



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Московский государственный технический университет  
имени Н. Э. Баумана  
(национальный исследовательский университет)»  
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ \_\_\_\_\_ Фундаментальные науки

КАФЕДРА \_\_\_\_\_ Прикладная математика

## ДОМАШНЯЯ РАБОТА ПО КУРСУ

*«Математические модели прикладной механики»*

*НА ТЕМУ:*

*Упругие характеристики поликристаллических  
металлов*

*Вариант 15*

*$Si + Mg$*

Студент \_\_\_\_\_  
ФН2-71Б  
(Группа)

\_\_\_\_\_  
(Подпись, дата)

В. Г. Пиневич  
\_\_\_\_\_  
(И. О. Фамилия)

Руководитель курсовой работы

\_\_\_\_\_  
(Подпись, дата)

Е. А. Максимова  
\_\_\_\_\_  
(И. О. Фамилия)

2023 г.

## Оглавление

Список условных обозначений . . . . .	3
1. Постановка задачи . . . . .	4
Вычисление элементов матриц коэффициентов упругости и коэффициентов податливости . . . . .	5
1.1. Матрицы податливости и упругости для кубической кристаллической решетки . . . . .	5
1.2. Матрицы податливости и упругости для гексагональной кристаллической решеткой . . . . .	5
2. Линейная податливость . . . . .	6
2.1. Линейная податливость для металлов с кубической кристаллической решеткой . . . . .	6
2.2. Линейная податливость для металлов с гексагональной кристаллической решеткой . . . . .	8
3. Деформирование шара из металла с ГПУ кристаллической решеткой при всестороннем давлении . . . . .	9
4. Оценки коэффициента Пуассона . . . . .	9
4.1. Оценки по Фойгту и по Рейссу . . . . .	9
4.2. Задача Эшелби . . . . .	11
5. Расчеты для пористого двухфазного сплава-смеси . . . . .	12
6. Заключение . . . . .	12
Список использованных источников . . . . .	15

## Список условных обозначений

$C$	— матрица коэффициентов упругости
$C_{ij}$	— элементы матрицы $C$ ( $i, j = \overline{1, 6}$ )
$S$	— матрица коэффициентов податливости
$S_{ij}$	— элементы матрицы $S$ ( $i, j = \overline{1, 6}$ )
$S_n$	— линейная податливость в направлении $\mathbf{n}$
$e^{(\mathbf{n})}$	— относительное удлинение в направлении $\mathbf{n}$
$\sigma_{kl}$	— компоненты тензора напряжений $\hat{\sigma}$ ( $k, l = \overline{1, 3}$ )
$S_{ijkl}$	— компоненты тензора податливости $\hat{S}$ ( $i, j, k, l = \overline{1, 3}$ )
$\varepsilon_{kl}$	— компоненты тензора малой деформации $\hat{\varepsilon}$ ( $k, l = \overline{1, 3}$ )
$p$	— давление
$\delta_{ij}$	— символ Кронекера
$V_0$	— контрольный объем
$I_{ijkl}$	— единичный тензор 4-го ранга ( $i, j, k, l = \overline{1, 3}$ )
$\nu$	— коэффициент Пуассона
$C_{ijkl}$	— компоненты тензора коэффициентов упругости $\hat{C}$ ( $i, j, k, l = \overline{1, 3}$ )
$C_{ijkl}^o$	— эффективные упругие характеристики поликристалла ( $i, j, k, l = \overline{1, 3}$ )
$S_{ijkl}^o$	— эффективные характеристики податливости поликристалла ( $i, j, k, l = \overline{1, 3}$ )
$\omega_{ijkl}$	— тензор Эшелби ( $i, j, k, l = \overline{1, 3}$ )
$E$	— модуль Юнга, ГПа
$\mu$	— модуль сдвига, ГПа
$\kappa$	— модуль объемной упругости, ГПа

