

Реферат

Расчетно-пояснительная записка 60 с., 41 рис., 1 табл., 22 источника, 2 прил.

МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ, УРАВНЕНИЕ РЕЙНОЛЬДСА, ГАЗОВАЯ СМАЗКА, ПАЛЬЧИКОВОЕ УПЛОТНЕНИЕ.

Продемонстрирована возможность построения междисциплинарной математической модели пальчикового уплотнения на основе объединения модели Рейнольдса для течения в тонких пленках между валом и невращающимся надроторным кольцом и балочной модели расчета НДС гибкого подвеса сегментного кольца. Модель может быть использована для экспресс-анализа работы пальчикового уплотнения на этапе предварительного проектирования.

Хорошее качественное и количественное согласование численных результатов, полученных с помощью разработанной программы решения уравнения Рейнольдса методом конечных элементов, с известными аналитическими решениями для уравнений Лапласа и Пуассона подтверждает возможность использования программы при определении распределений давления в тонких пленках жидкости.

Деформирование пальчиков под действием газовых нагрузок приводит к образованию раскрывающегося зазора, что негативно влияет на несущую способность подъемных площадок и снижает эффективность уплотнения. Для предотвращения этого эффекта целесообразно располагать пальчики с предварительным наклоном к поверхности ротора для образования сходящегося по окружности зазора.

Оглавление

Реферат	1
1. Введение	3
1.1. Постановка задачи	3
1.2. Получение уравнения Рейнольдса	4
2. Решения уравнения Рейнольдса	7
2.1. Слабая форма Галеркина	8
2.2. Построение метода конечных элементов	11
2.3. Программная реализация метода конечных элементов	16
2.4. Сетка 10 на 10 элементов	16
2.5. Сетка 20 на 20 элементов	17
2.6. Сравнение полученного решения с решением Wolfram Mathematica	18
3. Аэроупругая система	19
Заключение	20
Список использованных источников	21
4. Приложение А	22

1. Введение

Задачи расчёта подшипников газодинамического типа с зазорами разнообразной формы до сих пор остаются весьма актуальными. По сути, они сводятся к изучению газового смазочного слоя в тонком зазоре произвольной формы. Решением таких задач занимается гидродинамическая теория смазки. Этот раздел механики жидкости и газа начал развиваться в конце XIX века вслед за потребностями техники. Начало теоретическому исследованию течений в тонких зазорах положили работы Н. П. Петрова и британского учёного Осборна Рейнольдса, уточнённые и доведённые до возможности практического применения А. Зоммерфельдом, А. Мичелем. Дальнейшие исследования позволили распространить результаты созданной Рейнольдсом теории на газодинамические подшипники. Были даже предприняты успешные попытки получения общего вида уравнения Рейнольдса для смазочного слоя без привязки к конкретной системе координат. Данная работа посвящена получению пригодной к использованию в практических задачах формы уравнения Рейнольдса и решению его методом конечных элементов.

1.1. Постановка задачи

Задача данной работы — вывести, а затем показать методику решение дифференциального уравнения Рейнольдса методом конечных элементов.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\mu U \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (1)$$

где $h = h(x)$ — толщина слоя, $p = p(x, z)$ — давление, μ — коэффициент вязкости. Граничные условия: U — скорость в направлении x на одной из пластин, p_v — повышенное давление, p_n — пониженное давление.

Уравнения будем рассматривать в квадратной области. Схематичное изображение области и граничных условий изображено на рис. 1.

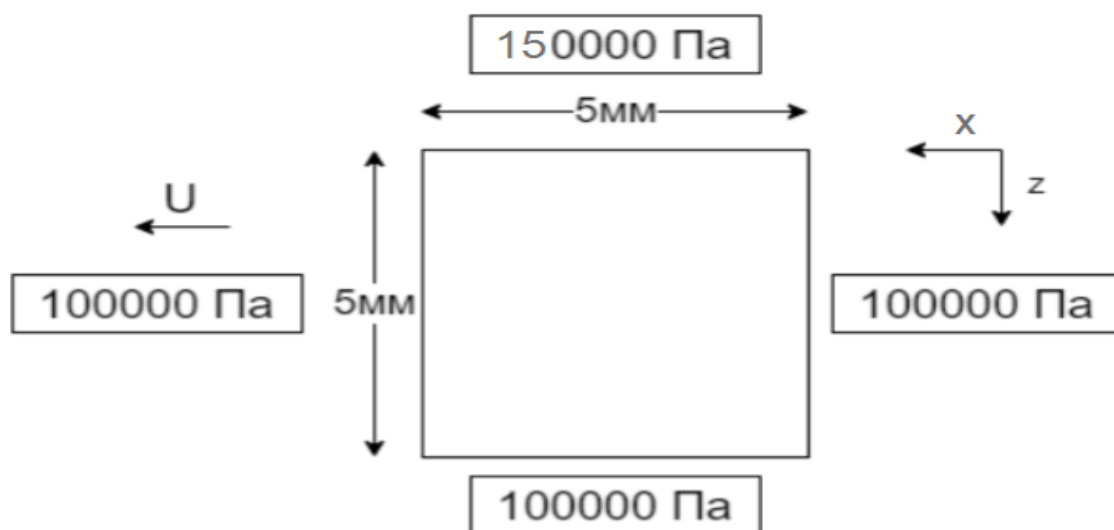


Рис. 1. Схема области решения и граничных условий уравнения Рейнольдса

1.2. Получение уравнения Рейнольдса

Гидродинамические уравнения несжимаемой жидкости с внутренним трением могут быть представлены в очень простой форме, если пренебречь силами, пропорциональными массам, равно как и силами инерции.

