

Кручение стержня прямоугольного сечения

Докладчик: Пиневич В. Г.

Научный руководитель: Котович А. В.

группа ФН2-51Б

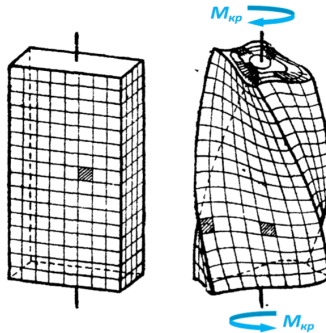
28 января 2023 г.



Функция кручения

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = -2G\theta$$

Сравнить два решения задачи о кручении стержня прямоугольного сечения, полученных энергетическим методом и методом Ритца. Выяснить зависимости точности решения в обоих случаях от числа членов ряда и сравнить полученные результаты



Требуется решить уравнение

$$Au = f, f \in H$$

Решение сводится к поиску минимума функционала

$$F(u) = (Au, u) - 2(u, f)$$

Энергетическое произведение

$$[u, v] = (Au, v)$$

Решение можно представить в виде

$$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \omega_n) \omega_n$$

Линейная комбинация первых n координатных элементов

$$u_n = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i$$

Для вычисления коэффициентов a_i

$$F = - \int_0^a \int_0^b \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 - 2G\theta\psi \right) dx dy$$

Для получения минимума F

$$\frac{\partial F(u_n)}{\partial a_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Задача

Условие

Рассмотрим задачу о кручении стержня, основание которого представляет собой прямоугольник $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$.

Функция кручения $\psi(x, y)$ удовлетворяет условию $-\Delta\psi = 2G\theta$.

Функция $\psi(x, y)$ обращается в нуль на сторонах прямоугольника $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$.

Функция кручения

$$\psi(x, y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} (2G\theta, \psi_{mn}) \psi_{mn}(x, y)$$

$$\begin{aligned} (2G\theta, \psi_{mn}) &= \frac{4G\theta}{\pi} \int_0^a \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) dx \int_0^b \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy = \\ &= \frac{4abG\theta}{\pi^3 mn} \sqrt{\frac{ab}{b^2 m^2 + a^2 n^2}} \end{aligned}$$

Итоговое выражение

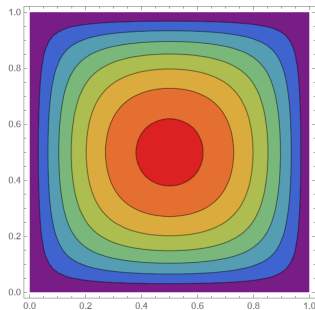
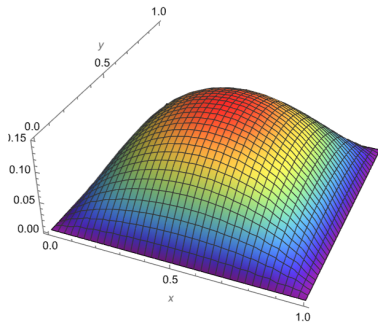
$$\psi(x, y) = \frac{32a^2 b^2 G\theta}{\pi^4} \sum_{m,n=1,3,5,\dots} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn(b^2 m^2 + a^2 n^2)}$$

Значения функции кручения в середине прямоугольника

$$\psi\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 0.144 G\theta, \text{ при } n, m = 1, 3,$$

$$\psi\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 0.147 G\theta, \text{ при } n, m = 1, 3, \dots 21,$$

$$\psi\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 0.147 G\theta, \text{ при } n, m = 1, 3, \dots 209.$$



