

Учебное электронное издание

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Омский государственный технический университет»

С. А. Корнеев

**ТЕХНИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ СТЕРЖНЕЙ.
ПРИМЕНЕНИЕ ОБОБЩЁННЫХ
ФУНКЦИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ**

Учебное пособие

Омск
Издательство ОмГТУ
2011

УДК 539.3/.6
ББК 30.121
К67

Рецензенты:

С. А. Макеев, д-р техн. наук, профессор,
кафедра «Строительные конструкции» СибАДИ;
С. П. Андросюк, канд. техн. наук, доцент,
кафедра «Прикладная математика и механика»
ОмГУПС

Корнеев, С. А.

К67 Техническая теория стержней. Применение обобщённых функций для решения задач сопротивления материалов [Электронный ресурс] : учеб. пособие / С. А. Корнеев. – Омск : Изд-во ОмГТУ, 2011. – 1 электрон. опт. диск.

ISBN 978-5-8149-1082-0

Учебное пособие охватывает один из основных разделов сопротивления материалов – техническую теорию стержней. Сформулированы общие понятия и положения. При выводе основных формул и полной системы уравнений механики стержней учтены тепловые эффекты, влияние динамических факторов. Приведены сведения о свойствах обобщённой функции Дирака и единичной функции Хевисайда, на базе которых строится унифицированный метод решения практических задач.

Предназначено для студентов машиностроительных специальностей элитного образования ОмГТУ и магистрантов. Может быть полезно также для студентов, изучающих дисциплины «Прикладная механика» и «Сопротивление материалов», при выполнении УНИРС.

УДК 539.3/.6
ББК 30.121

Номер гос. регистрации
Издательство ОмГТУ.
644050, Омск, пр. Мира, 11
e-mail: info@omgtu.ru

ISBN 978-5-8149-1082-0

© ФГБОУ ВПО «Омский государственный
технический университет», 2011

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ	4
1.1. Геометрические характеристики сечений	4
1.2. Классификация стержней	6
1.3. Классификация сил	7
1.4. Уравнения равновесия	9
1.5. Напряжения	11
1.6. Интегральные характеристики напряжений (внутренние усилия)	12
1.7. Метод определения внутренних усилий	13
1.8. Закон Гука при растяжении	16
1.9. Закон Гука при сдвиге	18
1.10. Гипотеза плоских сечений	20
2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСТЯЖЕНИЯ, КРУЧЕНИЯ И ИЗГИБА ПРЯМЫХ СТЕРЖНЕЙ С УЧЁТОМ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ЭФФЕКТОВ (МАЛЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ)	22
2.1. Статические (динамические) уравнения	22
2.2. Геометрические уравнения	28
2.3. Физические уравнения	35
2.4. Полная система дифференциальных уравнений технической теории стержней	37
3. УСЛОВИЯ ПРОЧНОСТИ И ЖЁСТКОСТИ	38
3.1. Критерий прочности Губера – Мизеса	39
3.2. Формулировка критерия прочности для частных случаев напряжённого состояния стержня	43
4. ЕДИНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЁННОЙ НАГРУЗКИ И ХАРАКТЕРИСТИК ЖЁСТКОСТИ СТЕРЖНЕЙ ЧЕРЕЗ ОБОБЩЁННЫЕ ФУНКЦИИ ДИРАКА И ХЕВИСАЙДА	47
4.1. Обобщённые функции Дирака и Хевисайда	48
4.2. Табличные интегралы и их практическое применение	55
4.3. Формулировка силовых граничных условий	57
5. ТИПОВЫЕ ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ	58
5.1. Расчёт балки на изгиб	58
5.2. Расчёт ступенчатых стержней на растяжение	60
5.3. Расчёт разрезной балки на изгиб	62
КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ	64
ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ	78
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	84

ВВЕДЕНИЕ

Сопротивление материалов является одной из первых инженерных дисциплин, изучаемой студентами, при освоении которой приходится сталкиваться с реальными расчётами и элементами проектирования деталей машин и конструкций. При изучении технической теории стержней – одного из основных разделов сопротивления материалов – возникают затруднения, которые связаны, главным образом, с многообразием схем нагружения и вариантов закрепления, наличием ступенчатых стержней с резким изменением формы и размеров поперечного сечения, а также внутренних связей в виде врезанных шарниров и т. п. Обычно для преодоления подобных затруднений используется разбиение расчётной схемы на участки с последующим сшиванием решений. Однако такой подход сопряжён с увеличенным объёмом вычислений при отыскании аналитического решения, а при численном решении – с увеличенным объёмом подготовительной работы.

Другой, более продуктивный путь состоит в привлечении относительно простого и достаточно наглядного математического аппарата обобщённых функций, который широко применяется в математической физике, квантовой механике и других дисциплинах для описания точечных масс и зарядов, точечных источников теплоты, сосредоточенных сил и моментов. Использование обобщённой функции Дирака и тесно связанной с ней единичной функции Хевисайда позволяет применять для решения задач сопротивления материалов единообразный унифицированный метод, который в данном учебном пособии иллюстрируется на типовых примерах. В этом прослеживается преемственность научно-методических исследований профессора В. Д. Белого, который, возглавляя кафедру «Сопротивление материалов» ОмГТУ, уделял большое внимание разработке единого унифицированного метода решения задач механики стержней. Следует также отметить, что в последние годы в учебных изданиях ряда ведущих технических университетов [6, 7, 8] прослеживается тенденция систематического использования функции Хевисайда и её модификаций (например, единичной ступенчатой функции) для облегчения и упрощения работы по проведению расчётов с применением современных вычислительных средств. Если в дополнение к этому использовать обобщённую функцию Дирака, то можно достичь более значимых результатов в указанном направлении.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Сопротивление материалов – это наука об инженерных методах расчета элементов конструкций и машин на прочность, жесткость и устойчивость. Одним из основных разделов сопротивления материалов является техническая теория стержней.

Уточним суть некоторых общих понятий.

Деформация – изменение размеров и формы материальных тел под действием внешних нагрузок.

Упругость – свойство материальных тел восстанавливать первоначальную форму и размеры после снятия нагрузки.

Пластичность – свойство материальных тел не восстанавливать первоначальную форму и размеры после снятия нагрузки.

Прочность – способность конструкций и деталей машин выдерживать рабочие нагрузки без разрушения и пластических деформаций.

Жесткость – способность конструкций и деталей машин выдерживать рабочие нагрузки без значительных упругих деформаций, которые могут нарушить их нормальную работу.

Устойчивость – способность конструкции и её элементов сохранять определенную начальную форму упругого равновесия под нагрузкой.

Материальная однородность: материал, из которого изготовлено тело, проявляет одинаковые свойства во всех точках.

Изотропность: материал, из которого изготовлено тело, проявляет одинаковые свойства во всех направлениях.

1.1. Геометрические характеристики сечений

Пусть имеется некоторая плоская фигура (сечение тела), связанная с декартовой системой координат Oxy и имеющая площадь F (рис. 1.1).

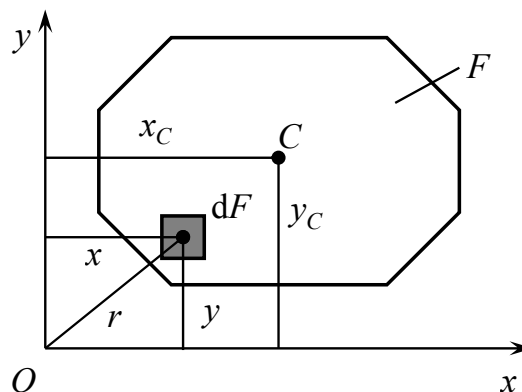


Рис. 1.1. Центр тяжести плоской фигуры

По определению *центром тяжести плоской фигуры* называется геометрическая точка с координатами

$$x_C = \frac{S_y}{F}, \quad y_C = \frac{S_x}{F}, \quad (1.1)$$

где

$$S_y = \int_F x dF, \quad S_x = \int_F y dF. \quad (1.2)$$

Величины (1.2) называются *статическими моментами фигуры относительно оси y и x* соответственно. Такое название дано по аналогии с понятием момента силы относительно оси, если только в качестве силы иметь в виду площадь фигуры.

Ось, проходящая через центр тяжести сечения, называется *центральной осью*. Очевидно, если начало координат O совпадает с центром тяжести сечения C , то обе координатные оси будут центральными осями. Относительно них $S_x = S_y = 0$, ибо в этом случае $x_C = y_C = 0$.

