Контрольные вопросы

1. **Вопрос.** Почему нельзя находить собственные числа матрицы A, прямо решая уравнение $\det(A-\lambda E)=0$, а собственные векторы — «по определению», решая систему $(A-\lambda_i E)e_i=0$?

   Ответ. Для нахождения собственных чисел матрицы, нам надо составить характеристический многочлен и найти его корни. Если исходить непосредственно из определения собственного вектора, то e_i следует искать как нетривиальное решение системы линейных алгебраических уравнений

   $$(A-\lambda_i E)e_i=0$$

   с вырожденной матрицей $(A-\lambda_i E)$. Но обычно λ_i известно лишь приближенно, и в действительности приходится решать систему

   $$(A-\lambda_i^* E)e_i=0,$$

   где λ_i^* — достаточно точное приближение к собственному значению λ_i. Решение данной системы быть только тривиальным, так как матрица $(A-\lambda_i^* E)$ невырождена. Поэтому непосредственное численное решение не дает возможности вычислить соответствующий собственный вектор.

   Кроме того, довольно часто определению подлежат не все собственные значения и собственные векторы, а лишь небольшая их часть. Например, существенный интерес во многих приложениях представляют максимальное или минимальное по модулю собственное значение.

2. **Вопрос.** Докажите, что ортогональное преобразование подобия сохраняет симметрию матрицы.

   Ответ. Ортогональное преобразование подобия:

   $$R=P^{-1}A\,P,$$

   где $P^{-1}=P^T,\ A=A^T$.

   Тогда

   $$R^T=\left(P^{-1}A\,P\right)^T=P^T\left(A\,P^{-1}\right)^T=P^TA^T\left(P^{-1}\right)^T=P^{-1}A\,P=R.$$

   И следовательно, $R^T=R$.

3. **Вопрос.** Как преобразование подобия меняет собственные векторы матрицы?

Ответ. Полученная в результате преобразования подобия матрица имеет тот же набор собственных чисел:

$$\det\left(P^{-1}A\,P-\lambda E\right)=\det\left(P^{-1}(A-\lambda E)\,P\right)=$$
$$=\det\left(P^{-1}\right)\det\left(A-\lambda E\right)\det\left(P\right)=\det\left(A-\lambda E\right).$$

Таким образом, характеристические многочлены и собственные числа матриц A и $P^{-1}A\,P$ совпадают. Соответствующие собственные векторы x и x' не совпадают, но они связаны равенством $x=P\,x'$.

4. **Вопрос.** Почему на практике матрицу A подобными преобразованиями вращения приводят только к форме Хессенберга, но не к треугольному виду?

   Ответ. QR-разложение матрицы требует весьма значительных затрат вычислительных ресурсов, поэтому используются различные методики ускорения QR-алгоритма. В частности, затраты времени на вычисления (число арифметических операций) можно сократить, если с помощью подобных преобразований матрицу A предварительно привести к форме Хессенберга. Так как данные матрицы обладают следующими свойствами:

   1) матрицы $H^{(k)}$, порождаемые QR-алгоритмом из матрицы $H^{(0)}$, также являются матрицами Хессенберга;

   2) выполнение одной итерации QR-алгоритма для матрицы Хессенберга требует $O(n^2)$ арифметических операций.

5. **Вопрос.** Оцените количество арифметических операций, необходимое для приведения произвольной квадратной матрицы A к форме Хессенберга.

   Ответ. Для вычисления элементов матрицы T_{kl} требуется 5 операций. Затем необходимо обнулить все элементы ниже диагонали, примыкающей к главной в столбцах с 1 по $n-2$. В k-ом столбце необходимо обнулить $n-k-1$ элемент. При обнулении каждого элемента происходит умножение слева и справа на матрицы T_{kl} и T_{kl}^T, что соответственно изменяет в матрице A $4n-6$ элементов. Для изменения одного элемента требуется 2 операции умнржения. В итоге получаем:

$$\sum_{k=1}^{n-2}5\cdot(n-k-1)(4n-6)\cdot 2=10\cdot(2n^3-9n^2+13n-6).$$

6. **Вопрос.** Сойдется ли алгоритм обратных итераций, если в качестве начального приближения взять собственный вектор, соответствующий другому собственному значению? Что будет в этой ситуации в методе обратной итерации, использующем отношение Рэлея?

