



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ _____ Фундаментальные науки

КАФЕДРА _____ Прикладная математика

РАСЧЕТНО-ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА
К КУРСОВОЙ РАБОТЕ
НА ТЕМУ:
Нахождения уравнения
изгиба балки

Студент _____
ФН2-41Б
(Группа)

(Подпись, дата)

В. Г. Пиневич

(И. О. Фамилия)

Руководитель курсовой работы

(Подпись, дата)

А. В. Чередниченко

(И. О. Фамилия)

2022 г.

Оглавление

Введение	3
1. Постановка задачи	3
1.1. Чистый изгиб	3
1.2. Дифференциальное уравнение равновесия стержня	7
2. Теоретическая часть	8
2.1. Метод начальных коэффициентов	8
2.2. Метод обобщенных коэффициентов	8
3. Практическая часть	10
3.1. Балка в заделке	10
3.1.1. Метод начальных коэффициентов	10
3.1.2. Метод обобщенных коэффициентов	11
3.2. Двух опорная балка	11
3.2.1. Метод начальных коэффициентов	11
3.2.2. Метод обобщенных коэффициентов	12
3.3. Программная реализация расчета уравнения упругого изгиба	13
Заключение	13
Список использованных источников	14

Введение

Проблема вычисления уравнение прогиба балки возникает во многих задачах, в частности в строительной механике. В силу наличия большого числа действующих сил и моментов решение такой задачи классическим методом, т.е. вычислением дифференциального уравнения вызывает сложности в виду большого числа граничных условий. Однако с развитием теории обобщенных функций и сопротивление материалов было найдено более удобный способ расчета прогиба балки. Данная работа посвящена анализу методов решения подобных задач, выделение их недостатков и преимуществ.

1. Постановка задачи

Для расчета уравнения гибкого стержня необходимо ввести несколько понятий. q — распределенная нагрузка, Q — сосредоточенная сила, M — момент.

1.1. Чистый изгиб

Обратимся к источнику [1]. Рассмотрим стержень, закрепленный произвольным образом. Выделим часть стержня длиной dz и приложим поперечные силы $Q + dQ$ и моменты $M + dM$. Поскольку dz мало, то можно считать нагрузку равно распределенной (рис. 1).

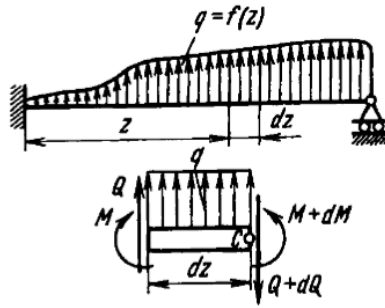


Рис. 1. Равно распределенная нагрузка

Имеем состояния равновесия:

$$\begin{cases} \sum F_z = 0 \\ \sum M_z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Q + qdz - Q - Qdz = 0 \\ M + Qdz + qdz \frac{dz}{z} - M - dM = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Из системы получаем:

$$\frac{dQ}{dz} = q, \quad \frac{dM}{dz} = Q, \quad (2)$$

отбрасываем $qdz\frac{dz}{z}$ как величину высшего порядка малости.

Отсюда следует, что если балка нагружена только сосредоточенными силами, то $q = 0$, $Q = \text{const}$, M — линейная функция от z ? если $q = \text{const}$, то функция Q будет линейной.

Далее рассмотрим наиболее простой случай изгиба — чистый изгиб. Под таким видом изгиба понимаются случаи, при которых в поперечных сечениях стержня возникают только изгибающие моменты, а $Q = 0$. Для участков балки, где это условия выполняются $M = \text{const}$ (2). Рассмотрим только этот участок. На нем стержень изогнется по действию моментов M . Тогда при условии, что сечение балки однородное, в любом сечении будет одинаковый момент, а значит изменение кривизны стержня будет одинаковым. Следовательно, при чистом изгибе ось однородной балки принимает форму дуги окружности.

Разрезая стержень на равные части сечением $A-A$, получаем участки вдвое меньше (рис. 2), которое все еще остается плоским в силу того, что обе стороны являются полностью равноценными. Процесс деления можно проложить дальше. Таким образом доказано, что в неограниченной области близости от любого заданного сечения можно задать бесконечно много сечений, которые в совокупности будут эквивалентны искомому. Это утверждение является точным для чистых сечений, для остальных видов является приближенным.

