z^3}{6} - \frac{z^2 L}{2} + c_1 z + c_2 \right).$$

Найдём c_1 и c_2 . Для этого рассмотрим граничные условия (21), из них следует, что $c_1 = 0$, поскольку $y(0) = 0$, а $c_2 = 0$, так как $\theta(0) = 0$. Получим итоговое уравнение:

$$y = \frac{P}{EJ_x} \left(\frac{z^3}{6} - \frac{z^2 L}{2} \right). \quad (22)$$

Максимальны прогиб будет равен $y_{max} = \frac{PLz^2}{EJ_x 2}$ при $z = L$. Упругая линия изгиба балки будет иметь следующий вид:

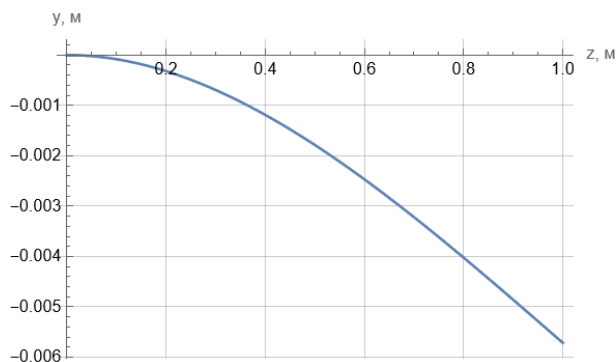


Рис. 12. Упругая линия изгиба балки (22)

3.1.2. Решение методом обобщенных функций

Рассмотрим граничные условия:

$$\begin{cases} y = 0; \theta = 0, \text{ при } z = 0 \\ y'' = 0; EJ_x y''' = 0, \text{ при } z = L \end{cases} \quad (23)$$

Рассмотрим уравнения (16) и функцию Дирака (17). Запишем с помощью выражений (16) и (17) начальное уравнение:

$$EJ_x y^{IV} = P\delta(z - L).$$

Интегрируем, согласно (19) получаем:

$$EJ_x y''' = PH(z - L) + c_1.$$

Из граничных условий (23) получаем $c_1 = P$. Интегрируем (20), согласно (19) и учитывая, что $H(z - L) = 0$ при $z \leq L$ получаем:

$$EJ_x P \int_L^z (H(z - L) + 1) dz = Pz + c_2.$$

Из граничных условий (23) получаем $c_2 = -PL$. Найдём угол поворота балки в плоскости сечения:

$$EJ_x y' = P \int_L^z (z - L) dz = P \left(\frac{z^2}{2} - Lz \right) + c_3.$$

Получаем уравнение гибкого изгиба балки:

$$y = \frac{P}{EJ_x} \left(\frac{z^3}{6} - \frac{z^2 L}{2} \right) + c_3 z + c_4.$$

Из граничных условий (23) получаем:

$$c_3 = 0, c_4 = 0.$$

Получаем итоговое уравнение изгиба балки

$$y = \frac{P}{EJ_x} \left(\frac{z^3}{6} - \frac{z^2 L}{2} \right) \quad (24)$$

Таким образом, ответ метода обобщенных функций (24) совпал с ответом способа интегрирования (22).

3.2. Двух опорная балка

Двух опорный стержень длиной L нагружен силой $P = 1$ Н, расположен на расстоянии a от левой опоры (рис. 13). Составить уравнение упругой линии.

$$E_{Al} = 70 \text{ ГПа}, J_x = \frac{Lh^3}{12} \text{ кг} \cdot \text{м}^2, h = 0.01 \text{ м}, L = 1 \text{ м}.$$

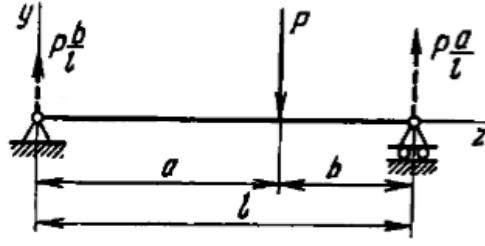


Рис. 13. Двух опорный стержень

3.2.1. Решение методом интегрирования

Рассмотрим граничные условия:

$$\begin{cases} y = 0, M = 0, \text{ при } z = 0 \\ y = 0, M = 0, \text{ при } z = L \\ y_1 = y_2 \text{ и } y'_1 = y'_2, \text{ при } z = a \end{cases} \quad (25)$$

