



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Московский государственный технический университет  
имени Н. Э. Баумана  
(национальный исследовательский университет)»  
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ \_\_\_\_\_ Фундаментальные науки

КАФЕДРА \_\_\_\_\_ Прикладная математика

РАСЧЕТНО-ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА  
*К КУРСОВОЙ РАБОТЕ*  
*НА ТЕМУ:*

*Кручение стержня*  
*прямоугольного сечения*

Студент \_\_\_\_\_  
ФН2-51Б  
(Группа)

\_\_\_\_\_  
(Подпись, дата)

В. Г. Пиневич  
\_\_\_\_\_  
(И. О. Фамилия)

Руководитель курсовой работы

\_\_\_\_\_  
(Подпись, дата)

А. В. Котович  
\_\_\_\_\_  
(И. О. Фамилия)

2023 г.

## Оглавление

<b>Введение</b> . . . . .	<b>3</b>
<b>1. Постановка задачи</b> . . . . .	<b>3</b>
1.1. Кручение . . . . .	3
1.2. Положительные и положительно определенные операторы . . . . .	4
<b>2. Энергетический метод</b> . . . . .	<b>4</b>
<b>3. Метод Ритца</b> . . . . .	<b>5</b>
<b>4. Решение задачи о кручении стержня энергетическим методом</b> . . .	<b>6</b>
<b>5. Решение задачи о кручении стержня методом Ритца</b> . . . . .	<b>9</b>
<b>6. Сравнение решений энергетическим методом и методом Ритца</b> . .	<b>12</b>
6.1. Сравнение функций кручения . . . . .	12
6.2. Сравнение крутящего момента . . . . .	13
<b>Заключение</b> . . . . .	<b>14</b>
<b>Список использованных источников</b> . . . . .	<b>15</b>

# Введение

Проблема решения задачи о скручивании балки возникает во многих задачах, в частности в строительной механике. Существует большое количество различных методов решения таких задач. Данная работа посвящена изучению двух численных методов решения таких задач, оценке их точности.

## 1. Постановка задачи

### 1.1. Кручение

Кручением называется такой вид нагружения стержня, при котором из всех шести внутренних силовых факторов в его поперечных сечениях не равен нулю только крутящий момент  $M_{кр}$ .

Рассмотрим стержень прямоугольного сечения. Такой стержень при закручивании подвержен деформациям («выходят из плоскости»). Другими словами деформация означает, что точки сечения перемещаются вдоль оси стержня в различных направлениях.

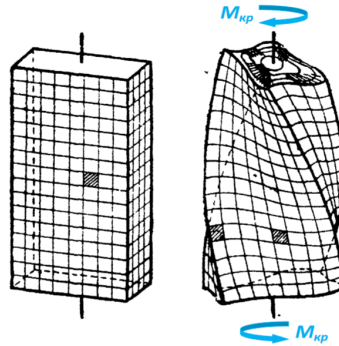


Рис. 1. Кручение стержня прямоугольного сечения

Будем решать задачу о его кручении двумя способами: энергетическим методом (в виде ряда по ортогональной системе функций) и методом Ритца (в виде ряда по степенным функциям).

Совместим ось  $z$  с осью кручения, оси  $x$  и  $y$  расположим произвольно в плоскости поперечного сечения. Задача кручения сводится к поиску функции  $\psi$  (1) [2]. Эта функция должна быть постоянна вдоль границы поперечного сечения, константу можно выбирать произвольно. Мы будем принимать ее равной нулю.

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = -2G\theta, \quad (1)$$

где  $G$  — модуль сдвига,  $\theta$  — угол закручивания на единицу времени.

### 1.2. Положительные и положительно определенные операторы

Рассмотрим некоторый симметричный оператор  $A$  гильбертова пространства.

- Оператор  $A$  называется положительным, если для любого элемента  $u$  из области определения оператора выполняется неравенство

$$(Au, u) \geq 0,$$

причем знак равенства имеет место только тогда, когда  $u = 0$ .

