Вывод уравнения Рейнольдса в рамках теории газовой смазки

Докладчик: Пиневич В. Г.
Научный руководитель: Селиванов А. В.

группа ФН2-61Б

1 марта 2024 г.

‘

Уравнение Рейнольдса

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial z}\right)=6\mu U\frac{\partial h}{\partial x}$$

Граничные условия

U — скорость в направлении x на одной из пластин,
$p_{\text{в}}$ — повышенное давление,
$p_{\text{н}}$ — пониженное давление

Описание величин

$h = h(x)$ — толщина слоя,
$p = p(x, z)$ — давление,
μ — коэффициент вязкости

Вывод уравнения Рейнольдса

Проекции скорости

u, ν, ω – проекции скорости скорости на осях x, y, z соответственно

Условие несжимаемости жидкости

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \nu}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0.$$

Силы трения в точке

$$\begin{cases} p_{yz} = p_{zy} = \mu \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial \nu}{\partial z} \right), \\ p_{zx} = p_{xz} = \mu \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right), \\ p_{xy} = p_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \nu}{\partial x} \right). \end{cases}$$

Давление в точке

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial p}{\partial y} = \mu \left(\frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial p}{\partial z} = \mu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} \right). \end{cases}$$

Изменения скоростей u и ω со при заданном значении y для всех изменений x и z могут рассматриваться как чрезмерно малые, поэтому примем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = 0, \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} = 0.$$

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial p}{\partial z} = \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_{yz} = p_{xy} = \mu \frac{\partial \omega}{\partial y}, \\ p_{zx} = p_{xz} = 0, \\ p_{xy} = p_{yx} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}. \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \nu}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0.$$

Для $y = 0$

$$u = U_0, \nu = 0, \omega = 0.$$

Для $y = h$

$$u = U_1, \nu = U_1 - U_1 \frac{\partial h}{\partial h}, \omega = 0.$$

Для $y = 0$

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \left(y - h\right) y + U_0 \frac{h-y}{h} + U_1 \frac{y}{h}, \\ \omega = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} (y - h) y. \end{cases}$$

Для $y = h$

$$\begin{cases} p_{yz} = p_{zy} = \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial z} \left(2y - h\right), \\ p_{xy} = p_{yz} = \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} \left(2y - h\right) + \mu \frac{U_1 - U_0}{h}. \end{cases}$$

$$\frac{\partial \nu}{\partial y} = -\frac{1}{2\mu}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial p}{\partial x}(y-x)y\right) +$$
$$+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial p}{\partial z}(y-h)h\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(U_0\frac{h-y}{h} + U_1\frac{y}{h}\right).$$

Интегрируем это уравнение в пределах от $y = 0$ до $y = h$.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial z}\right) = 6\mu\left((U_0 - U_1)\frac{\partial h}{\partial x}\right) + 2V_1.$$

$2V_1$ используется для учёта движений одной из стенок зазора, меняющих значение функции. Если пренебречь этим, и обозначить $U_0 - U_1$ как U, то получим искомое уравнение

Функции формы

$$
\begin{cases}
N_1 = 1 - \frac{x}{l} - \frac{z}{h} + \frac{xz}{lh}, \\
N_2 = \frac{x}{l} - \frac{xz}{lh}, \\
N_3 = \frac{xz}{lh}, \\
N_4 = \frac{z}{h} - \frac{xz}{lh}.
\end{cases}
$$

Аппроксимирующая функция

$$
\phi = c_0 N_1 + c_1 N_2 + c_2 N_3 + c_3 N_4.
$$

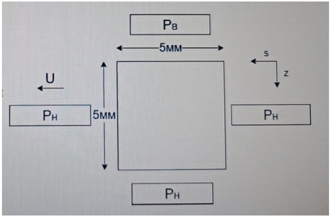

Рис. Схема области решения задачи

$$\int_{S_i} [N] \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) - 6\mu U \frac{\partial h}{\partial x} \right) dxdz = 0.$$

Рассмотрим сумму интегралов

$$\int_{S_i} [N] \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right) dxdz + \int_{S_i} [N] \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right) dxdz -$$

$$- \int_{S_i} [N] \left(6\mu U \frac{\partial h}{\partial x} \right) dxdz = 0.$$

Интеграл по частям для x:

$$K1_i = \int_{S_i} [N] \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right) dxdz = [N] \frac{d\phi}{dx} \bigg|_{S_i} - \int_{S_i} \frac{d[N]}{dx} \left(h^3 \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dxdz$$

Интеграл по частям для z:

$$K2_i = \int_{S_i} [N] \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right) dxdz = [N] \frac{d\phi}{dz} \bigg|_{S_i} - \int_{S_i} \frac{d[N]}{dz} \left(h^3 \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) dxdz$$

Для правой части

$$F_i = \int_{S_i} [N] \left(6\mu U \frac{\partial h}{\partial x} \right) dxdz.$$

$$(K1_i + K2_i)\phi = F_i$$

Заключение

В ходе работы получены следующие результаты:

1. Вывод уравнения Рейнольдса для установившегося течения в газовом смазочном слое.
2. Была рассмотрена методика решения уравнения Рейнольдса с помощью метода конечных элементов.