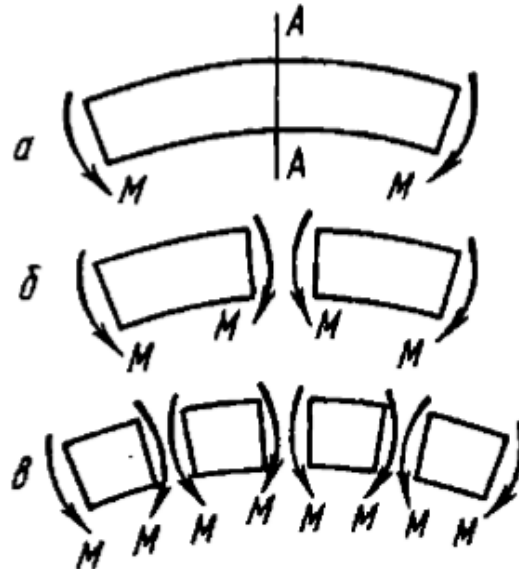


Рис. 2. Сечение $A-A$

Деформацию можно рассматривать как поворот плоских поперечных сечений относительно друг друга (рис. 3).

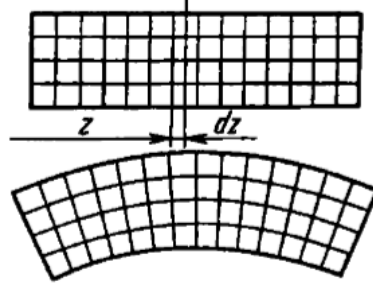


Рис. 3. Деформация плоского поперечного сечения

Рассмотрим два смежных сечения, расположенных на расстоянии dz (рис. 4). Примем левое сечение за неподвижное. При повороте правого сечения на угол $d\theta$ верхние слои удлинятся, нижние – укоротятся. Слой, который не изменится назовем нейтральным и обозначим CD . После поворота кривизна нейтрального слоя изменится следующим образом:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dz}, \quad (3)$$

Случайный отрезок $AB = dz$ (рис. 4) получит приращение $A'B' - AB$. С учетом того, что сечение остается плоским, $A'B' - AB = (\rho + y)d\theta - \rho d\theta = yd\theta$, где y – расстояние от AB до CD .

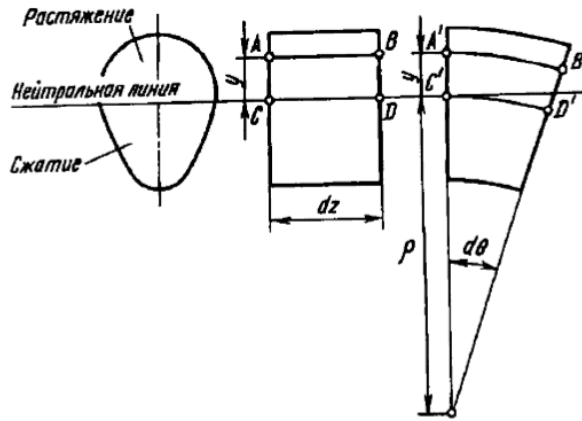


Рис. 4. Образование деформации при чистом изгибе

Относительное удлинение AB равно

$$\varepsilon = \frac{yd\theta}{dz} = \frac{y}{\rho}. \quad (4)$$

По закону Гука,

$$\sigma = E\varepsilon = E\frac{y}{\rho}. \quad (5)$$

Геометрическое место точек в сечении, где напряженность $\sigma = 0$, называется нейтральной линией сечения.

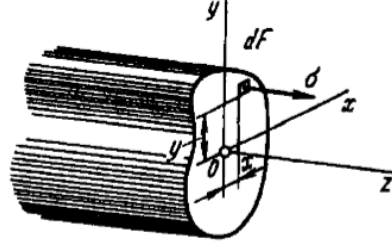


Рис. 5. Сечение балки

Сумма сил σdF (рис. 5) образует нормальную силу N в сечении. При чистом изгибе $N = 0$, поэтому $N = \int_F \sigma dF = 0$, с учетом 5, $\frac{E}{\rho} \int_F y dF = 0$, откуда

$$\int_F y dF = 0. \quad (6)$$

Получили статический момент относительно нейтральной линии. Поскольку он равен нулю, нейтральная линия проходит через центр тяжести сечения. Таким образом мы можем определить координату y в выражениях (4), (5): она отсчитывается от центральной оси, перпендикулярной плоскости кривизны. Аналогично определяется и кривизна $\frac{1}{\rho}$, как кривизна оси стержня.