- Оператор  $A$  называется положительно определенным, если существует такая положительная постоянная  $\gamma^2$ , что для любого элемента  $u$  из области определения оператора  $A$  справедливо неравенство

$$(Au, u) \geq \gamma^2 \|u\|^2$$

Физический смысл понятия положительно определенного операторов заключается в том, что невозможно сообщить системе смещение, не затратив на это некоторой энергии [3]. Если же оператор положительный, но не положительно определенный, то, системе можно придать сколь угодно большое смещение, затратив на это сколь угодно малую энергию

## 2. Энергетический метод

Рассмотрим положительно определенный оператор  $A$  в гильбертовом пространстве  $H$ . Требуется решить уравнение

$$Au = f, f \in H. \quad (2)$$

Пусть  $A$  — положительный оператор в гильбертовом пространстве. Тогда энергетическим произведением назовем

$$[u, v] = (Au, v),$$

где  $u$  и  $v$  элементы из области определения  $D$  оператора  $A$ .

Множество  $D(A)$  является гильбертовым пространством, назовем его энергетическим пространством  $H_A$ . Оно также является сепарабельным.

Тогда мы можем свести решение краевой задачи к задаче о поиске минимума функционала.

Если  $A$  — положительный оператор, уравнение (2) можно свести к поиску минимума функционала

$$F(u) = (Au, u) - 2(u, f). \quad (3)$$

Такой метод решения краевой задачи и называют энергетическим.

Чтобы решение задачи (3) существовало расширим функционал  $F(u)$  на все пространство  $H_A$  и будем искать минимум  $u_0$  на нем. Пространство  $H_A$  сепарабельно, то в нем найдется полная ортонормированная система  $\omega_n$  и решение  $u_0$  можно представить в виде

$$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \omega_n) \omega_n. \quad (4)$$

### 3. Метод Ритца

Пусть  $A$  — положительно определенный оператор в гильбертовом пространстве  $H$ . Задача построения обобщенного решения уравнения (2), как показано выше, равносильна задаче нахождения элемента энергетического пространства, который реализует минимум функционала (3) в энергетическом пространстве.

Выберем последовательность элементов

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \quad (5)$$

удовлетворяющих условиям:

1.  $\varphi_n \in H_A$ , для всех  $n$ ;
2. при любом  $n$  элементы  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ , линейно независимы;
3. последовательность (5) полна в  $H_A$ .

Такие элементы будем называть координатные, а последовательность назовем координатной системой.

Построим линейную комбинацию первых  $n$  координатных элементов вида

$$u_n = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i, \quad (6)$$

с некоторыми  $a_i$ . Подставим  $u_n$  вместо  $u$  в (3), тогда  $F(u)$  можно рассматривать как функцию независимых переменных  $a_1, a_2, \dots, a_n$

$$\begin{aligned} F(u_n) &= \left[ \sum_{i=1}^n a_i A \varphi_i, \sum_{k=1}^n a_k A \varphi_k \right] - 2 \left( \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k, f \right) = \\ &= \sum_{i,k=1}^n [\varphi_i, \varphi_k] a_i a_k - 2 \sum_{k=1}^n (\varphi_k, f) a_k \end{aligned} \quad (7)$$

Выберем коэффициенты  $a_i$  так, чтобы минимизировать функцию (7). Она достигает минимума при тех значениях независимых переменных, которые обращают в нуль

ее первые производные. В общем случае эти условия не достаточные, а необходимые условия минимума. Однако, используя положительность оператора  $A$ , можно доказать, что они в данном случае действительно реализуют минимум  $F(u_n)$ :

$$\frac{\partial F(u_n)}{\partial a_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (8)$$

Поскольку

$$\frac{\partial F(u_n)}{\partial a_i} = 2 \sum_{k=1}^n [\varphi_k, \varphi_i] a_k - 2(f, \varphi_i),$$

то приравняв эти производные нулю, получим систему линейных алгебраических уравнений Ритца:

$$\sum_{k=1}^n [\varphi_k, \varphi_i] a_k = (f, \varphi_i) \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (9)$$

Определитель системы (9) есть *определитель Грама* линейно независимых элементов  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  и потому отличен от нуля. Следовательно, система уравнений Ритца всегда однозначно разрешима, если оператор  $A$  положительный.