Осевым моментом инерции плоской фигуры называется интеграл произведения площади элементарной площадки на квадрат её расстояния от рассматриваемой оси. Так, моменты инерции плоской фигуры (рис. 1.1) относительно осей x и y соответственно равны

$$J_x = \int_F y^2 dF, \quad J_y = \int_F x^2 dF. \quad (1.3)$$

Полярным моментом инерции плоской фигуры относительно данной точки (полюса O) называется интеграл произведения площади элементарной площадки на квадрат её расстояния до полюса (рис. 1.1):

$$J_p = \int_F r^2 dF. \quad (1.4)$$

Поскольку $r^2 = x^2 + y^2$, из (1.3) находим

$$J_p = J_x + J_y. \quad (1.5)$$

Центробежным моментом инерции плоской фигуры называется интеграл произведения площади элементарной площадки на её расстояния от координатных осей x , y (рис. 1.1):

$$J_{xy} = \int_F xy dF. \quad (1.6)$$

Величины осевых моментов инерции J_x , J_y и полярного момента инерции J_p плоской фигуры всегда положительны. Напротив, центробежный момент инерции J_{xy} в зависимости от положения осей может быть либо положительным, либо отрицательным, либо равным нулю.

Оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, называются *главными осями инерции*.

Главные оси, проходящие через центр тяжести плоской фигуры, называются *главными центральными осями*.

1.2. Классификация стержней

В сопротивлении материалов под стержнями подразумеваются тела довольно разнообразной и вместе с тем специфической формы. Представим себе некоторую линию, вдоль которой движется плоская фигура так, что её центр тяжести находится на этой линии, а плоскость фигуры нормальна к ней (рис. 1.2). Если размеры фигуры b , h существенно меньше длины линии l , то описанное указанным образом тело называется *стержнем* (или *брусом*); соответствующая отмеченная плоская фигура называется *поперечным сечением стержня*, а отмеченная линия – *осью стержня*.

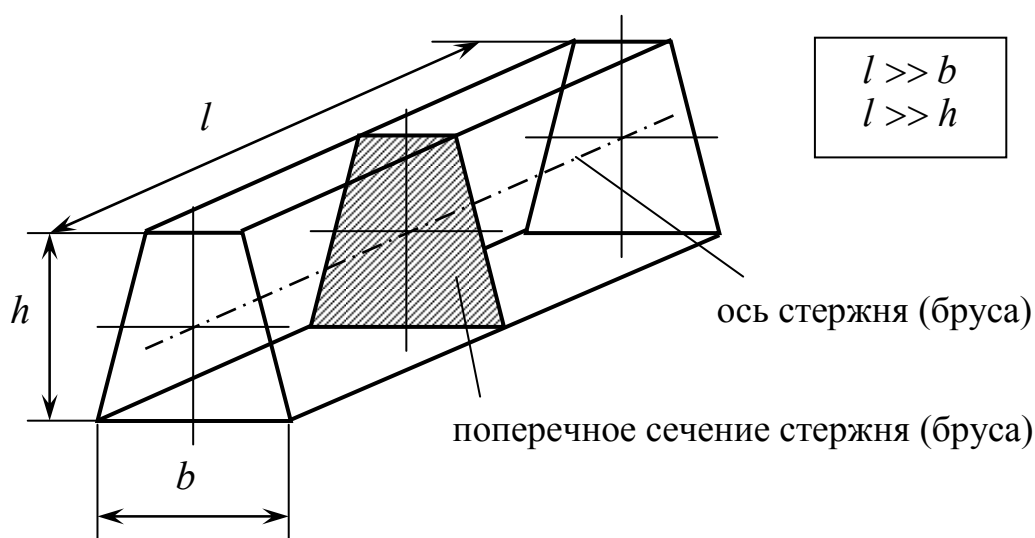


Рис. 1.2. Прямой брус (стержень) постоянного сечения

Если поперечное сечение при движении вдоль оси не изменяется, то тогда имеет место *стержень постоянного сечения*; в противном случае – *стержень переменного сечения*. Если ось стержня – прямая линия, то это *прямой стержень*. Если ось стержня – кривая линия, то его называют *кри-*

вым стержнем. Если поперечное сечение при движении вдоль оси вращается вокруг касательной к оси, то стержень называют *естественно-закрученным*. Примером прямого естественно-закрученного стержня постоянного сечения является рабочая часть сверла. Используются также и другие названия. В частности, стержень, работающий на изгиб, обычно называют *балкой*, а стержень, передающий вращательное движение, – *валом*.

1.3. Классификация сил

В механике понятие силы является первичным (неопределяемым) понятием. В качестве пояснения (но не определения) можно указать, что под силой понимается мера механического взаимодействия материальных тел, которое вызывает их деформацию и ускоренное движение.

По характеру взаимодействия все силы можно разделить на *объёмные (массовые)* и *поверхностные силы*.

Массовые (объёмные) силы обусловлены взаимодействием материальных тел на расстоянии, они приложены к каждой точке тела (распределены по всему его объёму). К массовым силам относятся силы гравитационного и электромагнитного взаимодействия. Обычно из чисто формальных соображений к ним добавляют силы инерции (для сил инерции невозможно указать конкретный материальный источник).

Поверхностные силы приложены к участкам поверхности и являются результатом взаимодействия материальных тел при непосредственном контакте. В зависимости от соотношения площади приложения нагрузки и общей площади поверхности рассматриваемого тела, поверхностные силы подразделяются на *сосредоточенные* и *распределённые*. К первым относятся нагрузки, площадь приложения которых несоизмеримо меньше площади поверхности тела. Таковыми являются, например, сила нормального давления P и сила трения T между колесом тележки и подкрановой балки, а также силы взаимодействия балки с опорами Y_1 , Z_1 , Y_2 , Z_2 (рис. 1.3, а). При составлении расчётной схемы суммарный эффект от действия этих нагрузок представляется в виде сосредоточенных сил и моментов (рис. 1.3, б). Если же площадь приложения нагрузки сопоставима с площадью поверхности тела, то такая нагрузка рассматривается как распределённая. Таковыми являются, например, силы давления, вызываемые весом бетонного блока Q (рис. 1.3, в). Действие этого блока на подкрановую балку заменяется *погонной нагрузкой* q , которая характеризует величину силы давления, приходящейся на единицу длины (рис. 1.3, а).

По отношению к выбранному материальному телу (элементу конструкции) все действующие силы подразделяются на внешние и внутренние силы. Под *внешними силами (нагрузками)* понимаются силы взаимодействия данного материального тела со всеми другими окружающими его телами. Под *внутренними силами* понимаются силы взаимодействия между частями данного тела.

