Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ Фундаментальные науки

КАФЕДРА Прикладная математика

ДОМАШНЯЯ РАБОТА ПО КУРСУ

«Математические модели прикладной механики»

НА ТЕМУ:

Упругие характеристики поликристаллических металлов

Вариант 15

$Si + Mg$

Студент ФН2-71Б (Группа) ________ (Подпись, дата) В. Г. Пиневич (И. О. Фамилия)

Руководитель курсовой работы ________ (Подпись, дата) Е. А. Максимова (И. О. Фамилия)

2023 г.

Оглавление

Список условных обозначений

C — матрица коэффициентов упругости

C_{ij} — элементы матрицы C $(i, j = \overline{1,6})$

S — матрица коэффициентов податливости

S_{ij} — элементы матрицы S $(i, j = \overline{1,6})$

S_n — линейная податливость в направлении $\boldsymbol{n}$

$e^{(\boldsymbol{n})}$ — относительное удлинение в направлении $\boldsymbol{n}$

σ_{kl} — компоненты тензора напряжений $\hat{\sigma}$ $(k, l = \overline{1,3})$

S_{ijkl} — компоненты тензора податливости $\hat{S}$ $(i, j, k, l = \overline{1,3})$

ε_{kl} — компоненты тензора малой деформации $\hat{\varepsilon}$ $(k, l = \overline{1,3})$

p — давление

δ_{ij} — символ Кронекера

V_0 — контрольный объем

I_{ijkl} — единичный тензор 4-го ранга $(i, j, k, l = \overline{1,3})$

ν — коэффициент Пуассона

C_{ijkl} — компоненты тензора коэффициентов упругости $\hat{C}$ $(i, j, k, l = \overline{1,3})$

C^o_{ijkl} — эффективные упругие характеристики поликристалла $(i, j, k, l = \overline{1,3})$

S^o_{ijkl} — эффективные характеристики податливости поликристалла $(i, j, k, l = \overline{1,3})$

ω_{ijkl} — тензор Эшелби $(i, j, k, l = \overline{1,3})$

E — модуль Юнга, ГПа

μ — модуль сдвига, ГПа

κ — модуль объемной упругости, ГПа

1. Постановка задачи

Для заданной пары чистых металлов по значениям коэффициентов упругости (или податливости) кристаллов вычислить элементы матрицы коэффициентов податливости (или упругости), сравнив точность обращения матриц с вычислением по формулам, и построить графики зависимостей линейной податливости от направления единичного вектора для гексагональной кристаллической решетки в плоскости, содержащей оптическую ось кристалла, а для кубической кристаллической решетки в плоскости грани и в плоскостях, имеющие общую точку диагонали двух граней, диагонали грани и куба, диагональ куба и ребро. Для кристаллической решетки каждого из металлов определить направления, по которым линейная податливость имеет экстремальные значения. Найти отношение полуосей эллипсоида вращения, образующегося после действия всестороннего давления на шар из металла с ГПУ кристаллической решеткой.

Для каждого из металлов в предположении хаотической ориентации зерен в поликристалле найти верхнюю и нижнюю оценки модулей сдвига, продольной и объемной упругости, оценки коэффициента Пуассона и сравнить полученные значения с вычисленными для случая статистически усредненной шаровой формы кристаллических зерен. Провести аналогичные расчеты и построить графики для пористого двухфазного сплава-смеси заданной пары металлов при трех фиксированных значениях объемной пористости, равных 0; 0.1 и 0.2, в зависимости от отношения $\dfrac{V_1}{(V_1+V_2)} \in [0;1]$, где V_1 и V_2 — объемные доли металлов в сплаве.

Таблица 1. Коэффициенты упругости и податливости

Si	C_{11}	C_{12}	C_{44}
ГПа	167	61	76

Mg	S_{11}	S_{12}	S_{13}	S_{33}	S_{44}
ТПа$^{-1}$	23.9	-9.48	-5.36	20.9	70.4

Вычисление элементов матриц коэффициентов упругости и коэффициентов податливости

Соотношение для связи коэффициентов упругости и коэффициентов податливости

$$C_{ijmn}S_{mnkl} = I_{ijkl}.$$

В матричной форме записи тензоров 4 ранга $\hat{C}, \hat{S}$ это выражение будет иметь вид

$$\hat{C}\hat{S} = I \tag{1}$$

1.1. Матрицы податливости и упругости для кубической кристаллической решетки

В кристаллах с кубической решеткой все оси Ox_k равноправны и матрица S коэффициентов податливости содержит лишь три отличных от нуля независимых элемента

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{11} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{12} & S_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{44} \end{pmatrix}.$$

Матрица коэффициентов упругости C имеет аналогичный вид. Найдем коэффициенты податливости используя формулы из источника [1] и проведя расчеты в с помощью Wolfram Mathematica.

$$S_{11} = \frac{C_{11} + C_{12}}{C_K}, S_{12} = -\frac{C_{12}}{C_K}, S_{44} = \frac{1}{C_{44}},$$

где $C_K = C_{11}^2 + C_{11}C_{12} - 2C_{12}^2$.

Теперь определим коэффициенты податливости при помощи матрицы C из (1). Получаем

$$S_{11} = 7.44 \text{ ТПа}^{-1}, S_{12} = 1.99 \text{ ТПа}^{-1}, S_{33} = 1.32 \text{ ТПа}^{-1}.$$

Норма ошибки:

$$\|S - C^{-1}\| = 2 \cdot 10^{-27}.$$

1.2. Матрицы податливости и упругости для гексагональной кристаллической решеткой

Кристаллы с ГПУ-решеткой обладают высокой степенью симметрии относительно кристаллографической оси Ox_3. Поэтому их упругие свойства в плоскости, перпендикулярной этой оси, изотропны, а матрица S коэффициентов податливости включает пять независимых ненулевых элементов:

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{11} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{13} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{pmatrix}.$$

Коэффициент $S_{66} = \frac{S_{11}-S_{12}}{2}$.