Найдя из (9) коэффициенты  $a_1, a_2, \dots, a_n$  и подставив их в (6), получим приближенное решение уравнения (2) по Ритцу.

Приближенное решение задачи о минимуме функционала энергии, получаемое методом Ритца, совпадает с  $n$ -ой частной суммой ряда (4), представляющего точное решение [1].

## 4. Решение задачи о кручении стержня энергетическим методом

Рассмотрим задачу [1] о кручении стержня, основание которого представляет собой прямоугольник  $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$ . Функция кручения  $\psi(x, y)$  удовлетворяет условию  $-\Delta\psi = 2G\theta$  (1).

Функция  $\psi(x, y)$  обращается в нуль на сторонах прямоугольника  $x = 0, x = a, y = 0, y = b$ .

Энергетическое произведение функций  $u(x, y), v(x, y)$  выражается формулой

$$[u, v] = - \int_0^a \int_0^b (v(x, y) \Delta u(x, y)) dx dy, \quad (10)$$

энергетическая норма

$$\|u\|^2 = - \int_0^a \int_0^b (u(x, y) \Delta u(x, y)) dx dy, \quad (11)$$

Функции

$$\varphi_{mn}(x, y) = \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad m, n = 1, 2, \dots \quad (12)$$

- непрерывно дифференцируемы сколько угодно раз и обращаются в нуль на контуре прямоугольника и потому входят в область определения оператора данной задачи;
- ортогональны по энергии;
- не нормированы.

Докажем ортогональность, для этого заметим, что

$$\Delta \varphi_{mn}(x, y) = -\pi^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \varphi_{mn}(x, y). \quad (13)$$

Тогда

$$\begin{aligned} [\varphi_{mn}, \varphi_{rs}] &= - \int_0^a \int_0^b \varphi_{mn} \Delta \varphi_{rs} dx dy \\ [\varphi_{mn}, \varphi_{rs}] &= \pi^2 \left( \frac{r^2}{a^2} + \frac{s^2}{b^2} \right) \int_0^a \sin \left( \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{r\pi x}{a} \right) dx \int_0^b \sin \left( \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{s\pi y}{b} \right) dy. \end{aligned}$$

Если  $m \neq r$  или  $n \neq s$ , то  $[\varphi_{mn}, \varphi_{rs}] = 0$ . Пологая, что  $r = m$  и  $s = n$ , найдем

$$\|\varphi_{mn}\|^2 = \frac{\pi^2 (b^2 m^2 + a^2 n^2)}{4ab},$$

следовательно система функций (12) не нормированная. Поделим  $\varphi_{mn}$  на  $\|\varphi_{mn}\|$ , получим систему

$$\psi_{mn}(x, y) = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{ab}{b^2 m^2 + a^2 n^2}} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (14)$$

По формуле решения в виде ряда (4) функция кручения представляется рядом

$$\psi(x, y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} (2G\theta, \psi_{mn}) \psi_{mn}(x, y), \quad (15)$$

коэффициенты которого равны

$$\begin{aligned} (2G\theta, \psi_{mn}) &= \frac{4G\theta}{\pi} \int_0^a \sin \left( \frac{m\pi x}{a} \right) dx \int_0^b \sin \left( \frac{n\pi y}{b} \right) dy = \\ &= \frac{4abG\theta}{\pi^3 mn} \sqrt{\frac{ab}{b^2 m^2 + a^2 n^2}} [1 - (-1)^m][1 - (-1)^n]. \end{aligned}$$

Заметим, что коэффициенты ряда (15) равны нулю, если хотя бы одно из чисел  $m$  или  $n$  четное. В противном случае

$$(2G\theta, \psi_{mn}) = \frac{4abG\theta}{\pi^3 mn} \sqrt{\frac{ab}{b^2 m^2 + a^2 n^2}},$$