## 1. Постановка задачи

Для заданной пары чистых металлов по значениям коэффициентов упругости (или податливости) кристаллов вычислить элементы матрицы коэффициентов податливости (или упругости), сравнив точность обращения матриц с вычислением по формулам, и построить графики зависимостей линейной податливости от направления единичного вектора для гексагональной кристаллической решетки в плоскости, содержащей оптическую ось кристалла, а для кубической кристаллической решетки в плоскости грани и в плоскостях, имеющие общую точку диагонали двух граней, диагонали грани и куба, диагональ куба и ребро. Для кристаллической решетки каждого из металлов определить направления, по которым линейная податливость имеет экстремальные значения. Найти отношение полуосей эллипсоида вращения, образующегося после действия всестороннего давления на шар из металла с ГПУ кристаллической решеткой.

Для каждого из металлов в предположении хаотической ориентации зерен в поликристалле найти верхнюю и нижнюю оценки модулей сдвига, продольной и объемной упругости, оценки коэффициента Пуассона и сравнить полученные значения с вычисленными для случая статистически усредненной шаровой формы кристаллических зерен. Провести аналогичные расчеты и построить графики для пористого двухфазного сплава-смеси заданной пары металлов при трех фиксированных значениях объемной пористости, равных 0; 0.1 и 0.2, в зависимости от отношения  $\frac{V_1}{(V_1 + V_2)} \in [0; 1]$ , где  $V_1$  и  $V_2$  — объемные доли металлов в сплаве.

Таблица 1. Коэффициенты упругости и податливости

<i>Si</i>	$C_{11}$	$C_{12}$	$C_{44}$	<i>Mg</i>	$S_{11}$	$S_{12}$	$S_{13}$	$S_{33}$	$S_{44}$
ГПа	167	61	76	ТПа <sup>-1</sup>	23.9	-9.48	-5.36	20.9	70.4

## Вычисление элементов матриц коэффициентов упругости и коэффициентов податливости

Соотношение для связи коэффициентов упругости и коэффициентов податливости

$$C_{ijmn}S_{mnkl} = I_{ijkl}.$$

В матричной форме записи тензоров 4 ранга  $\hat{C}, \hat{S}$  это выражение будет иметь вид

$$\hat{C}\hat{S} = I \quad (1)$$

### 1.1. Матрицы податливости и упругости для кубической кристаллической решетки

В кристаллах с кубической решеткой все оси  $Ox_k$  равноправны и матрица  $S$  коэффициентов податливости содержит лишь три отличных от нуля независимых элемента

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{11} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{12} & S_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{44} \end{pmatrix}.$$

Матрица коэффициентов упругости  $C$  имеет аналогичный вид. Найдём коэффициенты податливости используя формулы из источника [1] и проведя расчёты в с помощью Wolfram Mathematica.

$$S_{11} = \frac{C_{11} + C_{12}}{C_K}, S_{12} = -\frac{C_{12}}{C_K}, S_{44} = \frac{1}{C_{44}},$$

где  $C_K = C_{11}^2 + C_{11}C_{12} - 2C_{12}^2$ .

Теперь определим коэффициенты податливости при помощи матрицы  $C$  из (1). Получаем

$$S_{11} = 7.44 \text{ ТПа}^{-1}, S_{12} = 1.99 \text{ ТПа}^{-1}, S_{33} = 1.32 \text{ ТПа}^{-1}.$$

### 1.2. Матрицы податливости и упругости для гексагональной кристаллической решёткой

Кристаллы с ГПУ-решеткой обладают высокой степенью симметрии относительно кристаллографической оси  $Ox_3$ . Поэтому их упругие свойства в плоскости, перпен-

дикулярной этой оси, изотропны, а матрица  $S$  коэффициентов податливости включает пять независимых ненулевых элементов:

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{11} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{13} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{pmatrix}.$$

Коэффициент  $S_{66} = \frac{S_{11}-S_{12}}{2}$ .