Действуя аналогично с прошлым пунктом найдем коэффициенты упругости используя формулы из источника [1].

$$C_{11} = \frac{S_{33}}{2S_h} + \frac{1}{2\left(S_{11} - S_{12}\right)}, C_{12} = \frac{S_{33}}{2S_h} + \frac{1}{2\left(S_{11} - S_{12}\right)}, C_{13} = -\frac{S_{33}}{2S_h},$$
$$C_{33} = \frac{S_{11} + S_{12}}{2S}, C_{44} = \frac{1}{S_{44}}, C_{66} = \frac{1}{2\left(S_{11} - S_{12}\right)}$$

где $S_h = \left(S_{11} + S_{12}\right) S_{33} - 2S_{12}^2$.

Теперь определим коэффициенты податливости при помощи матрицы S из (1). Получаем

$$C_{11} = 57.82 \text{ ГПа}, C_{12} = 27.86 \text{ ГПа}, C_{13} = 21.97 \text{ ГПа},$$
$$C_{33} = 59.12 \text{ ГПа}, C_{44} = 14.20 \text{ ГПа}, C_{66} = 14.98 \text{ ГПа}.$$

Норма ошибки:

$$\|C - S^{-1}\| = 1.5 \cdot 10^{-5}.$$

2. Линейная податливость

Пусть на кристалл действует внешнее растягивающее напряжение $\sigma_{kl} = \sigma n_k n_l$ в направлении $\boldsymbol{n} = \{n_1, n_2, n_3\}$. Тогда линейная податливость в направлении действия напряжения имеет вид

$$S_N = \frac{e^{(\boldsymbol{n})}}{\sigma} = S_{ijkl} N_i n_j n_k n_l,$$

где $e^{(\boldsymbol{n})}$ — относительное удлинение материла в направлении $\boldsymbol{n}$.

2.1. Линейная податливость для металлов с кубической кристаллической решеткой

Линейная податливость для металлов с кубической кристаллической решеткой равна

$$S_N = S_{11} - (2\,(S_{11} - S_{12}) - S_{44})\,(n_1^2 n_2^2 + n_1^2 n_3^2 + n_2^2 n_3^2). \qquad (2)$$

Получим зависимость линейной податливости S_n от направления единичного вектора, лежащего в плоскости грани куба. Рассмотрим грань куба, лежащую в плоскости Ox_1x_2, на которой $n_3 = 0$ (для других граней куба аналогично). Учитывая равенство

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$$

получаем $n_2^2 = 1 - n_1^2$. Тогда соотношение (2) будет выглядеть следующим образом

$$S_n = S_{11} - (2\,(S_{11} - S_{12}) - S_{44})\,n_1^2\left(1 - n_1^2\right).$$

График функции S_n в плоскости грани куба в зависимости от n_2 изображен на рис. 1. В плоскости грани куба линейная податливость минимальна в направлении диагонали грани, и максимальна в направлениях параллельных граням.

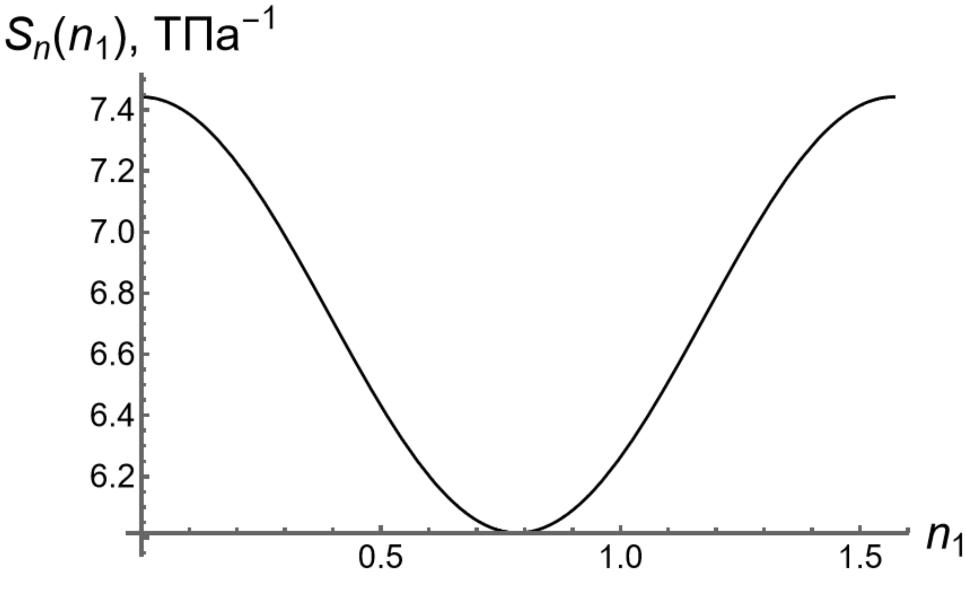

Рис. 1. Линейная податливость в плоскости грани куба

Теперь найдем зависимость линейной податливости S_n от направления единичного вектора, лежащего в плоскостях, содержащих диагонали грани и куба. Пусть диагональ грани лежит в плоскости $Ox_1x_2\,(x_1 = x_2)$. Тогда получаем равенства $n_3^2 = 1 - n_1^2 - n_2^2$, $n_1 = n_2$. Тогда соотношение (2) имеет вид

$$S_n = S_{11} - (2\,(S_{11} - S_{12}) - S_{44})\,n_1^2\left(2 - 3n_1^2\right)$$

График функции S_n в плоскостях, содержащих диагонали грани и куба в зависимости от n_1 представлен на рис. 2. Линейная податливость минимальна в направлении диагонали куба, и максимальна в направлении, параллельном грани куба.

