



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Московский государственный технический университет  
имени Н. Э. Баумана  
(национальный исследовательский университет)»  
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

---

ФАКУЛЬТЕТ \_\_\_\_\_ Фундаментальные науки

КАФЕДРА \_\_\_\_\_ Прикладная математика

ДОМАШНЯЯ РАБОТА ПО КУРСУ  
*«Математические модели прикладной механики»*  
**НА ТЕМУ:**  
*Раскрытие статической неопределимости*  
*балки при поперечном изгибе*  
**Вариант 15**

Студент \_\_\_\_\_  
ФН2-71Б  
(Группа)

\_\_\_\_\_  
(Подпись, дата)

В. Г. Пиневич  
\_\_\_\_\_  
(И. О. Фамилия)

Преподаватель

\_\_\_\_\_  
(Подпись, дата)

Е. А. Максимова  
\_\_\_\_\_  
(И. О. Фамилия)

2023 г.

## Оглавление

Обозначения . . . . .	3
1. Постановка задачи . . . . .	4
2. Схема нагружения в соответствии с индивидуальным заданием . .	5
3. Степень статической неопределимости балки . . . . .	5
4. Переход к статически определимой балке . . . . .	5
5. Балка под действием только реакции $R_3$ . . . . .	6
6. Прогиб балки только при реакции $R_3$ . . . . .	8
7. Статически определимая балка без реакции $R_3$ . . . . .	9
8. Прогиб балки только без реакции $R_0$ . . . . .	10
9. Определение силы реакции $R_3$ . . . . .	10
10. Расчёт статически неопределимой балки . . . . .	11
10.1. Изгибающий момент и перерезывающая сила . . . . .	11
10.2. Прогиб исходной балки . . . . .	12
11. Наибольшее растягивающее напряжение . . . . .	13
12. Заключение . . . . .	14
Список использованных источников . . . . .	15

## Обозначения

$L$  — длина трети балки, м;

$b$  — основание прямоугольного поперечного сечения балки, м;

$h$  — высота прямоугольного поперечного сечения балки, м;

$E$  — продольный модуль упругости (модуль Юнга), Па;

$J_z$  — осевой момент инерции относительно нейтральной оси, м<sup>4</sup>;

$W_z$  — момент сопротивления сечения при изгибе, м<sup>3</sup>;

$R_3$  — сила реакции, приложенная вместо отброшенной связи, Н;

$M_i$  — момент, Н·м;

$P_i$  — сила или реакция, Н;

$q^\circ$  — равномерно распределённая нагрузка, Н/м;

$M_3$  — изгибающий момент, Н·м;

$Q$  — перерезывающая сила, Н;

$w$  — величина прогиба балки, м;

$\sigma_{11}^{max}$  — максимальное растягивающее напряжение, Па.

## 1. Постановка задачи

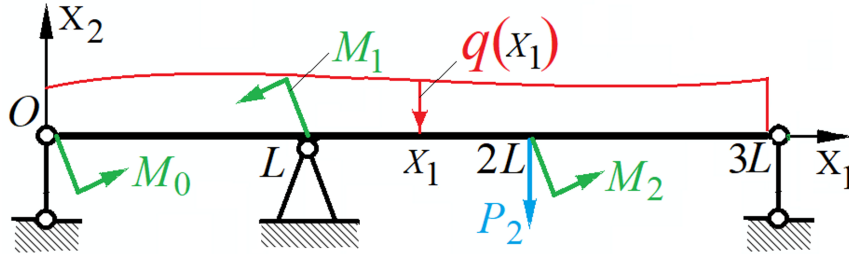


Рис. 1. Общая схема нагружения статически неопределимой балки

В соответствии с индивидуальным заданием необходимо использовать тип связи  $R_3$ . Это означает, что при раскрытии статической неопределимости шарнирную опору балки при  $x_1 = 3L$  следует заменить подлежащей определению реакцией  $R_3$  с положительным направлением вдоль положительного направления координатной оси  $Ox_2$ . Положительные направления нагружающих силовых факторов соответствуют их направлениям, отмеченным на рис. 1 стрелками.