Обозначая через x, y, z прямоугольные координаты точки, через p – гидродинамическое давление в этой точке,

Силы трения $p_{xy}, p_{xz}, p_{yx}, p_{yz}, p_{zx}, p_{zy}$, перпендикулярные к оси силы, обозначенной первой буквой индекса и параллельные оси силы, обозначенной второй буквой индекса.

Обозначим проекции скорости на осях x, y, z соответственно u, v, w .

Введем μ как коэффициент внутреннего трения жидкости. Тогда можно записать три системы уравнений:

1) Система, определяющая гидродинамическое давление в точке x, y, z :

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial p}{\partial y} = \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial p}{\partial z} = \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right). \end{cases} \quad (2)$$

2) Система, определяющая силы трения в той же точке:

$$\begin{cases} p_{yz} = p_{zy} = \mu \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial \nu}{\partial z} \right), \\ p_{zx} = p_{xz} = \mu \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right), \\ p_{xy} = p_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \nu}{\partial x} \right). \end{cases} \quad (3)$$

3) Условие несжимаемости жидкости, выраженное уравнением:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \nu}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0. \quad (4)$$

Примем, что скорость $\nu = 0$, поскольку она мала по сравнению со скоростями $u = 0$, $\omega = 0$.

Изменения скоростей u и ω со при заданном значении y для всех изменений x и z могут рассматриваться как чрезмерно малые, поэтому примем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = 0, \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} = 0.$$

Ограничиваясь приближенным решением, которое можно получить при указанных выше предположениях, уравнения (2), (3) и (4) могут быть приведены к следующей форме.

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial p}{\partial z} = \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}. \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} p_{yz} = p_{xy} = \mu \frac{\partial \omega}{\partial y}, \\ p_{zx} = p_{xz} = 0, \\ p_{xy} = p_{yx} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}. \end{cases} \quad (6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \nu}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0.$$

Для определения давления необходимо интегрировать выражения (5), (6).

Для этого определим граничные условия.

Для $y = 0$ имеем

$$\begin{cases} u = U_0, \\ \nu = 0, \\ \omega = 0. \end{cases}$$

Для $y = h$ имеем

$$\begin{cases} u = U_1, \\ \nu = U_1 - U_1 \frac{\partial h}{\partial h}, \\ \omega = 0. \end{cases}$$

Поскольку p не зависит от y , то интегрирование уравнений (5) приводит к уравнениям

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (y - h) y + U_0 \frac{h-y}{h} + U_1 \frac{y}{h}, \\ \omega = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} (y - h) y. \end{cases} \quad (7)$$

Первые производные вторых членов этих уравнений, перенесенные в соответствующие уравнения группы (6), приводят к уравнениям

$$\begin{cases} p_{yz} = p_{zy} = \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial z} (2y - h), \\ p_{xy} = p_{yx} = \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} (2y - h) + \mu \frac{U_1 - U_0}{h}. \end{cases} \quad (8)$$

Если давление p считать независимым от координаты z , то четыре последних уравнения сокращаются до двух: первое из системы (7) и второе из системы (8).

Взяв производные от первого из этих уравнений по x и от второго по z и

подставляя это в уравнение (4), находим, что

$$\frac{\partial \nu}{\partial y} = -\frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial x} (y-x)y \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial p}{\partial z} (y-h)h \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(U_0 \frac{h-y}{h} + U_1 \frac{y}{h} \right) \right).$$

Интегрируя это уравнение в пределах от $y = 0$ до $y = h$ и принимая во внимание граничные условия, получаем

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\mu \left((U_0 - U_1) \frac{\partial h}{\partial x} \right) + 2V_1.$$

$2V_1$ используется для учёта движений одной из стенок зазора, меняющих значение функции. Если пренебречь этим, и обозначить $U_0 - U_1$ как U , то получим искомое уравнение (1).

2. Решения уравнения Рейнольдса

Решение уравнения Рейнольдса (1) будем искать с помощью метода конечных элементов. Основная идея метода конечных элементов состоит в том, что любую непрерывную величину, такую как температура, давление и перемещение, можно аппроксимировать дискретной моделью, которая строится на множестве кусочно-непрерывных функций, определенных на конечном числе подобластей. Кусочно-непрерывные функции определяются с помощью значений непрерывной величины в конечном числе точек рассматриваемой области. В общем случае непрерывная величина заранее неизвестна и нужно определить значения этой величины в некоторых внутренних точках области. Дискретную модель, однако, не сложно построить, если сначала предположить, что числовые значения этой величины в каждой внутренней точке области известны. После этого можно перейти к общему случаю. Итак, при построении дискретной модели непрерывной величины поступают следующим образом:

- 1) В рассматриваемой области фиксируется конечное число точек. Эти точ-

ки называются узловыми точками или просто узлами.