Зададим систему координат x, y, z , связанную с сечением (рис. 5). Начало координат O совместим с центром тяжести сечения. Ось z направим по нормали к сечению, x — по нейтральной линии. Ось y лежит в плоскости кривизны.

Изгибающий момент в поперечном сечении стержня, как и нормальная сила, может быть выражен через напряжения σ .

$$\int_F \sigma x dF = M_y, \int_F \sigma y dF = M_x \quad (7)$$

Стоит отметить, что изменение кривизны стержня происходит не обязательно в плоскости изгибающего момента.

При указанных условиях момент сил σdF относительно оси y равен нулю, а относительно x — полному избегающему моменту M . Тогда получаем

$$\frac{E}{\rho} \int_F y x dF = 0, \frac{E}{\rho} \int_F \sigma y^2 dF = M. \quad (8)$$

Первое выражение сводится к $J_{xy} = 0$, т.е. изменение кривизны стержня происходит в плоскости момента в том случае, если последняя проходит через одну из главных осей сечения.

Из выражений (8) получаем зависимость кривизны стержня от изгибающего момента:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ_x}, \quad (9)$$

где J_x — момент инерции сечения относительно главной центральной оси, перпендикулярной плоскости изгибающего момента, E — модуль упругости, M — изгибающий момент. Величина EJ_x называется жесткостью стержня при изгибе.

Для стержня круглого сечения с диаметром D :

$$J_x = \frac{\pi D^4}{64}. \quad (10)$$

Для стержня прямоугольного сечения со сторонами b, h :

$$J_x = \frac{bh^3}{12}. \quad (11)$$

1.2. Дифференциальное уравнение равновесия стержня

Форму изогнутого стержня можно определить при помощи выражения (9). В неподвижной системе координат yOz (рис. 6).

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (12)$$

Поскольку мы рассматриваем случай малых перемещений, то тангенс θ между касательной к упругой линии изгиба и осью z мал. Поэтому квадратом y' можно пренебречь. и принять

$$\frac{1}{\rho} \approx y'', \quad (13)$$

откуда

$$y'' = \frac{M}{EJ_x}. \quad (14)$$

Таким образом, мы получили дифференциальное уравнение стержня (14).

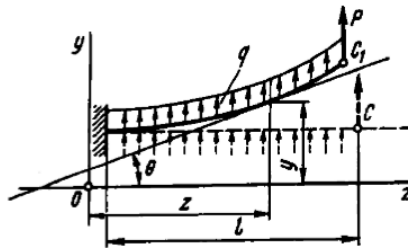


Рис. 6. Упругая линия изгиба балки

Целью данной работы является изучение двух методов его решения: начальных коэффициентов и с помощью обобщенных функций. Будут рассмотрены два вида задач: балка в консольной заделке и двух опорный стержень. После решения этих задач будут сделаны выводы о эффективности и удобности рассмотренных методов.

2. Теоретическая часть

2.1. Метод начальных коэффициентов

Обратимся к источнику [1]. Сопоставим выражения (2) и (14), получаем четыре дифференциальных уравнения:

$$\theta = y', \quad M = EJ_x y'', \quad Q = (EJ_x y'')', \quad q_y = (EJ_x y'')''. \quad (15)$$

Для стержня с постоянным сечением:

$$\theta = y', \quad M = EJ_x y'', \quad Q = EJ_x y''', \quad q_y = EJ_x y^{IV}. \quad (16)$$

Их можно представить в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \frac{dQ}{dz} - q_y(z) = 0 \\ \frac{dM}{dz} - Q = 0 \\ \frac{d\theta}{dz} - \frac{M}{EJ_x(z)} = 0 \\ \frac{dU_y}{dz} - \theta = 0, \end{cases} \quad (17)$$

где U_y — отклонение точек осевой линии стержня от ее положения в недеформированном состоянии. При изгибе прямолинейных стержней $U_y = y$, однако в случае криволинейного $U_y \neq y$. Угол поворота сечения $\theta = \frac{dU_y}{dz}$.