Для индивидуального варианта заданы моменты  $M_0 = M$ ,  $M_1 = -M$ ,  $M_2 = 0$ , прикладываемая сила  $P_2 = -P$  и распределённая нагрузка  $q(x_1) = q^\circ$ ,  $x_1 \in (0, 2L)$ .

При этом  $M = 2000 \text{ Н}\cdot\text{м}$ ,  $P = 1000 \text{ Н}$ ,  $q^\circ = 1000 \text{ Н/м}$ ,  $L = 1 \text{ м}$ . Прямоугольное поперечное сечение балки имеет основание  $b = 30 \text{ мм}$  и высоту  $h = 65 \text{ мм}$ . Балка выполнена из малоуглеродистой стали с продольным модулем упругости (модулем Юнга)  $E = 210 \text{ ГПа}$ .

## 2. Схема нагружения в соответствии с индивидуальным заданием

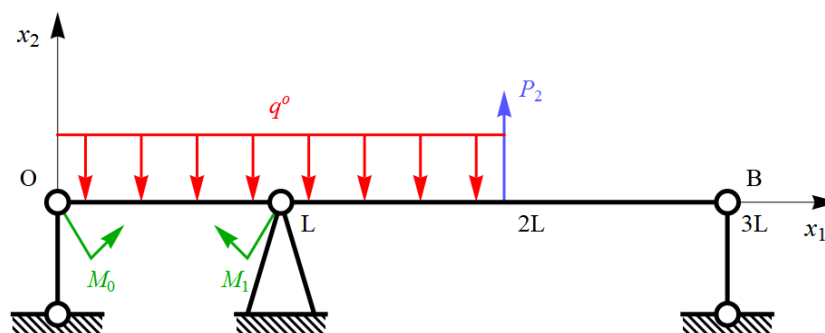


Рис. 2. Схема нагружения балки для заданного варианта

## 3. Степень статической неопределимости балки

Для полученной системы неизвестными являются 3 реакции в шарнирах. Однако можем записать всего 2 уравнения равновесия, а именно уравнение равновесия сил в проекции на вертикальную ось и уравнение равновесия моментов относительно точки. Значит, система является 1 раз статически неопределимой, то есть для определения всех возникающих реакций недостаточно только уравнений статики.

## 4. Переход к статически определимой балке

В соответствии с индивидуальным вариантом отбросим указанную в задании наложенную связь  $P_3$  и заменим её соответствующей реакцией  $R_3$ . Таким образом осуществим переход к статически определимой балке.

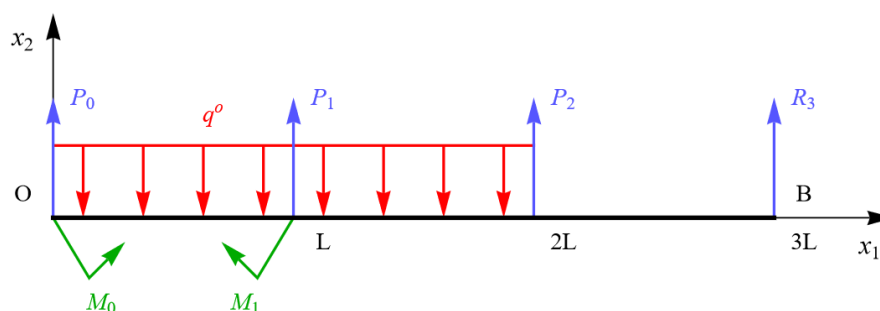


Рис. 3. Нагружение для статически определимой балки

Уравнение равновесия сил в проекции на вертикальную ось  $Ox_2$  имеет вид

$$\sum P = 0 \Rightarrow R_3 + P_1 + P_2 + P_0 - 2L \cdot q^\circ = 0.$$

Аналогично уравнение равновесия моментов относительно точки  $O$

$$\sum M = 0 \Rightarrow M_0 - M_1 + L \cdot P_1 + 2L \cdot P_2 + 3L \cdot R_3 - L^2 \cdot q^\circ = 0.$$