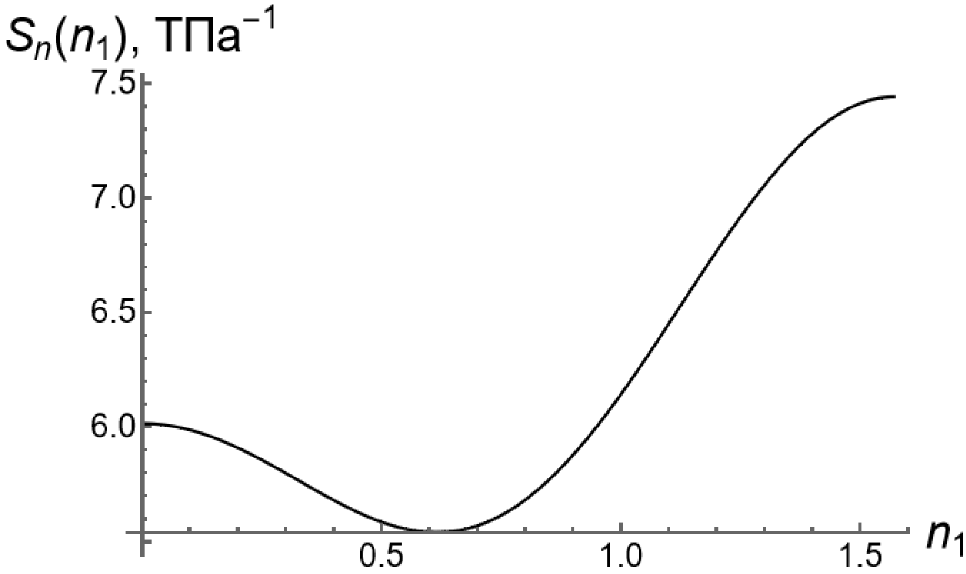

Рис. 2. Линейная податливость в плоскостях, содержащих диагонали грани и куба

Вычислим направления максимальной податливости и минимальной линейной податливости. Воспользуемся функциями Maximize и Minimize Wolfram Matematica для этого. В результате расчетов получим, что максимальное значение функции $S_N(n_1, n_2, n_3)$ в направлении вектора $\boldsymbol{n} = \{1, 0, 0\}$, т.е. в направлении грани куба, а минимальное значение функции при координатах вектора $\boldsymbol{n}$ равных $n_1 = n_2 = n_3 = \frac{\sqrt{3}}{3}$, что соответствует направлению диагонали куба.

Теперь найдем зависимость линейной податливости S_n от направления единичного вектора, лежащего в плоскостях, содержащих диагонали двух граней, имеющих общую точку.

Пусть первая диагональ лежит в двух разных плоскостях, а общая точка — начало координат. Векторы $\boldsymbol{b_1} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{b_2} = \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$, лежат на этих диагоналях, следовательно, в рассматриваемой плоскости. $\boldsymbol{b_1}$ и $\boldsymbol{b_2}$ не ортогональны, потому что $\cos\widehat{\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b2}}$. Ортогонализируем по алгоритму Грама-Шмидта:

$$\boldsymbol{e_1} = \frac{\boldsymbol{b_1}}{\|\boldsymbol{b_1}\|} = \sqrt{2}(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}),$$

$$\boldsymbol{d_2} = \boldsymbol{b_2} - \langle \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{b_2} \rangle \boldsymbol{e_1} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \frac{1}{2}\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{e_2} = \frac{\boldsymbol{d_2}}{\|\boldsymbol{d_2}\|} = -\frac{1}{6}\boldsymbol{i} + \sqrt{\frac{2}{3}}\boldsymbol{j} + \frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{k}.$$

Тогда вектор $\boldsymbol{e_3}$ определим:

$$\boldsymbol{e_3} = \boldsymbol{e_1} \times \boldsymbol{e_2} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{i} - \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{k}.$$

$$A_{\mathcal{B}\to\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Тогда получим

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}n_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}n_2 \\ \sqrt{\frac{2}{3}}n_2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}n_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}n_2 \end{pmatrix} \tag{3}$$

В случае, если плоскость внутри отрезка $\left[0;\ \dfrac{\pi}{3}\right]$ вектор $\boldsymbol{n}$ расположен внутри куба и плоскости $-x_1 - x_2 + x_3 = 0$. Получим зависимость:

$$S_n(n_1, n_2) = S_n\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}n_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}n_2, \sqrt{\frac{2}{3}}n_2, \frac{1}{\sqrt{2}}n_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{1-n_1^2}\Big)$$

$$S_n(n_1) = S_n\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}n_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{1-n_1^2}, \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{1-n_1^2}, \frac{1}{\sqrt{2}}n_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{1-n_1^2}\Big).$$

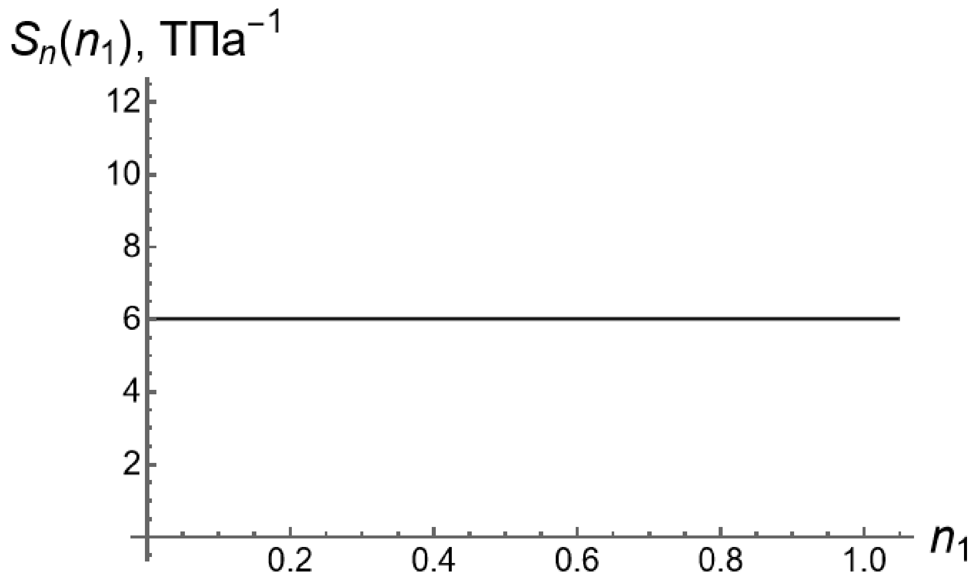

Рис. 3. Линейная податливость в плоскостях, содержащих диагонали двух граней

Получаем, что графиком функции является прямая, параллельная оси абсцисс. Полученный результат закономерен, так как $n_1^2 n_2^2 + n_2^2 n_3^2 + n_3^2 n_1^2 = \dfrac{1}{4}$.

