Контрольные вопросы

1. **Вопрос.** Каковы условия применимости метода Гаусса без выбора и с выбором ведущего элемента?

   В методе Гаусса важным условием является невырожденность матрицы, то есть $\det A \neq 0$. Также главное ограничение метода Гаусса - требование отличия от нуля величины $a_{ii}^{(i-1)}$ на $i-$том шаге исключения.

   Для метода Гаусса с частичным (полным) выбором главного элемента условие невырожденности матрицы проверяется на i-ом шаге прямого хода путем сравнения наибольшего элемента в i-ом столбце или i-ой строке с нулем.

   Для метода Гаусса без выбора ведущего элемента требуется $a_{ii} \neq 0$ на i-ом шаге.

2. **Вопрос.** Докажите, что если $\det A \neq 0$, то при выборе главного элемента в столбце среди элементов, лежащих не выше главной диагонали, всегда найдется хотя бы один элемент, отличный от нуля.

   Ответ. Доказательство: пусть $\det A \neq 0$. Тогда в первом столбце есть хотя бы один элемент, который не равняется нулю. Иначе получим противоречие с условием.Если ненулевых элементов больше, то выбираем максимальный по модулю. Остальные элементы обнуляем путем элементарных преобразований. Пусть $a_{i1} \neq 0$, меняем местами $1-$ю и $i-$ю строчки и раскладываем определитель по первому столбцу. В итоге получаем:

$$\begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ 0 & a_{22}^1 & \dots & a_{2n}^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^1 & \dots & a_{nn}^1 \end{vmatrix} = a_{i1} * \begin{vmatrix} a_{22}^1 & \dots & a_{2n}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2}^1 & \dots & a_{nn}^1 \end{vmatrix}.$$

   Теперь рассмотрим определитель на порядок меньше:

$$\begin{vmatrix} a_{22}^1 & \dots & a_{2n}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2}^1 & \dots & a_{nn}^1 \end{vmatrix}.$$

   Так как элементраные преобразования не меняют значения определителя, получаем, что данный определь также не равняется нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{22}^1 & \dots & a_{2n}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2}^1 & \dots & a_{nn}^1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Повторяем то же рассуждение $n-1$ раз с определителями меньших порядков. Доказано.

3. **Вопрос.** В методе Гаусса с полным выбором ведущего элемента приходится не только переставлять уравнения, но и менять нумерацию неизвестных. Предложите алгоритм, позволяющий восстановить первоначальный порядок неизвестных.

   Ответ. Можно создать два массива, один из которых будет отвечать за порядок строк, а второй - за порядок столбцов. Если размер изначальной матрицы $N \times N$, длинна массивов будет N. Изначально массивы заполнены числами от 0 до $N-1$, расположенных по возрастанию. Во время исполнения метода полного перебора, одновременно с переменой мест строк или столбцов будем менять элементы соответствующих массивов. Таким образом мы сохраним исходные номера строк и столбцов. Тогда, если мы будем обращаться к элементам введенных массивов по изначальным индексам, то значение элемента массива будет соответствовать новому индексу элемента матрицы.

4.

5. **Вопрос.** Что такое число обусловленности и что оно характеризует? Имеется ли связь между обусловленностью и величиной определителя матрицы? Как влияет выбор нормы матрицы на оценку числа обусловленности?

   Величина $condA = \|A^{-1}\| \cdot \|A\|$ называется числом обусловленности матрицы A. Она характеризует чувствительность решения СЛАУ с этой матрицей к малым погрешностям входных данных. Матрица называется плохо обусловленной, когда ее число обусловленности велико, и хорошо обусловленной, если ее число обусловленности достаточно мало.

6.

7. **Вопрос.** В методе Гаусса с полным выбором ведущего элемента приходится не только переставлять уравнения, но и менять нумерацию неизвестных. Предложите алгоритм, позволяющий восстановить первоначальный порядок неизвестных.

   Ответ. Можно создать два массива, один из которых будет отвечать за порядок строк, а второй - за порядок столбцов. Если размер изначальной матрицы $N \times N$, длинна массивов будет N. Изначально массивы заполнены числами от 0 до $N-1$, расположенных по возрастанию. Во время исполнения метода полного перебора, одновременно с переменой мест строк или столбцов будем менять элементы соответствующих массивов. Таким образом мы сохраним исходные номера строк и столбцов. Тогда, если мы будем обращаться к элементам введенных массивов по изначальным индексам, то значение элемента массива будет соответствовать новому индексу элемента матрицы.

