Контрольные вопросы

1. **Вопрос.** Почему условие $\|C\| < 1$ гарантирует сходимость итерационных методов?

   Ответ. Пусть $\|C\| < 1$. Покажем, что итерационный метод сходится.

   Определение. Метод называется сходящимся, если $\|x - x^n\| \to 0$ при $n \to \infty$.

   $$x = Cx + y, \tag{1}$$

   где C — квадратная матрица размера $n \times n$; y — вектор столбец.

   Запишем рекуррентное соотношение:

   $$x^{k+1} = Cx^k + y, \ \forall k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots. \tag{2}$$

   Вычитаем из соотношения (1) соотношение (2), получаем

   $$x - x^{k+1} = C(x - x^k). \tag{3}$$

   Вычисляя норму левой и правой части этого равенства имеем:

   $$\|x - x^{k+1}\| = \|C(x - x^k)\| \le \|C\| \, \|(x - x^k)\|, \ \forall k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

   так как это неравенство верно для всех k, то

   $$\|x - x^n\| \le \|C\| \, \|x - x^{n-1}\| \le \|C\|^2 \, \|x - x^{n-2}\| \le \cdots \le \|C\|^n \, \|x - x^0\|.$$

   Норма $\|x - x^0\|$ не зависит от n. Используя условие $\|C\| < 1$, получаем:

   $$\|C\|^n \to 0 \text{ при } n \to \infty \Longrightarrow \|x - x^n\| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

   Таким образом, метод сходится.

2. **Вопрос.** Каким следует выбирать итерационный параметр τ в методе простой итерации для увеличения скорости сходимости? Как выбрать начальное приближение x^0?

   Ответ. Обычно для улучшения скорости сходимости исходную систему, прежде чем приводить к виду, удобному для итераций, умножают на итерационный параметр τ, который выбирают так, чтобы выполнялась оценка $\|C\| \le 1$ и норма матрицы C была как можно меньше. Однако мы не можем выбирать параметр слишком малым, поскольку тогда погрешность вычислений станет слишком большой. Начальное значение x^0 стоит выбирать как можно более близкое к решению, если это возможно.

3. **Вопрос.** На примере системы из двух уравнений с двумя неизвестными дайте геометрическую интерпретацию метода простой итерации, метода Якоби, метода Зейделя, метода релаксации.

   Ответ. Метод Якоби. Преположим, что некоторое приближение x^k уже найдено. Расчетные формулы:

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = -\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2^k + \frac{b_1}{a11} \\ x_2^{k+1} = -\frac{a_{21}}{a_{22}}x_1^k + \frac{b_2}{a22} \end{cases}$$

   Уравнения системы задают на плоскости Ox_1x_2 две прямые l_1 и l_2 соответственно. При определении x_1^{k+1} координата $x_2 = x_2^k$ фиксируется и точка x перемещается параллельно оси Ox_1 до пересечения с прямой l_1. Координата x_1 точки пересечения принимается за x_1^{k+1}. Затем точка x перемещается вдоль прямой $x_1 = x_1^k$ до пересечения с прямой l_2 . Координата x_2 точки пересечения принимается за x_2^{k+1}.

   Метод Зейделя. Преположим, что некоторое приближение x^k уже найдено. Расчетные формулы:

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = -\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2^k + \frac{b_1}{a11} \\ x_2^{k+1} = -\frac{a_{21}}{a_{22}}x_1^{k+1} + \frac{b_2}{a22} \end{cases}$$

   Уравнения системы задают на плоскости Ox_1x_2 две прямые l_1 и l_2 соответственно. При определении x_1^{k+1} координата $x_2 = x_2^k$ фиксируется и точка x перемещается параллельно оси Ox_1 до пересечения с прямой l_1. Координата x_1 точки пересечения принимается за x_1^{k+1}. Затем точка x перемещается вдоль прямой $x_1 = x_1^{k+1}$ до пересечения с прямой l_2 . Координата x_2 точки пересечения принимается за x_2^{k+1}.