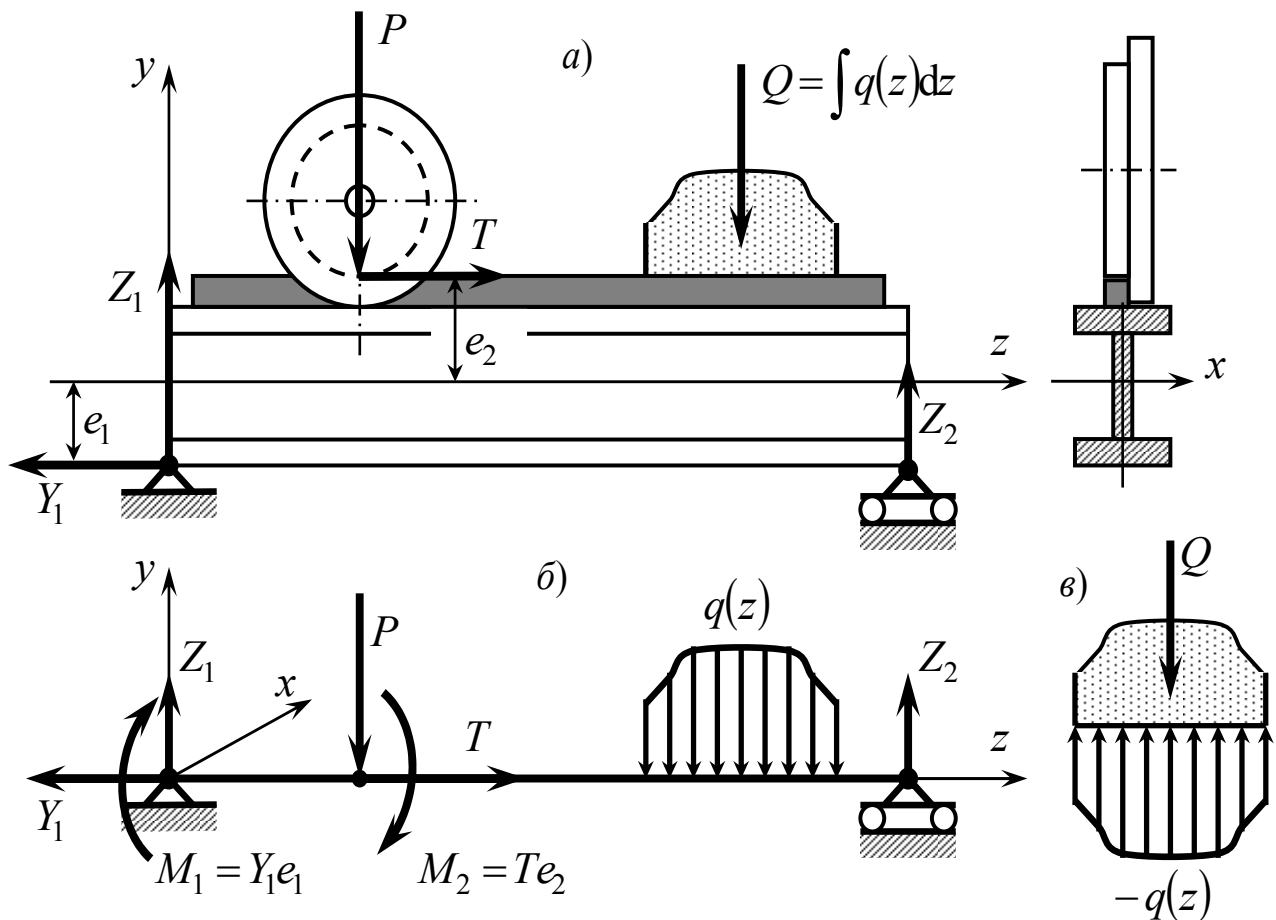


Рис. 1.3. Подкрановая балка и её расчётная схема

Понятно, что деление сил (нагрузок) на внешние и внутренние силы является условным. Одна и та же сила может быть и внутренней и внешней, всё зависит от выбора объекта исследования. К примеру, на бетонный блок, лежащий на подкрановой балке, действует вес Q и распределённая нагрузка q , направленная в противоположную сторону (рис. 1.3, в). По отношению к блоку обе эти нагрузки внешние. Однако для механической системы, включающей в себя блок и балку, погонная нагрузка является внутренней распределённой силой.

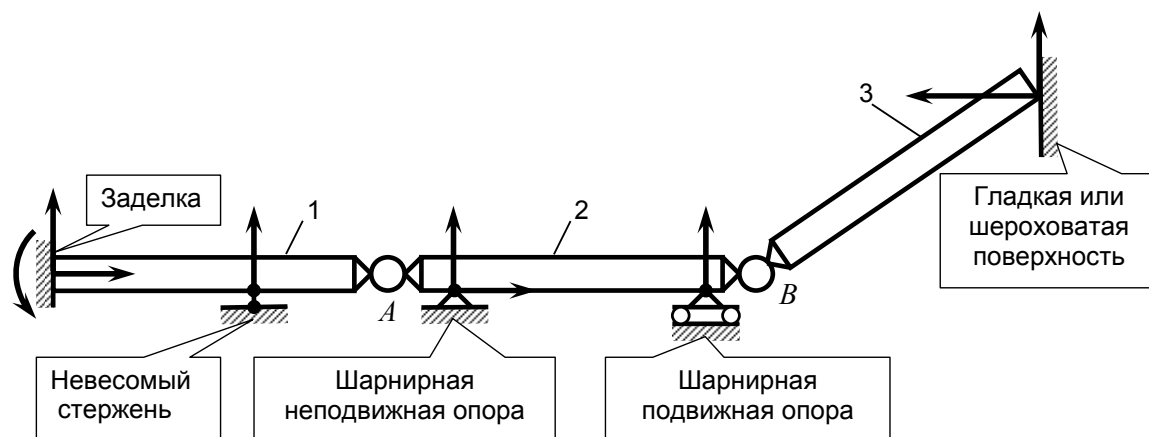


Рис. 1.4. Типовые связи (опоры) и их реакции

Как правило, равновесие конструкций, состоящих из одного или нескольких элементов, обеспечивается наложением тех или иных *связей*. Наиболее распространёнными связями являются *гладкая или шероховатая поверхность (опора)*, *шарнирно-неподвижная опора (шарнир)*, *шарнирно-подвижная опора (опора на катках)*, *невесомый стержень*, *заделка* (рис. 1.4). Для конструкции в целом, состоящей из стержней 1–3, реакции врезанных шарниров A , B (на рис. 1.4 не показаны) являются внутренними силами. Но для каждого из стержней в отдельности эти реакции будут внешними силами, как и реакции остальных связей (опор).

В соответствии с этим внешние силы, действующие на выделенное тело, подразделяются на *активные (заданные) силы* и *реактивные силы*. Реактивные силы возникают в связях, наложенных на тело, их величина определяется действующими на тело активными силами.

1.4. Уравнения равновесия

В теоретической механике доказывается, что для равновесия *свободного абсолютно твёрдого тела*, находящегося под действием некоторой системы внешних сил $\{\mathbf{P}_k^{\text{ext}}\}$, *необходимо и достаточно* выполнения двух векторных уравнений равновесия (рис. 1.5):

$$\sum_k \mathbf{P}_k^{\text{ext}} = 0, \quad \sum_k \mathbf{M}_O(\mathbf{P}_k^{\text{ext}}) = 0, \quad (1.7)$$

где

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{P}_k^{\text{ext}}) = \mathbf{r}_k \times \mathbf{P}_k^{\text{ext}}$$

– момент силы $\mathbf{P}_k^{\text{ext}}$ относительно точки O , \mathbf{r}_k – радиус-вектор приложения указанной силы с началом в точке (центре) O . Если тело несвободно

(из-за наложенных на него связей), то, пользуясь принципом освобождения от связей, последние надо мысленно отбросить и заменить их действие силами реакций, которые будут внешними силами по отношению к освобождённому указанным образом телу.

В проекции на координатные оси два векторных уравнения (1.7) дают шесть скалярных уравнений равновесия:

$$\begin{aligned} \sum X^{\text{ext}} = 0, \quad \sum Y^{\text{ext}} = 0, \quad \sum Z^{\text{ext}} = 0; \\ \sum M_x^{\text{ext}} = 0, \quad \sum M_y^{\text{ext}} = 0, \quad \sum M_z^{\text{ext}} = 0. \end{aligned} \quad (1.8)$$

С их помощью можно найти не более шести неизвестных величин, в большинстве случаев – это реакции внешних (для данного тела) связей.

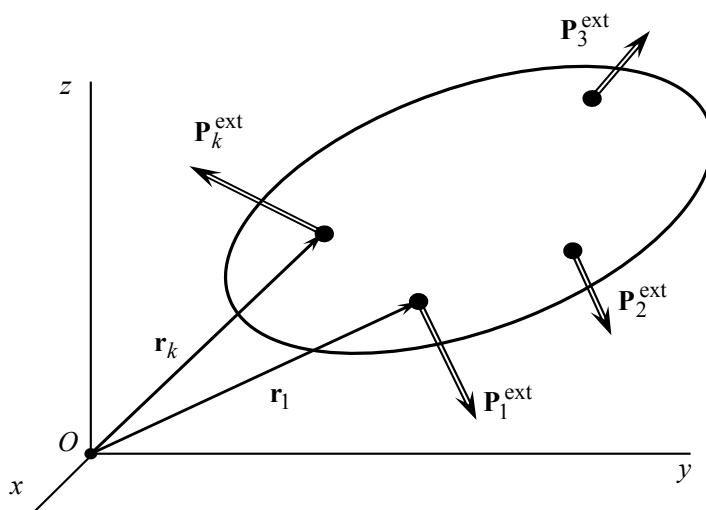


Рис. 1.5. Равновесие материального тела

Применительно к деформируемому твёрдому телу уравнения (1.7), (1.8) являются *необходимыми*, но не *достаточными* условиями равновесия. В качестве наглядного примера можно указать на ножницы (рис. 1.6). Для их равновесия нужно наложить дополнительные связи, например, заварить врезанный шарнир O .

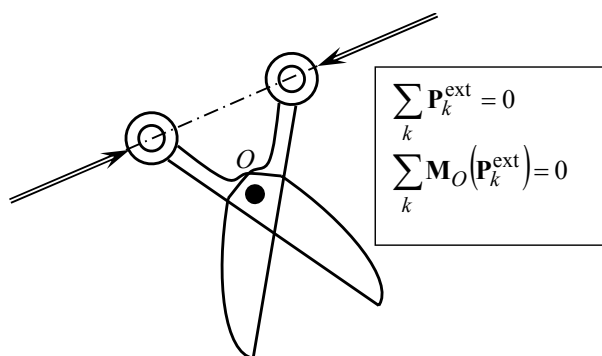


Рис. 1.6. Равновесие деформируемого тела

1.5. Напряжения

Рассечём тело некоторой плоскостью и отбросим одну из частей тела (рис. 1.7, а). Для плоскости сечения выберем то направление орта нормали \mathbf{v} , которое является внешним для оставшейся части тела. Поскольку до рассечения между обеими частями имело место взаимодействие, то в соответствии с принципом освобождения от связей действие отброшенной части на оставшуюся часть следует заменить поверхностными силами, распределёнными по всему сечению. На бесконечно малую площадку dF сечения с центром в точке M будет действовать бесконечно малая сила $d\mathbf{P}_v$. Величина

$$\mathbf{p}_v = \frac{d\mathbf{P}_v}{dF}$$

называется *вектором напряжения* на данной площадке. В общем случае вектор напряжения зависит не только от положения точки M , но и от ориентации площадки, т. е. от направления орта нормали \mathbf{v} , что и отражено в обозначении \mathbf{p}_v в виде нижнего индекса.