8.

9.

10. Как упрощается оценка числа обусловленности, если матрица является:
    (a) **диагональной**. $condA = \|A^{-1}\| \, \|A\|$. Поскольку обратная для диагональной матрица обратная - это диагональная со всеми элементами в -1 степени, то расчеты сильно сокращаются. В связи с тем, что все элементы матрицы - собственные числа, то можно легко получить оценку снизу, ей будет отношение максимального элемента к минимальному, взятых по модулю
    (b) **симметричной**. Рассмотрим симметричную матрицу A. A^-1 тоже симметричная. Следовательно, можно найти только половину диагональных элементов выше или ниже главной диагонали, так как остальные будут такие же.
    (c) **ортогональной**. Поскольку $A^{-1} = A$, то $condA = 1$
    (d) **положительно определенной**. Если матрица A положительная определена, то она не вырождена, так как по критерию Сильвестра $det(A) > 0$. Кроме того все собственные числа будут положительные.
    (e) **треугольной**. У треугольной матрицы, элементы расположенные на диагонали - собственные числа, поэтому оценку снизу можно получить аналогично с пунктом а.

11. **Вопрос.** Применимо ли понятие числа обусловленности к вырож- денным матрицам?

    Ответ. Если умножить вырожденную матрицу на вектор, то получаем нулевой вектор. $M = \|A\| = max\frac{\|Ax\|}{\|x\|}$, $m = min\frac{\|Ax\|}{\|x\|}$, $k(A) = \frac{M}{m}$. Для вырожденной матрицы $m = 0$, обратной матрицы не существует, поэтому $cond = infinty$ [2].

12. **Вопрос.** В каких случаях целесообразно использовать метод Гаусса, а в каких — методы, основанные на факторизации матрицы?

    Ответ. Метод гаусса удобно использовать, когда исходная матрица треугольная или близка к треугольной. QR метод удобен, когда изначальная матрица ортогональная. Рассмотрим СЛАУ $Ax = b$. Если изменяется только вектор b, то QR метод будет иметь преимущество над методом Гаусса, поскольку матрица результирующего вращения T не будет изменяться, а значит останутся постоянными и матрицы Q, R. В общем случае QR метод требует значительно большего числа операций, чем метод Гаусса, поэтому метода Гаусса будет быстрее [1].

13. **Вопрос.** Как можно объединить в одну процедуру прямой и обратный ход метода Гаусса? В чем достоинства и недостатки такого подхода?

    Ответ. Рассмотрим СЛАУ $Ax = b$. Обнуляем коэффициенты a_{ii} под главной диагональю, затем обнуляем элементы над главной диагональю, ответом будет вектор с элементами вида $\frac{b_i}{a_{ii}}$. Преимущество заключается в том, что мы сделаем меньше итераций, благодаря объедению работы прямого и обратного метода в один цикл. Недостаток заключается в нарушении принципа единственной ответственности, что несет в себе:

    - отсутствие возможности использовать методы прямого и обратного обхода раздельно.
    - ухудшение тестируемости кода, а значит потенциальные проблемы при отладке и внесении изменений в программу.

14. **Вопрос.** Объясните, почему, говоря о векторах, норму $\|\cdot\|_1$ часто называют октаэдрической, норму $\|\cdot\|_2$ — шаровой, а норму $\|\cdot\|_\infty$ — кубической.

    Ответ:

    (a) Октаэдрическая норма $\|\cdot\|_1$ вектора x в $\mathbb{R}^3$ на единичном шаре будет октаэдром.

    (b) Шаровая норма $\|\cdot\|_2$ вектора x в $\mathbb{R}^3$ на единичном шаре будет шаром.

    (c) Кубическая норма $\|\cdot\|_\infty$ вектора x в $\mathbb{R}^3$ на единичном шаре будет кубом.

Список использованных источников

1. Численные методы решения задач линейной алгебры: методические указания к выполнению лабораторных работ по курсу «Методы вычислений» / И. К. Марчевский, О. В. Щерица; под ред. М. П. Галанина. — Москва : Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2017. — 59, [1] с.
2. What is the condition number of a matrix? // phys.uconn.edu.
   URL: https://www.phys.uconn.edu/ rozman/Courses/m3511_18s/downloads/condnumber.pdf
   (дата обращения: 18.09.2022).