Теперь найдем зависимость линейной податливости S_n от направления единичного вектора, лежащего в плоскостях, содержащих диагональ куба и ребро, имеющих общую точку.

Пусть диагональ куба проходит через начало координат, ребро лежит на оси x_1. Векторы $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{i}, \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ лежат на ребре и диагонали соответственно, а следовательно, и в рассматриваемой плоскости. Но они не ортогональны, так как $\cos\left(\widehat{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{b}_2}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Применим к ним процесс ортогонализации Грама-Шмидта:

$$\boldsymbol{d}_2 = \boldsymbol{b}_2 - \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{b}_2 \rangle \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}\Big).$$

Оставшийся вектор $\boldsymbol{e}_3$ определим из соотношения

$$\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}\Big).$$

Выберем $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ в качестве базиса ε. Тогда

$$\mathcal{A}_{\mathcal{B}\to\varepsilon} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} n1 \\ n2 \\ n3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha \end{pmatrix}.$$

При $\alpha \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ вектор $\boldsymbol{n}$ расположен внутри куба в плоскости $-x_2 + x_3 = 0$. Получим зависимость

$$S_n(n_1, n_2) = S_n\Big(\cos\alpha, \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha, \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha\Big).$$

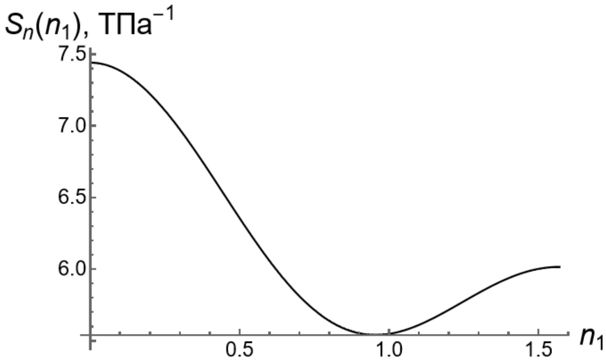

Рис. 4. Линейная податливость в плоскостях, содержащих диагональ куба и ребро

2.2. Линейная податливость для металлов с гексагональной кристаллической решеткой

Линейная податливость кристалла с ГПУ-решеткой зависит лишь от угла между направлением действия силы и осью Ox_3 :

$$S_n = S_{11}\left(1 - n_3^2\right)^2 + S_{33}n_3^4 + (2S_{13} + S_{44})(1 - n_3^2)n_3^2 \tag{4}$$

График зависимости линейной податливости от направления единичного вектора в плоскости, содержащей оптическую ось кристалла, представлен на рис. 5. линейная податливость минимальна в направлении оптической оси и максимальна при $n3 \approx 1$.

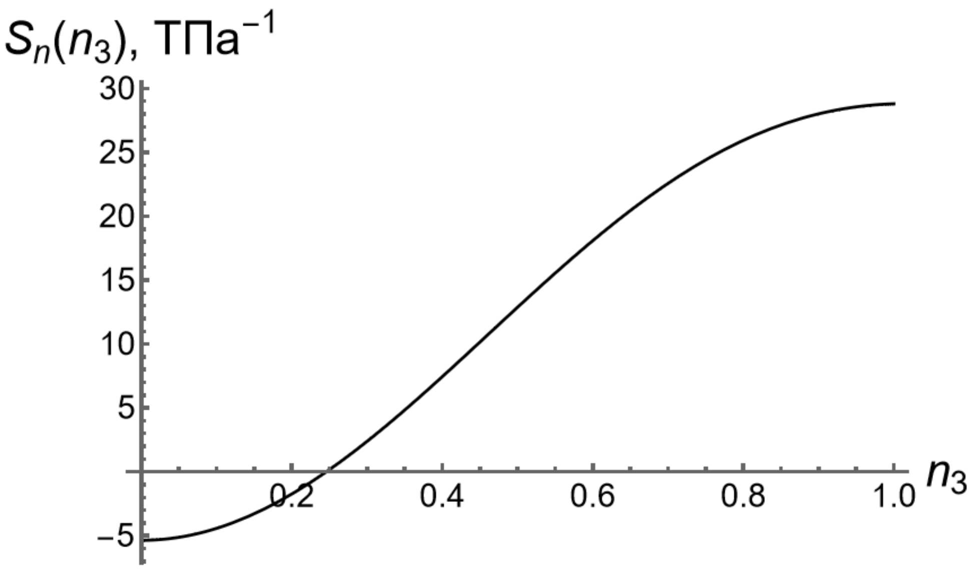

Рис. 5. Линейная податливость в плоскости, содержащей оптическую ось кристалла

3. Деформирование шара из металла с ГПУ кристаллической решеткой при всестороннем давлении

Рассмотрим задачу действия всестороннего давления на шар из Mg. Найдем отношение полуосей эллипсоида вращения, образующегося после данного воздействия. Из условия всестороннего давления p имеем $\sigma_{kl} = -p\beta_{kl}$. Деформация в направлении вектора имеет вид $e^{(\boldsymbol{n})} = \varepsilon_{ij}n_in_j$. Учитывая выражение $\varepsilon_{ij} = S_{ijkl}\sigma_{kl}$, для металла с гексагональной решеткой имеем

$$e^{(\boldsymbol{n})} = S_{klmn}\sigma_{mn}n_Kn_l = -pS_{klmn}\beta_{mn}n_kn_l = -pS_{klmm}n_kn_l = -pS_{kkmm}n_pn_p;$$
$$e^{(\boldsymbol{n})} = -p\left(\left(S_{11} + S_{12} + S_{13}\right)n_1^2 + \left(S_{11} + S_{12} + S_{13}\right)n_2^2 + \left(S_{13} + S_{33} + S_{13}\right)n_3^2\right);$$
$$e^{(\boldsymbol{n})} = -p\left(\left(S_{11} + S_{12} + S_{13}\right) + \left(S_{33} + S_{13} - S_{11} - S_{12}\right)\right)$$

Изменение полуоси в направлении вектора n_3 имеет вид

$$a = -p\left(\left(S_{11} + S_{12} + S_{13}\right) + \left(S_{33} + S_{13} - S_{11} - S_{12}\right)\right),$$