откуда, соотношение (15) примет итоговый вид

$$\psi(x, y) = \frac{32a^2b^2G\theta}{\pi^4} \sum_{m,n=1,3,5,\dots} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn(b^2m^2 + a^2n^2)}. \quad (16)$$

Вычислим значение функции  $\psi$  кручения в середине прямоугольника.

$$\begin{aligned} \psi\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) &= 0.144G\theta, \text{ при } n, m = 1, 3, \\ \psi\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) &= 0.147G\theta, \text{ при } n, m = 1, 3, \dots 21, \\ \psi\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) &= 0.147G\theta, \text{ при } n, m = 1, 3, \dots 209. \end{aligned} \quad (17)$$

Получаем, что значение функции кручения с  $n = 21$  и  $n = 209$  не отличаются по крайней мере до третьего знака, тогда как значение этой функции при  $n = 3$  отличается на 3%.

Рассмотрим график (2) и линии уровня (3) полученной функции кручения для  $n = 21$ .

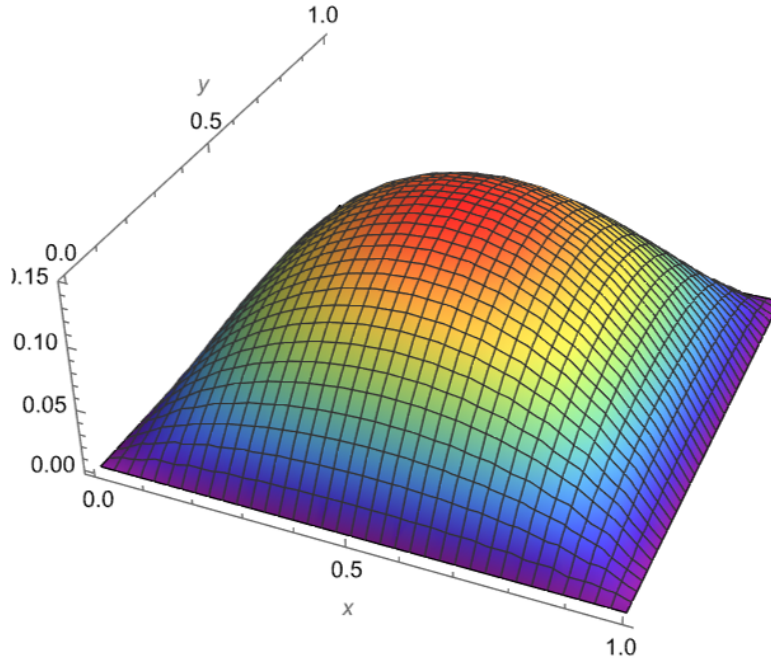


Рис. 2. График функции кручения, полученной энергетическим способом



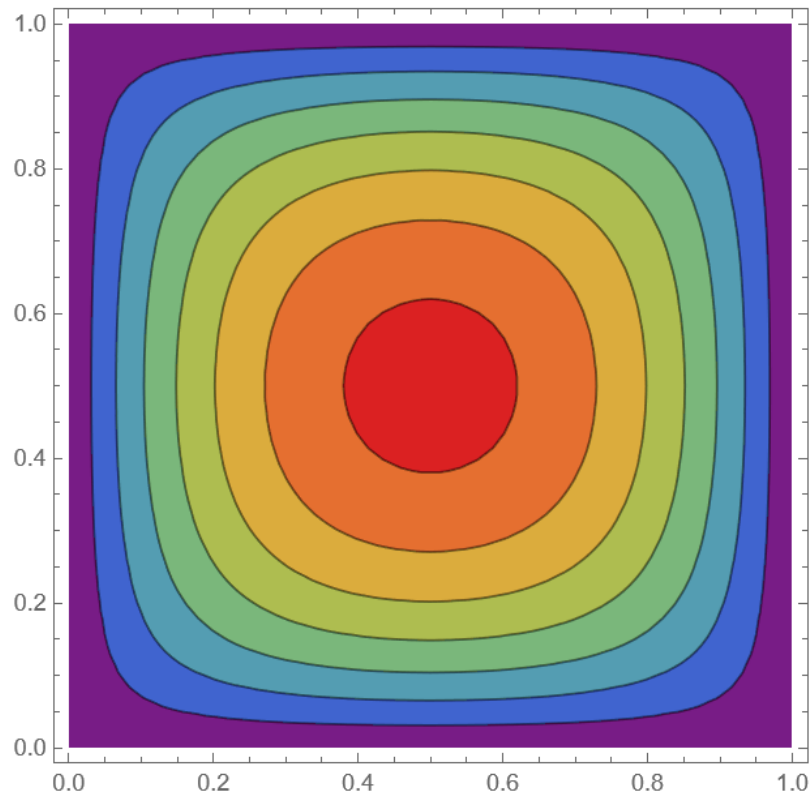


Рис. 3. Линии уровня функции кручения, полученной энергетическим способом

## 5. Решение задачи о кручении стержня методом Ритца

Решение задачи кручения стержня прямоугольного сечения [1], как уже было показано выше, сводится к интегрированию уравнения Пуассона (1)

$$-\Delta\psi = 2G\theta,$$

где  $G$  — модуль сдвига,  $\theta$  — угол закручивания стержня на единицу его длины, в прямоугольнике

$$0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$$

при краевых условиях

$$\psi(0, y) = \psi(a, y) = \psi(x, 0) = \psi(x, b) = 0.$$