Вектор напряжения можно разложить на две составляющие, одна из которых направлена по нормали \mathbf{v} , а другая – перпендикулярно к ней (рис. 1.7, б). Составляющая σ_v , направленная по нормали \mathbf{v} , называется *нормальным напряжением* на площадке dF . Составляющая τ_v , лежащая в плоскости площадки dF , называется *касательным напряжением* на этой площадке. Очевидно, что

$$p_v^2 = \sigma_v^2 + \tau_v^2.$$

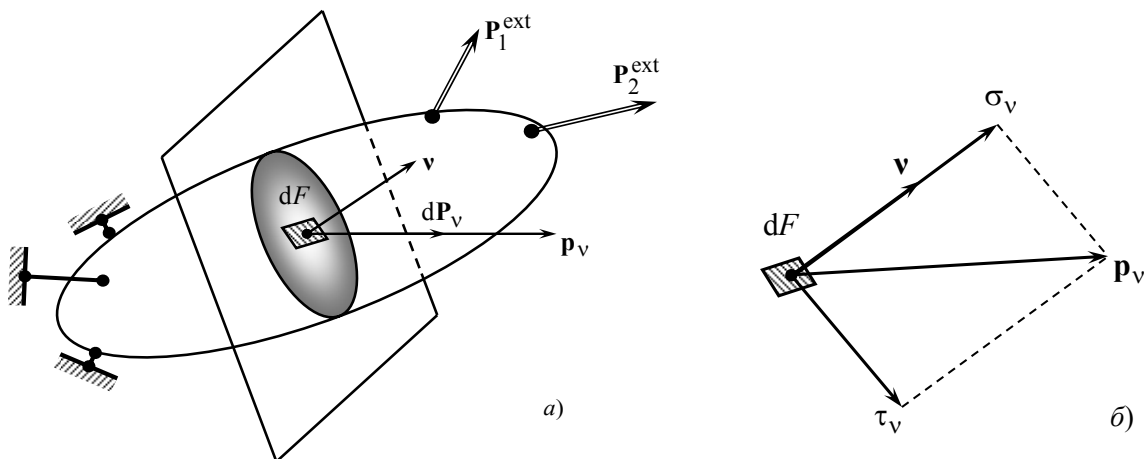


Рис. 1.7. Вектор напряжения (а), нормальное и касательное напряжения (б)

Так как при сечении тела была взята внешняя нормаль \mathbf{v} , растягивающие нормальные напряжения являются положительными, а сжимающие напряжения – отрицательными. Можно было бы поступить и наоборот, выбрав при сечении тела внутреннюю нормаль. Тогда сжимающие напряжения были бы положительными, а растягивающие напряжения – отрицательными. Оба случая используются на практике.

1.6. Интегральные характеристики напряжений (внутренние усилия)

Рассмотрим произвольное плоское сечение нагруженного стержня (рис. 1.8). Выберем декартову систему координат x, y, z с началом в центре тяжести сечения C . Ось z направим по нормали сечения \mathbf{v} .

На каждой элементарной площадке dF сечения будет действовать вектор напряжения $\mathbf{p}_v \equiv \mathbf{p}_z$ (нормаль \mathbf{v} направлена по оси z). Полное напряжение \mathbf{p}_z разложим на нормальное напряжение σ_z и касательное напряжение τ_z . В плоскости площадки dF направление касательного напряжения τ_z в общем случае произвольно. Чтобы обойти эту неопределённость, разложим полное касательное напряжение τ_z по координатным осям x и y , обозначив составляющие через τ_{xz} , τ_{yz} соответственно (рис. 1.8).

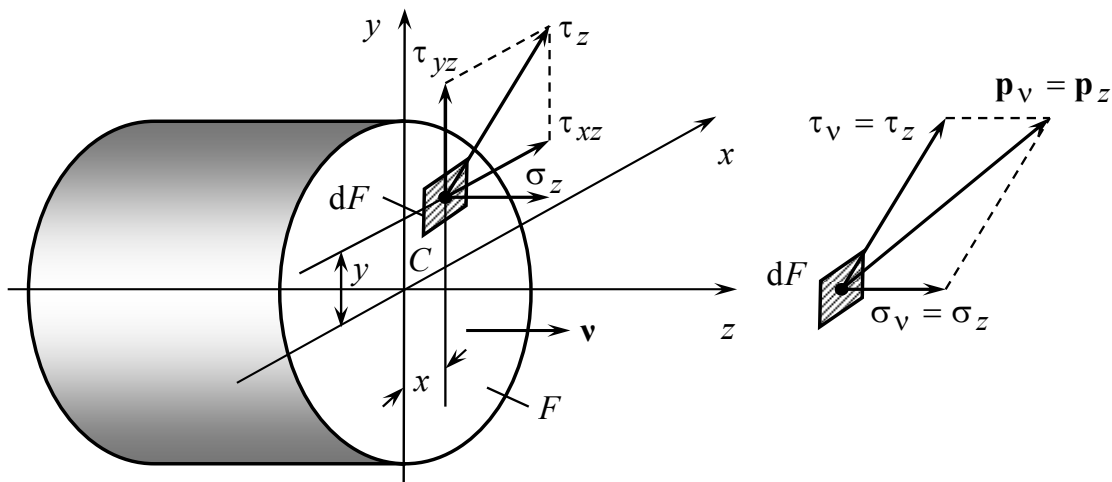


Рис. 1.8. К определению интегральных характеристик напряжений

Компоненты главного вектора \mathbf{P} и главного момента \mathbf{M} распределённых по сечению напряжений относительно центра тяжести плоского сечения C называются или *интегральными характеристиками напряже-*

ний, или внутренними силовыми факторами, или внутренними усилиями в сечении. Они равны

$$\begin{aligned} P_x \equiv Q_x &= \int_F \tau_{xz} dF, & P_y \equiv Q_y &= \int_F \tau_{yz} dF, & P_z \equiv N &= \int_F \sigma_z dF, \\ M_x &= \int_F \sigma_z y dF, & M_y &= - \int_F \sigma_z x dF, & M_z &= \int_F (\tau_{yz} x - \tau_{xz} y) dF. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Каждая из компонент (1.9) имеет характерное название: N – продольная (нормальная) сила; Q_x, Q_y – поперечные (перерезывающие) силы; M_x, M_y – изгибающие моменты; M_z – крутящий момент.

1.7. Метод определения внутренних усилий

Рассмотрим тело, имеющее форму стержня и находящееся в покое под действием некоторой системы внешних сил. В данную систему сил в общем случае могут входить как активные (заданные) силы, так и пассивные силы (реакции внешних связей). Если число компонент реакций внешних связей не превышает числа независимых уравнений равновесия, то задача по отысканию внутренних усилий оказывается *статически определимой задачей*. В противном случае задача является *статически неопределимой*.

Суть метода по отысканию внутренних усилий, называемого *методом сечений*, можно пояснить на примере прямого стержня S (рис. 1.9). Мысленно рассечём стержень S на две части S' , S'' произвольной плоскостью. Выберем декартову систему координат x, y, z с началом в центре тяжести сечения C . Оси x, y расположим в плоскости сечения, а ось z направим по внешней нормали \mathbf{v} сечения одной из частей, например части S' (рис. 1.9, а). В согласии с выбранным направлением оси z и для удобства дальнейшего изложения условно будем называть часть S' *левой частью стержня*, а часть S'' – *правой частью стержня*.

