Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ Фундаментальные науки

КАФЕДРА Прикладная математика

РАСЧЕТНО-ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

К КУРСОВОЙ РАБОТЕ

НА ТЕМУ:

Нахождения уравнения изгиба балки

Студент ФН2-41Б (Группа) _______ (Подпись, дата) В. Г. Пиневич (И. О. Фамилия)

Руководитель курсовой работы _______ (Подпись, дата) А. В. Чередниченко (И. О. Фамилия)

2022 г.

Оглавление

Введение

Проблема вычисления уравнение прогиба балки возникает во многих задачах, в частности в строительной механике. В силу наличия большого числа действующих сил и моментов решение такой задачи классическим методом, т.е. вычислением дифференциального уравнения вызывает сложности в виду большого числа граничных условий. Однако с развитием теории обобщенных функций и сопротивление материалов было найдено более удобный способ расчета прогиба балки. Данная работа посвящена анализу методов решения подобных задач, выделение их недостатков и преимуществ.

1. Постановка задачи

Для расчета уравнения гибкого стержня необходимо ввести несколько понятий. q — распределенная нагрузка, Q — сосредоточенная сила, M — момент.

1.1. Чистый изгиб

Обратимся к источнику [1]. Рассмотрим стержень, закрепленный произвольным образом. Выделим часть стержня длинно dz и приложим поперечные силы $Q + dQ$ и моменты $M + dM$. Поскольку dz мало, то можно считать нагрузку равно распределенной (рис. 1).

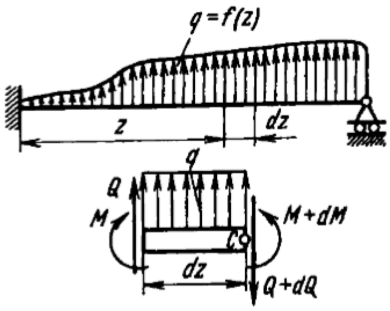

Рис. 1. Равно распределенная нагрузка

Имеем состояния равновесия:

$$\begin{cases} \sum F_z = 0 \\ \sum M_z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Q + qdz - Q - Qdz = 0 \\ M + Qdz + qdz\frac{dz}{z} - M - dM = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Выражение $qdz\frac{dz}{z}$ можно отбросить, как величину высшего порядка малости.

Из системы (1) следует, что если балка нагружен только сосредоточенными силами, то $q = 0$, $Q = const$, M — линейная функция от z, если $q = const$, то функция Q будет линейной.

Итого из системы (1) получаем:

$$\frac{dQ}{dz} = q, \frac{dM}{dz} = Q, \tag{2}$$

Далее рассмотрим наиболее простой случай изгиба — чистый изгиб. Под таким видом изгиба понимаются случаи, при которых в поперечных сечениях стержня возникают только изгибающие моменты, а $Q = 0$. Для участок балки, где это условия выполнятся $M = const$ (2). Рассмотрим только этот участок. На нем стержень изогнется по действием моментов M. Тогда при условии, что сечение балки однородное, в любом сечении будет одинаковй момент, а значит изменение кривизны стержня будет одинаковым. Следовательно, при чистом изгибе ось однородной балки принимает форму дуги окружности.

Разрезая стержень на равные части сечением A–A, получаем участки вдвое меньше (рис. 2), которое все еще остается плоским в силу того, что обе стороны являются полностью равноценными. Процесс деления можно проложить дальше. Таким образом доказано, что в неограниченной области близости от любого заданного сечения можно задать бесконечно много сечений, которые в совокупности будут эквивалентны искомому. Это утверждение является точным для чистых сечений, для остальных видов является приближенным.