Распределенная сила q равна 0, так как она не приложена. Разобьем стержень на 2 части: до точки приложения P и после. Сила $P_1 = \frac{Pb}{L}$. Найдём момент M_1 :

$$M_1 = \frac{b}{L} \int_0^z P dz = Pz + c_0^1$$

Параметр $c_0^1 = 0$, так как момент равен нулю (не консоль). Найдём угол поворота θ_1 :

$$\theta_1 = \frac{b}{L} \frac{P}{EJ_x} \int_0^z Pz dz = \frac{b}{L} \frac{P}{EJ_x} \left(\frac{b}{L} \frac{z^2}{2} + c_1^1 \right)$$

Получаем первое уравнение изгиба балки y_1 :

$$y_1 = \frac{b}{L} \frac{P}{EJ_x} \int_0^z \left(\frac{z^2}{2} + \theta_1 \right) dz = \frac{b}{L} \frac{P}{EJ_x} \left(\frac{z^3}{6} + c_1^1 z + c_2^1 \right), \quad (26)$$

Параметр $c_2^1 = 0$, так как конца стержень неподвижен по оси y .

Рассмотрим вторую часть стержня. Сила $P_2 = \frac{Pa}{L}$. Найдём момент M_2 :

$$M_2 = \frac{a}{L} \int_L^z P dz = -P(z + L)$$

Найдём угол поворота θ_2 :

$$\theta_2 = -\frac{a}{L} \frac{P}{EJ_x} \int_L^z P(z + L) dz = -\frac{a}{L} \frac{P}{EJ_x} \left(\frac{z^2}{2} + zL - c_1^2 \right).$$

Получаем второе уравнение изгиба балки y_2 :

$$y_2 = -\frac{a}{L} \frac{P}{EJ_x} \int_L^z \left(\frac{z^2}{2} + zL - c_1^2 \right) dz = -\frac{a}{L} \frac{P}{EJ_x} \left(\frac{z^3}{6} + \frac{z^2 L}{2} - c_1^2 z + c_2^2 \right), \quad (27)$$

Из граничных условий (25) получаем:

$$c_2^1 = 0, c_2^2 = a^3 \frac{1}{6}.$$

А так же из граничных условий (25) получается:

$$\begin{cases} y_1 = y_2 \\ y_1' = y_2' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \left(\frac{z^3}{6} + c_1^1 z + c_2^1 \right) = a \left(\frac{z^3}{6} + \frac{z^2 L}{2} - c_1^2 z + c_2^2 \right) \\ b \left(\frac{b}{L} \frac{z^2}{2} + c_1^1 \right) = a \left(\frac{z^2}{2} + zL - c_1^2 \right) \end{cases} \quad (28)$$

Решаем систему (28). Получаем:

$$\begin{cases} c_1^1 = \frac{a}{6L} (3aL - 2L^2 - a^2) \\ c_1^2 = -\frac{a}{6L} (2L^2 + a^2) \end{cases}$$

Подставляем в уравнения y_1 (26) и y_2 (27), получаем:

$$y(z) = \begin{cases} y_1 = \frac{P}{6EJ_x} \frac{b}{L} \left(z^3 - \frac{2}{3} zL \left(2L - \frac{2}{3} L \right) \right), \text{ при } 0 \leq z \leq a \\ y_2 = \frac{P}{6EJ_x} \frac{a}{L} \left(-z^3 + 3z^2 L - z \left(2L^2 + \frac{4}{9} L^2 \right) + \frac{4}{9} L^4 \right), \text{ при } a \leq z \leq b \end{cases} \quad (29)$$

Пусть $a = \frac{2L}{3}, b = \frac{L}{3}$, тогда упругая линия изгиба балки будет иметь следующий вид:

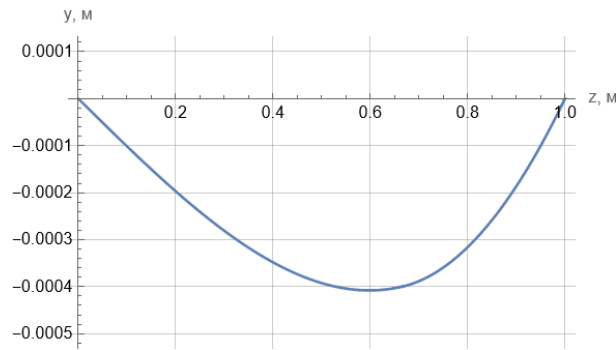


Рис. 14. Упругая линия изгиба балки (29)