2.2. Метод обобщенных коэффициентов

Обратимся к источнику [2]. В 1926 г. английский физик Дирак ввёл в квантовой механике символ $\delta(z)$, названный им дельта функцией.

Дельта функцию (рис. 7) можно определить как

$$\int_{-\infty}^z \delta(z-a) \varphi(z) dz = \begin{cases} \infty, & z < a \\ 0, & z \geq a \end{cases} \quad (18)$$

Если взять $\varphi(z) = 1$, получим соотношение,

$$\int_{-\infty}^z \delta(z-a) dz = H(z) \quad (19)$$

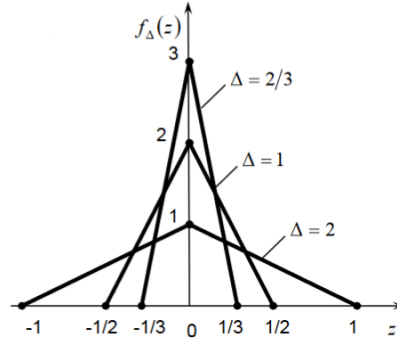


Рис. 7. Возможное представление функции Дирака (18)

которое связывает функцию Дирака и функцию Хевисайда (рис. 8). Функция Хевисайда определяется как

$$H(z - a) = \begin{cases} 0, & z < a \\ 1, & z \geq a \end{cases} \quad (20)$$

Она обладает следующими свойствами:

$$[H(z - a)]^\alpha = H(z - a), \quad H(z - a)H(z - b) = H(z - b), \quad (21)$$

т. е. при возведении в любую степень $0 > \alpha$ функция Хевисайда остаётся неизменной, при перемножении двух функций Хевисайда результат равен тому сомножителю, у которого сдвиг координаты больше: $a > b$.

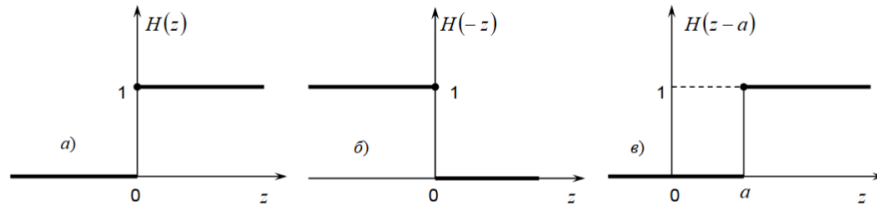


Рис. 8. Единичная функция Хевисайда (21)

При решении задач сопротивления материалов достаточно располагать двумя табличными интегралами, содержащими обобщенные функции Дирака и Хевисайда:

$$\int_0^z f(z)\delta(z - a)dz = f(a)H(z - a), \quad (22)$$

$$s \int_0^z f(z)H(z - a)dz = H(z - a) \int_a^z f(z)dz. \quad (23)$$

3. Практическая часть

3.1. Балка в заделке

Балка в заделке (рис. 9). Составить уравнение упругой линии в заделке, нагруженной на конце сосредоточенной силой P . $E_{Al} = 70$ ГПа, $J_x = \frac{lh^3}{12}$, $h = 0.01$ м, $l = 1$ м.