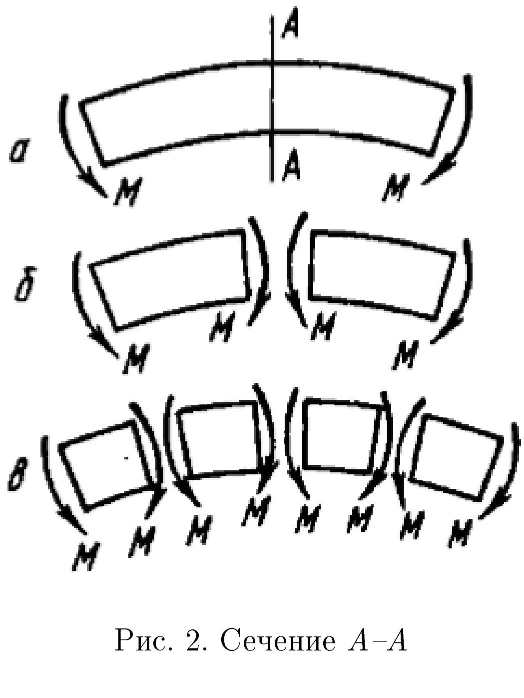

Рис. 2. Сечение A–A

Деформацию можно рассматривать как поворот плоских поперечных сечений относительно друг друга (рис. 3).

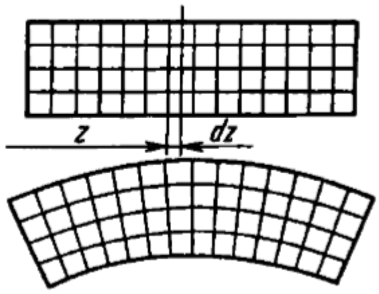

Рис. 3. Деформация плоского поперечного сечения

Рассмотрим два смежных сечения, расположенных на растоянии dz (рис. 4). Примем левое сечение за неподвижное. При повороте правого сечения на угол $d\theta$ верхние слои удлинятся, нижние – укоротятся. Слой, который не изменится назовем нейтральным и обозначим CD. После поворота кривизна нейтрального слоя изменится следующим образом:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dz}, \tag{3}$$

Случайный отрезок $AB = dz$ (рис. 4) получит приращение $A'B' - AB$. С учетом того, что сечение остается плоским, $A'B' - AB = (\rho + y)d\theta - \rho d\theta = yd\theta$, где y — расстояние от AB до CD.

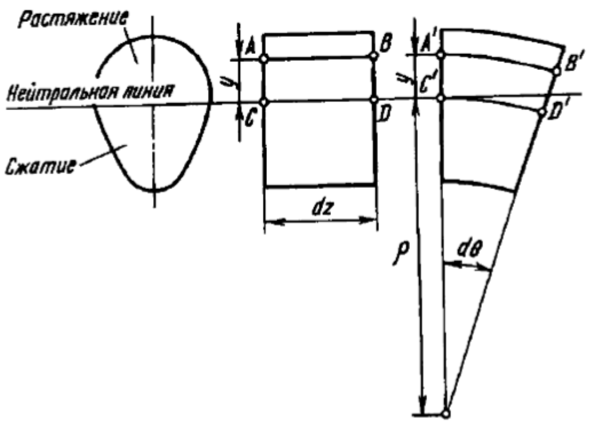

Рис. 4. Образование деформации при чистом изгибе

Относительное удлинение AB равно

$$\varepsilon = \frac{yd\theta}{dz} = \frac{y}{\rho}. \tag{4}$$

По закону Гука,

$$\sigma = E\varepsilon = E\frac{y}{\rho}. \tag{5}$$

Геометрические место точек в сечении, где напряженность $\sigma = 0$, называется нейтральной линией сечения.

