

## Контрольные вопросы

1. **Вопрос.** Почему условие  $\|C\| < 1$  гарантирует сходимость итерационных методов?

**Ответ.** Пусть  $\|C\| < 1$ . Покажем, что итерационный метод сходится.

**Определение.** Метод называется сходящимся, если  $\|x - x^n\| \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

$$x = Cx + y, \quad (1)$$

где  $C$  — квадратная матрица размера  $n \times n$ ;  $y$  — вектор столбец.

Запишем рекуррентное соотношение:

$$x^{k+1} = Cx^k + y, \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

Вычитаем из соотношения (1) соотношение (2), получаем

$$x - x^{k+1} = C(x - x^k). \quad (3)$$

Вычисляя норму левой и правой части этого равенства имеем:

$$\|x - x^{k+1}\| = \|C(x - x^k)\| \leq \|C\| \|x - x^k\|, \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots,$$

так как это неравенство верно для всех  $k$ , то

$$\|x - x^n\| \leq \|C\| \|x - x^{n-1}\| \leq \|C\|^2 \|x - x^{n-2}\| \leq \dots \leq \|C\|^n \|x - x^0\|.$$

Норма  $\|x - x^0\|$  не зависит от  $n$ . Используя условие  $\|C\| < 1$ , получаем:

$$\|C\|^n \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty \implies \|x - x^n\| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Таким образом, метод сходится.

2. **Вопрос.** Каким следует выбирать итерационный параметр  $\tau$  в методе простой итерации для увеличения скорости сходимости? Как выбрать начальное приближение  $x^0$ ?

**Ответ.** Обычно для улучшения скорости сходимости исходную систему, прежде чем приводить к виду, удобному для итераций, умножают на итерационный параметр  $\tau$ , который выбирают так, чтобы выполнялась оценка  $\|C\| \leq 1$  и норма матрицы  $C$  была как можно меньше. Однако мы не можем выбирать параметр слишком малым, поскольку тогда погрешность вычислений станет слишком большой. Начальное значение  $x^0$  стоит выбирать как можно более близкое к решению, если это возможно.

3. **Вопрос.** На примере системы из двух уравнений с двумя неизвестными дайте геометрическую интерпретацию метода простой итерации, метода Якоби, метода Зейделя, метода релаксации.

**Ответ.** Метод Якоби. Преположим, что некоторое приближение  $x^k$  уже найдено. Расчетные формулы:

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = -\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2^k + \frac{b_1}{a_{11}} \\ x_2^{k+1} = -\frac{a_{21}}{a_{22}}x_1^k + \frac{b_2}{a_{22}} \end{cases}$$

Уравнения системы задают на плоскости  $Ox_1x_2$  две прямые  $l_1$  и  $l_2$  соответственно. При определении  $x_1^{k+1}$  координата  $x_2 = x_2^k$  фиксируется и точка  $x$  перемещается параллельно оси  $Ox_1$  до пересечения с прямой  $l_1$ . Координата  $x_1$  точки пересечения принимается за  $x_1^{k+1}$ . Затем точка  $x$  перемещается вдоль прямой  $x_1 = x_1^{k+1}$  до пересечения с прямой  $l_2$ . Координата  $x_2$  точки пересечения принимается за  $x_2^{k+1}$ .

Метод Зейделя. Преположим, что некоторое приближение  $x^k$  уже найдено. Расчетные формулы:

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = -\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2^k + \frac{b_1}{a_{11}} \\ x_2^{k+1} = -\frac{a_{21}}{a_{22}}x_1^{k+1} + \frac{b_2}{a_{22}} \end{cases}$$

Уравнения системы задают на плоскости  $Ox_1x_2$  две прямые  $l_1$  и  $l_2$  соответственно. При определении  $x_1^{k+1}$  координата  $x_2 = x_2^k$  фиксируется и точка  $x$  перемещается параллельно оси  $Ox_1$  до пересечения с прямой  $l_1$ . Координата  $x_1$  точки пересечения принимается за  $x_1^{k+1}$ . Затем точка  $x$  перемещается вдоль прямой  $x_1 = x_1^{k+1}$  до пересечения с прямой  $l_2$ . Координата  $x_2$  точки пересечения принимается за  $x_2^{k+1}$ .