Полагая для упрощения  $\psi = 2G\theta u$ , получим задачу в виде

$$\begin{cases} -\Delta u = 1, \\ \psi(a, y) = \psi(x, b) = 0, \\ \psi(0, y) = \psi(x, 0) = 0. \end{cases}$$

Применим метод Ритца, взяв за координатные функции полиномы. Рассмотрим многочлен, равный нулю на контуре прямоугольника, т. е. на прямых  $x = 0$ ,  $x = a$  и  $y = 0$ ,  $y = b$  имеют вид

$$\psi(x, y) = x(x - a)y(y - b) (a_0 + a_1(x + y) + a_2(x^2 + a_3y^2) + \dots)$$

Для начала ограничимся первым членом ряда. Имеем

$$\psi_1(x, y) = a_0x(x - a)y(y - b). \quad (18)$$

Вычислим  $a_0$ . Для этого подставим функцию  $\psi_0(x, y)$  (18) в интеграл

$$F = - \int_0^a \int_0^b \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 - 2G\theta\psi \right) dx dy, . \quad (19)$$

И из условия (8) получим

$$a_0 = \frac{5G\theta}{2(a^2 + b^2)}$$

Вычислим значение функции  $\psi_1$  кручения в середине прямоугольника

$$\psi_1\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) \approx 0.156G\theta.$$

В качестве второго приближения рассмотрим функцию

$$\psi_2(x, y) = x(x - a)y(y - b) (a_0 + a_1(x + y) + a_2(x^2 + a_3y^2)). \quad (20)$$

Вычислим значение функции  $\psi_2$  кручения в середине прямоугольника, предварительно аналогично первому приближения получив значения  $a_0, a_1, a_2$ .

$$\psi_2\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) \approx 0.146G\theta.$$

Получаем, что значение функции кручения второго приближения отличается от значения функции кручения первого приближения в той же точки на 7%.

Рассмотрим график (6) и линии уровня (5) полученной функции кручения для первого приближения.

