



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ _____ Фундаментальные науки

КАФЕДРА _____ Прикладная математика

РАСЧЕТНО-ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА
К КУРСОВОЙ РАБОТЕ
НА ТЕМУ:

Решение дифференциального уравнения
Рейнольдса методом конечных элементов

Студент _____
ФН2-71Б
(Группа)

(Подпись, дата)

В. Г. Пиневич

(И. О. Фамилия)

Руководитель курсовой работы

(Подпись, дата)

А. В. Селиванов

(И. О. Фамилия)

2024 г.

Оглавление

Введение	3
1. Постановка задачи	3
2. Вывод уравнения Рейнольдса	3
Заключение	6
Список использованных источников	7

Введение

1. Постановка задачи

Задача данной работы — вывести, а затем найти решение дифференциального уравнения Рейнольдса методом конечных элементов.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\mu U \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (1)$$

где $h = h(x)$ — толщина слоя, $p = p(x, z)$ — давление, μ — коэффициент вязкости. Граничные условия: U — скорость в направлении x на одной из пластин, p_b — повышенное давление, p_l — пониженное давление.

2. Вывод уравнения Рейнольдса

Гидродинамические уравнения несжимаемой жидкости с внутренним трением могут быть представлены в очень простой форме, если пренебречь силами, пропорциональными массам, равно как и силами инерции.

Обозначая через x, y, z прямоугольные координаты точки, через p — гидродинамическое давление в этой точке,

$$\begin{cases} p_{xy}, p_{xz}; \\ p_{yx}, p_{yz}; \\ p_{zx}, p_{zy}. \end{cases}$$

силы трения, перпендикулярные к оси, обозначенной первой буквой индекса и параллельные оси, обозначенной второй буквой индекса u, ν, ω — проекции скорости на осях x, y, z . μ — коэффициент внутреннего трения жидкости, можно написать три группы следующих уравнений:

1) Группа, определяющая гидродинамическое давление в точке x, y, z :

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 z} \right), \\ \frac{\partial p}{\partial y} = \mu \left(\frac{\partial^2 \nu}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial^2 z} \right), \\ \frac{\partial p}{\partial z} = \mu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial^2 z} \right). \end{cases} \quad (2)$$

2) Группа, определяющая силы трения в той же точке:

$$\begin{cases} p_{yz} = p_{zy} = \mu \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial \nu}{\partial z} \right), \\ p_{zx} = p_{xz} = \mu \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right), \\ p_{xy} = p_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \nu}{\partial x} \right). \end{cases} \quad (3)$$

3) Условие несжимаемости жидкости, выраженное уравнением:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \nu}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0. \quad (4)$$

Примем, что скорость $\nu = 0$, поскольку она мала по сравнению со скоростями $u = 0$, $\omega = 0$.

Изменения скоростей u и ω при заданном значении y для всех изменений x и z могут рассматриваться как чрезмерно малые, поэтому причем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} = 0, \frac{\partial^2 u}{\partial^2 z} = 0, \frac{\partial^2 \omega}{\partial^2 x} = 0, \frac{\partial^2 \omega}{\partial^2 z} = 0.$$

Ограничиваясь приближенным решением, которое можно получить при указанных выше предположениях, уравнения (2), (3) и (4) могут быть приведены к следующей форме.

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y}, \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial p}{\partial z} = \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial^2 y}. \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} p_{yz} = p_{xy} = \mu \frac{\partial \omega}{\partial y}, \\ p_{zx} = p_{xz} = 0, \\ p_{xy} = p_{yx} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}. \end{cases} \quad (6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \nu}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0.$$

Для определения давления необходимо интегрировать выражения (5), (6). Для этого определим граничные условия. Для $y = 0$ имеем

$$u = U_0, \nu = 0, \omega = 0.$$

Для $y = h$ имеем

$$u = U_1, \nu = U_1 - U_1 \frac{\partial h}{\partial h}, \omega = 0.$$

На некотором контуре $f(x, y) = 0$ имеем

$$p = p_0.$$

Поскольку p не зависит от y , то интегрирование уравнений (5) приводит к уравнениям

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (y - h) y + U_0 \frac{h-y}{h} + U_1 \frac{y}{h}, \\ \omega = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} (y - h) y. \end{cases} \quad (7)$$

Первые производные вторых членов этих уравнений, перенесенные в соответствующие уравнения группы (6), приводят к уравнениям

$$\begin{cases} p_{yz} = p_{zy} = \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial z} (2y - h), \\ p_{xy} = p_{yx} = \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} (2y - h) + \mu \frac{U_1 - U_0}{h}. \end{cases} \quad (8)$$

Если считать независимым от z , то четыре последних уравнения сокращаются до двух: первое из группы (7) и второе из группы (8).

Взяв производные от первого из этих уравнений по x и от второго по z и подставляя это в уравнение (4), находим, что

$$\frac{\partial \nu}{\partial y} = -\frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial x} (y - x) y \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial p}{\partial z} (y - h) h \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(U_0 \frac{h-y}{h} + U_1 \frac{y}{h} \right) \right).$$

Интегрируя это уравнение в пределах от $g/\gamma = 0$ до $g/\gamma = L$ и принимая во внимание условия [6], получаем

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{p}{x} \right) = 6\mu \left((U_0 - U_1) \frac{\partial h}{\partial x} \right) + 2V_1.$$

$2V_1$ используется для учёта движений одной из стенок зазора, меняющих значение функции. Если пренебречь этим, и обозначить $U_0 - U_1$ как U , то получим искомое уравнение (1).

Заключение

1) .

Список использованных источников

1. Петров Н. Гидродинамическая теория смазки, М.: Из-во академии наук СССР, 1948. — 558 с.