Полагая для упрощения $\psi = 2G\theta u$, получим задачу в виде

$$\begin{cases} -\Delta u = 1, \\ \psi(a, y) = \psi(x, b) = 0, \\ \psi(0, y) = \psi(x, 0) = 0. \end{cases}$$

$$\psi(x, y) = x(x-a)y(y-b) (a_0 + a_1(x+y) + a_2(x^2 + a_3y^2) + \dots)$$

Первый порядок точности

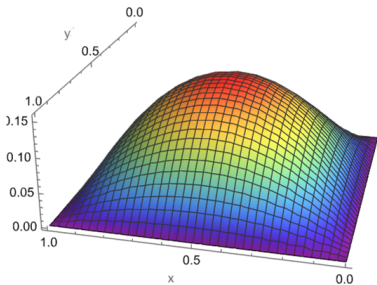
$$\psi_1(x, y) = a_0 x(x-a)y(y-b)$$

Второй порядок точности

$$\psi_2(x, y) = x(x-a)y(y-b) (a_0 + a_1(x+y) + a_2(x^2 + a_3y^2))$$

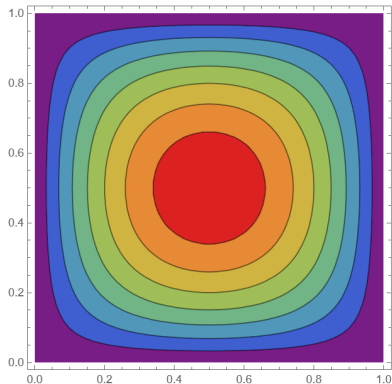
Первый порядок точности

$$\psi_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \approx 0.156 G\theta$$



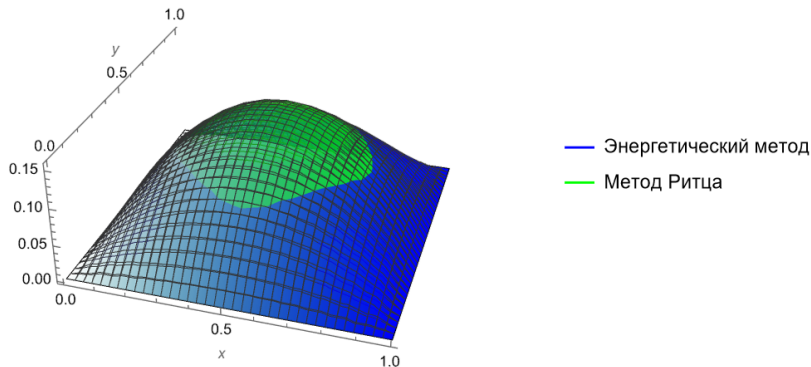
Второй порядок точности

$$\psi_2 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \approx 0.146 G\theta$$



Сравнение функций кручения

$\psi\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 0.147G\theta$ для энергетического метода и
 $\psi\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 0.146G\theta$ для метода Ритца, они отличаются на 1%.
При этом при малой точности вычисления данные методы дают
результат $0.144G$ и $0.156G$ соответственно. Точным решением
является $\psi\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 0.147G\theta$, из чего мы можем сделать вывод,
что метод энергий более точный в рассматриваемом случае



Крутящий момент определяется формулой

$$M = 2 \int_{-a}^a \int_{-b}^b \varphi dx dy$$

Энергетический метод

$$M_{\text{Э}} = \frac{256 G \theta a^4 b^4}{\pi^6} \sum_{m,n=1,3,5,\dots} \frac{1}{(b^2 m^2 + a^2 n^2) m^2 n^2} = 0.140 G \theta a^4$$

1-е приближение м. Ритца

$$M_{P_1} = 0.139(2a)^4$$

2-е приближение м. Ритца

$$M_{P_2} = 0.140(2a)^4$$

В ходе работы получены следующие результаты:

- 1 С помощью рассмотренных методов была решена задача кручения прямоугольного стержня, их результаты оказались идентичны с точностью до второго знака.
- 2 Оба метода позволяют вычислить крутящий момент с точностью до третьего знака.
- 3 Энергетический метод позволяет получить ответ несколько точнее и быстрее, но каждый раз требует вычисления тригонометрического ряда.
- 4 Метод Ритца дает возможность получить функцию кручения в виде многочлена и получать ответ с другими параметрами задачи с меньшим количеством вычислений, что может быть полезно при большом объеме вычислений.