



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ _____ Фундаментальные науки

КАФЕДРА _____ Прикладная математика

*Лабораторная работа №2 по дисциплине
"Разработка программных комплексов" на
тему "Численное решение
дифференциального уравнения с граничными
условиями проекционными методами"*

Студент _____
ФН2-71Б
(Группа)

(Подпись, дата)

Пиневи́ч В. Г.
(И. О. Фамилия)

Принял

(Подпись, дата)

Азметов Х. Х.
(И. О. Фамилия)

2023 г.

Содержание

1. Задача	3
2. Метод Бубнова-Галеркина	4
2.1. Граничные условия $u(0) = 1; u(1) = 3$	4
2.2. Граничные условия $u(0) = 1; u'(1) = 3$	5
2.3. Граничные условия $u'(0) = 1; u(1) = 3$	6
3. Метод Галеркина	7
3.1. Граничные условия $u(0) = 1; u(1) = 3$	7
3.2. Граничные условия $u(0) = 1; u'(1) = 3$	8
3.3. Граничные условия $u'(0) = 1; u(1) = 3$	9
4. Метод наименьших квадратов	10
4.1. Граничные условия $u(0) = 1; u(1) = 3$	10
4.2. Граничные условия $u(0) = 1; u'(1) = 3$	11
4.3. Граничные условия $u'(0) = 1; u(1) = 3$	12

1. Задача

Создать программу решения дифференциального уравнения проекционными методами. Задано уравнение на области $[0, 1]$:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + u + x = 0.$$

Необходимо реализовать методы решения:

1. Метод Бубнова-Галеркина
2. Метод Галеркина
3. Метод наименьших квадратов

Реализовать методы учета граничных условий:

1. Метод штрафа
2. Метод множителей Лагранжа

По результатам предоставить отчет, в котором входят результаты для каждого метода решения с порядком аппроксимации 3, вариантами и методами учета граничных условий. Для метода штрафа задать значения 1, 100, 1000 и 10000..

2. Метод Бубнова-Галеркина

2.1. Граничные условия $u(0) = 1; u(1) = 3$

Метод штрафов

№	Штраф	Относительная ошибка	Коэффициенты приближенного решения
1	1	0.16	$-4.37, 6.47, -1.71$
2	10	0.02	$-2.09, 4.29, -1.24$
3	1000	0.01	$-1.92, 4.13, -1.21$
4	10000	0.01	$-1.92, 4.13, -1.21$

Метод множителей Лагранжа

№	Относительная ошибка	Коэффициенты приближенного решения
1	0.01	$-1.92, 4.13, -1.21$

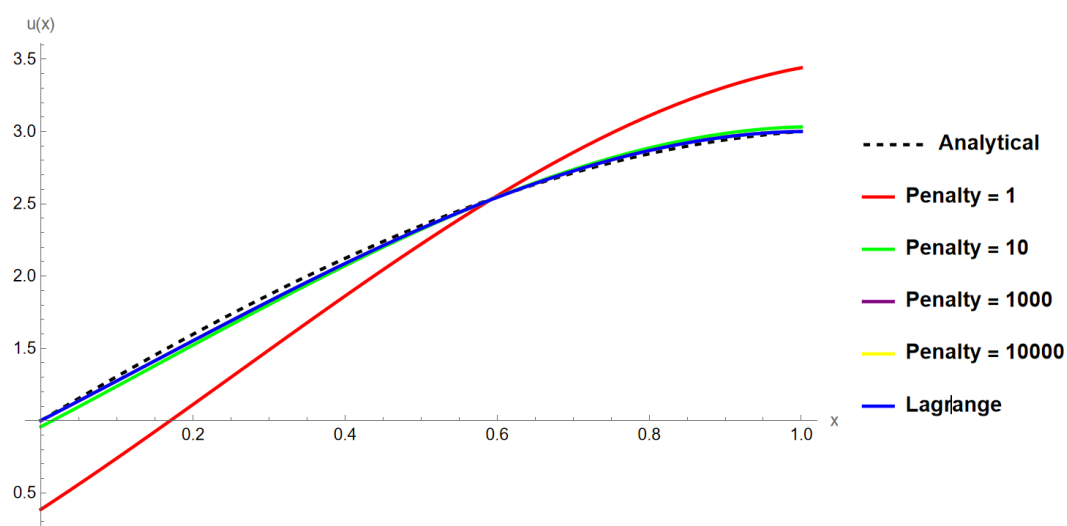


Рис. 1. График точного и численного решения метода Бубнова-Галеркина для $u(0) = 1; u(1) = 3$