Поскольку до рассечения обе части взаимодействовали друг с другом, действие одной части на другую следует заменить поверхностными силами, распределёнными в плоском сечении по некоторому закону (рис. 1.9, б). Согласно третьему закону Ньютона (закону действия и противодействия) в каждой точке сечения поверхностные силы, действующие на левую часть S' со стороны правой части S'' , равны и противоположны по направлению поверхностным силам, действующим на правую часть S'' со стороны левой части S' . Эти поверхностные силы являются для стержня S внутренними силами, а для каждой из частей S', S'' – внешними си-

лами. Так как $\mathbf{p}_v'' = -\mathbf{p}_v'$, нормальные и касательные напряжения в сечениях левой и правой частей равны по величине и противоположно направлены. По отношению к единой (для обеих частей стержня) декартовой системе координат x, y, z это означает, что:

$$\sigma_z'' = -\sigma_z', \quad \tau_{xz}'' = -\tau_{xz}', \quad \tau_{yz}'' = -\tau_{yz}'.$$

Следовательно, интегральные характеристики напряжений (1.9), соответствующие каждой из частей, также имеют противоположные знаки:

$$\begin{aligned} Q_x'' &= -Q_x', & Q_y'' &= -Q_y', & N'' &= -N', \\ M_x'' &= -M_x', & M_y'' &= -M_y', & M_z'' &= -M_z'. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Иными словами, в сечениях обеих частей стержня соответствующие интегральные характеристики напряжений равны по величине и противоположны по направлению (рис. 1.9, в).

После рассечения и приложения поверхностных сил обе части стержня становятся свободными телами, находящимися в состоянии покоя. Это позволяет составить две системы уравнений равновесия для каждой из частей стержня в отдельности. Для части S' имеем

$$\begin{aligned} \sum_{S'} X^{\text{ext}} + Q_x' &= 0, & \sum_{S'} Y^{\text{ext}} + Q_y' &= 0, & \sum_{S'} Z^{\text{ext}} + N' &= 0, \\ \sum_{S'} M_x^{\text{ext}} + M_x' &= 0, & \sum_{S'} M_y^{\text{ext}} + M_y' &= 0, & \sum_{S'} M_z^{\text{ext}} + M_z' &= 0. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Соответственно для части S''

$$\begin{aligned} \sum_{S''} X^{\text{ext}} + Q_x'' &= 0, & \sum_{S''} Y^{\text{ext}} + Q_y'' &= 0, & \sum_{S''} Z^{\text{ext}} + N'' &= 0, \\ \sum_{S''} M_x^{\text{ext}} + M_x'' &= 0, & \sum_{S''} M_y^{\text{ext}} + M_y'' &= 0, & \sum_{S''} M_z^{\text{ext}} + M_z'' &= 0. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Понятно, что обе части стержня – левая часть S' и правая часть S'' – абсолютно равноправны. Поэтому в качестве внутренних силовых факторов в данном сечении стержня S можно взять как величины $Q_x', Q_y', N', M_x', M_y', M_z'$, так и величины $Q_x'', Q_y'', N'', M_x'', M_y'', M_z''$. Это вопрос простого соглашения. Посему за *внутренние силовые факторы в данном сечении стержня S принимаем значения интегральных характеристик напряжений для той части стержня, которая расположена слева от этого сечения (т. е. для части S')*:

$$\begin{aligned} Q_x &\equiv Q_x', & Q_y &\equiv Q_y', & N &\equiv N', \\ M_x &\equiv M_x', & M_y &\equiv M_y', & M_z &\equiv M_z'. \end{aligned} \quad (1.13)$$

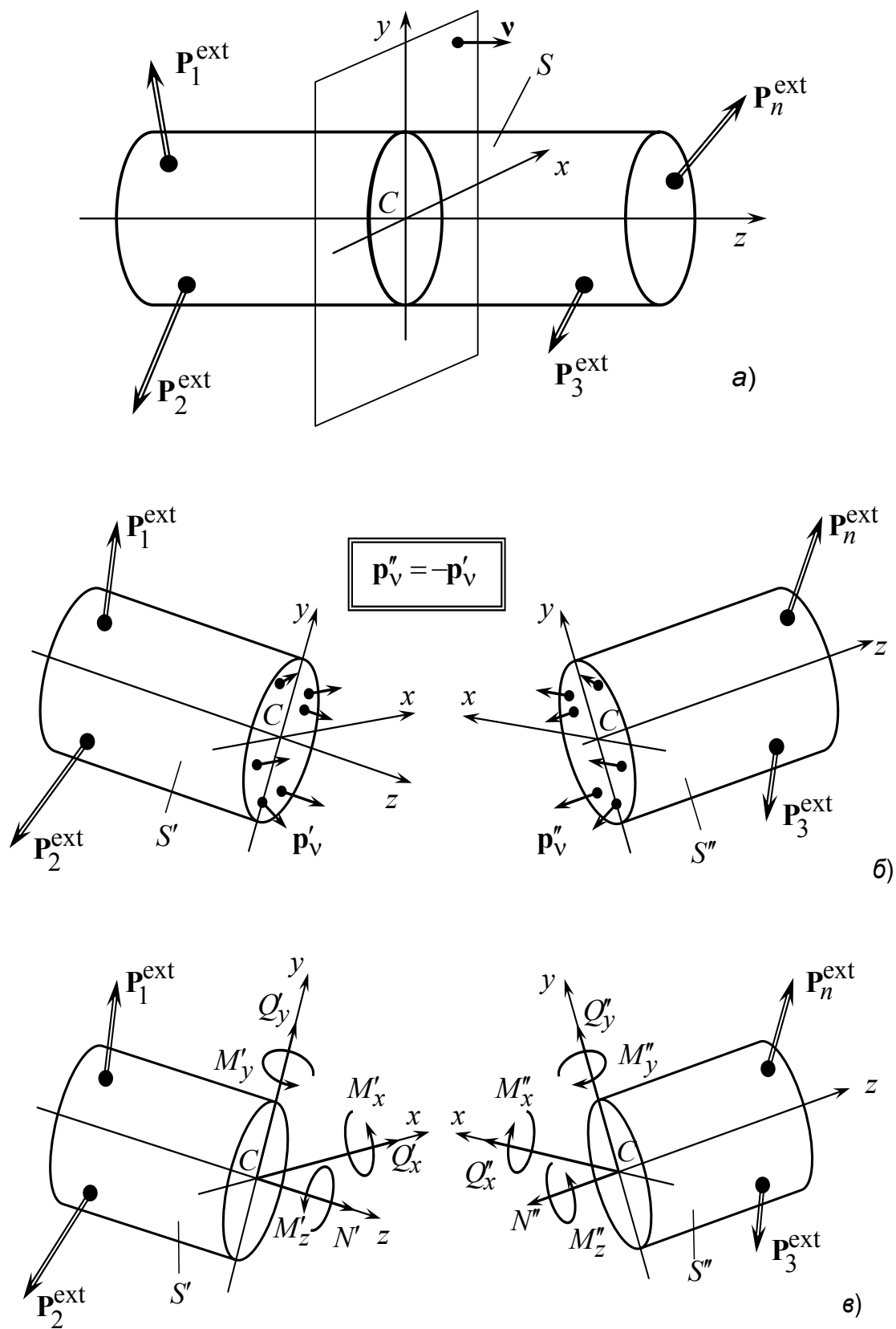


Рис. 1.9. Определение внутренних усилий методом сечений

Благодаря равенствам (1.10), (1.13) из уравнений (1.11), (1.12) получаем две группы расчётных формул:

$$\boxed{\begin{aligned} Q_x &= -\sum_{S'} X^{\text{ext}}, & Q_y &= -\sum_{S'} Y^{\text{ext}}, & N &= -\sum_{S'} Z^{\text{ext}}, \\ M_x &= -\sum_{S'} M_x^{\text{ext}}, & M_y &= -\sum_{S'} M_y^{\text{ext}}, & M_z &= -\sum_{S'} M_z^{\text{ext}}, \end{aligned}} \quad (1.14)$$

$$\boxed{\begin{aligned} Q_x &= \sum_{S''} X^{\text{ext}}, & Q_y &= \sum_{S''} Y^{\text{ext}}, & N &= \sum_{S''} Z^{\text{ext}}, \\ M_x &= \sum_{S''} M_x^{\text{ext}}, & M_y &= \sum_{S''} M_y^{\text{ext}}, & M_z &= \sum_{S''} M_z^{\text{ext}}. \end{aligned}} \quad (1.15)$$

По первой группе расчётных формул (1.14) *внутренние силовые факторы в произвольном сечении стержня равны взятым со знаком минус суммам соответствующих проекций и моментов всех внешних сил, приложенных к левой (от сечения) части стержня.*

По второй группе расчётных формул (1.15) *внутренние силовые факторы в произвольном сечении стержня равны взятым со знаком плюс суммам соответствующих проекций и моментов всех внешних сил, приложенных к правой (от сечения) части стержня.*

Обе группы расчётных формул эквивалентны (из одной вытекает другая). Поэтому вопрос о том, какой из групп пользоваться, решается исходя из соображений простоты и удобства рассмотрения конкретной задачи. В частности, если заранее из уравнений равновесия для стержня в целом определены реакции всех внешних связей (статически определимая задача), то тогда одних уравнений (1.14) достаточно, чтобы найти значения всех внутренних усилий. При этом уравнения (1.15) можно использовать для проверки правильности полученного результата. Конечно, можно поступить и наоборот: найти по уравнениям (1.15) внутренние усилия и проверить результат подстановкой в уравнения (1.14).