- 2) Значение непрерывной величины в каждой узловой точке считается переменной, которая должна быть определена.
- 3) Область определения непрерывной величины разбивается на конечное число подобластей, называемых элементами. Эти элементы имеют общие узловые точки и в совокупности аппроксимируют форму области.
- 4) Выбор функций формы и аппроксимирующей функции.
- 5) Построение локальной матрицы.
- 6) Построение глобальной матрицы путем сшивания локальных матриц элементов друг с другом.
- 7) Учет граничных условий путем заменой коэффициентов в полученной матрице или же вектора правых частей.
- 8) Решение системы линейных уравнений для получения решения в узловых точках.

2.1. Слабая форма Галеркина

Существуют разные подходы к реализации идеи метода конечных элементов. В данной работе рассмотрим методику решения с помощью слабой формы Галеркина. Для разбиения области на элементы требуется выбрать форму элемента. Поскольку рассматриваемая область прямоугольная, то удобно взять элементы прямоугольной формы. Пусть l — горизонтальная длинная области, а h — вертикальная. Тогда функции формы будут иметь следующий вид:

$$\begin{cases} N_1 = 1 - \frac{x}{l} - \frac{z}{h} + \frac{xz}{lh}, \\ N_2 = \frac{x}{l} - \frac{xz}{lh}, \\ N_3 = \frac{xz}{lh}, \\ N_4 = \frac{z}{h} - \frac{xz}{lh}. \end{cases} \quad (9)$$

Аппроксимирующую функцию зададим в виде:

$$\phi = c_0 N_1 + c_1 N_2 + c_2 N_3 + c_3 N_4.$$

Далее будем искать локальную матрицу из выражения:

$$\int_{S_i} [N]^T \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) - 6\mu U \frac{\partial h}{\partial x} \right) dx dz = 0. \quad (10)$$

S_i — область, содержащая элемент. Подставим аппроксимирующую функцию ϕ вместо p .

$$\int_{S_i} [N]^T \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) - 6\mu U \frac{\partial h}{\partial x} \right) dx dz = 0.$$

Понизим порядок производной с помощью функции дифференцирования произведения:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left([N]^T h^3 \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = [N]^T \frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial [N]^T}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial \phi}{\partial x} \right),$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left([N]^T h^3 \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = [N]^T \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + \frac{\partial [N]^T}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial \phi}{\partial z} \right).$$

Подставим полученные выражения в исходный интеграл (10):

$$\begin{aligned} & \int_{S_i} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left([N]^T h^3 \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - \frac{\partial [N]^T}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right) dx dz + \\ & + \int_{S_i} \left(\frac{\partial}{\partial z} \left([N]^T h^3 \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) - \frac{\partial [N]^T}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) - [N]^T 6\mu U \frac{\partial h}{\partial x} \right) dx dz = 0. \end{aligned}$$

С помощью формулы Грина можно заменить третье и первое слагаемое под знаком интеграла

$$\int_{S_i} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left([N]^T h^3 \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left([N]^T h^3 \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right) dx dz =$$

$$= \oint_{\partial S_i} \left([N]^T h^3 \frac{\partial \phi}{\partial x} l_x + [N]^T h^3 \frac{\partial \phi}{\partial z} l_z \right) d(\partial S_i).$$

Выражение (10) примет вид:

$$\begin{aligned} & \oint_{\partial S_i} \left([N]^T h^3 \frac{\partial \phi}{\partial x} l_x + [N]^T h^3 \frac{\partial \phi}{\partial z} l_z \right) d(\partial S_i) - \\ & - \int_{S_i} \left(\frac{\partial [N]^T}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial [N]^T}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) - [N]^T 6\mu U \frac{\partial h}{\partial x} \right) dx dz = 0. \end{aligned}$$

Поскольку в условии задачи заданы граничные условия, то можно не учитывать интеграл по границе. Узлы на которые влияет этот интеграл будут совпадать с узлами, которые зафиксированы граничными условиями.

Итоговое уравнение (10) будет иметь вид:

$$\int_{S_i} \left(\frac{\partial [N]^T}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial [N]^T}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) - [N]^T 6\mu U \frac{\partial h}{\partial x} \right) dx dz = 0.$$

После вычислений этих интегралов можно получить матричное уравнение в локальных координатах относительно ϕ следующего вида:

$$W_i \phi = F_i, \tag{11}$$

где F_i - правая часть, полученная из интеграла, не содержащего ϕ :

$$F_i = \int_{S_i} [N]^T \left(6\mu U \frac{\partial h}{\partial x} \right) dx dz.$$

Для вычисления глобальной матрицы требуется для каждого элемента подставить в вырождение (11) для локальных координат узловые границы области и вычислить их значения. Далее нужно объединить все матрицы полученные в одну глобальную. Этот процесс будет описан более подробно позже. После объединения локальных матриц в глобальную получаем мат-

ричное уравнение

$$W\phi = F,$$

Далее заменяем значения в матрице F и матрице W так, чтобы значения в граничных узлах совпадали с граничными условиями. После этого решением уравнения будут являться искомые значения давления p в узловых точках.

2.2. Построение метода конечных элементов

В работе уже был описан принцип решения уравнения Рейнольдса с помощью слабой формы Галеркина, однако его программная реализация требует дополнительных пояснений.

Поскольку область рассматриваемой задачи имеет форму прямоугольника, то выберем в качестве конечного элемента линейный прямоугольный конечный элемент первого порядка.