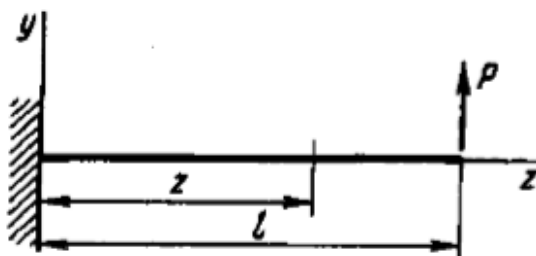


Рис. 9. Балка в заделке

Решение

3.1.1. Метод начальных коэффициентов

$q_y = 0$, так как нет распределенных сил. $\frac{dM}{dz} = P \Rightarrow M = \int_z^l P dz = P(l - z)$. Далее $\theta = \frac{P}{EJ_x} \int_z^l (l - z) dz = \frac{P}{EJ_x} (\frac{z^2}{2} - lz + c_1)$. Получаем уравнение изгиба балки: $y = \frac{P}{EJ_x} \int_z^l (\frac{z^2}{2} - lz + c_1) dz = \frac{P}{EJ_x} (\frac{z^3}{6} - \frac{z^2 l}{2} + c_1 z + c_2)$. Найдём c_1 и c_2 . Для этого рассмотрим граничные условия: $z = 0, y = 0$ и $\theta = 0 \Rightarrow c_1 = 0, c_2 = 0$. Получим итоговое уравнение:

$$y = \frac{P}{EJ_x} \left(\frac{z^3}{6} - \frac{z^2 l}{2} \right). \quad (24)$$

Максимальны прогиб будет равен $y_{max} = \frac{Plz^2}{EJ_x 2}$ при $z = l$. Уравнение изгиба балки будет иметь следующий график:

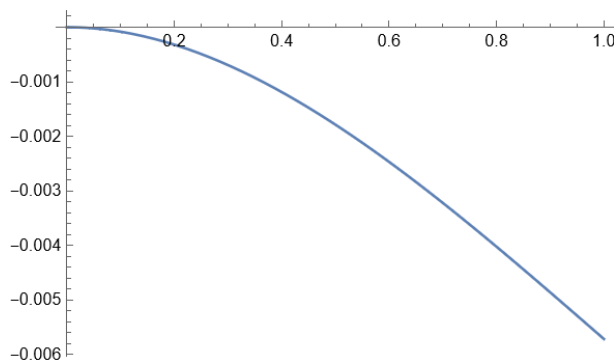


Рис. 10. Упругая линия изгиба балки (24)

3.1.2. Метод обобщенных коэффициентов

Рассмотрим уравнения (17) и функцию Дирихле (18). $EJ_x y^{IV} = P\delta(z)$. Интегрируем, получаем $EJ_x y''' = PH(z)$ согласно (22). $P \int_l^z H(z)dz = PH(z)(z-l)$ согласно (23). Найдем угол поворота балки в плоскости сечения $EJ_x y' = P \int_l^z PH(z)(z-l)dz = PH(z)(\frac{z^2}{2} - lz) + c_1$. Получаем уравнение гибкого изгиба балки $y = \frac{P}{EJ_x}(\frac{z^3}{6} - \frac{z^2 l}{2})H(z) + c_1 z + c_2$. Поскольку $c_1 = 0, c_2 = 0$, при $z = 0$, а $H(z) = 1$, при $z \leq l$. Тогда итоговое уравнение изгиба балки имеет вид

$$y = \frac{P}{EJ_x}(\frac{z^3}{6} - \frac{z^2 l}{2}) \quad (25)$$

Таким образом, ответ метода обобщенных функций (25) совпал с ответом способа начальных коэффициентов (24).

3.2. Двух опорная балка

Двух опорный стержень длиной l нагружен силой P , расположен на расстоянии a от левой опоры (рис. 11). Составить уравнение упругой линии. $E_{Al} = 70$ ГПа, $J_x = \frac{lh^3}{12}$, $h = 0.01$ м, $l = 1$ м.