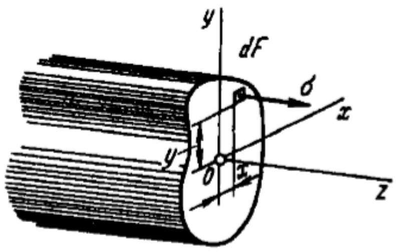

Рис. 5. Сечение балки

Сумма сил σdF (рис. 5) образует нормальную силу N в сечении. При чистом изгибе $N = 0$, поэтому $N = \int_F \sigma dF = 0$, с учетом 5, $\frac{E}{\rho}\int_F ydF = 0$, откуда

$$\int_F ydF = 0. \tag{6}$$

Получили статический момент относительно нейтральной линии. Поскольку он равен нулю, нейтральная линий проходит через центр тяжести сечения. Таким образом мы можем определить координату y в выражениях (4), (5): она отсчитывается от центральной оси, перпендикулярной плоскости кривизны. Аналогично определяется и кривизна $\frac{1}{\rho}$, как кривизна оси стержня.

Зададим систему координат x, y, z, связанную с сечением (рис. 5). Начало координат O совместим с центром тяжести сечения. Ось z направим по нормали к сечению, x — по нейтральной линии. Ось y лежит в плоскости кривизны.

Изгибающий момент в поперечном сечении стержня, как и нормальная сила, может быть выражен через напряжения σ.

$$\int_F \sigma xdF = M_y, \int_F \sigma ydF = M_x \tag{7}$$

Стоит отметить, что изменение кривизны стержня происходит не обязательно в плоскости изгибающего момента.

При указанных условиях момент сил σdF относительно оси y равен нулю, а относительно x – полному изгибающему моменту M. Тогда получаем

$$\frac{E}{\rho}\int_F yxdF = 0, \frac{E}{\rho}\int_F \sigma y^2 dF = M. \tag{8}$$

Первое выражение сводится к $J_{xy} = 0$, т.е. изменение кривизны стержня происходит в плоскости момента в том случае, если последняя проходит через одну из главных осей сечения.

Из выражений (8) получаем зависимость кривизны стержня от изгибающего момента:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ_x}, \tag{9}$$

где J_x — момент инерции сечения относительно главной центральной оси, перпендикулярной плоскости изгибающего момента, E — модуль упругости, M - изгибающий момент. Величина EJ_x называется жесткостью стержня при изгибе.

Для стержня круглого сечения с диаметром D:

$$J_x = \frac{\pi D^4}{64}. \tag{10}$$

Для стержня прямоугольного сечения со сторонами b, h:

$$J_x = \frac{bh^3}{12}. \tag{11}$$

1.2. Дифференциальное уравнение равновесия стержня

Форму изогнутого стержня можно определить при помощи выражения (9). В неподвижной системе координат yOz (рис. 6).

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{12}$$

Поскольку мы рассматриваем случай малых перемещений, то тангенс θ между касательной к упругой линии изгиба и осью z мал. Поэтому квадратом y' можно пренебречь. и принять

$$\frac{1}{\rho} \approx y'', \tag{13}$$

откуда

$$y'' = \frac{M}{EJ_x}. \tag{14}$$

Таким образом, мы получили дифференциальное уравнение стержня (14). Сопоставим выражения (2) и (14), получаем четыре выражения, которые объясняют физический смысл производных 1–4 порядков соответственно:

$$\theta = y',\ M = EJ_x y'',\ Q = EJ_x y''',\ q_y = EJ_x y^{IV}. \tag{15}$$

$y' = \theta$ — угол поворота сечения, y'', y''', y^{IV} прямо пропорционально зависят от момента M, точечной силы Q, распределенной нагрузки q соответственно. В свою очередь, y — отклонение точек осевой линии стержня от ее положения в недеформированном состоянии.

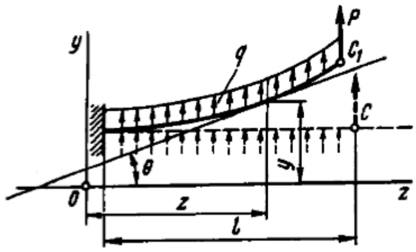

Рис. 6. Упругая линия изгиба балки

Целью данной работы является изучение двух методов его решения: начальных коэффициентов и с помощью обобщенных функций. Будут рассмотрены два вида задач: балка в консольной заделке и двух опорный стержень. После решения этих задач будут сделаны выводы о эффективности и удобности рассмотренных методов.