Действуя аналогично с прошлым пунктом найдем коэффициенты упругости используя формулы из источника [1].

$$C_{11} = \frac{S_{33}}{2S_h} + \frac{1}{2(S_{11} - S_{12})}, C_{12} = \frac{S_{33}}{2S_h} + \frac{1}{2(S_{11} - S_{12})}, C_{13} = -\frac{S_{33}}{2S_h},$$

$$C_{33} = \frac{S_{11} + S_{12}}{2S}, C_{44} = \frac{1}{S_{44}}, C_{66} = \frac{1}{2(S_{11} - S_{12})}$$

где  $S_h = (S_{11} + S_{12}) S_{33} - 2S_{12}^2$ .

Теперь определим коэффициенты податливости при помощи матрицы  $S$  из (1). Получаем

$$C_{11} = 57.82 \text{ ГПа}, C_{12} = 27.86 \text{ ГПа}, C_{13} = 21.97 \text{ ГПа},$$

$$C_{33} = 59.12 \text{ ГПа}, C_{44} = 14.20 \text{ ГПа}, C_{66} = 14.98 \text{ ГПа}.$$

## 2. Линейная податливость

Пусть на кристалл действует внешнее растягивающее напряжение  $\sigma_{kl} = \sigma n_k n_l$  в направлении  $\mathbf{n} = \{n_1, n_2, n_3\}$ . Тогда линейная податливость в направлении действия напряжения имеем вид

$$S_N = \frac{e^{(n)}}{\sigma} = S_{ijkl} N_i n_j n_k n_l,$$

где  $e^{(n)}$  — относительное удлинение материала в направлении  $\mathbf{n}$ .

### 2.1. Линейная податливость для металлов с кубической кристаллической решеткой

Линейная податливость для металлов с кубической кристаллической решеткой равна

$$S_N = S_{11} - (2(S_{11} - S_{12}) - S_{44})(n_1^2 n_2^2 + n_1^2 n_3^2 + n_2^2 n_3^2). \quad (2)$$

Получим зависимость линейной податливости  $S_n$  от направления единичного вектора, лежащего в плоскости грани куба. Рассмотрим грань куба, лежащую в плоскости  $Ox_1x_2$ , на которой  $n_3 = 0$  (для других граней куба аналогично). Учитывая равенство

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$$

получаем  $n_2^2 = 1 - n_1^2$ . Тогда соотношение (2) будет выглядеть следующим образом

$$S_n = S_{11} - (2(S_{11} - S_{12}) - S_{44}) n_1^2 (1 - n_1^2).$$

График функции  $S_n$  в плоскости грани куба в зависимости от  $n_2$  изображен на рис. 1. В плоскости грани куба линейная податливость минимальна в направлении диагонали грани (точка с абсциссой  $n_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$  отмечена красным на графике), и максимальна в направлениях параллельных граням.