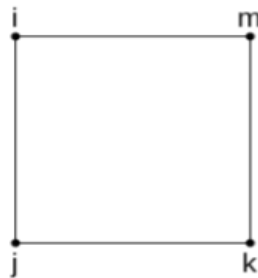


Рис. 2. Линейный прямоугольный конечный элемент

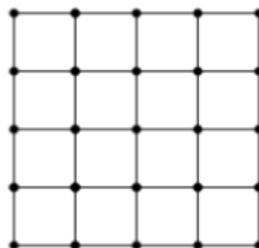


Рис. 3. Проекция расчётной области

Для вычисления нового конечного элемента получаются интегралы согласно слабой формы Галеркина в локальной системе координат. Вычисление

интегралов необходимо на каждом шаге, поскольку требуется преобразовать функцию зазора h из глобальных координат в локальные, задавая смещение по оси x .

Затем происходит вычисление значений узлов конечных элементов, учет граничных условий и их объединение. Так много действий объединено в один этап, поскольку в ином случае для выполнения всех перечисленных действий требовались бы дополнительные вычислительные затраты и использование дополнительной памяти для хранения информации о структуре полученных узлов. Для иллюстрации будем рассматривать решение для сетки с 2 элементами по вертикали и 2 по горизонтали.

Итак, вычисления происходят следующим образом: вначале рассчитывается самый нижний левый конечный элемент. В качестве результата вычисления одного элемента получаем систему из 4 однородных уравнений. Записываем полученную систему в массив решений и сохраняем данные об индексах двух крайних правых узлах $\{2, 3\}$ и двух верхних $\{3, 4\}$. Важно, что крайние правый элемент мы будем хранить только для самого последнего вычисленного элемента, а значение индексов верхних узлов для всего ряда конечных элементов. По какой причине это происходит именно так стане яснее на следующих этапах вычисления. Поскольку мы имеем граничные условия по условию задачи, то для граничных узлов имеет смысл сразу их учесть. Граничными узлами для рассматриваемого элемента будут являться узлы $\{1, 2, 4\}$. Заменяем уравнения в системе, соответствующие этим узлам, так, чтобы они удовлетворяли граничным условиям. В программе это реализовано в виде уравнения $nodeValue - boundaryValue = 0$, где $nodeValue$ — неизвестное значение в узле, а $boundaryValue$ — граничное значение.

Далее в цикле вычисляем все оставшиеся конечные элементы в этом ряду, на выбранной сетке их всего один. Поскольку новых узлов в сетке будет всего два, то необходимо будет использовать те же переменные для обозначения уже используемых узлов сетки. Как раз для этого и было сохранено значе-

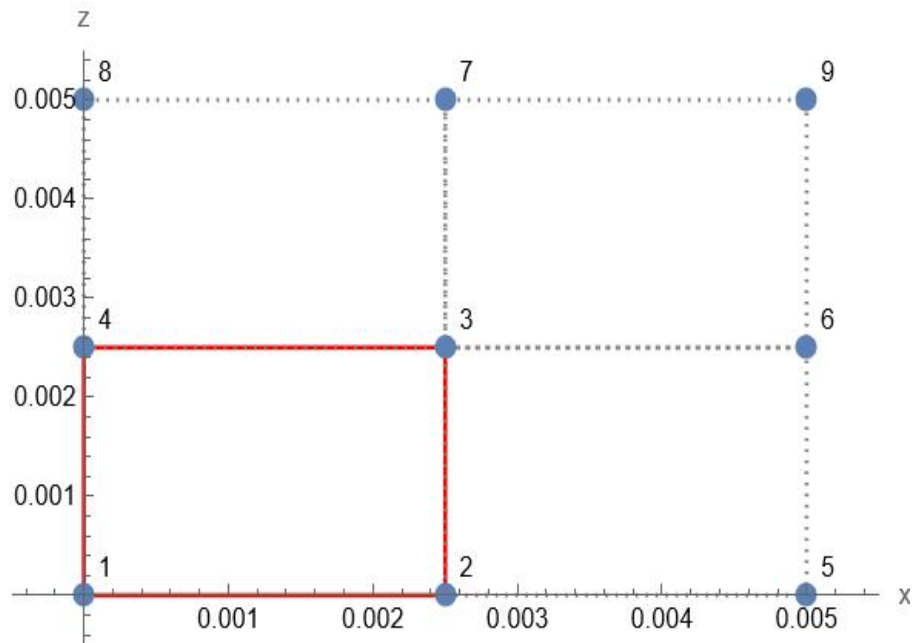


Рис. 4. Нижний левый конечный элемент на сетке 2 на 2 элементов

ние индексов крайне правых элементов. Для осуществления слияния двух узлов разных конечных элементов уравнения для этих узлов складываются. В случае, если общие узлы оказываются граничными, то в сложение уравнений смысла не имеет - они и так отвечают граничным условиям. Добавляем в массив индексов верхних элементов новую пару узлов и сохраняем новые крайние правые узлы аналогично прошлому этапу. Аналогично с прошлым этапом учитываем граничные условия