3.2.2. Решение методом обобщенных функций

Рассмотрим граничные условия:

$$\begin{cases} y = 0, M = 0, \text{ при } z = 0 \\ y = 0, M = 0, \text{ при } z = L \end{cases} \quad (30)$$

Обратимся к источнику [3]. Рассмотрим уравнения (16) и функцию Дирака (17).

$$EJ_x y^{IV} = -P\delta(z - a).$$

Интегрируем, согласно (19) получаем:

$$EJ_x y''' = -PH(z - a) + c_1.$$

Из граничных условий (30) получаем $c_1 = P$. Найдем момент M согласно (20):

$$M = \frac{1}{EJ_x} \int_0^z (c_1 - PH(z - a)) dz = \frac{1}{EJ_x} (-P(z - a)H(z - a) + c_1 z) + c_2$$

Из граничных условий (30) получаем $c_2 = 0$ ($M = 0$, при $z = 0$), $c_1 = P\frac{b}{L}$ ($M = 0$, при $z = L$).

$$M = \frac{P}{EJ_x} \left(\frac{bz}{L} - (z - a)H(z - a) \right).$$

Найдем угол поворота балки в плоскости сечения:

$$y' = \frac{P}{EJ_x} \int_0^z \left(\frac{bz}{L} - (z - a)H(z - a) \right) dz$$

$$y' = \frac{P}{EJ_x} \left(\frac{bz^2}{2L} + \frac{(z - a)^2}{2} H(z - a) \right) + c_3.$$

Получаем уравнение гибкого изгиба балки:

$$y = \frac{P}{EJ_x} \left(\frac{bz^3}{6L} - \frac{(z - a)^3}{6} H(z - a) \right) + c_3 z + c_4.$$

Из условия $y(0) = 0$ (30) следует, что $c_4 = 0$. Так же найдем из условия $y(L) = 0$ угол поворота сечения c_3 :

$$c_3 = -\frac{Pb}{6EJ_x L} (L^2 - b^2)$$

Тогда итоговое уравнение изгиба балки имеет вид:

$$y = \frac{P}{6EJ_x} \left(\frac{bz^3}{L} - (z - a)^3 H(z - a) - \frac{zb}{L} (L^2 - b^2) \right) \quad (31)$$

Пусть $a = \frac{2L}{3}$, $b = \frac{L}{3}$, тогда прогиб балки будет описан функцией, график которой представлен на рис. 15:

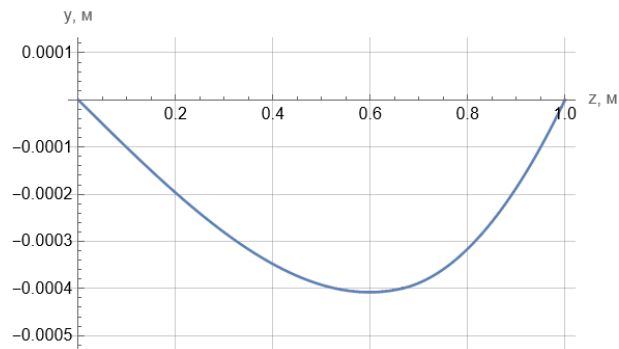


Рис. 15. Упругая линия изгиба балки

Таким образом, график линии изгиба, полученный с помощью метода обобщенных функций (рис. 15), совпал с графиком линии изгиба, полученным с помощью способа интегрирования (рис. 14).

Заключение

В ходе выполнения курсовой были изучены методы интегрирования и обобщенных функций нахождения уравнения упругого изгиба стержня. С помощью этих методов были решены два типа задач, их результаты оказались идентичны. Метод интегрирования является более трудоемким и менее удобным по сравнению с методом обобщенных функций, так как требует учета большего количества граничных условий и большего объема вычислений.

Список использованных источников

1. В.И. Феодосьев Сопротивление материалов: учеб. для вузов. — 10-е изд., перераб. и доп. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 1999. — 590 с.
2. Техническая теория стержней. Применение обобщённых функций для решения задач сопротивления материалов [Электронный ресурс] : учеб. пособие / С. А. Корнеев. – Омск : Изд-во ОмГТУ, 2011.
3. И.А. Бригер, Р.Р. Мавлютов Сопротивление материалов: учебное пособие. - М.: Наука Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. — 560 с.