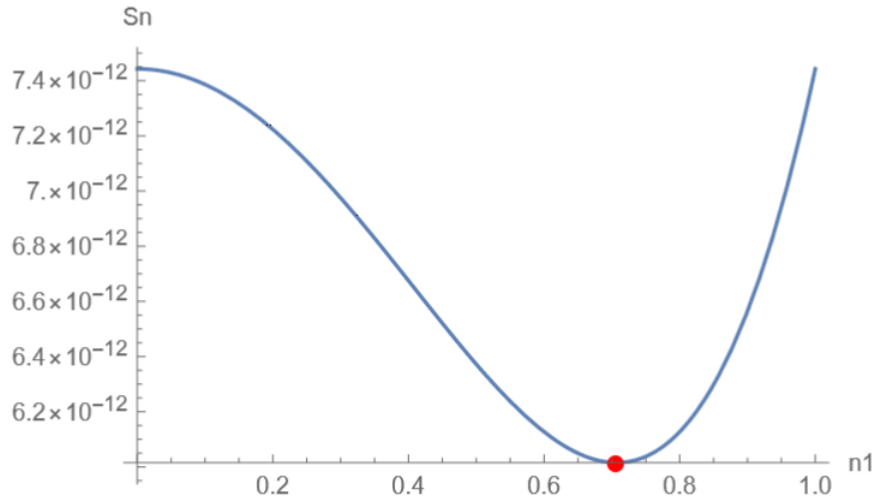


Рис. 1. Линейная податливость в плоскости грани куба

Теперь найдем зависимость линейной податливости  $S_n$  от направления единичного вектора, лежащего в плоскостях, содержащих диагонали грани и куба. Пусть диагональ грани лежит в плоскости  $Ox_1x_2$  ( $x_1 = x_2$ ). Тогда получаем равенства  $n_3^2 = 1 - n_1^2 - n_2^2$ ,  $n_1 = n_2$ . Тогда соотношение (2) имеет вид

$$S_n = S_{11} - (2(S_{11} - S_{12}) - S_{44}) n_1^2 (2 - 3n_1^2)$$

График функции  $S_n$  в плоскостях, содержащих диагонали грани и куба в зависимости от  $n_1$  представлен на рис. 2. Линейная податливость минимальна в направлении диагонали куба (точка с абсциссой  $n_1 = 1/\sqrt{3}$  отмечена красным на графике), и максимальна в направлении, параллельном грани куба.

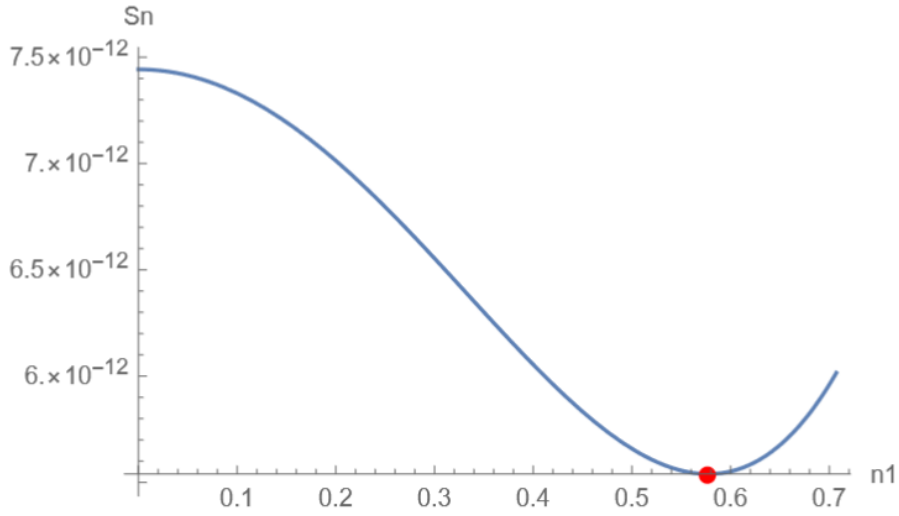


Рис. 2. Линейная податливость в плоскостях, содержащих диагонали грани и куба

Вычислим направления максимальной податливости и минимальной линейной податливости. Воспользуемся функциями Maximize и Minimize Wolfram Mathematica для этого. В результате расчетов получим, что максимальное значение функции  $S_N(n_1, n_2, n_3)$  в направлении вектора  $\mathbf{n} = \{1, 0, 0\}$ , т.е. в направлении грани куба, а минимальное значение функции при координатах вектора  $\mathbf{n}$  равных  $n_1 = n_2 = n_3 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ , что соответствует направлению диагонали куба.

## 2.2. Линейная податливость для металлов с гексагональной кристаллической решеткой

Линейная податливость кристалла с ГПУ-решеткой зависит лишь от угла между направлением действия силы и осью  $Ox_3$  :

$$S_n = S_{11} (1 - n_3^2)^2 + S_{33} n_3^4 + (2S_{13} + S_{44})(1 - n_3^2)n_3^2 \quad (3)$$

График зависимости линейной податливости от направления единичного вектора в плоскости, содержащей оптическую ось кристалла, представлен на рис. 3. линейная податливость минимальна в направлении оптической оси и максимальна при  $n \approx 0.63$  (точка отмечена на графике красным).