Откуда получим

$$\begin{cases} P_1 = \frac{(M_1 - M_0) + L(-2P_2 + 2L \cdot q^\circ - 3R_3)}{L}, \\ P_0 = \frac{(M_0 - M_1) + 2LR_3 + LP_2}{L}. \end{cases} \quad (1)$$

## 5. Балка под действием только реакции $R_3$

Будем считать, что на балку действует только реакция  $R_3$ , приложенная вместо отброшенной связи, а все остальные нагружающие силовые факторы отсутствуют.

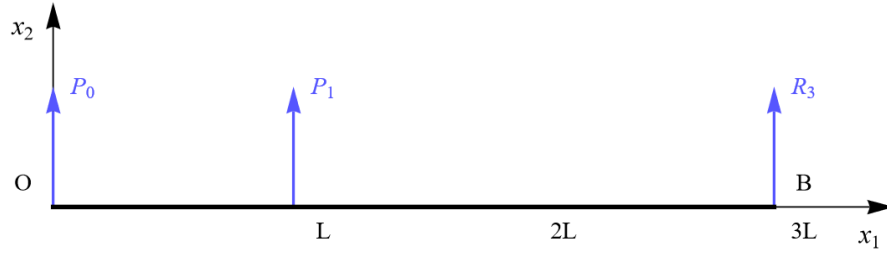


Рис. 4. Нагружение балки только реакцией  $R_3$

Уравнения равновесия сил в проекции на вертикальную ось  $Ox_2$  и моментов относительно точки  $B$  в этом случае имеют вид

$$\begin{cases} R_3 + P_1 + P_0 = 0, \\ L \cdot P_1 + 3L \cdot R_3 = 0. \end{cases}$$

Откуда получим

$$\begin{cases} P_1 = -3R_3, \\ P_0 = 2R_3. \end{cases} \quad (2)$$

Для упрощения выкладок введём функции

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{x^n}{n!}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Эти функции для  $a \geq 0$  обладают свойствами:

1)  $f'_n(x - a) = f_{n-1}(x - a)$  для  $n \in \mathbb{N}$ , причём  $f'_0(x - a) = 0$ .

2)  $\int_0^x f_n(\xi - a) d\xi = f_{n+1}(x - a)$  для  $n \in \mathbb{Z}_+$ .

Тогда можно записать выражение для изгибающего момента

$$M(x_1) = R_3 f_1(x_1) + P_1 f_1(x_1 - L).$$

Перерезывающая сила связана с изгибающим моментом следующим образом:

$$Q(x_1) = \frac{dM_3(x_1)}{dx_1}. \quad (3)$$

Тогда

$$Q(x_1) = R_3 f_0(x_1) + P_1 f_0(x_1 - L).$$

С учётом (2) имеем

$$\begin{cases} M_3(x_1) = R_3 (f_1(x_1) - 3f_1(x_1 - L)), \\ Q(x_1) = R_3 (f_0(x_1) - 3f_0(x_1 - L)). \end{cases} \quad (4)$$

Построим в безразмерных переменных эпюры изгибающего момента и перерезывающей силы в случае, когда действует только сила реакции  $R_3$ , приложенная вместо отброшенной связи.