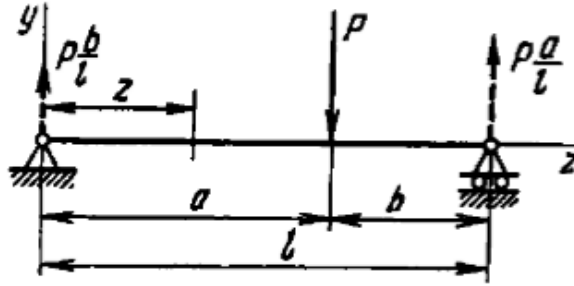


Рис. 11. Двух опорный стержень

Решение

3.2.1. Метод начальных коэффициентов

$q_y = 0$, так как нет распределенных сил. Разобьем стержень на 2 части: до точки приложения P и после. $Q_1 = \frac{Pb}{l}$. Найдем момент $M_1 = \frac{b}{l} \int_0^z Pdz = Pz + C_0^1$, $c_0^1 = 0$, так как момент равен нулю (не консоль). Найдем угол поворота $\theta_1 = \frac{b}{l} \frac{P}{EJ_x} \int_0^z Pzdz = \frac{b}{l} \frac{P}{EJ_x}(\frac{b}{2} z^2 + c_1^1)$. $y_1 = \frac{b}{l} \frac{P}{EJ_x} \int_0^z (\frac{b}{2} z^2 + \theta_1)dz = \frac{b}{l} \frac{P}{EJ_x}(\frac{z^3}{6} + c_1^1 z + c_2^1)$, $c_2^1 = 0$, так как концах стержень неподвижен по оси y .

$Q_2 = \frac{Pa}{l}$. Найдем момент $M_2 = \frac{a}{l} \int_l^z P dz = -P(z + l)$. Найдем угол поворота $\theta_2 = -\frac{a}{l} \frac{P}{EJ_x} \int_l^z P(z + l) dz = -\frac{a}{l} \frac{P}{EJ_x} (\frac{z^2}{2} + zl - c_1^2)$. $y_2 = -\frac{a}{l} \frac{P}{EJ_x} \int_l^z (\frac{z^2}{2} + zl - c_1^2) dz = -\frac{a}{l} \frac{P}{EJ_x} (\frac{z^3}{6} + \frac{z^2 l}{2} - c_1^2 z + c_2^2)$.

$$\begin{cases} z = 0, \text{ при } y_1 = 0 \\ z = l, \text{ при } y_2 = 0 \\ z = a, \text{ при } y_1 = y_2 \end{cases} \quad (26)$$

$$z = 0 \Rightarrow y_1 = 0 \Rightarrow c_2^1 = 0.$$

$$z = l \Rightarrow y_1 = 0 \Rightarrow c_2^2 = a^3 \frac{1}{6}.$$

$$\begin{cases} y_1 = y_2 \\ y_1' = y_2' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b(\frac{z^3}{6} + c_1^1 z + c_2^1) = a(\frac{z^3}{6} + \frac{z^2 l}{2} - c_1^2 z + c_2^2) \\ b(\frac{z^2}{2} + c_1^1) = a(\frac{z^2}{2} + zl - c_1^2) \end{cases} \quad (27)$$

Решаем систему (27). Получаем $c_1^1 = \frac{a}{6l}(3al - 2l^2 - a^2)$, $c_1^2 = -\frac{a}{6l}(2l^2 + a^2)$.

Подставляем в уравнение y_1 и y_2 , получаем:

$$\begin{cases} y_1 = \frac{P}{6EJ_x} \frac{b}{l} (z^3 - \frac{2}{3}zl(2l - \frac{2}{3}l)) \\ y_2 = \frac{P}{6EJ_x} \frac{a}{l} (-z^3 + 3z^2l - z(2l^2 + \frac{4}{9}l^2) + \frac{4}{9}l^4) \end{cases} \quad (28)$$

Пусть $a = \frac{2l}{3}$, $b = \frac{l}{3}$, тогда уравнение изгиба балки будет иметь следующий график:

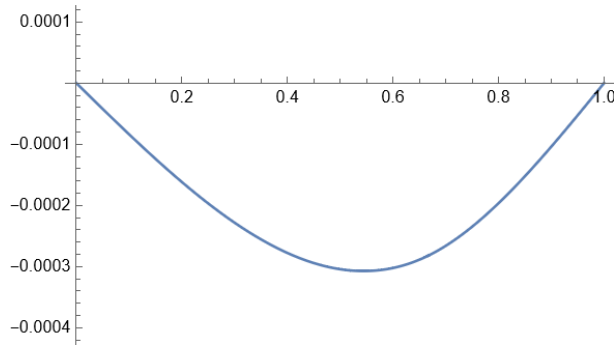


Рис. 12. Упругая линия изгиба балки (28)