### 3. Деформирование шара из металла с ГПУ кристаллической решеткой при всестороннем давлении

Рассмотрим задачу действия всестороннего давления на шар из магния. Найдем отношение полуосей эллипсоида вращения, образующегося после данного воздействия. Из условия всестороннего давления  $p$  имеем  $\sigma_{kl} = -p\beta_{kl}$ . Деформация в направлении вектора имеет вид  $e^{(n)} = \varepsilon_{ij}n_in_j$ . Учитывая выражение  $\varepsilon_{ij} = S_{ijkl}\sigma_{kl}$ , для металла с гексагональной решеткой имеем

$$\begin{aligned} e^{(n)} &= S_{klmn}\sigma_{mn}n_kn_l = -pS_{klmn}\beta_{mn}n_kn_l = -pS_{klmm}n_kn_l = -pS_{kkmm}n_pn_p; \\ e^{(n)} &= -p((S_{11} + S_{12} + S_{13})n_1^2 + (S_{11} + S_{12} + S_{13})n_2^2 + (S_{13} + S_{33} + S_{13})n_3^2); \\ e^{(n)} &= -p((S_{11} + S_{12} + S_{13}) + (S_{33} + S_{13} - S_{11} - S_{12})) \end{aligned}$$

Изменение полуоси в направлении вектора  $n_3$  имеет вид

$$a = -p((S_{11} + S_{12} + S_{13}) + (S_{33} + S_{13} - S_{11} - S_{12})),$$

а в направлении, перпендикулярном  $n_3$ :

$$b = -p(S_{11} + S_{12} + S_{13}).$$

Следовательно, отношение полуосей эллипсоида вращения равняется

$$\frac{a}{b} \approx 1.12$$

### 4. Оценки коэффициента Пуассона

Значения коэффициента Пуассона будем находить из соотношения

$$v = \frac{\kappa/2 - G/3}{\kappa + G/3} \quad (4)$$

#### 4.1. Оценки по Фойгту и по Рейссу

Для нахождения верхних оценок для модуля сдвига и модуля всестороннего сжатия (по Фойгту) будем считать, что в поликристаллическом материале деформация одинакова во всех зернах ( $\bar{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij}^o = const$ ). Такие распределения перемещений являются допустимыми для минимизируемого функционала Лагранжа. Этот функционал в данном случае принимает вид

$$J[\varepsilon_{ij}] = \frac{1}{2} \int_{V_0} C_{ijmn}(M) \varepsilon_{mn}(M) \varepsilon_{ij}(M) dV.$$

Действительным распределениям перемещений в представительном объеме  $V_0$  соответствует истинное распределение  $\varepsilon_{ij}^*(M)$  компонент тензора деформации, на котором функционал  $J[\varepsilon_{ij}]$  принимает минимальное значение. Задача минимизации  $J[\varepsilon_{ij}]$  приводит к решению системы неравенств

$$\begin{cases} C_{kkmm} - C_{kkmm}^\circ \leq 0, \\ C_{klkl} - C_{klkl}^\circ \leq 0 \end{cases}$$

откуда получаем верхние оценки для модуля сдвига  $G^+$  и модуля всестороннего сжатия  $\kappa^+$ . На истинном распределении напряжений в представительном объеме  $V_0$  функционал

Для нахождения нижних оценок для модуля сдвига и модуля всестороннего сжатия (по Рейссу) будем считать, что в поликристаллическом материале напряжения одинаковы во всех зернах ( $S_{ij} = S_{is}^\circ = \text{const}$ ). Такое распределения напряжений являются допустимыми для максимизируемого функционала Кастилиано. Этот функционал в данном случае принимает вид

$$I[\sigma_{ij}] = -\frac{1}{2} \int_{V_0} S_{ijmn}(M) \sigma_{mn}(M) \sigma_{ij}(M) dV$$