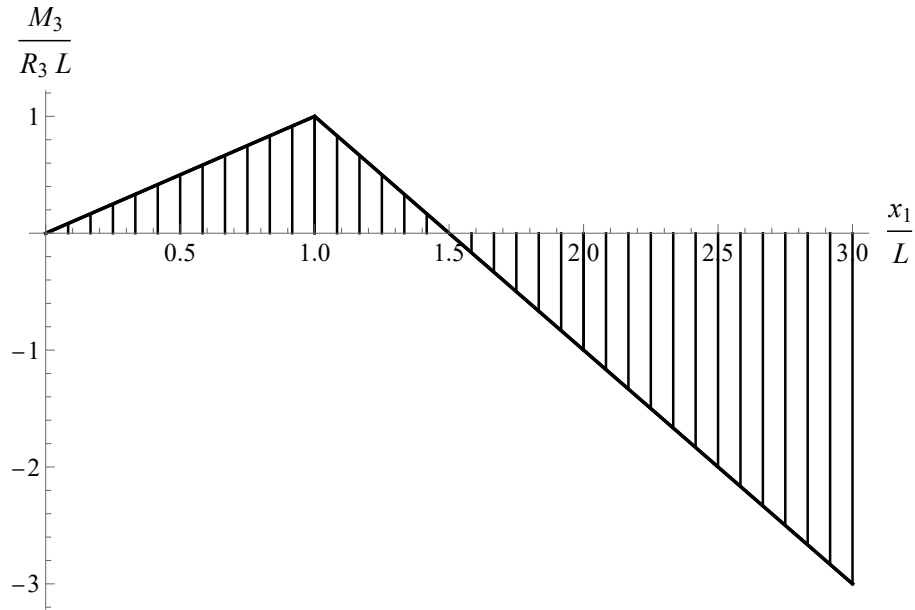
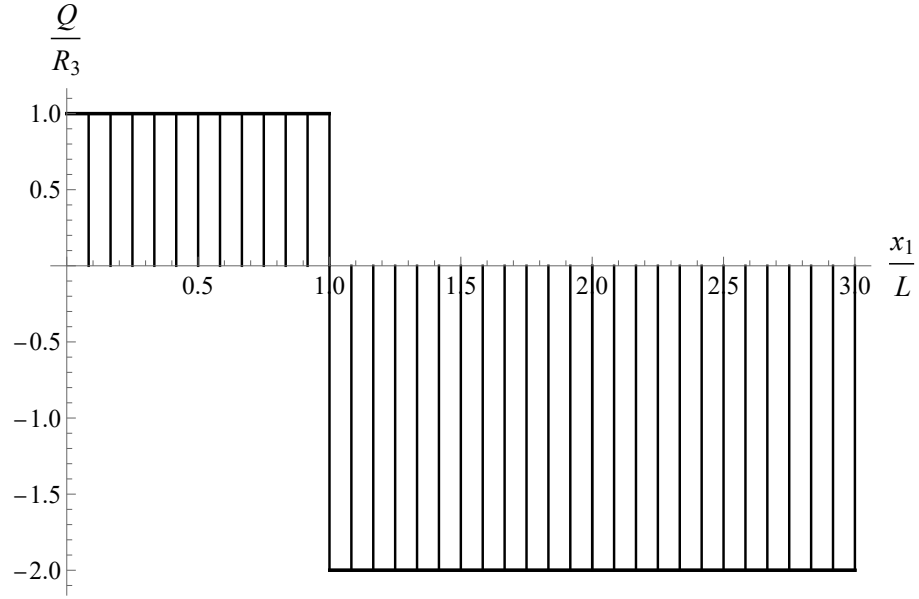


Рис. 5. Эпюра изгибающего момента при действии только  $R_3$

Рис. 6. Эшюра перерезывающей силы при действии только  $R_3$ 

## 6. Прогиб балки только при реакции $R_3$

Дифференциальное уравнение для прогиба балки

$$\frac{d^2 w(x_1)}{dx_1^2} = \frac{M_3(x_1)}{EJ_3}.$$

Общее решение имеет вид

$$w(x_1) = w(0) + w'(0)x_1 + \int_0^{x_1} dt \int_0^t \frac{M_3(\xi)}{EJ_3} d\xi. \quad (5)$$

Ранее была отброшена одна связь в точке  $x_1 = 3L$ . Тогда остаётся 2 закрепления в точках  $x_1 = L$  и  $x_1 = 0$ , в которых балка не должна прогибаться. В этом случае имеем следующие граничные условия:

$$w(L) = 0, \quad w(0) = 0. \quad (6)$$

С учётом (4) прогиб балки под действием только реакции  $R_3$

$$w(x_1) = \frac{R_3}{EJ_3} \left( f_3(x_1) - 3f_3(x_1 - L) - \frac{L^2}{6} \right), \text{ где } J_3 = \frac{hb^3}{12}. \quad (7)$$



## 7. Статически определяемая балка без реакции $R_3$

Будем считать, что на балку действуют все силовые факторы, кроме реакции  $R_3$ , приложенной вместо отброшенной связи.