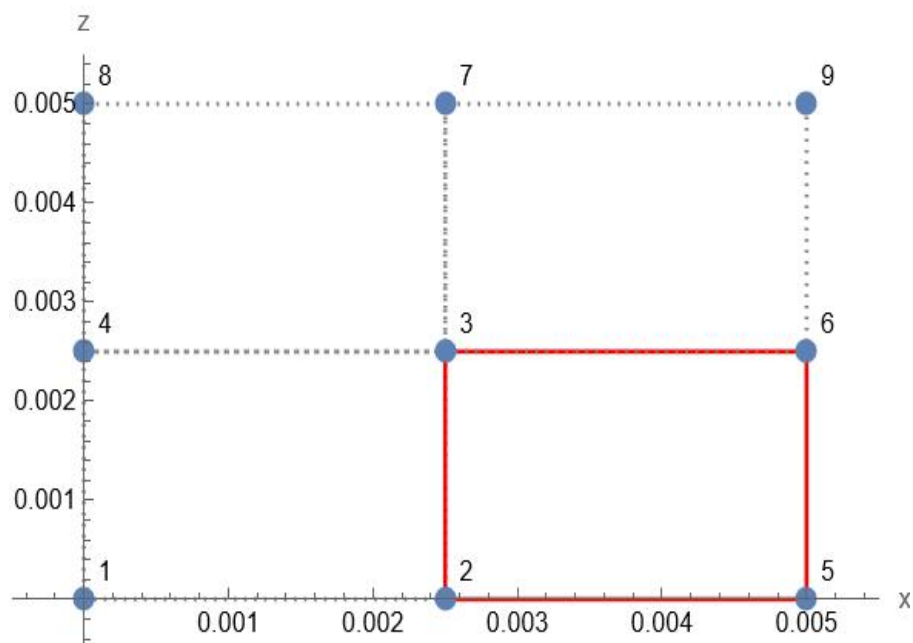


Рис. 5. Нижний правый конечный элемент на сетке 2 на 2 элементов

После этого переходим к вычислению конечных элементов выше по оси z . Для этого будет использоваться цикл по вертикальной оси z . В рассматриваемом случае в этом цикле будет всего один ряд элементов, лежащих между 0.003 и 0.005 по оси z . Рассмотрим вычисление элемента с узлами $\{4, 3, 7, 8\}$. Для него большая часть действий аналогично, не будем их повторять. Главной отличительной чертой алгоритма относительно прошлых конечных элементов будет использования массива индексов верхних узлов, который был заполнен на ранних этапах. Он нужен добавления в систему решения общих нижних узлов элементов - $\{4, 3\}$. Добавление происходит путем складывания имеющегося уравнения в системе с новым уравнением для вычисляемого узла. После все вычислений мы как и ранее сохраняем значение крайне правых узлов и обновляем индекс для крайне верхних узлов в массиве. Стоит заметить, что массив индексов крайне верхних узлов имеет размерность равную числу горизонтальных элементов сетки, то есть размерность 2 для рассматриваемого случая. В нем хранятся только актуальные для вычисления индексы.

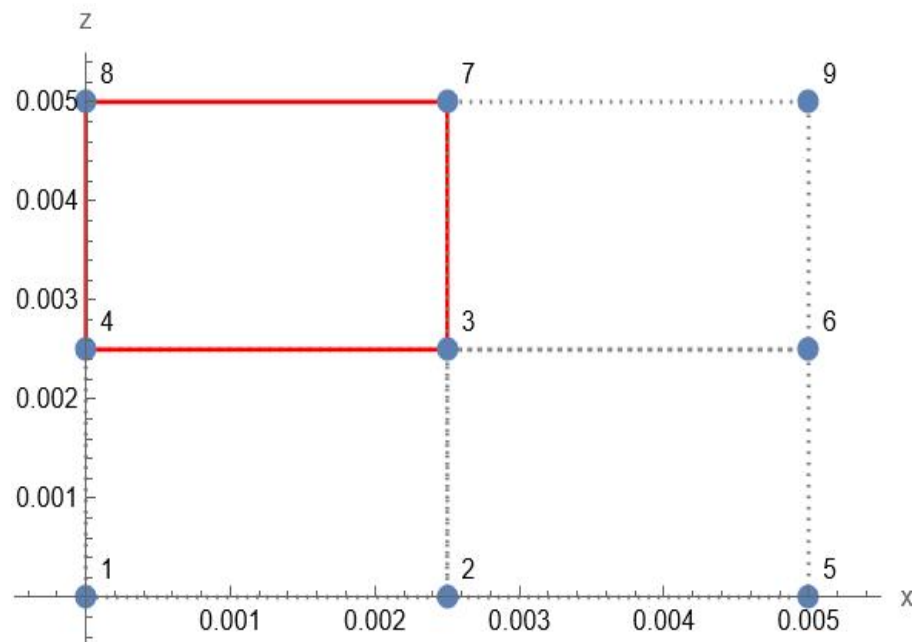


Рис. 6. Верхний левый конечный элемент на сетке 2 на 2 элементов

2.3. Программная реализация метода конечных элементов

Рассмотрим задачу со следующими входными данными

$$\left\{ \begin{array}{l} h = 0.0001 \text{ м}, \\ verticalLength = 0.005 \text{ м}, \\ horizontalLength = 0.005 \text{ м}, \\ \mu = 8.90 * 10^{-4} \text{ Па * с}, \\ U = 10 \text{ м/с}, \\ p_H = 100 \text{ кПа}, \\ p_B = 150 \text{ кПа}, \end{array} \right.$$

μ — коэффициент вязкости воды.