   Метод релаксации. Преположим, что некоторое приближение x^k уже найдено. Расчетные формулы:

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = \omega\tilde{x}_1^{k+1} + (1-\omega)x_1^k \\ x_2^{k+1} = \omega\tilde{x}_2^{k+1} + (1-\omega)x_2^k, \end{cases}$$

   где величины $\tilde{x}_i^{k+1}$ вычисляются по методу Зейделя. Проделываем те же действия, что и в методе метода Зейделя. Отличие заключается в том, что после вычисления компоненты $\tilde{x}_i^{k+1}$ по методу Зейделя, производят дополнительное смещение этой компоненты на величину $(1-\omega)(\tilde{x}_i^{k+1} - x_i^k)$.

4. **Вопрос.** При каких условиях сходятся метод простой итерации, метод Якоби, метод Зейделя и метод релаксации? Какую матрицу называют положительно определенной?

В данном случае мы будем рассматривать норму изменения за итерацию, а не норму погрешности численного решения. Если сходимость будем происходить очень медленно, то использование такой оценки для точки останова приведет к неверному ответу.

Ответ. Определение. Линейный оператор A, действующий в линейном пространстве H, называется:

(a) положительным, если $\forall\, x \in H,\ x \neq 0\ (Ax, x) > 0$;

(b) положительно определенным, если $\exists\, \delta > 0 :\ \forall\, x \in H\ (Ax, x) \geq \delta(x, x)$.

Если матрица симметричная положительно определенная и $B - 0.5\tau A > 0$ и $\tau > 0$, то стационарный итерационный метод $B\frac{x^{k+1}-x^k}{\tau} + Ax^k = f$ сходится.

Метод простой итерации сходится, если $\tau < \frac{2}{\lambda_{\max}}$, где $\lambda_{\max}$ — максимальное собственное значение симметричной положительно определенной матрицы A.

Метод Якоби сходится, если матрица A — симметричная положительно определенная матрица с диагональным преобладанием.

Метод релаксации сходится, если $0 < \omega < 2$, ω — заданный числовой параметр (параметр релаксации).

Метод Зейделя частный случай метода релаксации при $\omega = 1$.

5. **Вопрос.** Выпишите матрицу C для методов Зейделя и релаксации.

Ответ. Каноническая форма метода релаксации:

$$(D + \omega L)\,\frac{x^{k+1} - x^k}{\omega} + Ax^k = b; \quad \forall k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots,$$

где ω — заданный числовой параметр (параметр релаксации).

$A = L + D + U$, где L — нижняя треугольная матрица, D — диагональная матрица, U — верхняя треугольная матрица.

Домножим на ω и перенесем все слагаемые кроме x^{k+1} вправо:

$$(D + \omega L)\, x^{k+1} = (D + \omega L - \omega A)\, x^k + \omega b; \quad \forall k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots.$$

Домножим обе части на $(D + \omega L)^{-1}$ слева:

$$x^{k+1} = (D + \omega L)^{-1}\,(D + \omega L - \omega A)\, x^k + \omega\,(D + \omega L)^{-1}\, b.$$

Получаем:

$$C = (D + \omega L)^{-1}\,(D + \omega L - \omega A) = (D + \omega L)^{-1}\,((1 - \omega)\, D - \omega U)\,.$$

Для метода Зейделя $\omega = 1$ и матрица C принимает вид:

$$C = -\,(D + L)^{-1}\, U.$$

6. **Вопрос.** Почему в общем случае для остановки итерационного процесса нельзя использовать критерий $\|x^k - x^{k-1}\| < \varepsilon$?

   Этот критерий является нормой погрешности за одну итерацию. Если последовательность будет медленно сходится, то использование этого критерия в качестве точки останова может привести к ошибке. В качестве критерия для точки остановы лучше использовать норму погрешности численного решения.

7. **Вопрос.** Какие еще критерии окончания итерационного процесса Вы можете предложить?

   Ответ.

$$\|x^k - x^{k-1}\| \le \|x^k\|\varepsilon + \varepsilon_0;$$
$$\left\|\frac{x^k - x^{k-1}}{\|x^k\| + \varepsilon_0}\right\| \le \varepsilon;$$
$$\|Ax^{k+1} - f\| \le \varepsilon;$$
$$\|x^k - x^{k-1}\| \le \frac{1 - \|C\|}{\|C\|}\varepsilon.$$

   Для метода Зейделя:

$$\|x^k - x^{k-1}\| \le \frac{1 - \|C\|}{\|C_U\|}\varepsilon.$$