а в направлении, перпендикулярном n_3:

$$b = -p\left(S_{11} + S_{12} + S_{13}\right).$$

Следовательно, отношение полуосей эллипсоида вращения равняется

$$\frac{a}{b} \approx 1.12$$

4. Оценки коэффициента Пуассона

Значения коэффициента Пуассона можем найти из соотношения

$$\nu = \frac{\kappa/2 - G/3}{\kappa + G/3} \tag{5}$$

4.1. Оценки по Фойгту и по Рейссу

Для нахождения верхних оценок для модуля сдвига и модуля всестороннего сжатия по Фойгту будем считать, что в поликристаллическом материале деформация одинакова во всех зернах ($\bar{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon^{\circ}_{ij} = const$). Для минимизируемого функционала Лагранжа такие распределения перемещений являются допустимыми. Этот функционал в таком случае принимает вид

$$J[\varepsilon_{ij}] = \frac{1}{2}\int\limits_{V_0} C_{ijmn(M}\varepsilon_{mn}(M)\varepsilon_{ij}(M)dV.$$

Действительным распределениям перемещений в представительном объеме V_0 соответствует истинное распределение $\varepsilon^*_{ij}(M)$ компонент тензора деформации, на котором функционал $J[\varepsilon_{ij}]$ принимает минимальное значение. Задача минимизации $J[\varepsilon_{ij}]$ приводит к решению системы неравенств

$$\begin{cases} C_{kkmm} - C^\circ_{kkmm} \leq 0, \\ C_{klkl} - C^\circ_{klkl} \leq 0 \end{cases}$$

откуда получаем верхние оценки для модуля сдвига G^+ и модуля всестороннего сжатия κ^+. На истинном распределении напряжений в представительном объеме V_0 функционал.

Для нахождения нижних оценок для модуля сдвига и модуля всестороннего сжатия по Рейссу будем считать, что в поликристаллическом материале напряжения одинаковы во всех зернах ($S_{ij} = S^\circ_{is} = const$). Для минимизируемого функционала Кастилиано такие распределения перемещений являются допустимыми. Этот функционал в таком случае принимает вид

$$I[\sigma ij] = -\frac{1}{2}\int\limits_{V_0} S_{ijmn}(M)\sigma_{mn}(M)\sigma_{ij}(M)dV$$

На истинном распределении напряжений в представительном объеме V_0 функционал $I[\sigma ij]$ принимает максимальное значение. Задача максимизации $I[\sigma ij]$ приводит к решению системы неравенств

$$\begin{cases} S_{kkmm} - S^\circ_{kkmm} \leq 0, \\ S_{klkl} - S^\circ_{klkl} \leq 0 \end{cases}$$

откуда получаем нижние оценки для модуля сдвига G^- и модуля всестороннего сжатия κ^-.

Таким образом, оценки модуля сдвига и модуля всестороннего сжатия для кубической кристаллической решетки имеют вид

$$G^- = \frac{5}{4S_{11} + 3S_{44} - 4S_{12}}, G^+ = \frac{C_{11} - C_{12} + C_{44}}{5}, \kappa^- = \frac{1}{3(S_{11} + 2S_{12})} = \frac{C_{11} + 2C_{12}}{3} = \kappa^+$$

Тогда оценки для коэффициента Пуассона для кубической кристаллической решетки имеют вид

$$v_- = \frac{\kappa^+/2 - G^+/3}{\kappa^+ + G^+/3} = 0.2184, v_+ = \frac{\kappa^-/2 - G^+/3}{\kappa^- + G^-/3} = 0.2184$$

Оценки модуля сдвига и модуля всестороннего сжатия для ГПУ-решетки:

$$G^- = \frac{15}{2(7S_{11} + 2S_{33} - 5S_{12} + 3S_{44} - 4S_{13})},$$
$$G^+ = \frac{7C_{11} + 12C_{44} - 5C_{12} + 2C_{33} - 4C_{13}}{30},$$
$$\kappa^- = \frac{1}{2S_{11} + S_{33} + 2S_{12} + 4S_{13}},$$
$$\kappa^+ = \frac{2C_{11} + C_{33} + 2C_{12} + 4C_{13}}{9},$$

Тогда оценки для коэффициента Пуассона для ГПУ-решетки имеют вид

$$\upsilon_- = \frac{\kappa^+/2 - G^+/3}{\kappa^+ + G^+/3} = 0.3084, \upsilon_+ = \frac{\kappa^-/2 - G^+/3}{\kappa^- + G^-/3} = 0.3104, \nu^- \leq \nu \leq \nu^+.$$

4.2. Задача Эшелби

Для оценки характеристик поликристаллического материала можно использовать решение задачи Эшелби о взаимодействии с изотропной линейно-упругой сплошной средой изотропного линейно-упругого шарового включения. Для этого необходимо решить систему

$$\left\{\zeta_{kkmm} = 0, \zeta_{klkl} = 0,\right.$$

где

$$\zeta_{pqrs} = \left(C_{ijpq} - C^{\circ}_{ijmn}\left(I_{mnpq} - \omega_{mnpq}\right)\right)^{-1}\left(C^{\circ}_{ijrs} - C_{ijrs}\right),$$
$$\omega_{ijmn} = \frac{3}{2}\frac{1-\nu}{4-5\nu}\left(\frac{1-5\upsilon}{1+\nu}\beta_{ij}\beta_{mn} + 5I_{ijmn}\right).$$

Используя правило сведения компонент симметричных тензоров 4-го ранга в матрицу, получаем систему для инвариантов тензора с компонентами ζ_{pqrs}:

$$\begin{cases} \zeta_{kkmm} = \zeta_{11} + \zeta_{22} + \zeta_{33} + 2(\zeta_{12} + \zeta_{13} + \zeta_{23}) = 0, \\ \zeta_{klkl} = \zeta_{11} + \zeta_{22} + \zeta_{33} + 2(\zeta_{44} + \zeta_{55} + \zeta_{66}) = 0, \end{cases}$$

решение которой равносильно решению следующей задачи безусловной минимизации:

$$\zeta^2_{kkmm} + \zeta^2_{klkk} \rightarrow min,$$

решив которую получаем точечные оценки для модуля сдвига и модуля всестороннего сжатия, из которых можно найти оценку коэффициента Пуассона, используя соотношение (5). В результате имеем следующие оценки коэффициента Пуассона:

1) для кубической кристаллической решетки $n = 0.2211$;
2) для ГПУ-решетки $n = 0.3093$.