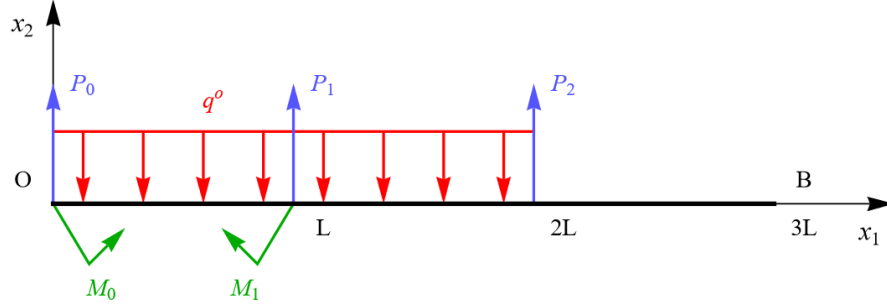


Рис. 7. Нагружение балки без учёта реакции  $R_3$

Уравнения равновесия сил в проекции на вертикальную ось  $Ox_2$  и моментов относительно точки  $O$  в этом случае имеют вид

$$\begin{cases} P_1 + P_2 + P_0 - 2L \cdot q^\circ = 0, \\ M_0 - M_1 + L \cdot P_1 + 2L \cdot P_2 - 2L^2 \cdot q^\circ = 0. \end{cases}$$

Откуда получим

$$\begin{cases} P_1 = \frac{M_1 - M_0 + 2L(L \cdot q^\circ - P_2)}{L}, \\ P_0 = \frac{M_0 - M_1 + LP_2}{L}. \end{cases} \quad (8)$$

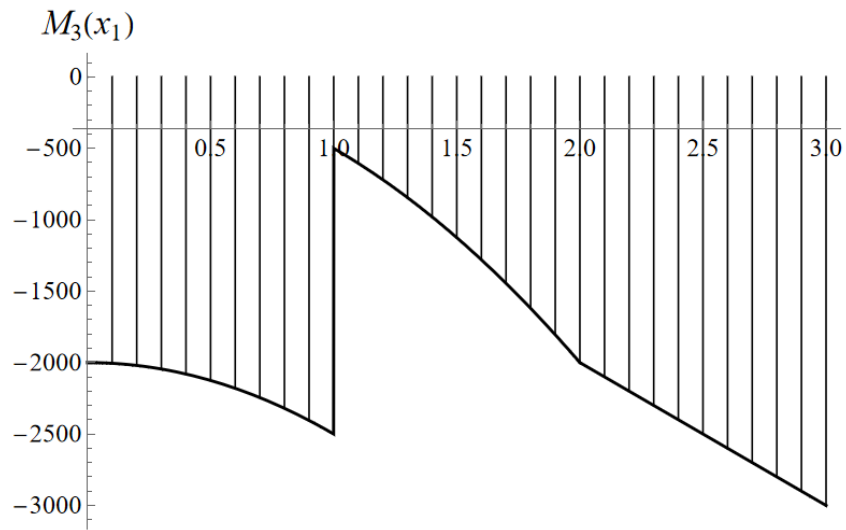
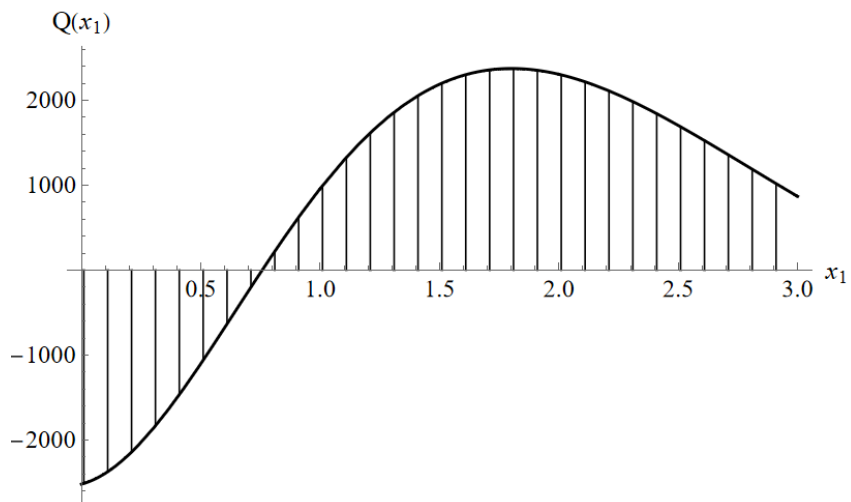
В этом случае выражение для изгибающего момента имеет вид