3.2.2. Метод обобщенных коэффициентов

Обратимся к источнику [3]. Рассмотрим уравнения (17) и функцию Дирихле (18). $EJ_x y^{IV} = P\delta(z - \frac{l}{a}) - \frac{P}{a}\delta(z)$. Интегрируем, получаем $EJ_x y''' = PH(z - \frac{l}{a}) - \frac{P}{a}$ согласно (22). Найдем угол поворота балки в плоскости сечения $EJ_x y' = P \int_l^z PH(z - \frac{l}{a}) - \frac{P}{a} dz = PH(z - \frac{l}{a}) \frac{(z - \frac{l}{a})^2}{2} - \frac{P}{2} \frac{z^2}{2} + c_1$. Получаем уравнение гибкого изгиба балки $y = \frac{P}{EJ_x} (H(x - \frac{l}{2}) \frac{(x - \frac{l}{a})^3}{6} - \frac{P}{2} \frac{z^3}{6}) + c_1 z + c_2$. При $y = l$, $c_2 = 0$.

$EJ_x y^{IV} = P\delta(z)$. Интегрируем, получаем $EJ_x y''' = PH(z)$ согласно (22). $P \int_l^z H(z) dz = PH(z)(z-l)$ согласно (23). Найдем угол поворота балки в плоскости сечения $EJ_x y' = P \int_l^z PH(z)(z-l) dz = PH(z)(\frac{z^2}{2} - lz) + c_1$. Получаем уравнение гибкого изгиба балки $y = \frac{P}{EJ_x}(\frac{z^3}{6} - \frac{z^2 l}{2})H(z) + c_1 z + c_2$. Поскольку $c_1 = 0, c_2 = 0$, при $z = 0$, а $H(z) = 1$, при $z \leq l$. Тогда $c_1 = \frac{Pl(3a^2 z^2 - 3alz + l^2)}{6a^3 EJ_x}$ и итоговое уравнение изгиба балки имеет вид

$$y = \frac{P}{EJ_x} \left(-\frac{z^3}{6} \frac{1}{a} + \frac{(z - \frac{l}{a})^3}{6} H(z - \frac{l}{a}) + \frac{l(3a^2 z^2 - 3alz + l^2)}{6a^3} \right) \quad (29)$$

Пусть $a = \frac{2l}{3}, b = \frac{l}{3}$, тогда уравнение изгиба балки будет иметь следующий график:

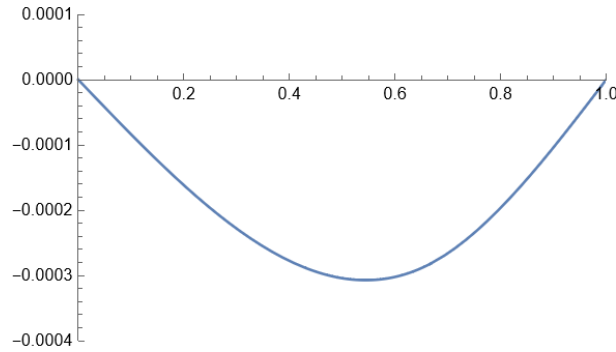


Рис. 13. Упругая линия изгиба балки (29)

Таким образом, график метода обобщенных функций (29) совпал с графиком способа начальных коэффициентов (28).

3.3. Программная реализация расчета уравнения упругого изгиба

Описанные задачи были так же решены с помощью системы Wolfram Mathematica. С помощью этой системы были получены методы для вычисления уравнения прогиба балки для задач вышеописанных типов с произвольной точкой приложения силы, а так же их графическое представление.

Заключение

В ходе выполнения курсовой были изучены методы начальных коэффициентов и обобщенных функций нахождения уравнения упругого изгиба стержня. Были решены 2 типа задач с помощью этих методов, их результат оказался идентичным. Метод начальных коэффициентов является более трудоемким и менее удобным по

сравнению с методом обобщенных функций, поскольку требует учета большего количества граничных условий, большой объем вычислений. Все описанные подходы реализованы в Wolfram Mathematica с демонстрацией результатов работы.

Список использованных источников

1. В.И. Феодосьев Сопротивление материалов: учеб. для вузов. — 10-е изд., перераб. и доп. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 1999. — 590 с.
2. Техническая теория стержней. Применение обобщённых функций для решения задач сопротивления материалов [Электронный ресурс] : учеб. пособие / С. А. Корнеев. — Омск : Изд-во ОмГТУ, 2011.
3. И.А. Бригер, Р.Р. Мавлютов Сопротивление материалов: учебное пособие. - М.: Наука Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. — 560 с.