2. Теоретическая часть

2.1. Метод начальных коэффициентов

Обратимся к источнику [1]. Выражения (15) можно представить в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \frac{dQ}{dz} - q_y(z) = 0 \\ \frac{dM}{dz} - Q = 0 \\ \frac{d\theta}{dz} - \frac{M}{EJ_x(z)} = 0 \\ \frac{dy}{dz} - \theta = 0, \end{cases} \tag{16}$$

В результате решения системы (16) получаем отклонение точек осевой линии стержня от ее положения в недеформированном состоянии y, что и будет являться ответом.

2.2. Метод обобщенных коэффициентов

Обратимся к источнику [2]. В 1926 г. английский физик Дирак ввёл в квантовой механике символ $\delta(z)$, названный им дельта функцией.

Дельта функцию (рис. 7) можно определить как

$$\int_{-\infty}^{z} \delta(z-a)\varphi(z)dz = \begin{cases} \infty, z = a \\ 0, z \neq a \end{cases} \tag{17}$$

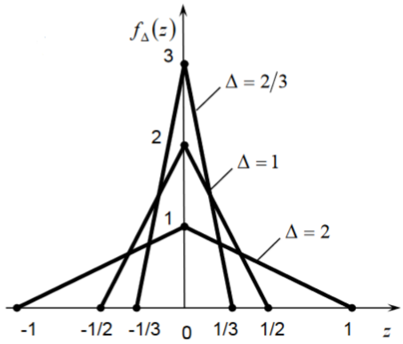

Рис. 7. Возможное представление функции Дирака (17)

Функция Хевисайда определяется как

$$H(z-a) = \begin{cases} 0, z < a \\ 1, z \geqslant a \end{cases} \tag{18}$$

Она обладает следующими свойствами:

$$[H(z-a)]^\alpha = H(z-a),\ H(z-a)H(z-b) = H(z-b), \tag{19}$$

т. е. при возведении в любую степень $0 > \alpha$ функция Хевисайда остаётся неизменной, при перемножении двух функций Хевисайда результат равен тому сомножителю, у которого сдвиг координаты больше: $a > b$.

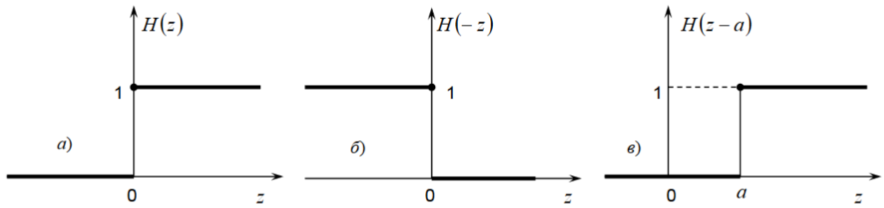

Рис. 8. Единичная функция Хевисайда (19)

Если взять $\varphi(z) = 1$, получим соотношение,

$$\int_{-\infty}^{z} \delta(z-a)dz = H(z) \tag{20}$$

которое связывает функцию Дирака и функцию Хевисайда (рис. 20).

При решении задач сопротивления материалов достаточно располагать двумя табличными интегралами, содержащими обобщенные функции Дирака и Хевисайда:

$$\int_0^z f(z)\delta(z-a)dz = f(a)H(z-a), \tag{21}$$

$$\int_0^z f(z)H(z-a)dz = H(z-a)\int_a^z f(z)dz. \tag{22}$$

При интегрировании функции Хевисайда будем получать луч:

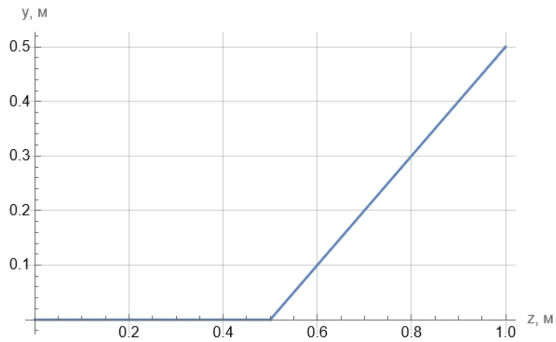

Рис. 9. Интеграл функции Хевисайда (20)

При повторном интегрировании функции Хевисайда будем получать полупараболу:

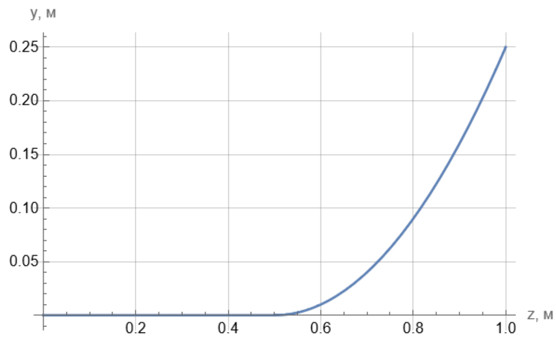

Рис. 10. Повторный интеграл функции Хевисайда (20)

Последний график (рис. 10) по форме сильно напоминает изгиб упругого стержня, что и будет использовано для решения задач для нахождения уравнения изгиба балки.

3. Практическая часть

3.1. Балка в заделке

Балка в заделке (рис. 11). Составить уравнение упругой линии в заделке, нагруженной на конце сосредоточенной силой $P = 1$ Н. $E_{Al} = 70$ ГПа, $J_x = \frac{lh^3}{12}$ кг $\cdot$ м^2, $h = 0.01$ м, $l = 1$ м.

3.1.1. Решение методом начальных коэффициентов

Рассмотрим граничное условие:

$$y = 0; \ \theta = 0, \text{ при } z = 0. \tag{23}$$

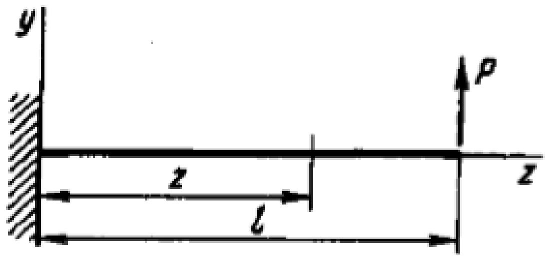

Рис. 11. Балка в заделке

Распределенная сила q_y равна 0, так как она не приложена. Найдем момент M:

$$\frac{dM}{dz} = P \Rightarrow M = \int\limits_z^l P dz = P(l - z). \tag{24}$$

Далее ищем угол наклона сечения θ:

$$\theta = \frac{P}{EJ_x} \int\limits_z^l (l - z) dz = \frac{P}{EJ_x} (\frac{z^2}{2} - lz + c_1). \tag{25}$$

Получаем уравнение изгиба балки:

$$y = \frac{P}{EJ_x} \int\limits_z^l (\frac{z^2}{2} - lz + c_1) dz = \frac{P}{EJ_x} (\frac{z^3}{6} - \frac{z^2 l}{2} + c_1 z + c_2). \tag{26}$$

Найдем c_1 и c_2. Для этого рассмотрим граничные условия (28), из них следует, что $c_1 = 0$, поскольку $y(0) = 0$, а $c_2 = 0$, так как $\theta(0) = 0$. Получим итоговое уравнение:

$$y = \frac{P}{EJ_x} (\frac{z^3}{6} - \frac{z^2 l}{2}). \tag{27}$$

Максимальны прогиб будет равен $y_{max} = \frac{Plz^2}{EJ_x 2}$ при $z = l$. Уравнение изгиба балки будет иметь следующий график:

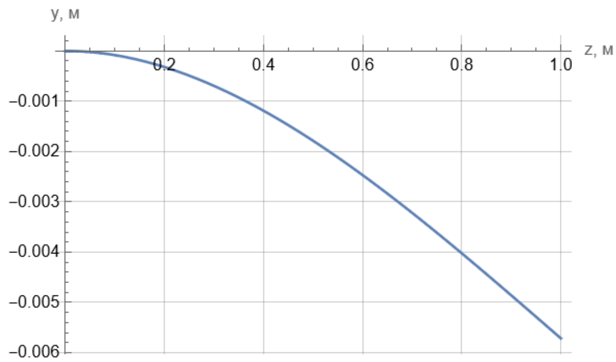

Рис. 12. Упругая линия изгиба балки (27)

3.1.2. Решение методом обобщенных коэффициентов

Рассмотрим граничное условие:

$$y = 0;\ \theta = 0, \text{ при } z = 0. \tag{28}$$

Рассмотрим уравнения (16) и функцию Дирака (17). Запишем с помощью выражений (16) и (17) начальное уравнение:

$$EJ_x y^{IV} = P\delta(z). \tag{29}$$

Интегрируем, согласно (21) получаем:

$$EJ_x y''' = PH(z). \tag{30}$$

Интегрируем (22), согласно (21) получаем:

$$P\int_l^z H(z)dz = PH(z)(z-l). \tag{31}$$

Найдем угол поворота балки в плоскости сечения:

$$EJ_x y' = P\int_l^z PH(z)(z-l)dz = PH(z)(\frac{z^2}{2} - lz) + c_1. \tag{32}$$

Получаем уравнение гибкого изгиба балки:

$$y = \frac{P}{EJ_x}(\frac{z^3}{6} - \frac{z^2 l}{2})H(z) + c_1 z + c_2. \tag{33}$$

Из граничных условий получаем:

$$c_1 = 0, c_2 = 0. \tag{34}$$

Учитывая, что $H(z) = 1$, при $z \leqslant l$, получаем итоговое уравнение изгиба балки

$$y = \frac{P}{EJ_x}(\frac{z^3}{6} - \frac{z^2 l}{2}) \tag{35}$$

Таким образом, ответ метода обобщенных функций (35) совпал с ответом способа начальных коэффициентов (27).

3.2. Двух опорная балка

Двух опорный стержень длинной l нагружен силой $P = 1$ Н, расположен на расстоянии a от левой опоры (рис. 13). Составить уравнение упругой линии.
$E_{Al} = 70$ ГПа, $J_x = \frac{lh^3}{12}$ кг $\cdot$ м^2, $h = 0.01$ м, $l = 1$ м.

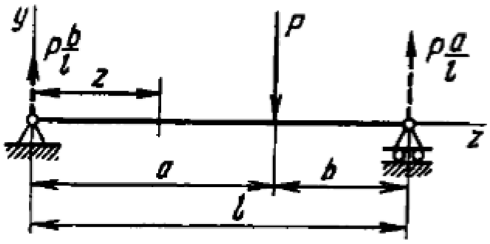

Рис. 13. Двух опорный стержень

3.2.1. Решение методом начальных коэффициентов

Рассмотрим граничные условия:

$$\begin{cases} y_1 = 0, \text{ при } z = 0 \\ y_2 = 0, \text{ при } z = l \\ y_1 = y_2, \text{ при } z = a \end{cases} \tag{36}$$

Распределенная сила q_y равна 0, так как она не приложена. Разобьем стержень на 2 части: до точки приложения P и после. Сила $Q_1 = \frac{Pb}{l}$. Найдем момент M_1:

$$M_1 = \frac{b}{l}\int\limits_0^z Pdz = Pz + c_0^1 \tag{37}$$

Параметр $c_0^1 = 0$, так как момент равен нулю (не консоль). Найдем угол поворота θ_1:

$$\theta_1 = \frac{b}{l}\frac{P}{EJ_x}\int\limits_0^z Pzdz = \frac{b}{l}\frac{P}{EJ_x}(\frac{b}{l}\frac{z^2}{2} + c_1^1) \tag{38}$$

