Аэроупругая модель сегментного надроторного кольца

Докладчик: Пиневич В. Г.
Научный руководитель: Селиванов А. В.

группа ФН2-81Б

26 июня 2024 г.

Надроторное кольцо

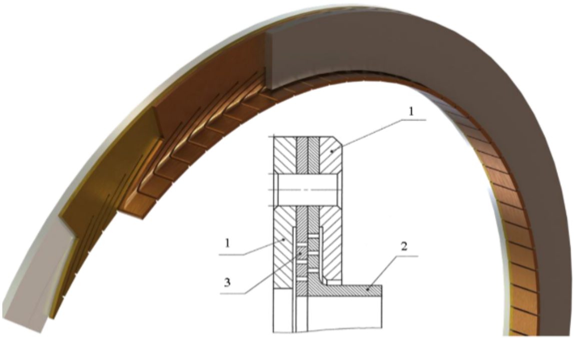

Рис. Схема бесконтактного пальчикового уплотнения: 1 – корпусные диски; 2 и 3 – задняя и передняя уплотняющие пластины

Постановка задачи

Данная работа посвящена получению пригодной к использованию в практических задачах формы уравнения Рейнольдса, решению его методом конечных элементов и поиску равновесного состояния для динамической системы дополненной пружиной как ограничителем сверху.

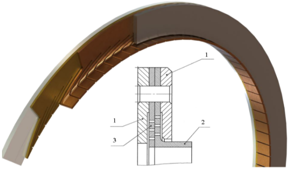

Рис. Схема бесконтактного пальчикового уплотнения: 1 – корпусные диски; 2 и 3 – задняя и передняя уплотняющие пластины

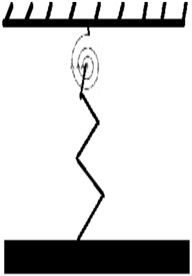

Рис. Схема модели пластины с пружиной

Гидродинамическое давление p в точках x, y, z

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial p}{\partial y} = \mu \left(\frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial p}{\partial z} = \mu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} = \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \end{cases}$$

Проекции скорости u, ν, ω на осях x, y, z.

Силы трения $p_{xy}, p_{xz}, p_{yx}, p_{yz}, p_{zx}, p_{zy}$

$$\begin{cases} p_{yz} = p_{zy} = \mu \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial \nu}{\partial z} \right) \\ p_{zx} = p_{xz} = \mu \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ p_{xy} = p_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \nu}{\partial x} \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_{yz} = p_{xy} = \mu \frac{\partial \omega}{\partial y} \\ p_{zx} = p_{xz} = 0 \\ p_{xy} = p_{yx} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

Условие несжимаемости жидкости, выраженное уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \nu}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \nu}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0.$$

Уравнение Рейнольдса

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial z}\right)=6\mu U\frac{\partial h}{\partial x}$$

Граничные условия

U — скорость в направлении x,
$p_{в}$ — повышенное давление,
$p_{н}$ — пониженное давление

Описание величин

$h = h(x, z)$ — толщина слоя,
$p = p(x, z)$ — давление,
μ — коэффициент вязкости

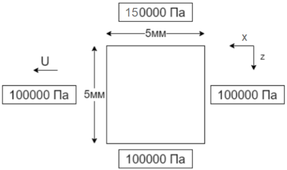

Рис. Схема области решения задачи

Решение уравнения Рейнольдса с помощью слабой формы Галеркина

Функции формы

$$\begin{cases} N_1 = 1 - \frac{x}{l} - \frac{z}{h} + \frac{xz}{lh}, \\ N_2 = \frac{x}{l} - \frac{xz}{lh}, \\ N_3 = \frac{xz}{lh}, \\ N_4 = \frac{z}{h} - \frac{xz}{lh} \end{cases}$$

Аппроксимирующая функция

$$\phi = c_0 N_1 + c_1 N_2 + c_2 N_3 + c_3 N_4$$

Приведение к форме Галеркина

$$\int_{S_i} \left(\frac{\partial [N]^T}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial [N]^T}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) - [N]^T 6 \mu U \frac{\partial h}{\partial x} \right) dxdz = 0$$