$$M_3(x_1) = M_1 f_0(x_1 - L) - M_0 f_0(x_1) + P_1 f_1(x_1 - L) + P_2 f_1(x_1 - 2L) - q^\circ f_2(x_1) + q^\circ f_2(x_1 - 2L). \quad (9)$$

С учётом (3) перерезывающая сила

$$Q(x_1) = P_1 f_0(x_1 - L) + P_2 f_0(x_1 - 2L) - q^\circ f_1(x_1) + q^\circ f_1(x_1 - 2L). \quad (10)$$

Построим эпюры изгибающего момента и перерезывающей силы для статически определяемой балки в случае, когда действуют все силовые факторы, кроме реакции  $R_3$ , приложенной вместо отброшенной связи, с учётом (8) при значениях параметров в соответствии с индивидуальным заданием.

Рис. 8. Эпюра изгибающего момента без учёта реакции  $R_3$ Рис. 9. Эпюра перерезывающей силы без учёта реакции  $R_3$ 

## 8. Прогиб балки только без реакции $R_0$

С учётом (5), (6) и (9) прогиб статически определимой балки без реакции  $R_0$

$$w(x_1) = \frac{1}{EJ_3} \left( M_1 f_2(x_1 - L) - M_0 f_2(x_1) + P_1 f_3(x_1 - L) + \right. \\ \left. + P_2 f_3(x_1 - 2L) - q^\circ f_4(x_1) + q^\circ f_4(x_1 - 2L) + \frac{12LM_0 + L^3 q^\circ}{24} x_1 \right) \quad (11)$$

## 9. Определение силы реакции $R_3$

Для статически неопределимой балки в точке  $x_1 = 0$  имеем закрепление, поэтому прогиб в этой точке отсутствует. Тогда для определения силы реакции  $R_3$  можно воспользоваться условием

$$w_{R_3} + w_0 = 0.$$

С учётом (7) и (11) имеем

$$R_3 = \frac{72L^2M_0 - 48L^2M_1 - 4L^3P_2 + 77L^4q^\circ}{12L^3 - 4L^2}.$$

Тогда из (1) получим силы реакции для статически неопределимой балки

$$\begin{cases} P_1 = \frac{M_1 - M_0 + L(-45375 - 2P_2 + 2Lq^\circ)}{L}, \\ P_0 = \frac{30250L + M_0 - M_1 + LP_2}{L}. \end{cases}$$

При значениях параметров в соответствии с индивидуальным заданием

$$R_3 = 15125 \text{ Н}, \quad P_0 = 31250 \text{ Н}, \quad P_1 = -45375 \text{ Н}.$$

## 10. Расчёт статически неопределимой балки

### 10.1. Изгибающий момент и перерезывающая сила

Выражения для изгибающего момента и перерезывающей силы статически неопределимой балки можно получить путём сложения соответствующих выражений для балки под действием только силы реакции  $R_3$ , приложенной вместо отброшенной связи, а также статически определимой балки без учёта силы реакции  $R_3$ .

Построим эпюры полученных изгибающего момента и перерезывающей силы для статически неопределимой балки при значениях параметров в соответствии с индивидуальным заданием.