2.2. Граничные условия $u(0) = 1; u'(1) = 3$

Метод штрафов

№	Штраф	Относительная ошибка	Коэффициенты приближенного решения
1	1	0.40	$-7.89, 10.09, -2.44$
2	10	0.07	$-7.36, 11.02, -2.81$
3	1000	0.03	$-7.29, 11.14, -2.86$
4	10000	0.03	$-7.28, 11.14, -2.86$

Метод множителей Лагранжа

№	Относительная ошибка	Коэффициенты приближенного решения
1	0.03	$-7.28, 11.14, -2.86$

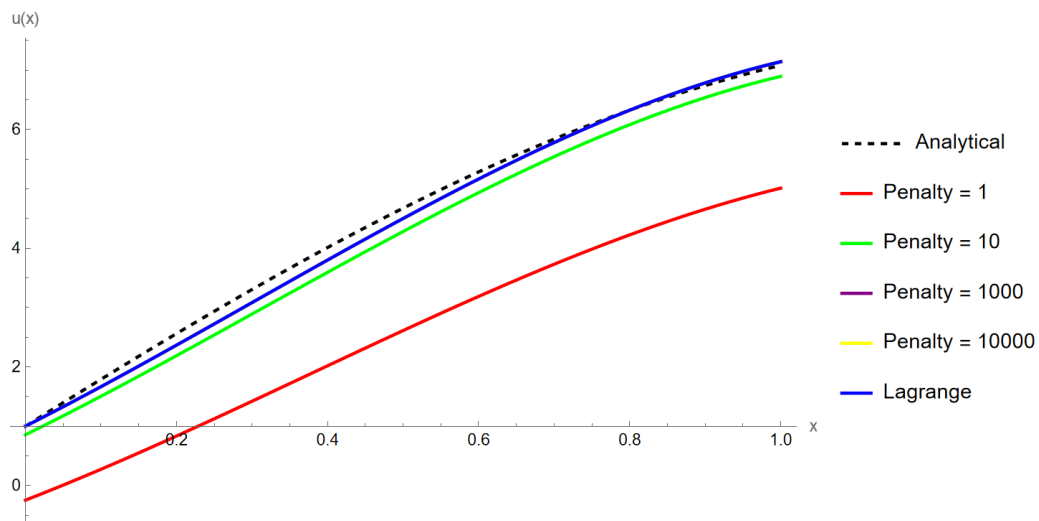


Рис. 2. График точного и численного решения метода Бубнова-Галеркина для $u(0) = 1; u'(1) = 3$

2.3. Граничные условия $u'(0) = 1; u(1) = 3$

Метод штрафов

№	Штраф	Относительная ошибка	Коэффициенты приближенного решения
1	1	0.08	7.65, -4.10, 0.48
2	10	0.01	8.17, -4.34, 0.50
3	1000	0.00	8.23, -4.36, 0.50
4	10000	0.00	8.23, -4.36, 0.50

Метод множителей Лагранжа

№	Относительная ошибка	Коэффициенты приближенного решения
1	0.00	8.23, -4.36, 0.50