Метод релаксации. Преположим, что некоторое приближение  $x^k$  уже найдено. Расчетные формулы:

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = \omega \tilde{x}_1^{k+1} + (1 - \omega)x_1^k \\ x_2^{k+1} = \omega \tilde{x}_2^{k+1} + (1 - \omega)x_2^k, \end{cases}$$

где величины  $\tilde{x}_i^{k+1}$  вычисляются по методу Зейделя. Прodelываем те же действия, что и в методе метода Зейделя. Отличие заключается в том, что после вычисления компоненты  $\tilde{x}_i^{k+1}$  по методу Зейделя, производят дополнительное смещение этой компоненты на величину  $(1 - \omega)(\tilde{x}_i^{k+1} - x_i^k)$ .

4. **Вопрос.** При каких условиях сходятся метод простой итерации, метод Якоби, метод Зейделя и метод релаксации? Какую матрицу называют положительно определенной?

В данном случае мы будем рассматривать норму изменения за итерацию, а не норму погрешности численного решения. Если сходимость будем происходить очень медленно, то использование такой оценки для точки останова приведет к неверному ответу.

**Ответ. Определение.** Линейный оператор  $A$ , действующий в линейном пространстве  $H$ , называется:

- (а) положительным, если  $\forall x \in H, x \neq 0 (Ax, x) > 0$ ;
- (б) положительно определенным, если  $\exists \delta > 0 : \forall x \in H (Ax, x) \geq \delta(x, x)$ .

Если матрица симметричная положительно определенная и  $B - 0.5\tau A > 0$  и  $\tau > 0$ , то стационарный итерационный метод  $B \frac{x^{k+1} - x^k}{\tau} + Ax^k = f$  сходится.

Метод простой итерации сходится, если  $\tau < \frac{2}{\lambda_{\max}}$ , где  $\lambda_{\max}$  — максимальное собственное значение симметричной положительно определенной матрицы  $A$ . Метод Якоби сходится, если матрица  $A$  — симметричная положительно определенная матрица с диагональным преобладанием.

Метод релаксации сходится, если  $0 < \omega < 2$ ,  $\omega$  — заданный числовой параметр (параметр релаксации).

Метод Зейделя частный случай метода релаксации при  $\omega = 1$ .

5. **Вопрос.** Выпишите матрицу  $C$  для методов Зейделя и релаксации.

**Ответ.** Каноническая форма метода релаксации:

$$(D + \omega L) \frac{x^{k+1} - x^k}{\omega} + Ax^k = b; \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots,$$

где  $\omega$  — заданный числовой параметр (параметр релаксации).

$A = L + D + U$ , где  $L$  — нижняя треугольная матрица,  $D$  — диагональная матрица,  $U$  — верхняя треугольная матрица.

Домножим на  $\omega$  и перенесем все слагаемые кроме  $x^{k+1}$  вправо:

$$(D + \omega L) x^{k+1} = (D + \omega L - \omega A) x^k + \omega b; \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots$$

Домножим обе части на  $(D + \omega L)^{-1}$  слева:

$$x^{k+1} = (D + \omega L)^{-1} (D + \omega L - \omega A) x^k + \omega (D + \omega L)^{-1} b.$$

Получаем:

$$C = (D + \omega L)^{-1} (D + \omega L - \omega A) = (D + \omega L)^{-1} ((1 - \omega) D - \omega U).$$

Для метода Зейделя  $\omega = 1$  и матрица  $C$  принимает вид:

$$C = -(D + L)^{-1} U.$$

6. **Вопрос.** Почему в общем случае для остановки итерационного процесса нельзя использовать критерий  $\|x^k - x^{k-1}\| < \varepsilon$ ?
7. **Вопрос.** Какие еще критерии окончания итерационного процесса Вы можете предложить?

**Ответ.**

$$\|x^k - x^{k-1}\| \leq \|x^k\|\varepsilon + \varepsilon_0;$$

$$\left\| \frac{x^k - x^{k-1}}{\|x^k\| + \varepsilon_0} \right\| \leq \varepsilon;$$

$$\|Ax^{k+1} - f\| \leq \varepsilon;$$

$$\|x^k - x^{k-1}\| \leq \frac{1 - \|C\|}{\|C\|} \varepsilon.$$

Для метода Зейделя:

$$\|x^k - x^{k-1}\| \leq \frac{1 - \|C\|}{\|C_U\|} \varepsilon.$$