Ответ. В качестве начального приближения в методе обратных итераций можно взять любой нормированный вектор. Пусть $e_i,\ i = \overline{1,n}$ — ОНБ из собственных векторов матрицы A.

$$(A - \lambda_j^* E)y = x.$$

Представим векторы в виде линейных комбинаций собственных векторов:

$$y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, \quad x = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i;$$

Так как:

$$(A - \lambda_j^* E)y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(\lambda_i - \lambda_j^*)e_i,$$

то

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(\lambda_i - \lambda_j^*)e_i = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i.$$

Приравниваем коэффициенты при e_i, получим:

$$\alpha_i = \frac{c_i}{\lambda_i - \lambda_j^*}.$$

Следовательно,

$$y = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{\lambda_i - \lambda_j^*} e_j = \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j^*}\left(c_j e_j + \sum_{i \neq j} \frac{\lambda_j - \lambda_j^*}{\lambda_i - \lambda_j^*} c_i e_i\right).$$

Если в качестве начального приближения взять собственный вектор, соответствующий другому собственному числу:

$$y = \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j^*}\left(c_j e_j + \frac{\lambda_j - \lambda_j^*}{\lambda_k - \lambda_j^*} c_k e_k\right).$$

Если $|\lambda_j - \lambda_j^*| \ll |\lambda_k - \lambda_j^*|$, то второе слагаемое правой части мало по сравнению с первым. Следовательно алгоритм сойдется к e_j. Одной из проблем, которые могут возникнуть при использовании метода обратной итерации, является получение хорошего приближения λ_j^* для собственного значения λ_j. Известно, что если A — симметричная матрица, то справедлива формула:

$$\lambda_{min} = \min_{x \neq 0} \rho(x),$$

где $\rho(x) = \dfrac{(Ax, x)}{(x, x)}$ — отношение Рэлея.

Если в методе обратных итераций использовать отношение Рэлея, а в качестве начального приближения $x^{(0)}$ выбрать собственный вектор e_k, соответствующий другому собственному значению, то метод сойдется к собственному числу, соответствующему собственному вектору e_k.

7. **Вопрос.** Сформулируйте и обоснуйте критерий останова для QR-алгоритма отыскания собственных значений матрицы.

   Ответ. Последовательность матриц сходится к верхнетреугольной матрице, на главной диагонали которой стоят собственные значения. Используя тот факт, что QR-алгоритм последовательно обнуляет элементы начиная с $a_{n,1}$ до $a_{n,n-1}$, итерационный метод поиска собственного значения следует продолжать пока не будет выполняться неравество $|a_{n,n-1}| < \varepsilon$. Затем считая что $\lambda_i = a_{n,n}$, переходим к задаче меньшей размерности, то есть ищем спектр матрицы размерности $(n-1) \times (n-1)$.

8. **Вопрос.** Предложите возможные варианты условий перехода к алгоритму со сдвигами. Предложите алгоритм выбора величины сдвига.

   Ответ. К алгоритму со сдвигами следует переходить, если среди собственных чисел матрицы есть близкие по величине, то есть для некоторых значений i и j $(i > j)$
$$\left|\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right| \approx 1,$$
   так как сходимость становится медленной. В этом случае ищут собственные значения не матрицы A, а матрицы $\tilde{A} = A - \sigma E$, которые равны $\tilde{\lambda_i} = \lambda_i - \sigma$. То есть определяют значения, «сдвинутые» относительно искомых собственных значений на величину σ, которая и называется сдвигом.

   Но изначально мы не знаем собственные значения, поэтому условие перехода к алгоритму со сдвигом следует оценить при помощи теоремы Гершгорина. С помощью данных теорем возможно оценить диапазон собственных значений, и если он меньше 1, то стоит использовать алгоритмы со сдвигом.

   Если σ является хорошим приближением для λ_i, то соотношение будет много меньше единицы и алгоритм будет быстро сходиться. Следовательно, σ надо стараться выбирать именно так.

9. **Вопрос.** Для чего нужно на каждой итерации нормировать приближение к собственному вектору?

   Ответ. Если $|\lambda| > 1$, то последовательность норм векторов стремится к бесконечности и при вычислении на ЭВМ возможно переполнение. Если $|\lambda| < 1$, то последовательность норм векторов стремится к нулю и возможно исчезновение порядка. Для предупреждения этих ситуаций вектор x^k нормируют.

10. **Вопрос.** Приведите примеры использования собственных чисел и собственных векторов в численных методах.

    Ответ. 1) С помощью собственных чисел можно сделать вывод о числе обусловленности матрицы.

2) Интерпретация собственных векторов через приведение кривых второго порядка к каноническому виду. Собственные вектора образуют главные направления кривых второго порядка.
3) В электрических и механических системах собственные числа отвечают собственным частотам колебаний, а собственные векторы характеризуют соответствующие формы (моды) колебаний.
4) Оценка величин критических нагрузок при расчете строительных конструкций основана на информации о собственных значениях и собственных векторах матриц.