2.4. Сетка 10 на 10 элементов

Для сетки 10 на 10 элементов получаем следующие значения графики:

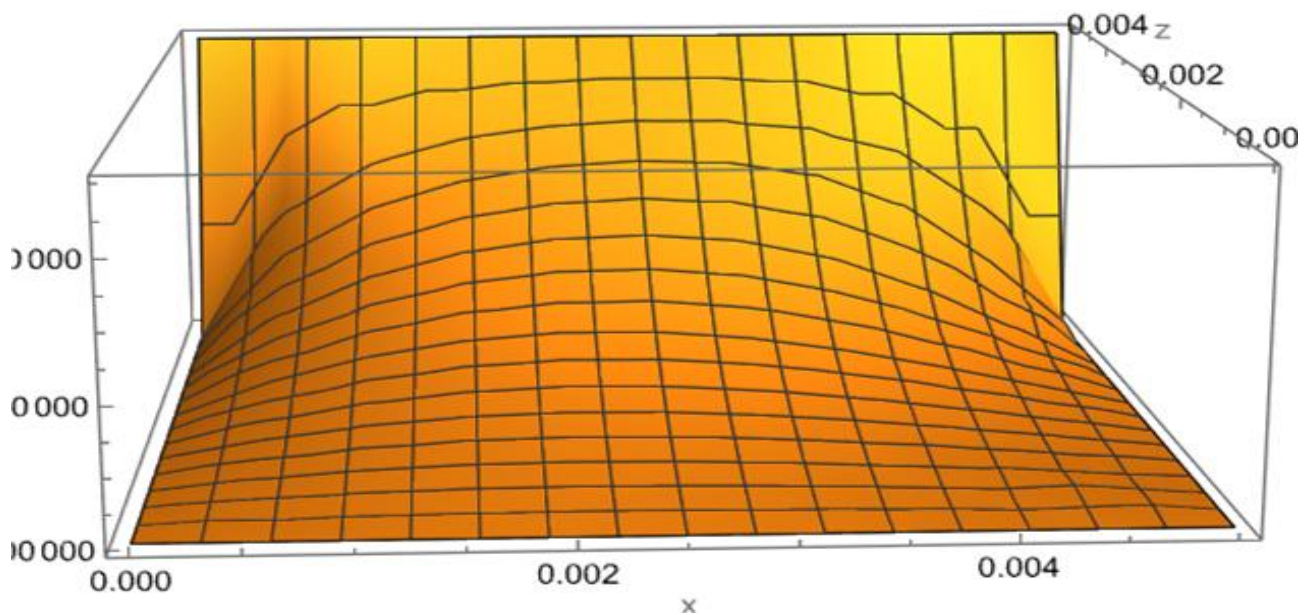


Рис. 8. График решения уравнения Рейнольдса для $h = 0.0001$ м на сетке 10 на 10 элементов

Из полученных графиков видно, что граничные условия выполняются.

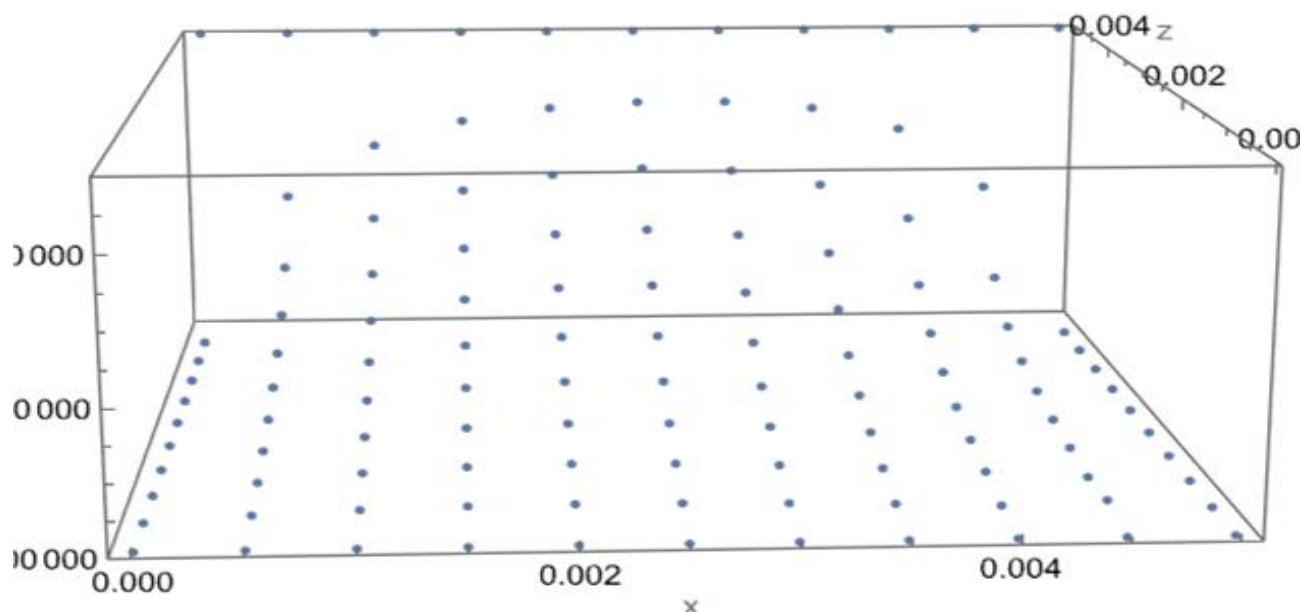


Рис. 9. График значений узлов решения уравнения Рейнольдса для $h = 0.0001$ м на сетке 10 на 10 элементов