Получаем первое уравнение изгиба балки y_1:

$$y_1 = \frac{b}{l}\frac{P}{EJ_x}\int\limits_0^z (\frac{z^2}{2} + \theta_1)dz = \frac{b}{l}\frac{P}{EJ_x}(\frac{z^3}{6} + c_1^1 z + c_2^1), \tag{39}$$

Параметр $c_2^1 = 0$, так как концах стержень неподвижен по оси y.

Рассмотрим вторую часть стержня. Сила $Q_2 = \frac{Pa}{l}$. Найдем момент M_2:

$$\begin{cases} M_2 = \frac{a}{l}\int\limits_l^z Pdz = -P(z + l) \end{cases} \tag{40}$$

Найдем угол поворота θ_2:

$$\theta_2 = -\frac{a}{l}\frac{P}{EJ_x}\int\limits_l^z P(z+l)dz = -\frac{a}{l}\frac{P}{EJ_x}(\frac{z^2}{2} + zl - c_1^2). \tag{41}$$

Получаем второе уравнение изгиба балки y_2:

$$y_2 = -\frac{a}{l}\frac{P}{EJ_x}\int\limits_l^z (\frac{z^2}{2} + zl - c_1^2)dz = -\frac{a}{l}\frac{P}{EJ_x}(\frac{z^3}{6} + \frac{z^2 l}{2} - c_1^2 z + c_2^2), \tag{42}$$

Из граничных условий (36) получаем:

$$c_2^1 = 0, c_2^2 = a^3\frac{1}{6}. \tag{43}$$

А так же из граничных условий (36) получается:

$$\begin{cases} y_1 = y_2 \\ y_1' = y_2' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b(\frac{z^3}{6} + c_1^1 z + c_2^1) = a(\frac{z^3}{6} + \frac{z^2 l}{2} - c_1^2 z + c_2^2) \\ b(\frac{b}{l}\frac{z^2}{2} + c_1^1) = a(\frac{z^2}{2} + zl - c_1^2) \end{cases} \tag{44}$$

Решаем систему (44). Получаем:

$$\begin{cases} c_1^1 = \frac{a}{6l}(3al - 2l^2 - a^2) \\ c_1^2 = -\frac{a}{6l}(2l^2 + a^2) \end{cases} \tag{45}$$

Подставляем в уравнение y_1 и y_2, получаем:

$$y(z) = \begin{cases} y_1 = \frac{P}{6EJ_x}\frac{b}{l}(z^3 - \frac{2}{3}zl(2l - \frac{2}{3}l)), \text{ при } 0 \leqslant z \leqslant a \\ y_2 = \frac{P}{6EJ_x}\frac{a}{l}(-z^3 + 3z^2 l - z(2l^2 + \frac{4}{9}l^2) + \frac{4}{9}l^4), \text{ при } a \leqslant z \leqslant b \end{cases} \tag{46}$$

Пусть $a = \frac{2l}{3}, b = \frac{l}{3}$, тогда уравнение изгиба балки будет иметь следующий график:

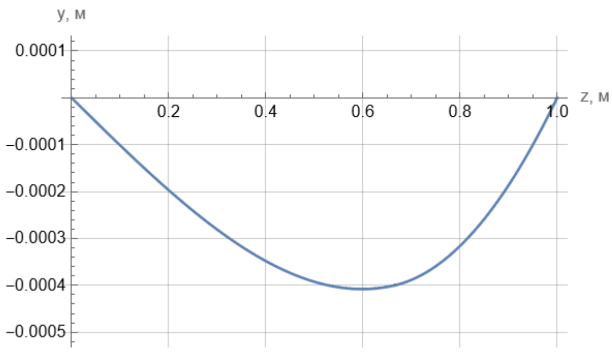

Рис. 14. Упругая линия изгиба балки (46)