1.8. Закон Гука при растяжении

По определению относительная деформация стержня равна

$$\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0},$$

где l_0 , l – первоначальная и текущая длина стержня соответственно.

Если удлинение стержня $\Delta l = l - l_0$ вызвано действием растягивающих нормальных напряжений σ , то относительная деформация

$$\varepsilon_{\sigma} = \Delta l_{\sigma} / l_0$$

называется *силовой деформацией* (рис. 1.10, а). Если удлинение стержня вызвано изменением температуры $\vartheta = \theta - \theta_0$, то деформация

$$\varepsilon_{\theta} = \Delta l_{\theta} / l_0$$

называется *температурной деформацией* (рис. 1.10, б).

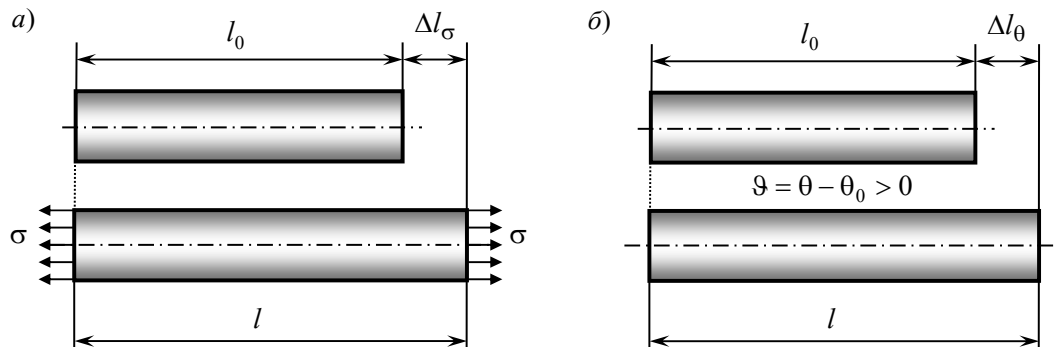


Рис. 1.10. Силовая (а) и температурная (б) деформации

В общем случае удлинение стержня происходит за счёт действия приложенных нагрузок и изменения температуры. Поэтому

$$\Delta l = \Delta l_{\theta} + \Delta l_{\sigma}$$

и

$$\varepsilon = \varepsilon_{\theta} + \varepsilon_{\sigma}. \quad (1.16)$$

Как показывает опыт, силовая деформация стержня (рис. 1.10, а) пропорциональна действующим напряжениям σ , а температурная деформация стержня (рис. 1.10, б) пропорциональна приращению температуры $\vartheta = \theta - \theta_0$:

$$\varepsilon_{\sigma} = \frac{\sigma}{E}, \quad \varepsilon_{\theta} = \alpha \vartheta. \quad (1.17)$$

Постоянная E называется *модулем Юнга* (*модулем растяжения* или *модулем упругости первого рода*), постоянная α – *температурным коэффициентом линейного расширения*. Для углеродистых сталей при комнатной температуре модуль Юнга и коэффициент линейного расширения имеют следующий порядок величины: $E \approx 2 \cdot 10^{11}$ Па, $\alpha \approx 12 \cdot 10^{-6}$ К⁻¹.

Подставляя (1.17) в (1.16), имеем

$$\varepsilon = \alpha \vartheta + \frac{\sigma}{E} \quad (1.18)$$

или

$$\sigma = E\varepsilon - \alpha E\vartheta. \quad (1.19)$$

Равенство (1.19), как и эквивалентное ему равенство (1.18), носит название *закона Гука при растяжении*.

К примеру, если оба конца стержня закреплены, то его длина неизменна, а деформация $\varepsilon = 0$. Тогда по формуле (1.16) при нагревании (охлаждении) стержня силовая деформация равна и противоположна по знаку тепловой деформации:

$$\varepsilon_{\sigma} = -\varepsilon_{\vartheta}.$$

Согласно (1.19) возникающие при этом напряжения равны

$$\sigma = -\alpha E\vartheta.$$

Следовательно, когда приращение температуры $\vartheta > 0$, в стержне действуют сжимающие напряжения: $\sigma < 0$. Напротив, в случае $\vartheta < 0$ в стержне возникают растягивающие напряжения: $\sigma > 0$.

1.9. Закон Гука при сдвиге

Рассмотрим куб со стороной a , на верхней грани которого действуют равномерно распределённые касательные напряжения интенсивностью τ (рис. 1.11, a). Для того чтобы главный вектор системы внешних сил был равен нулю, к нижней грани должны быть приложены противоположно направленные касательные напряжения той же интенсивности. С другой стороны, оба усилия, действующие на верхней и нижней гранях, представляют собой пару сил с моментом $M = (\tau a^2)a$. Для уравнивания к левой и правой граням должны быть приложены равномерно распределённые касательные напряжения интенсивностью τ' , которые создают пару сил с противоположным по направлению моментом $M' = (\tau' a^2)a$. Из условия равновесия $M = M'$ получаем

$$\tau' = \tau. \quad (1.20)$$

Соотношение (1.20) известно под названием *закона парности касательных напряжений*. Более точная его формулировка имеет следующий вид: *составляющие касательного напряжения на двух взаимно перпендикулярных площадках равны между собой и перпендикулярны линии пересечения этих площадок*.

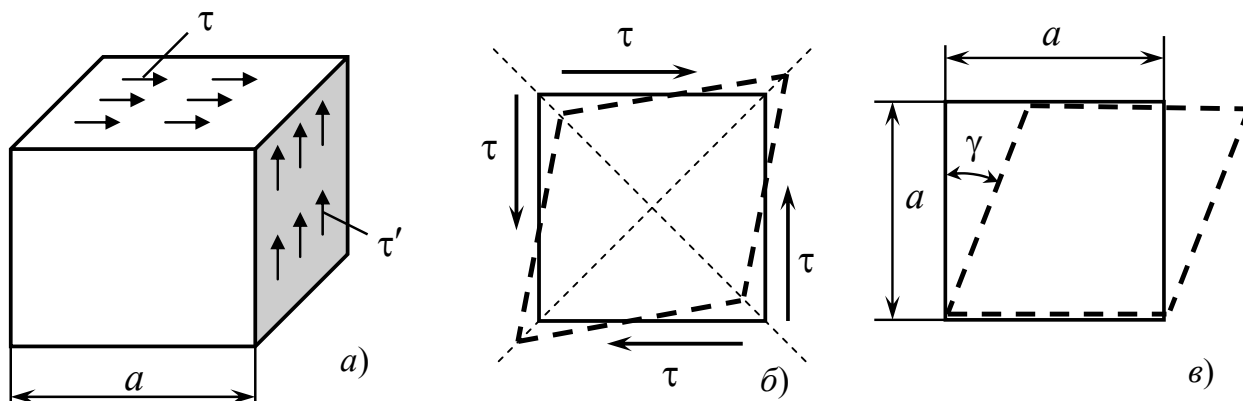


Рис. 1.11. Напряжённо-деформированное состояние при чистом сдвиге

Под действием касательных напряжений грани параллелепипеда, свободные от напряжений и имевшие первоначально форму квадрата, превращаются в ромб (рис. 1.11, б). Иными словами, рёбра не меняют своей длины, а соответствующие прямые углы искажаются. Поэтому деформация чистого сдвига заключается в изменении первоначально прямых углов.

Грань, находящуюся в условиях чистого сдвига, удобно повернуть так, чтобы одна из её сторон совпала со стороной квадрата, представляющего начальное недеформированное состояние этой грани. Благодаря этому шагу можно добиться большей наглядности (рис. 1.11, в). Угол γ называется *углом сдвига*.

Как учит опыт, в пределах упругости связь между углом сдвига γ и касательным напряжением τ носит линейный характер:

$$\gamma = \frac{\tau}{G} \Leftrightarrow \tau = G\gamma. \quad (1.21)$$

Постоянная G , имеющая размерность напряжения, называется *модулем сдвига (модулем упругости второго рода)*. Для углеродистой стали

$$G \approx 0.4 E.$$

У изотропных тел изменение температуры не приводит к скашиванию граней куба, поэтому деформация сдвига носит чисто силовой характер.