5. Расчеты для пористого двухфазного сплава-смеси

Проведем аналогичные расчеты для пористого двухфазного сплава-смеси кремния и магния при трех фиксированных значениях объемной пористости. Пусть V_1, V_2 и V_3 — объемные доли кремния и магния и объемная пористость сплава-смеси соответственно. Тогда $V_1+V_2+V_3=1$. Верхнюю и нижнюю оценки упругой характеристики П сплава-смеси, состоящего из N компонент, можно получить по следующим формулам:

$$\Pi^+ = \sum_{\alpha=1}^{N} \Pi_\alpha^+ V_\alpha, \frac{1}{\Pi^-} = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{V_\alpha}{\Pi_\alpha^-}.$$

Поскольку $V_1+V_2+V_3=1$, и требуется построить графики от величины $\tilde{V}=\frac{V_1}{V_1+V_2}$ имеем

$$\begin{cases} V_1+V_2 = 1-V_3, \\ V_1 = \tilde{V}(1-V_3), \\ V_2 = 1-V_3-V_1 = (1-\tilde{V})(1-V_3). \end{cases}$$

При решение задачи Эшелби использована функция

$$\zeta = V_1\zeta_{Si} + V_2\zeta_{Mg} + V_3\zeta_0,$$

где ζ_{Si}, ζ_{Mg} — соответствующие функции для металлов с кубической и ГПУ кристаллическими решетками, ζ_0 — поправка на поры с нулевым тензором коэффициентов упругости. Построим графики зависимостей ν^+, ν^- и величины ν, найденной при решении задачи Эшелби, от переменной $\tilde{V}$ (рис. **??**). Из графиков видно, что при наличии ненулевой объемной пористости нижние оценки некорректны.

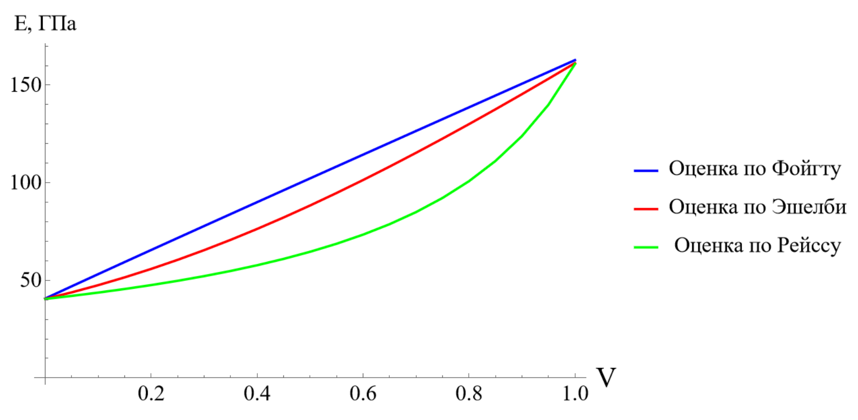

Рис. 6. Оценки модуля Юнга пористого двухфазного сплава-смеси при $V_3=0$

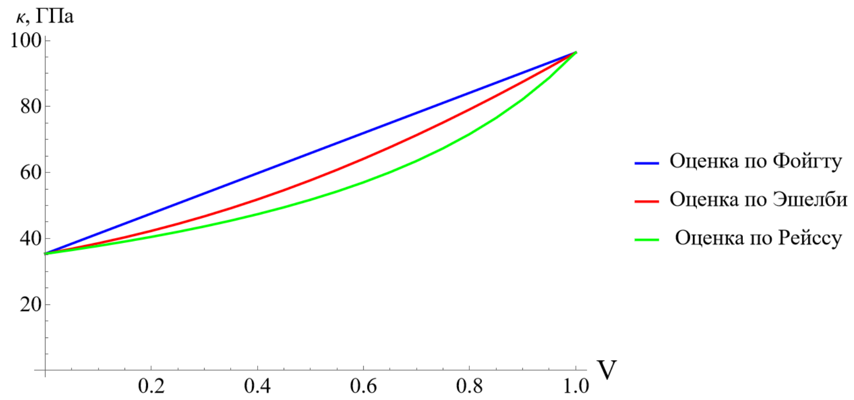

Рис. 7. Оценки модуля объемной упругости пористого двухфазного сплава-смеси при $V_3 = 0$

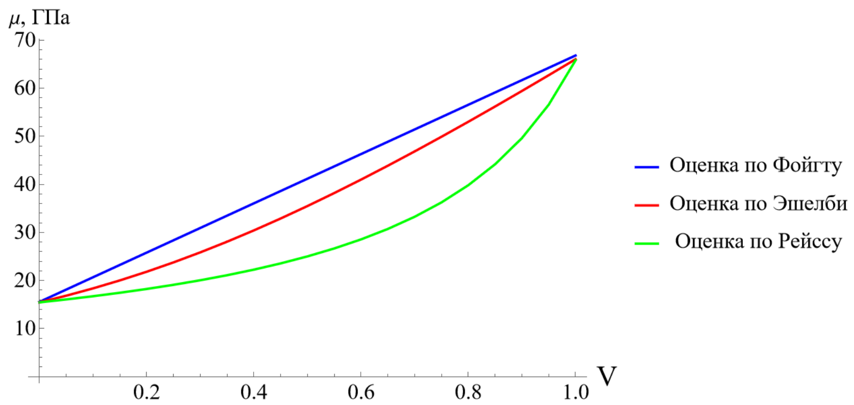

Рис. 8. Оценки модуля упругости пористого двухфазного сплава-смеси при $V_3 = 0$

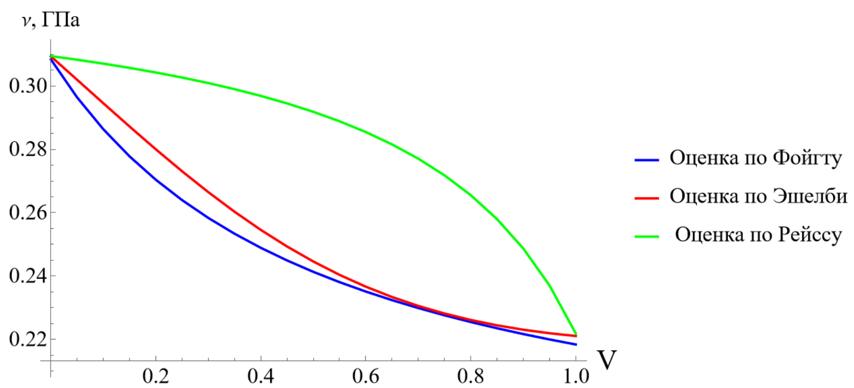

Рис. 9. Оценки коэффициента Пуассона пористого двухфазного сплава-смеси при $V_3 = 0$

