# Кручение стержня прямоугольного сечения

Докладчик: Пиневич В. Г.
Научный руководитель: Котович А. В.

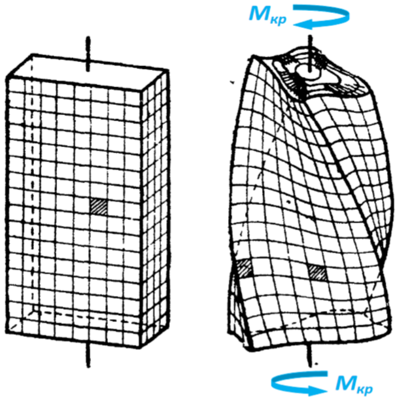
группа ФН2-51Б

27 января 2023 г.

# Постановка задачи

## Функция кручения

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = -2G\theta,$$



# Энергетический метод

**Решим уравнение**

$$Au = f, f \in H$$

**Энергетическое произведение**

$$[u, v] = (Au, v),$$

**Получаем функционал**

$$F(u) = (Au, u) - 2(u, f)$$

**Решение**

$$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \omega_n)\omega_n$$

## Для вычисления коэффициентов $a_i$

$$F = -\int_0^a \int_0^b \left( \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 - 2G\theta\psi \right) dxdy,$$

## Для получения минимума $F$

$$\frac{\partial F(u_n)}{\partial a_i} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

**Условие**

Рассмотрим задачу о кручении стержня, основание которого представляет собой прямоугольник $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$. Функция кручения $\psi(x, y)$ удовлетворяет условию $-\Delta\psi = 2G\theta$. Функция $\psi(x, y)$ обращается в нуль на сторонах прямоугольника $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$.

## Функция кручения

$$\psi(x,y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} (2G\theta, \psi_{mn})\, \psi_{mn}(x,y),$$

$$(2G\theta, \psi_{mn}) = \frac{4G\theta}{\pi} \int\limits_0^a \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) dx \int\limits_0^b \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy =$$

$$= \frac{4abG\theta}{\pi^3 mn} \sqrt{\frac{ab}{b^2m^2 + a^2n^2}}$$

## Итоговое выражение

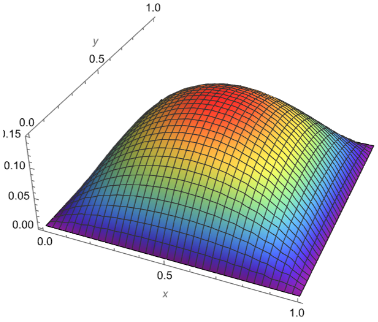
$$\psi(x,y) = \frac{32a^2b^2G\theta}{\pi^4} \sum_{m,n=1,3,5,\dots} \frac{\sin\dfrac{m\pi x}{a}\,\sin\dfrac{n\pi y}{b}}{mn(b^2m^2 + a^2n^2)}$$

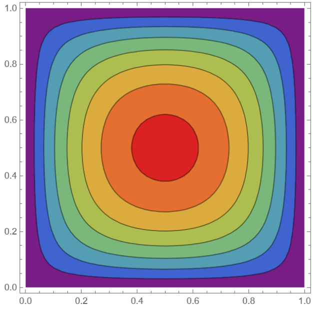
## Значения функции кручения в середине прямоугольника

$$\psi\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right) = 0.144G\theta, \text{ при } n, m = 1, 3,$$

$$\psi\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right) = 0.147G\theta, \text{ при } n, m = 1, 3, \ldots 21,$$

$$\psi\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right) = 0.147G\theta, \text{ при } n, m = 1, 3, \ldots 209.$$



# Решение методом Ритца

**Полагая для упрощения $\psi = 2G\theta u$, получим задачу в виде**

$$\begin{cases} -\Delta u = 1, \\ \psi(a, y) = \psi(x, b) = 0, \\ \psi(0, y) = \psi(x, 0) = 0. \end{cases}$$

$$\psi(x, y) = x(x-a)y(y-b)\left(a_0 + a_1(x+y) + a_2\left(x^2 + a_3 y^2\right) + \ldots\right)$$