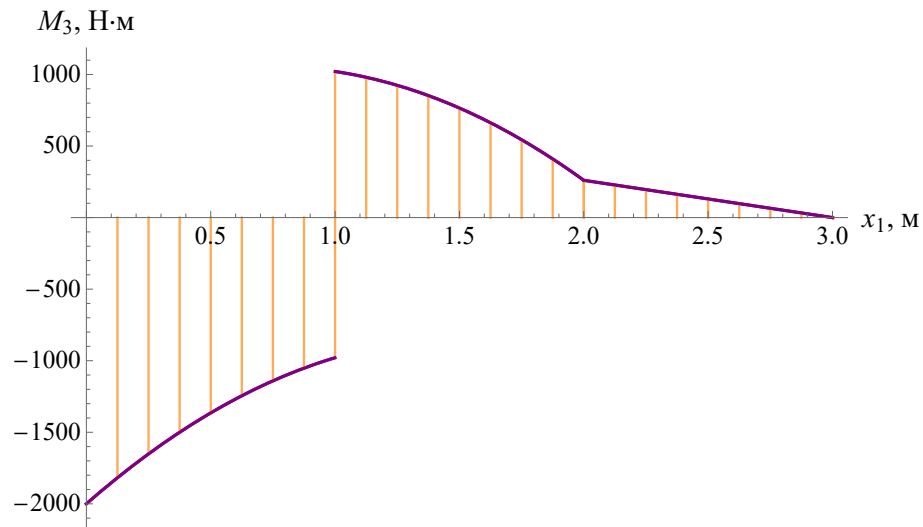


Рис. 10. Эпюра изгибающего момента статически неопределимой балки

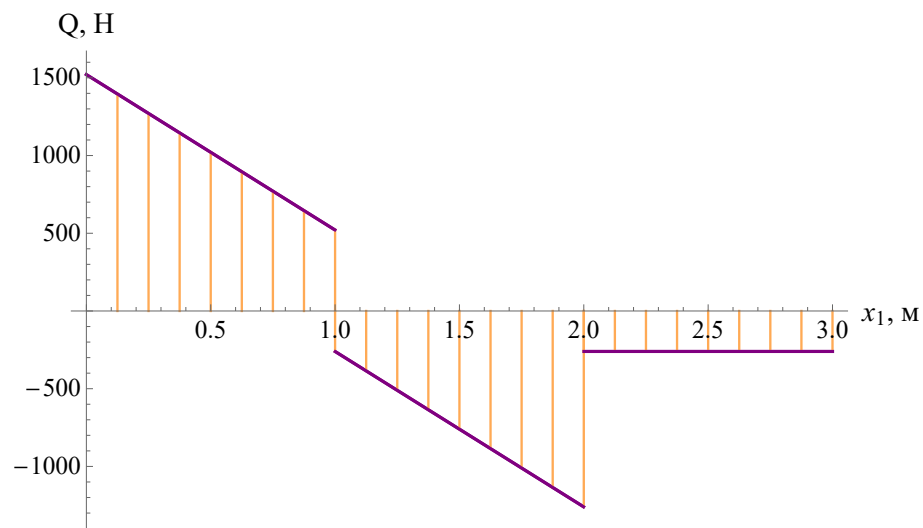


Рис. 11. Эпюра перерезывающей силы статически неопределимой балки

### 10.2. Прогиб исходной балки

Выражения для прогиба статически неопределимой балки также можно получить путём сложения соответствующих выражений для балки под действием только силы реакции  $R_3$ , а также статически определимой балки без учёта силы реакции  $R_3$ .

Построим график зависимости прогиба для статически неопределимой балки при значениях параметров в соответствии с индивидуальным заданием.