На истинном распределении напряжений в представительном объеме  $V_0$  функционал  $I[\sigma_{ij}]$  принимает максимальное значение. Задача максимизации  $I[\sigma_{ij}]$  приводит к решению системы неравенств

$$\begin{cases} S_{kkmm} - S_{kkmm}^\circ \leq 0, \\ S_{klkl} - S_{klkl}^\circ \leq 0 \end{cases}$$

откуда получаем нижние оценки для модуля сдвига  $G^-$  и модуля всестороннего сжатия  $\kappa^-$ .

Таким образом, оценки модуля сдвига и модуля всестороннего сжатия для кубической кристаллической решетки имеют вид

$$G^- = \frac{5}{4S_{11} + 3S_{44} - 4S_{12}}, G^+ = \frac{C_{11} - C_{12} + C_{44}}{5}, \kappa^- = \frac{1}{3(S_{11} + 2S_{12})} = \frac{C_{11} + 2C_{12}}{3} = \kappa^+$$

Тогда оценки для коэффициента Пуассона для кубической кристаллической решетки имеют вид

$$v_- = \frac{\kappa^+/2 - G^+/3}{\kappa^+ + G^+/3} = 0.2184, v_+ = \frac{\kappa^-/2 - G^+/3}{\kappa^- + G^-/3} = 0.2184$$

Оценки модуля сдвига и модуля всестороннего сжатия для ГПУ-решетки:

$$\begin{aligned} G^- &= \frac{15}{2(7S_{11} + 2S_{33} - 5S_{12} + 3S_{44} - 4S_{13})}, \\ G^+ &= \frac{7C_{11} + 12C_{44} - 5C_{12} + 2C_{33} - 4C_{13}}{30}, \\ \kappa^- &= \frac{1}{2S_{11} + S_{33} + 2S_{12} + 4S_{13}}, \\ \kappa^+ &= \frac{2C_{11} + C_{33} + 2C_{12} + 4C_{13}}{9}, \end{aligned}$$

Тогда оценки для коэффициента Пуассона для ГПУ-решетки имеют вид

$$v_- = \frac{\kappa^+/2 - G^+/3}{\kappa^+ + G^+/3} = 0.3084, v_+ = \frac{\kappa^-/2 - G^+/3}{\kappa^- + G^-/3} = 0.3104, v^- \leq v \leq v^+.$$

#### 4.2. Задача Эшелби

Для оценки характеристик поликристаллического материала можно использовать решение задачи Эшелби о взаимодействии с изотропной линейно-упругой сплошной средой изотропного линейно-упругого шарового включения. Необходимо решить систему

$$\begin{cases} \zeta_{kkmm} = 0, \zeta_{klkl} = 0, \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} \zeta_{pqrs} &= (C_{ijpq} - C_{ijmn}^\circ (I_{mnpq} - \omega_{mnpq}))^{-1} (C_{ijrs}^\circ - C_{ijrs}), \\ \omega_{ijmn} &= \frac{3}{2} \frac{1-v}{4-5v} \left( \frac{1-5v}{1+v} \beta_{ij} \beta_{mn} + 5I_{ijmn} \right). \end{aligned}$$

Используя правило сведения компонент симметричных тензоров 4-го ранга в матрицу, получаем систему для инвариантов тензора с компонентами  $\zeta_{pqrs}$ :

$$\begin{cases} \zeta_{kkmm} = \zeta_{11} + \zeta_{22} + \zeta_{33} + 2(\zeta_{12} + \zeta_{13} + \zeta_{23}) = 0, \\ \zeta_{klkl} = \zeta_{11} + \zeta_{22} + \zeta_{33} + 2(\zeta_{44} + \zeta_{55} + \zeta_{66}) = 0, \end{cases}$$

решение которой равносильно решению следующей задачи безусловной минимизации:

$$\zeta_{kkmm}^2 + \zeta_{klkl}^2 \rightarrow \min,$$

решив которую получаем точечные оценки для модуля сдвига и модуля всестороннего сжатия, из которых можно найти оценку коэффициента Пуассона, используя соотношение (4). В результате имеем следующие оценки коэффициента Пуассона:

- 1) для кубической кристаллической решетки  $n = 0.2211$ ;
- 2) для ГПУ-решетки  $n = 0.3093$ .