Сравнение постоянного и зазора с положительным коэффициентом

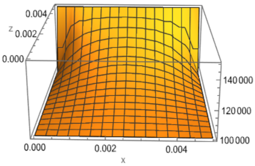

Рис. Решение для $h = 0.001$ м

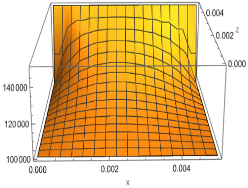

Рис. Решения для $h = 0.15x + 0.001$ м

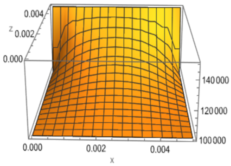

Рис. Решение для $h = -0.15x + 0.001$ м

Сравнение результатов при постоянном давлении на границе

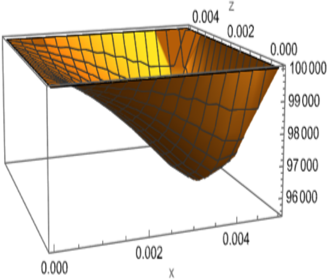

Рис. График для $h = -0.15x + 0.001$ м с одинаковыми ГУ

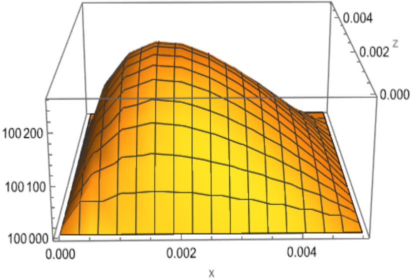

Рис. График для $h = 0.15x + 0.001$ м с одинаковыми ГУ

Верификация подстановкой правой части

Проверочная функция

$$f(x,z) = -2\frac{\pi}{0.005}\sin\left(\frac{\pi z}{0.005}\right)x\,(x-0.005)$$

Правая часть

$$g = \frac{\partial^2 f}{x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

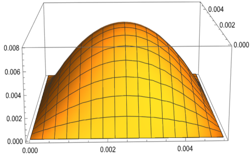

Рис. Проверочная функция

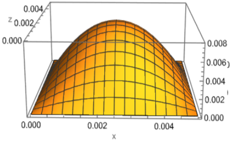

Рис. Результат на сетке 20 на 20

Размерность сетки	Разность, Па	Погрешность, %
5 на 5	0.0002	3.3
10 на 10	0.0001	0.8
20 на 20	0.0000	0.2

Проверочная функция

$$f(x,z) = -2\frac{\pi z}{0.005}\sin\frac{2\pi z}{0.005}\sin\frac{4\pi x}{0.005}$$

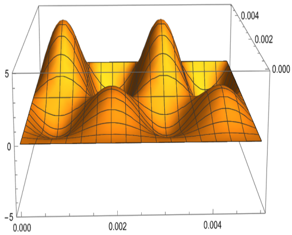

Рис. Проверочная функция

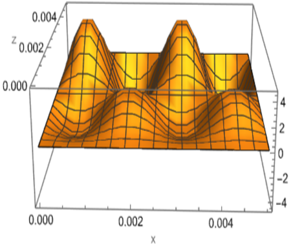

Рис. Решение на сетке 20 на 20

Размерность сетки	Разность, Па	Погрешность, %
5 на 5	0.969	21.31
10 на 10	0.260	5.7
20 на 20	0.065	1.4

Уравнение Лагранжа

$$\begin{cases} m\ddot{l} + \varepsilon\dot{l} + kl = F \\ J\ddot{\psi} + c\psi = M \end{cases}$$

Поиск положения равновесия

$$\begin{cases} kl = F \\ c\psi = M \end{cases}$$

Давление

$$s_i = p_i - p_{ext}$$

Сила

$$F_i = \int_{S_i} (N_1 s_1 + N_2 s_2 + N_3 s_3 + N_4 s_4)\, dxdz$$

Момент

$$M_i = \int_{S_i} (N_1 s_1 + N_2 s_2 + N_3 s_3 + N_4 s_4) \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdz$$

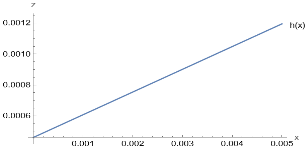

Рис. Положение равновесия при $h(x) = 0.147x + 0.00046$

Устойчивость положения равновесия

$$\begin{cases} l = l_0 + \Delta l, \\ \psi = \psi_0 + \Delta\psi \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta l = L e^{\omega t}, \\ \Delta\psi = \Psi e^{\omega t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} F = F_0 + d_1 \Delta l + d_2 \Delta\psi, \\ M = M_0 + u_1 \Delta l + u_2 \Delta\psi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(m\omega^2 - d_1 - \varepsilon\omega + k\right) L - d_2 \Psi = 0, \\ -u_1 L + \left(J\omega^2 - u_2 + c\right) \Psi = 0 \end{cases}$$

Критерий устойчивости

$$\begin{cases} a_4 = mJ \\ a_3 = -\varepsilon J \\ a_2 = (c - u_2)\, m + (k - d_1)\, J \\ a_1 = (u_2 - c)\, \varepsilon \\ a_0 = d_1 (u_2 - c) - k (u_2 - c) - d_2 u_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 > 0 \\ a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0 \\ \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} > 0 \end{cases}$$

Результаты

1. Показано, что исследование устойчивости положения равновесия сегментов надроторного кольца в потоке жидкости можно выполнить на основе инженерного подхода, объединяющего модель Рейнольдса для течения жидкой смазки и модель колебательной системы с двумя степенями свободы.
2. Показано возникновение подъемного гидродинамического клина в сужающемся по окружности зазоре, а также области разряжения в зазоре с расширением. Эти результаты согласуются с экспериментально наблюдаемой картиной течения в гидродинамических подшипниках и уплотнениях.
3. Построенная математическая модель может быть использована на этапе предварительного проектирования конструкции.

- Петров Н.П. Гидродинамическая теория смазки, М.: из-во академии наук СССР, 1948. — 558 с.
- Слезкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости, М.: из-во техно-теоретической литературы, 1955. — 521 с.
- Селегринд Л. Примененение метода конечных элементов, М.: из-во МИР, 1979. — 195 с.
- Seshu P. Textbook of Finite Element Analysis, New Dehli: PHI Learning Private Limited, 2012. — 340 с.
- Григорьев А.Ю., Григорьев К.А., Малявко Д.П. Колебания и виброактивность элементов машин: Учеб. пособие. СПб.: Университет ИТМО, 2016. — 136 с.
- Селиванов А.В., Дзева И.Ю., Многодисциплинарная математическая модель пальчикового уплотнения Уфа:, 2011 — 17 с.
- Феодосьев В.И. Сопротивление материалов: Учеб. для вузов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. – 592 с.