1.10. Гипотеза плоских сечений

В названии *техническая теория стержней* ударение на термин «техническая» подчёркивает тот факт, что в сопротивлении материалов задачи механики деформируемого твёрдого тела решаются приближёнными методами, основанными на ряде упрощающих предположений (гипотез) о характере напряжённо-деформированного состояния стержней. Благодаря этим гипотезам существенно упрощается вывод расчётных формул, позволяющих судить о прочности, жёсткости и устойчивости разнообразных конструкций и их элементов с приемлемой для практики точностью.

Одной из фундаментальных гипотез, принятием которой сопротивление материалов отличается от теорий упругости и пластичности, является гипотеза *плоских сечений*, или *гипотеза Бернулли* (по имени учёного Якова Бернулли, впервые её высказавшего в 1705 г.).

Гипотеза плоских сечений. Плоские сечения, нормальные к оси стержня до деформации, остаются плоскими и нормальными к оси стержня после деформации.

Обычно данная традиционная формулировка дополняется (явно или неявно) следующим важным уточнением: *в процессе деформирования расстояние между точками поперечного сечения не меняется*¹.

С логической точки зрения, принятие гипотезы плоских сечений означает наложение на материал стержня внутренних связей, обеспечивающих абсолютную твёрдость поперечных сечений и неизменность угла между деформируемой осью стержня и его поперечными сечениями. Поэтому напряжения от действия сил реакций указанных внутренних связей накладываются на напряжения от деформации материала стержня. Определить их можно только из уравнений равновесия (движения) тех или иных элементарных объёмов стержня.

Таким образом, в общем случае деформация прямого стержня сопровождается искривлением его оси, называемой *изогнутой* или *упругой осью*. При этом согласно гипотезе Бернулли поперечные сечения стержня перемещаются как абсолютно твёрдые плоские фигуры, которые совершают поступательное перемещение u_C вместе со своим центром тяжести и поворачиваются на угол φ вокруг некоторой оси, проходящей через этот центр (рис. 1.12). Здесь C_0 – некоторая фиксированная точка оси недеформированного стержня, взятая за начало координат O ; r_C , r'_C – ради-

¹ Напомним, что *поперечным сечением* называется плоское сечение, нормальное к оси стержня (бруса).

ус-векторы центров тяжести C , C' произвольного поперечного сечения в недеформированном и деформированном состоянии стержня соответственно; z – координата точки C , z' – криволинейная координата точки C' ; \mathbf{i} , \mathbf{j} – орты осей x и y , жестко связанных с сечением. При деформировании стержня оси x и y занимают новое положение x' и y' с направляющими ортами \mathbf{i}' , \mathbf{j}' . Наконец, \mathbf{k} и \mathbf{k}' – орты касательных к оси (исходной и изогнутой) стержня, совпадающие с ортами нормали \mathbf{v} , \mathbf{v}' поперечного сечения до и после деформирования:

$$\mathbf{v} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{v}' = \mathbf{k}'.$$

Забегая вперёд, можно отметить, что в приближении малых перемещений, когда угол поворота φ достаточно мал, из формулы Эйлера вытекают приближённые равенства

$$\mathbf{i}' = \mathbf{i} + \varphi \times \mathbf{i}, \quad \mathbf{j}' = \mathbf{j} + \varphi \times \mathbf{j}, \quad \mathbf{k}' = \mathbf{k} + \varphi \times \mathbf{k}. \quad (1.22)$$

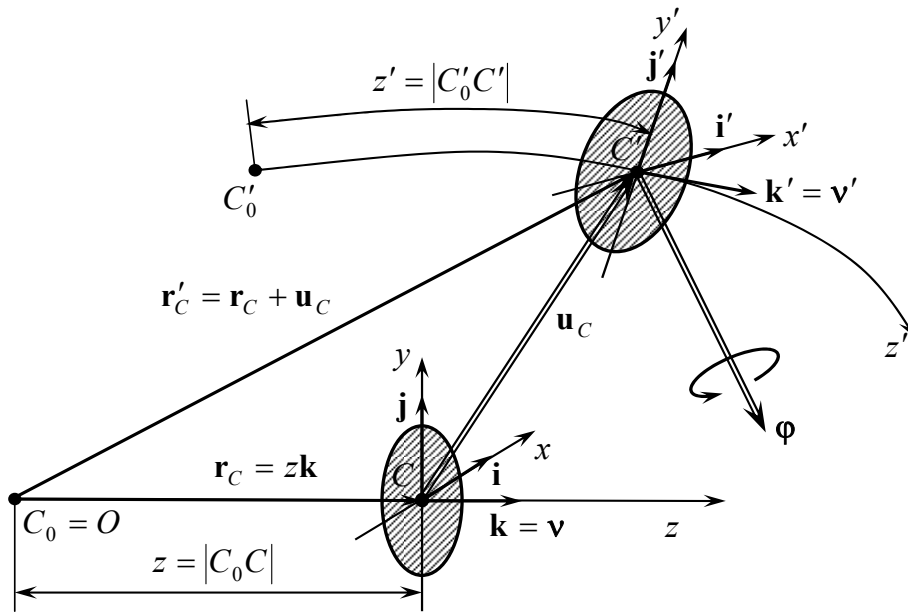


Рис. 1.12. Общий случай деформации стержня

Замечание. Формула Эйлера $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ описывает распределение скоростей в абсолютно твёрдом теле при его вращении с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ относительно неподвижной точки (например, центра тяжести тела). За малый промежуток времени Δt тело поворачивается на малый угол $\varphi = \boldsymbol{\omega} \Delta t$, а радиус-вектор \mathbf{r} произвольной точки тела получает малое приращение $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}' - \mathbf{r} = \mathbf{v} \Delta t$. Поэтому $\mathbf{r}' - \mathbf{r} = \varphi \times \mathbf{r}$. Отсюда, полагая поочередно $\mathbf{r} = \mathbf{i}$, $\mathbf{r} = \mathbf{j}$, $\mathbf{r} = \mathbf{k}$, приходим к выражениям (1.22).

2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСТЯЖЕНИЯ, КРУЧЕНИЯ И ИЗГИБА ПРЯМЫХ СТЕРЖНЕЙ С УЧЁТОМ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ЭФФЕКТОВ (МАЛЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ)

Полная математическая модель деформирования твёрдого тела включает в себя: 1) систему статических (динамических) уравнений, описывающих равновесие (движение) тела под действием приложенных нагрузок и реакций наложенных связей; 2) систему геометрических уравнений, выражающих деформации через перемещения точек тела; 3) систему физических уравнений, устанавливающих связь между деформациями и возникающими напряжениями.

В дальнейшем, излагая техническую теорию стержней, будем считать все тела линейно упругими, материально однородными и изотропными.

2.1. Статические (динамические) уравнения

Чтобы установить дифференциальные уравнения равновесия, рассмотрим бесконечно малый элемент стержня (рис. 2.1).

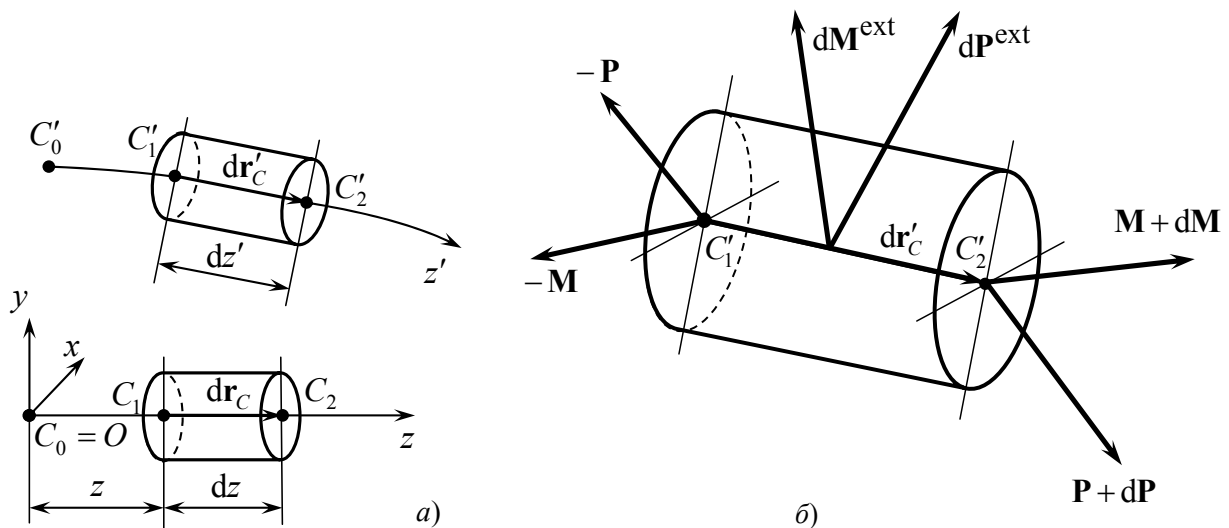


Рис. 2.1. Равновесие бесконечно малого элемента стержня

До нагружения стержень имеет длину dz , после нагружения – длину dz' (рис. 2.1, а). Величина

$$e = \frac{dz' - dz}{dz}$$

определяет относительное удлинение элемента оси стержня. Отсюда

$$\frac{dz'}{dz} = 1 + e. \quad (2.1)$$

С другой стороны, для элемента оси стержня после деформации имеем

$$dr'_C = dz'k', \quad (2.2)$$

где k' – орт касательной к изогнутой оси стержня (рис. 1.12).