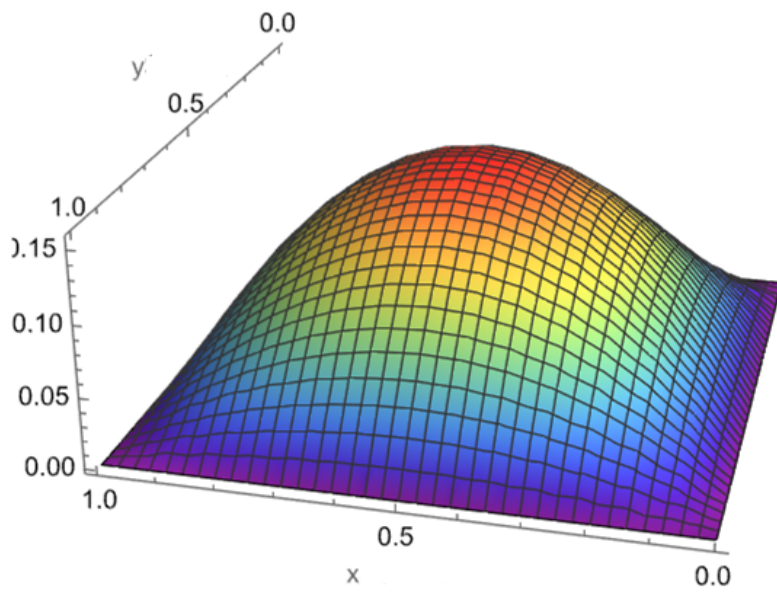


Рис. 4. График функции кручения, полученной методом Ритца

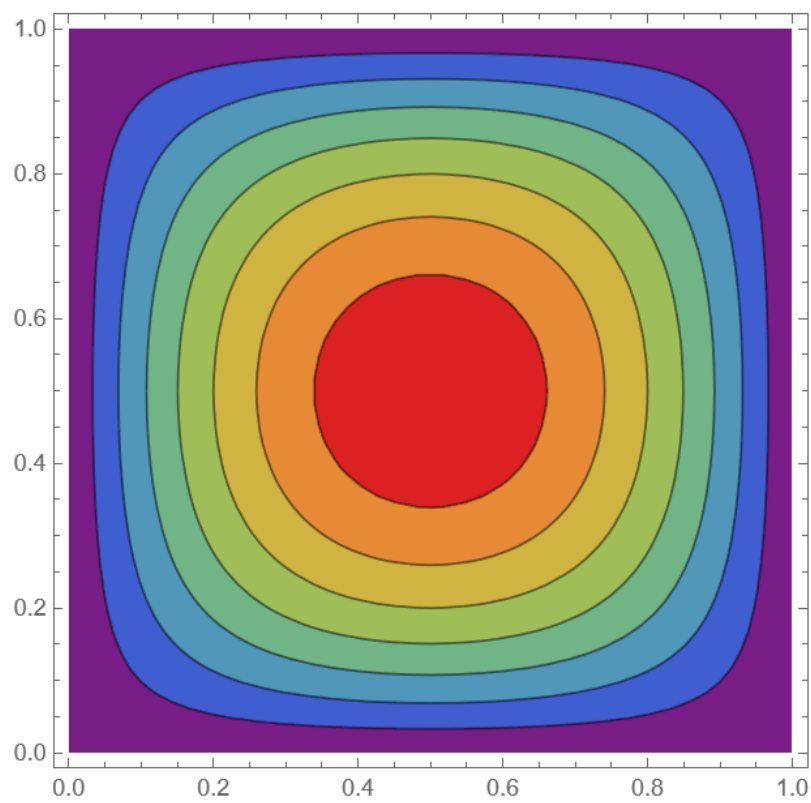


Рис. 5. Линии уровня функции кручения, полученной методом Ритца

## 6. Сравнение решений энергетическим методом и методом Ритца

Сравним два рассматриваемых метода, сопоставив результаты полученных функций кручения, а так же их крутящих моментов.

### 6.1. Сравнение функций кручения

Мы получили значение  $\psi\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) = 0.147G\theta$  для энергетического метода и  $\psi\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) = 0.146G\theta$  для метода Ритца, они отличаются на 1%. При этом при малой точности вычисления данные методы дают результат  $0.144G$  и  $0.156G$  соответственно. Точным решением является  $\psi\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) = 0.147G\theta$ , из чего мы можем сделать вывод, что метод энергий более точный в рассматриваемом случае.