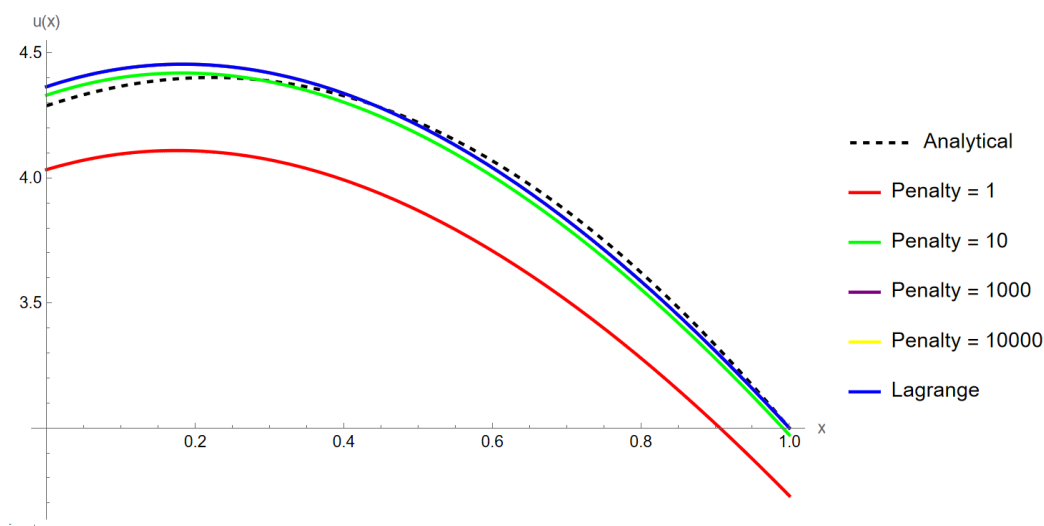


Рис. 3. График точного и численного решения метода Бубнова-Галеркина для $u'(0) = 1; u(1) = 3$

3. Метод Галеркина

3.1. Граничные условия $u(0) = 1; u(1) = 3$

Метод штрафов

№	Штраф	Относительная ошибка	Коэффициенты приближенного решения
1	1	0.17	$-0.37, 3.07, -1.08$
2	10	0.04	$-2.20, 4.72, -1.44$
3	1000	0.03	$-2.49, 4.98, -1.49$
4	10000	0.03	$-2.49, 4.98, -1.49$

Метод множителей Лагранжа

№	Относительная ошибка	Коэффициенты приближенного решения
1	0.03	$-2.49, 4.98, -1.49$

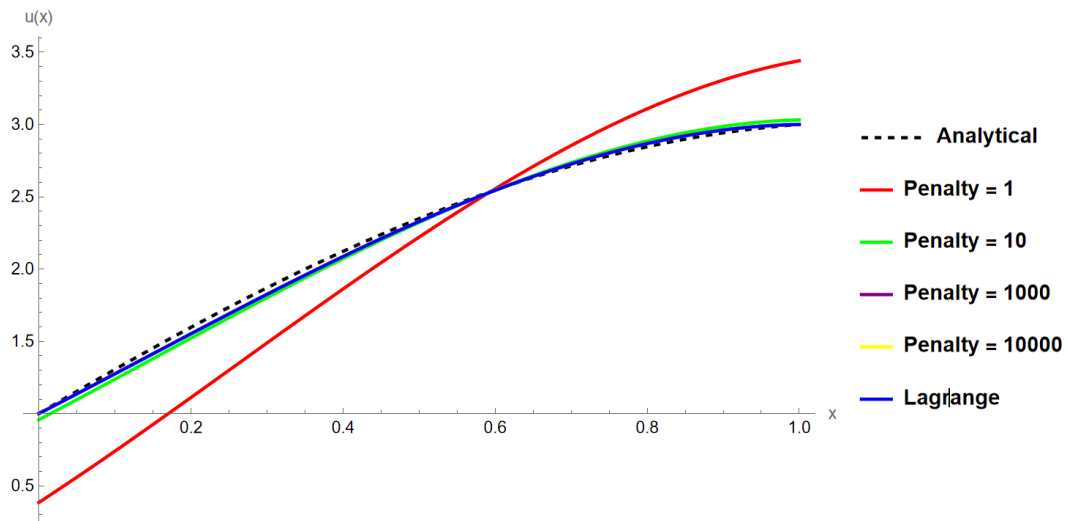


Рис. 4. График точного и численного решения метода Галеркина для $u(0) = 1; u(1) = 3$

3.2. Граничные условия $u(0) = 1; u(1) = 3$

Метод штрафов

№	Штраф	Относительная ошибка	Коэффициенты приближенного решения
1	1	8.39	$-56.13, 100.65, -28.72$
2	10	1.57	$-27.17, 39.29, -10.59$
3	1000	1.32	$-26.09, 37.00, -9.91$
4	10000	1.32	$-26.08, 36.98, -9.90$