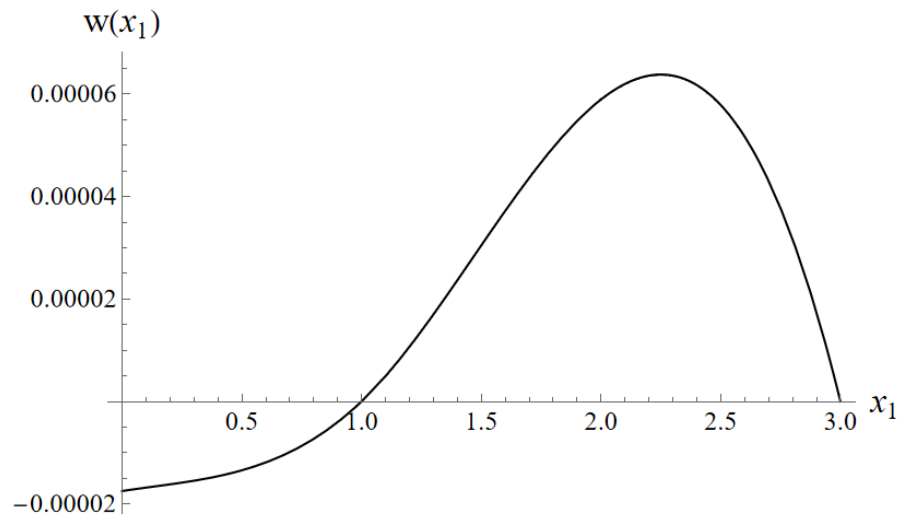


Рис. 12. Прогиб статически неопределимой балки

## 11. Наибольшее растягивающее напряжение

Максимальное растягивающее напряжение в поперечном сечении, симметричном относительно нейтральной оси, можно определить по формуле

$$\sigma_{11}^{max} = \frac{M_3}{W_3}.$$

Для прямоугольного поперечного сечения момент сопротивления сечения при изгибе имеет вид

$$W_3 = \frac{bh^2}{6}.$$

Наибольшее по абсолютной величине значение изгибающего момента  $M_0$  достигается при  $x_1 = 0$ . Тогда

$$\sigma_{11}^{max} = 6 \frac{|M_0|}{bh^2}.$$

При значениях параметров в соответствии с индивидуальным заданием

$$\sigma_{11}^{max} \approx 94,675 \text{ МПа}.$$

## 12. Заключение

В данной работе для заданной пары металлов были получены следующие результаты:

- 1) изображена схема нагружения статически неопределимой балки в соответствии с индивидуальным заданием;
- 2) проверена степень статической неопределимости балки;
- 3) в соответствии с индивидуальным вариантом осуществлён переход к статически определимой балке путём отбрасывания указанной в задании наложенной связи  $P_0$  и замены её соответствующей реакцией  $R_3$ ;
- 4) построены эпюры изгибающего момента и перерезывающей силы только от действия указанной выше реакции, приложенной вместо отброшенной связи (шарнирной опоры);
- 5) найдена однозначная аналитическая зависимость величины прогиба балки под действием только реакции  $R_3$ ;
- 6) построены эпюры изгибающего момента и перерезывающей силы для статически определимой балки без учёта отброшенной связи и её силы реакции;
- 7) для статически определимой балки найдена аналитическая зависимость величины прогиба от продольной координаты;
- 8) из равенства нулю алгебраической суммы полученных в пп. 5 и 7 прогибов балки в сечении, соответствующем отброшенной опоре, получена зависимость реакции  $R_3$  в этом сечении от остальных заданных параметров;
- 9) для исходной статически неопределимой балки построены эпюры изгибающего момента и перерезывающей силы, а также определена зависимость прогиба балки от продольной координаты и построен график этой зависимости;
- 10) для поперечного сечения балки с наибольшим по абсолютному значению изгибающим моментом найдено наибольшее растягивающее напряжение.

## Список использованных источников

1. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. 512 с.
2. Зарубин В. С., Кувыркин Г. Н., Станкевич И. В. Математические модели прикладной механики. М.: Изд-во МГТУ им Н. Э. Баумана, 2016. 282 с.
3. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. 15-е изд. М.: Изд-во МГТУ им Н.Э. Баумана, 2010. 590 с.