3.2.2. Решение методом обобщенных функций

Рассмотрим граничные условия:

$$\begin{cases} y = 0, M = 0, \text{ при } z = 0 \\ y = 0, M = 0, \text{ при } z = l. \end{cases} \tag{47}$$

Обратимся к источнику [3]. Рассмотрим уравнения (16) и функцию Дирихле (17).

$$EJ_x y^{IV} = P\delta(z). \tag{48}$$

Интегрируем (48), согласно (21) получаем:

$$EJ_x y''' = PH(z). \tag{49}$$

Найдем момент M согласно (22):

$$M = P\int_l^z H(z)dz = PH(z)(z-l). \tag{50}$$

Найдем угол поворота балки в плоскости сечения:

$$EJ_x y' = P\int_l^z PH(z)(z-l)dz = PH(z)(\frac{z^2}{2} - lz) + c_1. \tag{51}$$

Получаем уравнение гибкого изгиба балки:

$$y = \frac{P}{EJ_x}(\frac{z^3}{6} - \frac{z^2 l}{2})H(z) + c_1 z + c_2. \tag{52}$$

Из граничных условий (47) $c_2 = 0$. Так же найдем c_1 из условия $y(l) = 0$ (47), обозначающий угол поворота сечения

$$c_1 = \frac{Pl(3a^2z^2 - 3alz + l^2)}{6a^3 EJ_x} \tag{53}$$

Кроме того, $H(z) = 1$, при $z \leqslant l$. Тогда и итоговое уравнение изгиба балки имеет вид:

$$y = \frac{P}{EJ_x}(-\frac{z^3}{6}\frac{1}{a} + \frac{(z-\frac{l}{a})^3}{6}H(z-\frac{l}{a}) + \frac{l(3a^2z^2 - 3alz + l^2)}{6a^3}) \tag{54}$$

Пусть $a = \frac{2l}{3}, b = \frac{l}{3}$, тогда уравнение изгиба балки будет иметь следующий график:

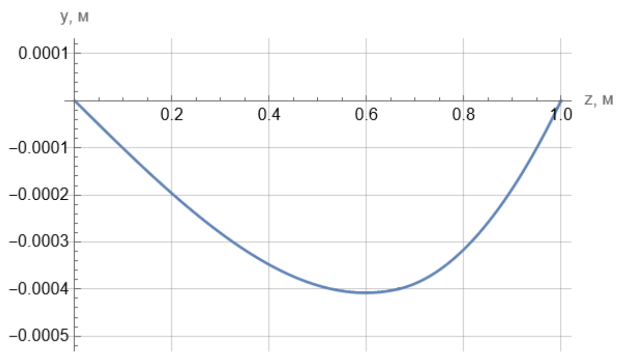

Рис. 15. Упругая линия изгиба балки (54)

Таким образом, график метода обобщенных функций (54) совпал с графиком способа начальных коэффициентов (46).

Заключение

В ходе выполнения курсовой были изучены методы начальных коэффициентов и обобщенных функций нахождения уравнения упругого изгиба стержня. Были решены 2 типа задач с помощью этих методов, их результат оказался идентичным. Метод начальных коэффициентов является более трудоемким и менее удобным по сравнению с методом обобщенных функций, поскольку требует учета большего количества граничных условий, больший объем вычислений.

Список использованных источников

1. В.И. Феодосьев Сопротивление материалов: учеб. для вузов. — 10-е изд., перераб. и доп. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 1999. — 590 с.
2. Техническая теория стержней. Применение обобщённых функций для решения задач сопротивления материалов [Электронный ресурс] : учеб. пособие / С. А. Корнеев. – Омск : Изд-во ОмГТУ, 2011.
3. И.А. Бригер, Р.Р. Мавлютов Сопротивление материалов: учебное пособие. - М.: Наука Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. — 560 с.