**Первый порядок точности**

$$\psi_1(x, y) = a_0 x(x-a)y(y-b)$$

**Второй порядок точности**

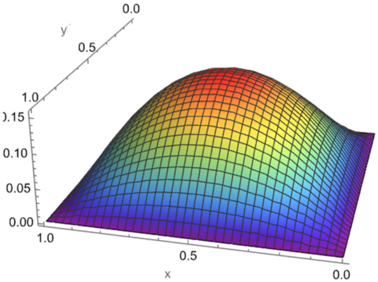
$$\psi_2(x, y) = x(x-a)y(y-b)\left(a_0 + a_1(x+y) + a_2\left(x^2 + a_3 y^2\right)\right)$$

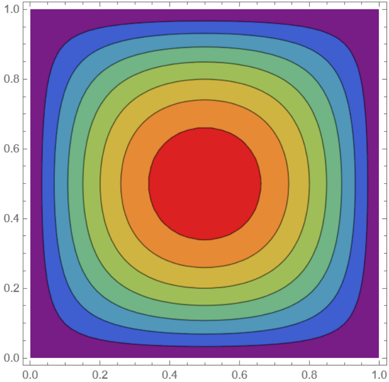
## Первый порядок точности

$$\psi_1\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)\approx 0.156G\theta$$

## Второй порядок точности

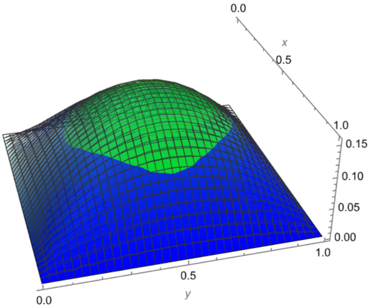
$$\psi_2\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)\approx 0.146G\theta$$



# Сравнение функций кручения

$\psi\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) = 0.147G\theta$ для энергетического метода и $\psi\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) = 0.146G\theta$ для метода Ритца, они отличаются на 1%. При этом при малой точности вычисления данные методы дают результат $0.144G$ и $0.156G$ соответственно. Точным решением является $\psi\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) = 0.147G\theta$, из чего мы можем сделать вывод, что метод энергий более точный в рассматриваемом случае

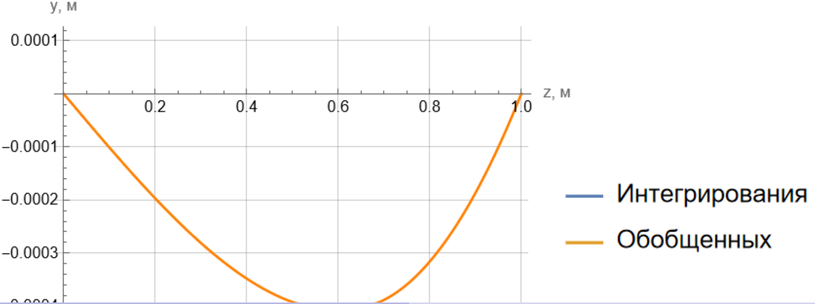


## Итоговое уравнение

$$(2G\theta, \psi_{mn}) = \frac{4G\theta}{\pi} \int\limits_0^a \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) dx \int\limits_0^b \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy =$$

$$= \frac{4abG\theta}{\pi^3 mn} \sqrt{\frac{ab}{b^2 m^2 + a^2 n^2}} [1 - (-1)^m][1 - (-1)^n].$$

Пусть $a = \frac{2L}{3}$, $b = \frac{L}{3}$



# Результаты

В ходе работы получены следующие результаты:

1. С помощью этих методов была решена задача, их результаты оказались идентичны с точностью до второго знака.
2. Оба метода довольно хорошо дают значение крутящего момента.
3. Энергетический метод позволяет выполнить вычисления несколько точнее и быстрее, но каждый раз требует вычисления тригонометрического ряда.
4. Метод Ритца дает возможность получить функцию кручения в виде многочлена и получать ответ с другими параметрами задачи с меньшим количеством вычислений, что может быть полезно при большом объеме вычислений.