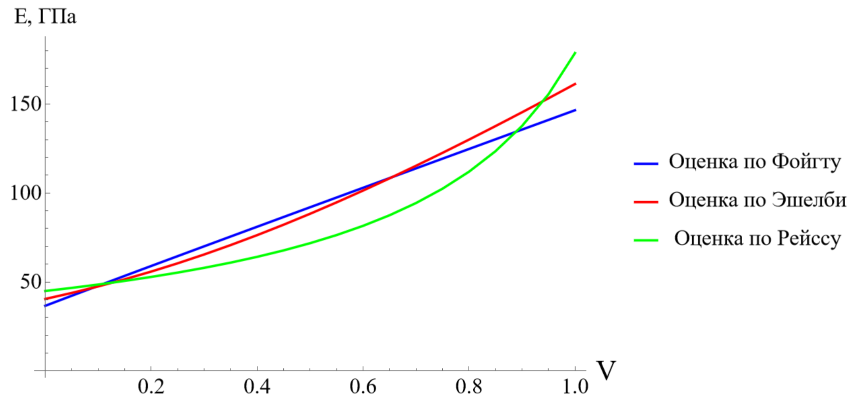

Рис. 10. Оценки модуля Юнга пористого двухфазного сплава-смеси при $V_3 = 0.1$

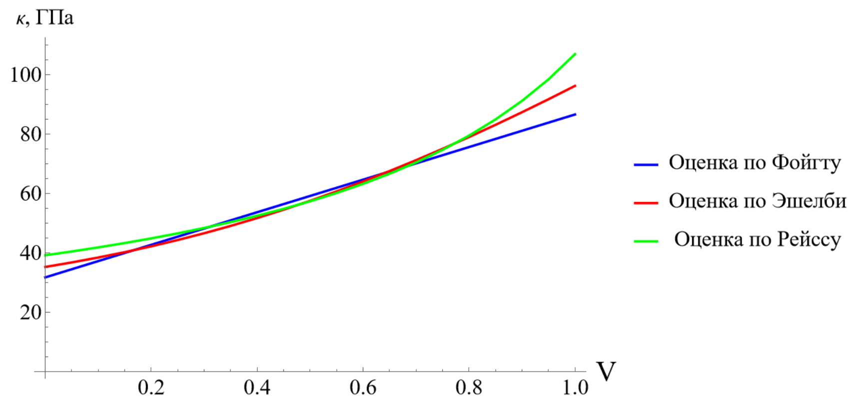

Рис. 11. Оценки модуля объемной упругости пористого двухфазного сплава-смеси при $V_3 = 0.1$

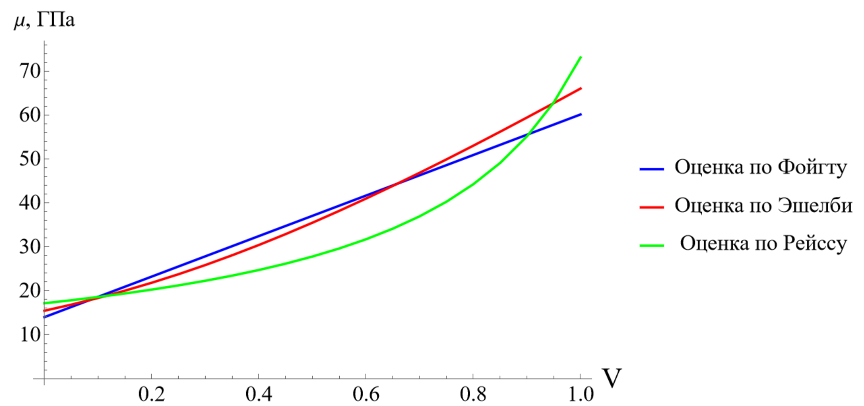

Рис. 12. Оценки модуля упругости пористого двухфазного сплава-смеси при $V_3 = 0.1$

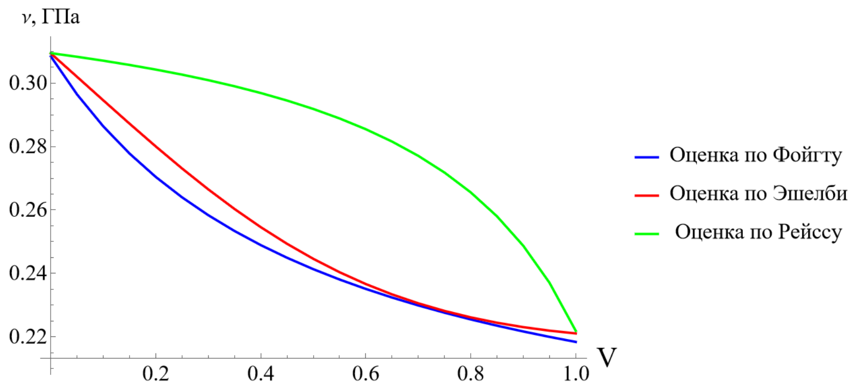

Рис. 13. Оценки коэффициента Пуассона пористого двухфазного сплава-смеси при $V_3 = 0.1$