Метод множителей Лагранжа

№	Относительная ошибка	Коэффициенты приближенного решения
1	1.32	$-26.08, 36.98, -9.90$

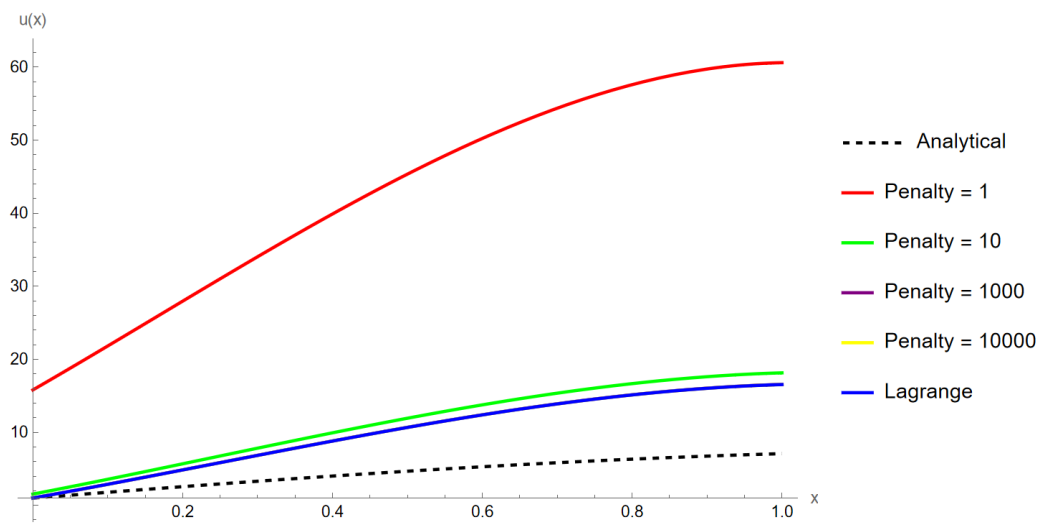


Рис. 5. График точного и численного решения метода Галеркина для $u(0) = 1; u(1) = 3$

3.3. Граничные условия $u'(0) = 1; u(1) = 3$

Метод штрафов

№	Штраф	Относительная ошибка	Коэффициенты приближенного решения
1	1	0.82	21.89, -15.21, 2.59
2	10	0.05	8.87, -4.79, 0.55
3	1000	0.03	8.54, -4.52, 0.50
4	10000	0.03	8.54, -4.52, 0.50

Метод множителей Лагранжа

№	Относительная ошибка	Коэффициенты приближенного решения
1	0.03	8.54, -4.52, 0.50