2.5. Сетка 20 на 20 элементов

Для сетки 20 на 20 элементов получаем следующий график решения

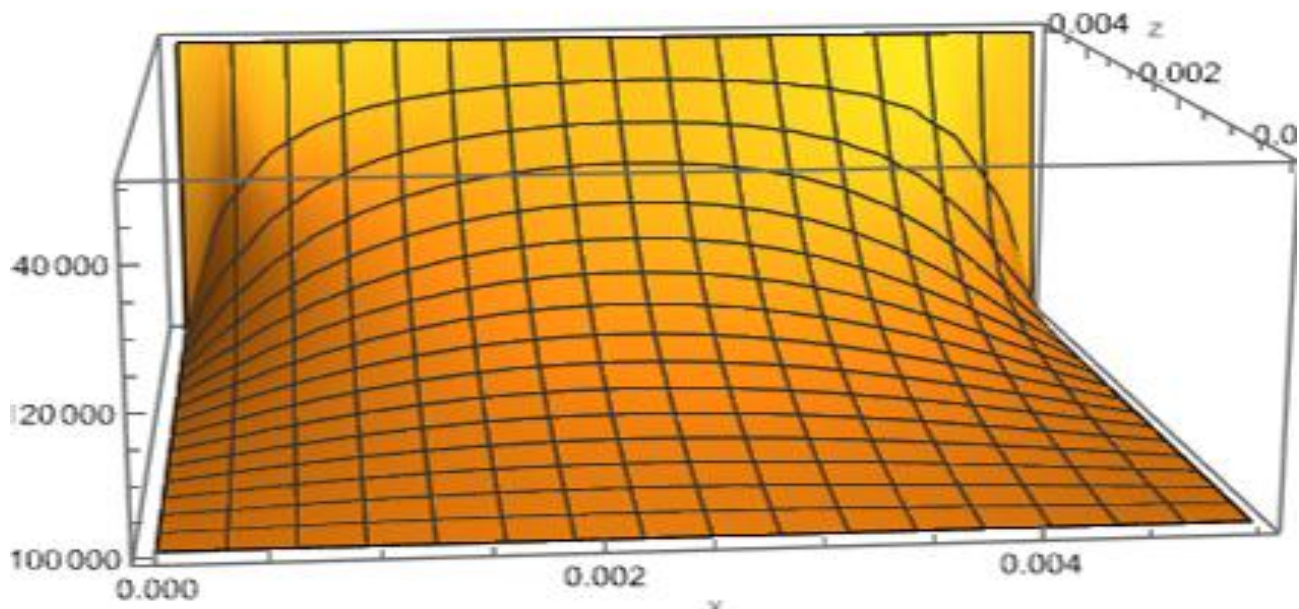


Рис. 10. График решения уравнения Рейнольдса для $h = 0.0001$ м на сетке 20 на 20 элементов

Из полученных значений и графиков видно, что граничные условия выполняются.

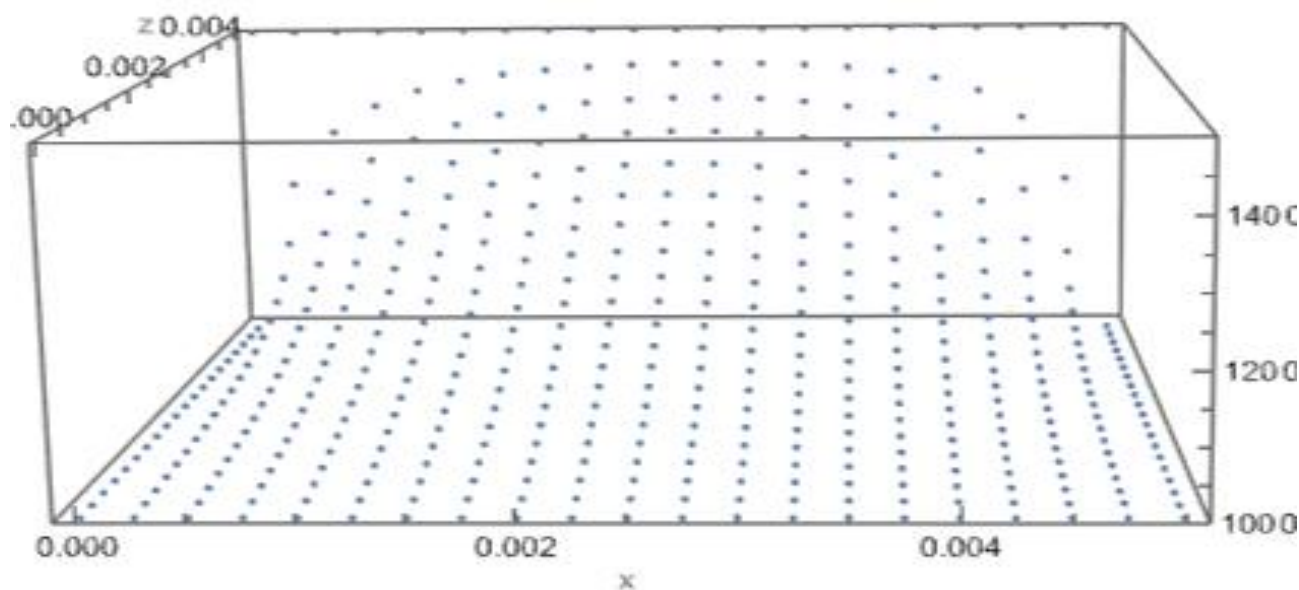


Рис. 11. График значений узлов решения уравнения Рейнольдса для $h = 0.0001$ м на сетке 20 на 20 элементов

2.6. Сравнение полученного решения с решением Wolfram Mathematica

Проверим полученный результат с помощью функции NDSolve в Wolfram Mathematica.