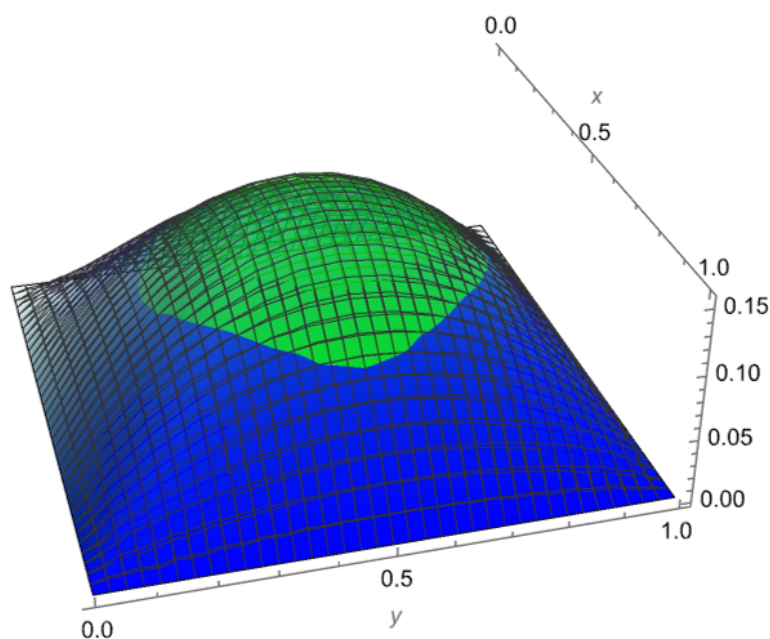


Рис. 6. Сравнение функций кручения, полученных энергетическим методом и методом Ритца

## 6.2. Сравнение крутящего момента

Крутящий момент определяется формулой

$$M = 2 \int_{-a}^a \int_{-b}^b \varphi dx dy. \quad (21)$$

Для метода энергий, интегрируя ряд (16), получим

$$M_1 = \frac{256G\theta a^4 b^4}{\pi^6} \sum_{m,n=1,3,5,\dots} \frac{1}{(b^2 m^2 + a^2 n^2) m^2 n^2}. \quad (22)$$

Преобразуем ряд и приняв, что прямоугольник достаточно узкий можем представить

$$M_1 = \frac{1}{3} \left( 1 - 0.630 \frac{a}{b} \right)$$

Для квадрата получим

$$M_1 = 0.140G\theta a^4.$$

С другой стороны крутящий момент равен в решении точным методом [2]

$$M_2 = \frac{1}{3} G\theta a^3 b \left( 1 - \frac{192a}{\pi^5 b} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^5} \operatorname{th} \frac{n\pi b}{2a} \right) \quad (23)$$

С другой стороны, для метода Ритца первого приближения получаем

$$M_2 = 0.139(2a)^4,$$

а для второго приближения

$$M_2 = 0.140(2a)^4,$$

Таким образом, при рассмотрении достаточно узкого прямоугольника крутящий момент, полученный энергетическим методом можно считать за точный, а метод Ритца будет совпадать с точным решением до третьего знака при расчете во втором приближении.

## Заключение

В ходе выполнения курсовой были изучены энергетический метод и метод Ритца нахождения кручения стержня прямоугольного сечения. С помощью этих методов была решена задача, их результаты оказались идентичны с точностью до двух знаков. Оба метода довольно хорошо дают значение крутящего момента. Энергетический метод позволяет выполнить вычисления несколько точнее и быстрее, но каждый раз требует вычисления тригонометрического ряда. Метод Ритца дает возможность получить функцию кручения в виде многочлена и получать ответ с другими параметрами задачи с меньшим количеством вычислений, что может быть полезно при большом объеме вычислений.

## Список использованных источников

1. С. Г. Михлин. Вариационные методы в математической физике, М.: Изд-во Наука, 1970. — 512 с.
2. С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер. Теория упругости, М.: Изд-во Наука, 1975. — 576 с.
3. С. Г. Михлин, Х.Л. Смолицкий Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. М.: Изд-во Наука, 1965. — 384 с.