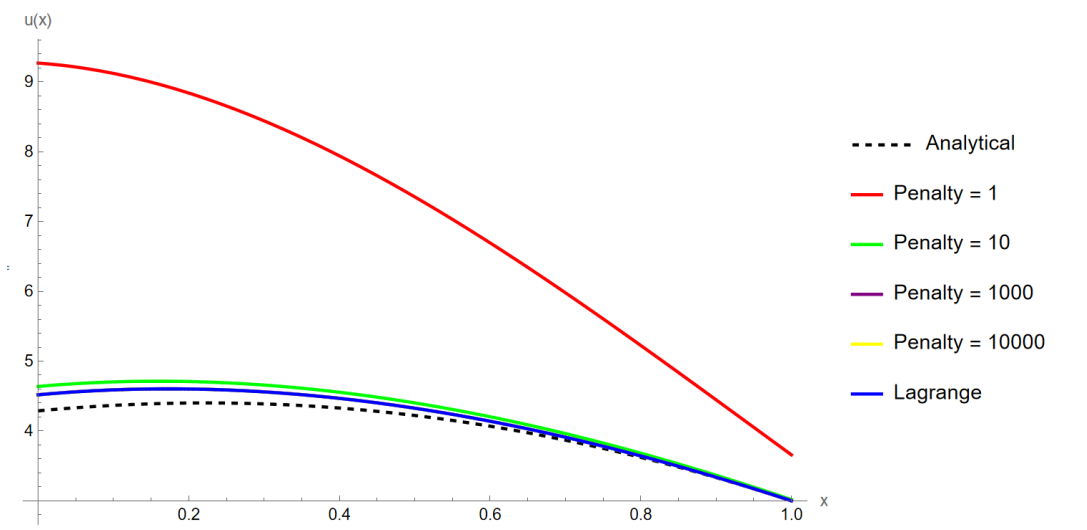


Рис. 6. График точного и численного решения метода Галеркина для $u'(0) = 1; u(1) = 3$

4. Метод наименьших квадратов

4.1. Граничные условия $u(0) = 1; u(1) = 3$

Метод штрафов

№	Штраф	Относительная ошибка	Коэффициенты приближенного решения
1	1	0.09	$-0.16, 2.25, -0.75$
2	10	0.03	$-1.38, 3.42, -1.0$
3	1000	0.03	$-1.57, 3.61, -1.04$
4	10000	0.03	$-1.58, 3.61, -1.04$

Метод множителей Лагранжа

№	Относительная ошибка	Коэффициенты приближенного решения
1	0.03	$-1.58, 3.61, -1.04$

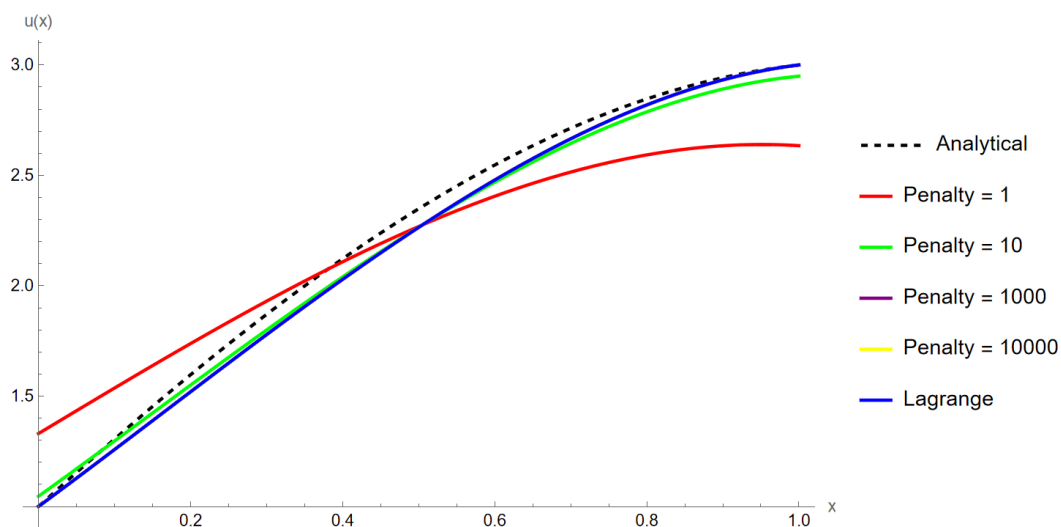


Рис. 7. График точного и численного решения метода наименьших квадратов для $u(0) = 1; u(1) = 3$

4.2. Граничные условия $u(0) = 1; u'(1) = 3$

Метод штрафов

№	Штраф	Относительная ошибка	Коэффициенты приближенного решения
1	1	0.57	$-3.41, 4.92, -1.20$
2	10	0.26	$-4.44, 7.09, -1.76$
3	1000	0.20	$-4.63, 7.48, -1.86$
4	10000	0.20	$-4.63, 7.49, -1.86$

Метод множителей Лагранжа

№	Относительная ошибка	Коэффициенты приближенного решения
1	0.20	$-4.63, 7.49, -1.86$