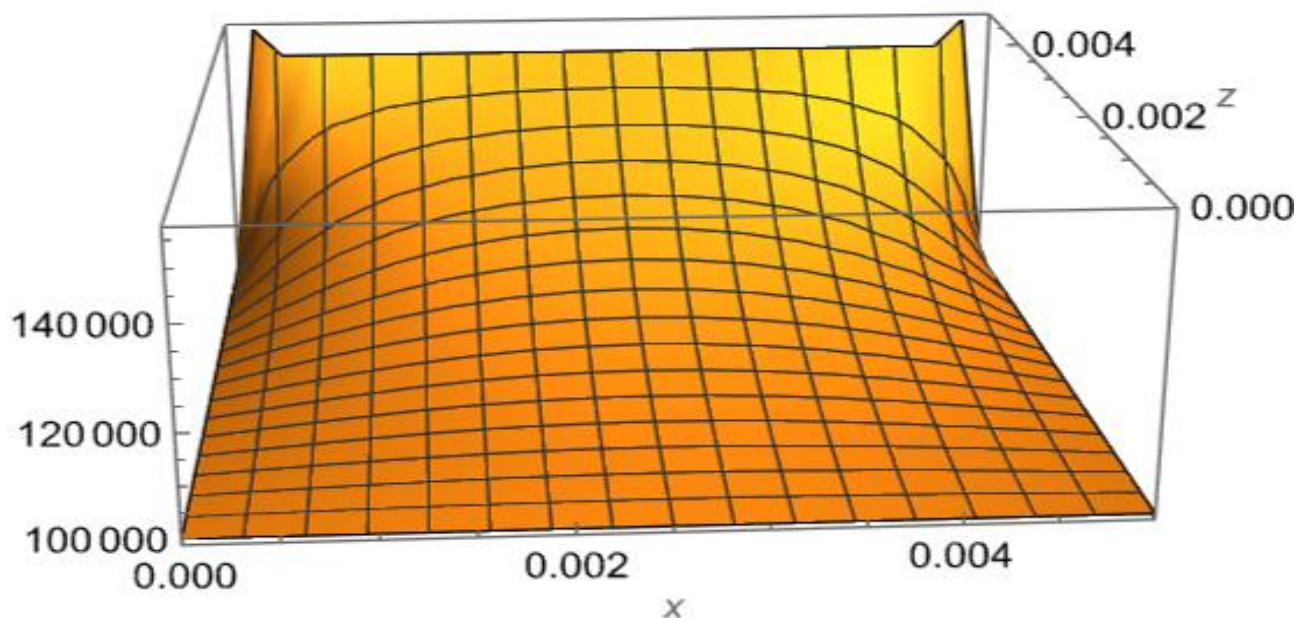


Рис. 12. График решения уравнения Рейнольдса для $h = 0.0001$ м полученный с помощью Wolfram Mathematica

Сравним решения полученные с помощью собственной реализацией с ре-

шением Wolfram Mathematica.

Размерность сетки	Разность, Па	Погрешность, %
5 на 5	4612	4.51
10 на 10	1538	1.38
20 на 20	1290	1.02

Погрешность была вычислена по формуле $\max_i \left| \frac{x_{wi} - x_{nodei}}{x_{wi}} \right|$, где x_{wi} – значение в узле i , полученное в Wolfram Mathematica, а x_{nodei} – значение в узле i , полученное в созданной программе. Максимум вычисляется по всем узловым элементам.

Можно заметить, что полученное решение отличается не более чем на 4.51 %, с увеличением числа элементов в сетке погрешность падает. Это свидетельствует о верности полученного решения.

3. Аэроупругая система

Заключение

В работе представлен вывод уравнения Рейнольдса для установившегося течения в газовом смазочном слое и методика решения уравнения Рейнольдса с помощью метода конечных элементов. В ходе работы получены следующие результаты:

- 1) Создана программная реализация метода конечных элементов для решение уравнения Рейнольдса
- 2) Полученные значения решения уравнения Рейнольдса были сравнены с результатами решения, полученного с помощью функции `NDSolve` в `Wolfram Mathematica`
- 3) В результате сравнения для сетки 5 на 5 погрешность равна 4.51 %, а для сетки 20 на 20 – 1.02 %.

Список использованных источников

1. Петров Н. Гидродинамическая теория смазки, М.: из-во академии наук СССР, 1948. — 558 с.
2. Слезкин Н. Динамика вязкой несжимаемой жидкости, М.: из-во теоретической литературы, 1955. — 521 с.
3. Селегринд Л. Применение метода конечных элементов, М.: из-во МИР, 1979. — 195 с.
4. Seshu P. Textbook of Finite Element Analysis, М.: PHI Learning Private Limited, 2012. — 340 с.

Приложение А