Контрольные вопросы

1.
2.
3. **Вопрос.** В методе Гаусса с полным выбором ведущего элемента приходится не только переставлять уравнения, но и менять нумерацию неизвестных. Предложите алгоритм, позволяющий восстановить первоначальный порядок неизвестных.

   Ответ. Можно создать два массива, один из которых будет отвечать за порядок строк, а второй - за порядок столбцов. Если размер изначальной матрицы $N \times N$, длинна массивов будет N. Изначально массивы заполнены числами от 0 до $N - 1$, расположенных по возрастанию. Во время исполнения метода полного перебора, одновременно с переменой мест строк или столбцов будем менять элементы соответствующих массивов. Таким образом мы сохраним исходные номера строк и столбцов. Тогда, если мы будем обращаться к элементам введенных массивов по изначальным индексам, то значение элемента массива будет соответствовать новому индексу элемента матрицы.
4.
5.
6. Как упрощается оценка числа обусловленности, если матрица является:
   (a) **диагональной**. $condA = \|A^{-1}\| \ \|A\|$. Поскольку обратная для диагональной матрица обратная - это диагональная со всеми элементами в -1 степени, то расчеты сильно сокращаются. В связи с тем, что все элементы матрицы - собственные числа, то можно легко получить оценку снизу, ей будет отношение максимального элемента к минимальному, взятых по модулю
   (b) **симметричной**. Рассмотрим симметричную матрицу A. A^-1 тоже симметричная. Следовательно, можно найти только половину диагональных элементов выше или ниже главной диагонали, так как остальные будут такие же.
   (c) **ортогональной**. Поскольку $A^{-1} = A$, то $condA = 1$
   (d) **положительно определенной**. Если матрица A положительная определена, то она не вырождена, так как по критерию Сильвестра $det(A) > 0$. Кроме того все собственные числа будут положительные.
   (e) **треугольной**. У треугольной матрицы, элементы расположенные на диагонали - собственные числа, поэтому оценку снизу можно получить ана-

логично с пунктом а.

7. **Вопрос.** Применимо ли понятие числа обусловленности к вырож- денным матрицам?

   Ответ. Если умножить вырожденную матрицу на вектор, то получаем нулевой вектор. $M = \|A\| = max\frac{\|Ax\|}{\|x\|}$, $m = min\frac{\|Ax\|}{\|x\|}$, $k(A) = \frac{M}{m}$. Для вырожденной матрицы $m = 0$, обратной матрицы не существует, поэтому $cond = infinty$ [2].

8. **Вопрос.** В каких случаях целесообразно использовать метод Гаусса, а в каких — методы, основанные на факторизации матрицы?

   Ответ. Метод гаусса удобно использовать, когда исходная матрица треугольная или близка к треугольной. QR метод удобен, когда изначальная матрица ортогональная. Рассмотрим СЛАУ $Ax = b$. Если изменяется только вектор b, то QR метод будет иметь преимущество над методом Гаусса, поскольку матрица результирующего вращения T не будет изменяться, а значит останутся постоянными и матрицы Q, R. В общем случае QR метод требует значительно большего числа операций, чем метод Гаусса, поэтому метода Гаусса будет быстрее [1].

9. **Вопрос.** Как можно объединить в одну процедуру прямой и обратный ход метода Гаусса? В чем достоинства и недостатки такого подхода?

   Ответ. Рассмотрим СЛАУ $Ax = b$. Обнуляем коэффициенты a_{ii} под главной диагональю, затем обнуляем элементы над главной диагональю, ответом будет вектор с элементами вида $\frac{b_i}{a_{ii}}$. Преимущество заключается в том, что мы сделаем меньше итераций, благодаря объеденению работы прямого и обратного метода в один цикл. Недостаток заключается в нарушении принципа единственной ответственности, что несет в себе:

   - отсутствие возможности использовать методы прямого и обратного обхода раздельно.
   - ухудшение тестируемости кода, а значит потенциальные проблемы при отладке и внесении изменений в программу.

10. **Вопрос.** Объясните, почему, говоря о векторах, норму $\|\cdot\|_1$ часто называют октаэдрической, норму $\|\cdot\|_2$ — шаровой, а норму $\|\cdot\|_\infty$ — кубической.

    Ответ:

    (a) Октаэдрическая норма $\|\cdot\|_1$ вектора x в $\mathbb{R}^3$ на единичном шаре будет октаэдром.

    (b) Шаровая норма $\|\cdot\|_2$ вектора x в $\mathbb{R}^3$ на единичном шаре будет шаром.

    (c) Кубическая норма $\|\cdot\|_\infty$ вектора x в $\mathbb{R}^3$ на единичном шаре будет кубом.

Список использованных источников

1. Численные методы решения задач линейной алгебры: методические указания к выполнению лабораторных работ по курсу «Методы вычислений» / И. К. Марчевский, О. В. Щерица; под ред. М. П. Галанина. — Москва : Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2017. — 59, [1] с.
2. What is the condition number of a matrix? // phys.uconn.edu.
URL: https://www.phys.uconn.edu/ rozman/Courses/m3511_18s/downloads/condnumber.pdf (дата обращения: 18.09.2022).