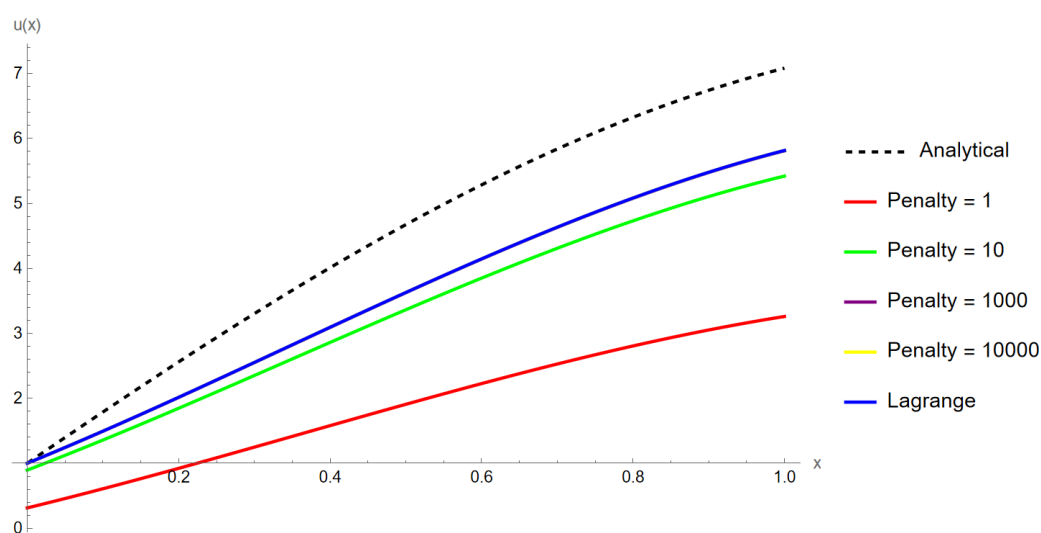


Рис. 8. График точного и численного решения метода наименьших квадратов для $u(0) = 1; u'(1) = 3$

4.3. Граничные условия $u'(0) = 1; u(1) = 3$

Метод штрафов

№	Штраф	Относительная ошибка	Коэффициенты приближенного решения
1	1	0.10	6.24, -2.67, 0.13
2	10	0.06	8.32, -4.26, 0.42
3	1000	0.06	8.88, -4.69, 0.50
4	10000	0.06	8.88, -4.69, 0.50

Метод множителей Лагранжа

№	Относительная ошибка	Коэффициенты приближенного решения
1	0.06	8.88, -4.69, 0.50

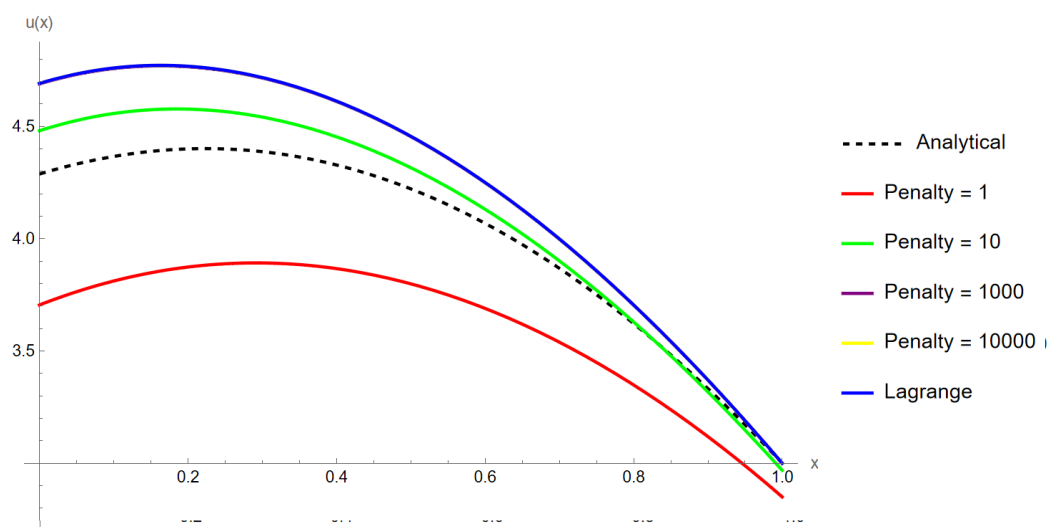


Рис. 9. График точного и численного решения метода наименьших квадратов для $u'(0) = 1; u(1) = 3$