## 5. Расчеты для пористого двухфазного сплава-смеси

Проведем аналогичные расчеты для пористого двухфазного сплава-смеси кремния и магния при трех фиксированных значениях объемной пористости. Пусть  $V_1$ ,  $V_2$  и  $V_3$  — объемные доли кремния и магния и объемная пористость сплава-смеси соответственно. Тогда  $V_1 + V_2 + V_3 = 1$ . Верхнюю и нижнюю оценки упругой характеристики  $\Pi$  сплава-смеси, состоящего из  $N$  компонент, можно получить по следующим формулам:

$$\Pi^+ = \sum_{\alpha=1}^N \Pi_{\alpha}^+ V_{\alpha}, \quad \frac{1}{\Pi^-} = \sum_{\alpha=1}^N \frac{V_{\alpha}}{\Pi_{\alpha}^-}.$$

Поскольку  $V_1 + V_2 + V_3 = 1$ , и требуется построить графики от величины  $\tilde{V} = \frac{V_1}{V_1 + V_2}$  имеем

$$\begin{cases} V_1 + V_2 = 1 - V_3, \\ V_1 = \tilde{V}(1 - V_3), \\ V_2 = 1 - V_3 - V_1 = (1 - \tilde{V})(1 - V_3). \end{cases}$$

При решении задачи Эшелби использована функция

$$\zeta = V_1 \zeta_{Si} + V_2 \zeta_{Mg} + V_3 \zeta_0,$$

где  $\zeta_{Si}$ ,  $\zeta_{Mg}$  — соответствующие функции для металлов с кубической и ГПУ кристаллическими решетками,  $\zeta_0$  — поправка на поры с нулевым тензором коэффициентов упругости. Построим графики зависимостей  $v^+$ ,  $v_-$  и величины  $v$ , найденной при решении задачи Эшелби, от переменной  $\tilde{V}$  (рис. 3). Из графиков видно, что при наличии ненулевой объемной пористости нижние оценки некорректны.