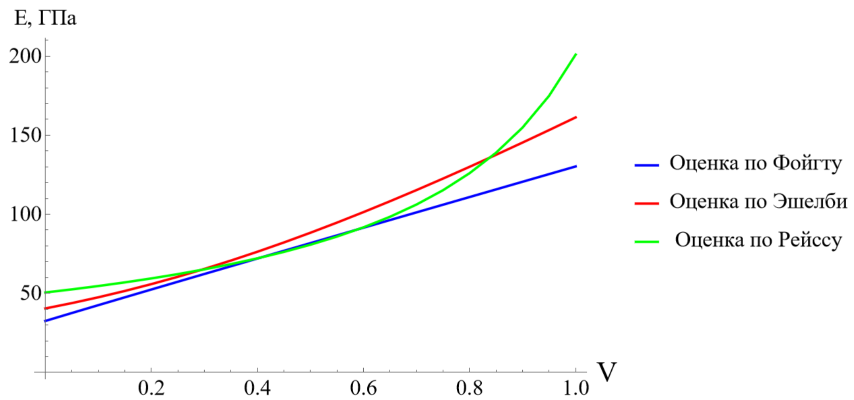

Рис. 14. Оценки модуля Юнга пористого двухфазного сплава-смеси при $V_3 = 0.2$

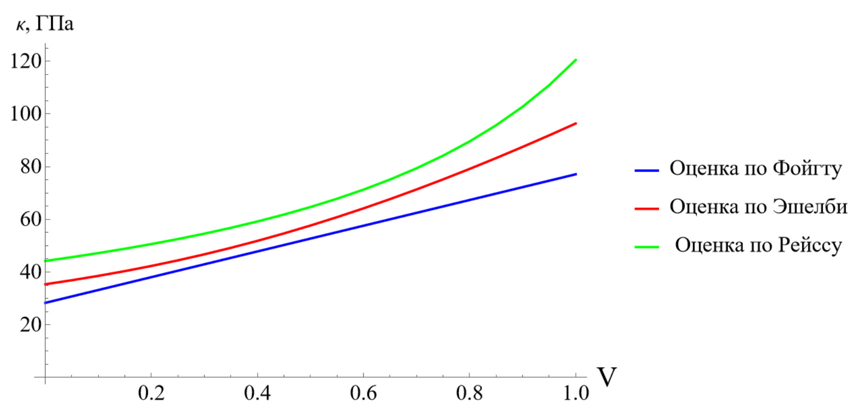

Рис. 15. Оценки модуля объемной упругости пористого двухфазного сплава-смеси при $V_3 = 0.2$

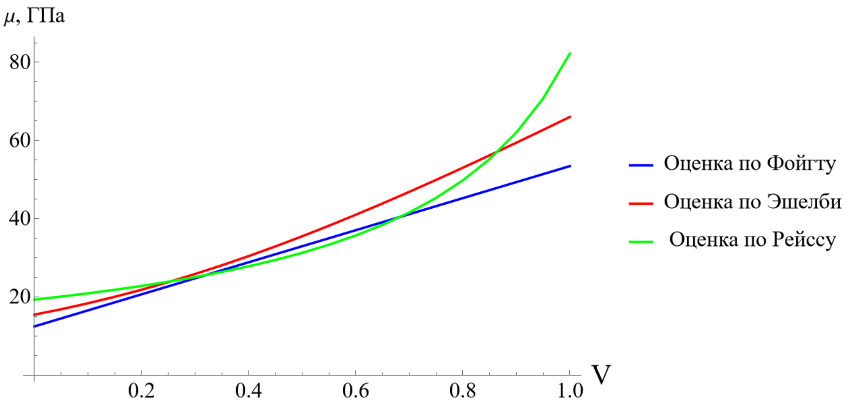

Рис. 16. Оценки модуля упругости пористого двухфазного сплава-смеси при $V_3 = 0.2$

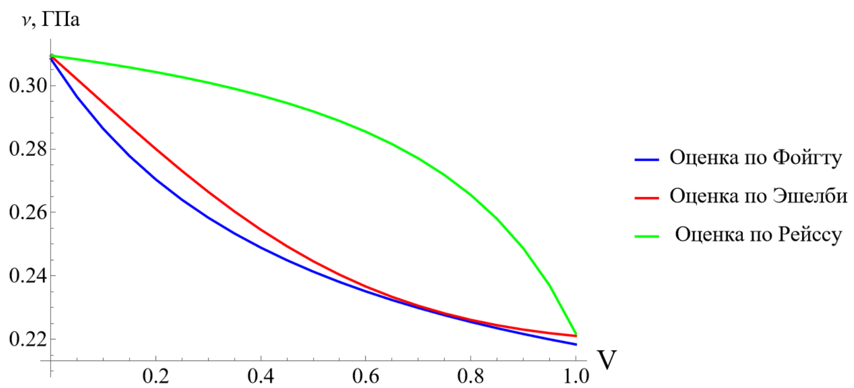

Рис. 17. Оценки коэффициента Пуассона пористого двухфазного сплава-смеси при $V_3 = 0.2$

6. Заключение

В данной работе для заданной пары металлов были получены следующие результаты:

1) вычислены элементы матриц коэффициентов податливости и упругости;
2) построены графики зависимостей линейной податливости от направлений единичного вектора;
3) определенны направления, по которым линейная податливость имеет экстремальные значения;
4) найдены отношения полуосей эллипсоида вращения, образующегося после действия всестороннего давления на шар из металла с ГПУ-решеткой;
5) для поликристаллов найдены оценки по Фойгту и Рейссу коэффициента Пуассона в предположении хаотической ориентации зерен;
6) для поликристаллов найдены оценки для случая статистически усредненной шаровой формы кристаллических зерен (задача Эшелби)
7) проведены аналогичные расчеты для пористого двухфазного сплава-смеси из заданных металлов при трех фиксированных значения объемной пористости;
8) построены графики зависимостей коэффициента Пуассона от объемных долей металлов в сплаве.

Список использованных источников

1. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. 512 с.
2. Зарубин В.С. Прикладные задачи термопрочности элементов конструкций. М.: Машиностроение, 1985. 296 с.
3. Зарубин В.С. Физические и математические модели микромеханики: учеб- ное пособие. В.С. Зарубин, Г.Н. Кувыркин, И.Ю. Савельева Москва: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2020. 194 с.