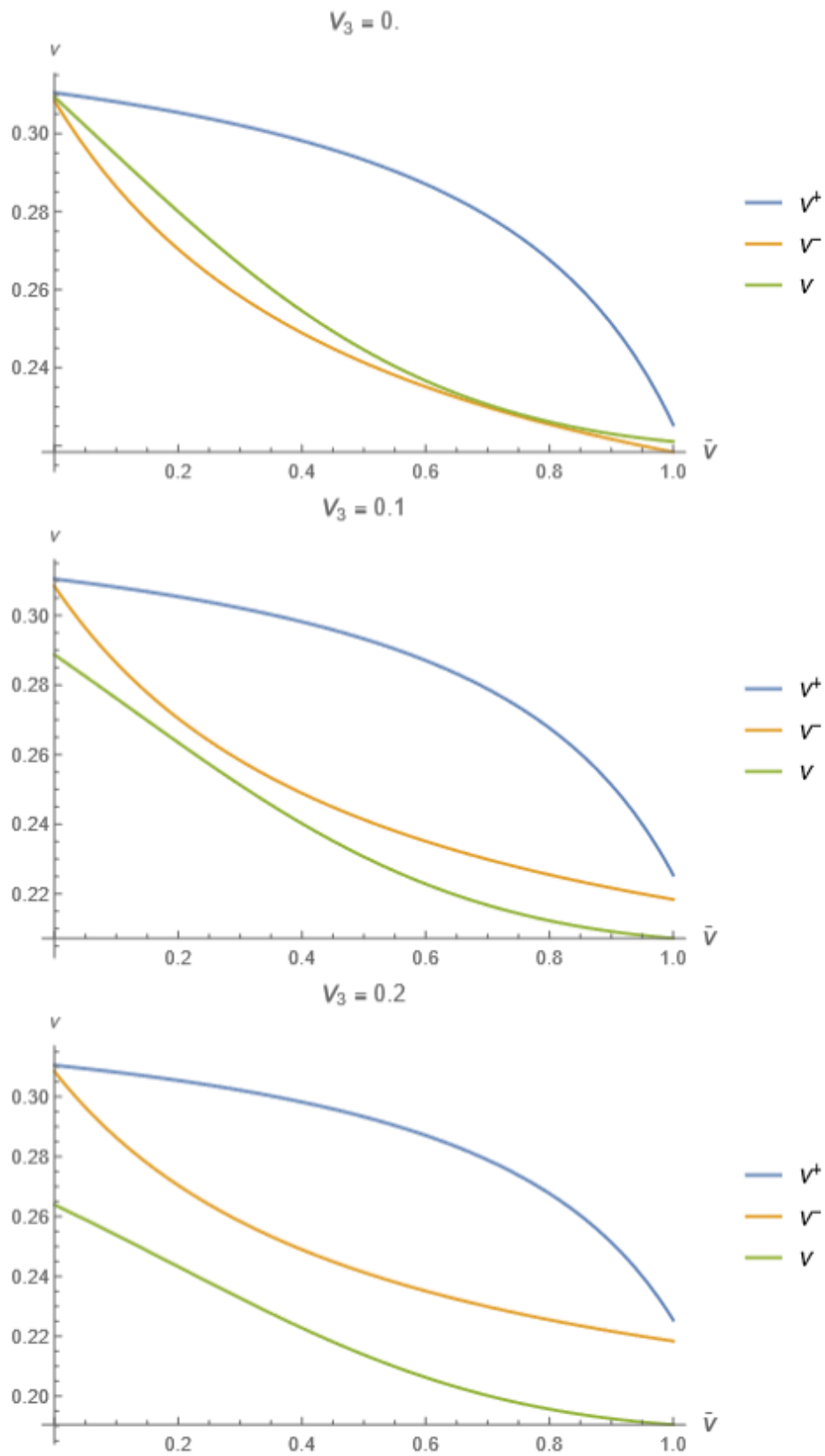


Рис. 3. Оценки коэффициента Пуассона пористого двухфазного сплава-смеси при различных значениях объемной пористости

## 6. Заключение

В данной работе для заданной пары металлов были получены следующие результаты:

- 1) вычислены элементы матриц коэффициентов податливости и упругости;
- 2) построены графики зависимостей линейной податливости от направлений единичного вектора;
- 3) определены направления, по которым линейная податливость имеет экстремальные значения;
- 4) найдены отношения полуосей эллипсоида вращения, образующегося после действия всестороннего давления на шар из металла с ГПУ-решеткой;
- 5) для поликристаллов из заданных металлов найдены оценки коэффициента Пуассона в предположении хаотической ориентации зерен (оценки по Фойгту и по Рейссу) и для случая статистически усредненной шаровой формы кристаллических зерен (задача Эшелби);
- 6) проведены аналогичные расчеты для пористого двухфазного сплава-смеси из заданных металлов при трех фиксированных значениях объемной пористости;
- 7) построены графики зависимостей коэффициента Пуассона от объемных долей металлов в сплаве;
- 8) показано, что при наличии пор в двухфазном сплаве-смеси нижние оценки некорректны.

## Список использованных источников

1. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. 512 с.
2. Зарубин В.С. Прикладные задачи термopрочности элементов конструкций. М.: Машиностроение, 1985. 296 с.
3. Зарубин В.С. Физические и математические модели микромеханики: учебное пособие. В.С. Зарубин, Г.Н. Кувыркин, И.Ю. Савельева Москва: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2020. 194 с.