В соответствии с правилом о знаках (разд. 1.6) в сечении элемента стержня dz' с центром тяжести C'_1 действует сила P и момент M , взятые с обратным знаком (рис. 2.1, б), поскольку для стержня в целом данное сечение является «правым» сечением. В сечении элемента стержня dz' с центром тяжести C'_2 , являющимся «левым» сечением для стержня в целом, действует сила $P + dP$ и момент $M + dM$ (рис. 2.1, б). Здесь dP , dM – бесконечно малые приращения, вызванные действием главного вектора dP^{ext} и главного момента dM^{ext} внешних сил, приведённых к срединной точке оси элемента стержня (рис. 2.1, б). При равновесии сумма всех сил и сумма моментов всех сил относительно любой точки, например точки C'_1 , должна быть равна нулю:

$$\begin{cases} (P + dP) + dP^{ext} + (-P) = 0, \\ (M + dM) + dM^{ext} + (-M) + dr'_C \times (P + dP) + \frac{1}{2} dr'_C \times dP^{ext} = 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Отбросив слагаемые второго порядка малости, разделим (2.3) на dz' и примем во внимание (2.2). В результате получим

$$\begin{cases} \frac{dP}{dz'} = -q', \\ \frac{dM}{dz'} = -m' + P \times k'. \end{cases} \quad (2.4)$$

Здесь

$$q' = \frac{dP^{ext}}{dz'} \quad (2.5)$$

– внешняя сила, приходящаяся на единицу длины деформированного стержня,

$$m' = \frac{dM^{ext}}{dz'} \quad (2.6)$$

– момент внешних сил на единицу длины деформированного стержня.

Если разделить (2.3) на dz и проделать аналогичные выкладки со ссылкой на (2.1), будем иметь

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{P}}{dz} = -\mathbf{q}, \\ \frac{d\mathbf{M}}{dz} = -\mathbf{m} + (1+e)\mathbf{P} \times \mathbf{k}'. \end{cases} \quad (2.7)$$

Здесь уже

$$\mathbf{q} = \frac{d\mathbf{P}^{\text{ext}}}{dz} \quad (2.8)$$

– внешняя сила на единицу длины недеформированного стержня,

$$\mathbf{m} = \frac{d\mathbf{M}^{\text{ext}}}{dz} \quad (2.9)$$

– момент внешних сил на единицу длины недеформированного стержня.

Величины (2.5), (2.6) и (2.8), (2.9) связаны между собой равенствами

$$\mathbf{q} = (1+e)\mathbf{q}', \quad \mathbf{m} = (1+e)\mathbf{m}', \quad (2.10)$$

ибо

$$d\mathbf{P}^{\text{ext}} = \mathbf{q}'dz' = \mathbf{q}dz, \quad d\mathbf{M}^{\text{ext}} = \mathbf{m}'dz' = \mathbf{m}dz.$$

В случае малых деформаций в (2.7), (2.10) можно пренебречь величиной e по сравнению с единицей, так как при упругом деформировании $|e| \ll 1$. Для малых перемещений приближённо $\mathbf{k}' = \mathbf{k}$. С учётом всех этих обстоятельств обе формы уравнений равновесия (2.4), (2.7) принимают одинаковый вид

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{P}}{dz} = -\mathbf{q}, \\ \frac{d\mathbf{M}}{dz} = -\mathbf{m} + \mathbf{P} \times \mathbf{k}. \end{cases} \quad (2.11)$$

Причём

$$\mathbf{q} \cong \mathbf{q}', \quad \mathbf{m} \cong \mathbf{m}'. \quad (2.12)$$

В приближении (2.12) величину \mathbf{q} называют *распределённой (погонной) силовой нагрузкой*, а величину \mathbf{m} – *распределённой (погонной) моментной нагрузкой* без указания на то, к какому состоянию стержня (деформированному или недеформированному) отнесены данные величины.

Чтобы из уравнений статики (2.11) получить уравнения динамики, достаточно воспользоваться принципом Даламбера и добавить к распределённым внешним нагрузкам \mathbf{q} , \mathbf{m} распределённые инерционные нагрузки $\mathbf{q}_{\text{ин}}$, $\mathbf{m}_{\text{ин}}$:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{P}}{dz} = -(\mathbf{q} + \mathbf{q}_{\text{ин}}), \\ \frac{d\mathbf{M}}{dz} = -(\mathbf{m} + \mathbf{m}_{\text{ин}}) + \mathbf{P} \times \mathbf{k}. \end{cases} \quad (2.13)$$

Распределённая инерционная нагрузка $\mathbf{q}_{\text{ин}}$ – это даламберова сила инерции, приходящаяся на единицу длины стержня. Она может быть определена из цепочки равенств

$$d\mathbf{P}_{\text{ин}} = \mathbf{q}_{\text{ин}} dz = -dm\ddot{\mathbf{u}}_C = -\rho_0 F dz \ddot{\mathbf{u}}_C,$$

где ρ_0 – плотность материала стержня в недеформированном состоянии, F – площадь поперечного сечения, $\ddot{\mathbf{u}}_C$ – ускорение центра масс элемента стержня длиной dz (см. рис. 1.12, рис. 2.1). Значит,

$$\mathbf{q}_{\text{ин}} = -\rho_0 F \ddot{\mathbf{u}}_C = -\rho_0 F (\ddot{u}_x \mathbf{i} + \ddot{u}_y \mathbf{j} + \ddot{u}_z \mathbf{k}), \quad (2.14)$$

где u_x , u_y , u_z – компоненты вектора перемещения \mathbf{u}_C центра тяжести поперечного сечения стержня (рис. 1.12).

Распределённая инерционная нагрузка $\mathbf{m}_{\text{ин}}$ – это момент сил инерции, приходящийся на единицу длины стержня:

$$d\mathbf{M}_{\text{ин}} = \mathbf{m}_{\text{ин}} dz. \quad (2.15)$$

По динамическим уравнениям Эйлера, известным из курса теоретической механики, у абсолютно твёрдого тонкого диска с поперечным сечением F и длиной dz' тела момент сил инерции $d\mathbf{M}_{\text{ин}}$ в проекциях на его главные центральные оси x' , y' , z' определяется выражениями

$$\begin{cases} dM_{x'} = -[dI_{x'} \dot{\omega}_{x'} + (dI_{z'} - dI_{y'}) \omega_{z'} \omega_{y'}], \\ dM_{y'} = -[dI_{y'} \dot{\omega}_{y'} + (dI_{x'} - dI_{z'}) \omega_{x'} \omega_{z'}], \\ dM_{z'} = -[dI_{z'} \dot{\omega}_{z'} + (dI_{y'} - dI_{x'}) \omega_{y'} \omega_{x'}], \end{cases}$$

где $\omega_{x'}$, $\omega_{y'}$, $\omega_{z'}$ – компоненты вектора угловой скорости. Главные моменты инерции тонкого диска $dI_{x'}$, $dI_{y'}$, $dI_{z'}$ связаны с осевыми момен-

тами инерции его поперечного сечения $J_{x'}$, $J_{y'}$ и полярным моментом инерции сечения $J_{p'} = J_{x'} + J_{y'}$ следующими равенствами:

$$\begin{aligned} dI_{x'} &= \int_F h_{x'}^2 dm \cong \rho_0 dz' \int_F y'^2 dF = \rho_0 dz' J_{x'}, \\ dI_{y'} &= \int_F h_{y'}^2 dm \cong \rho_0 dz' \int_F x'^2 dF = \rho_0 dz' J_{y'}, \\ dI_{z'} &= \int_F h_{z'}^2 dm \cong \rho_0 dz' \int_F (x'^2 + y'^2) dF = \rho_0 dz' J_{p'}. \end{aligned}$$

Применим данные соотношения к элементу стержня бесконечно малой длины $dz' \cong dz$ (рис. 2.1) и учтём, что (рис. 1.12)

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\phi}} = \dot{\phi}_x \mathbf{i} + \dot{\phi}_y \mathbf{j} + \dot{\phi}_z \mathbf{k},$$

где ϕ_x , ϕ_y , ϕ_z – компоненты вектора поворота $\boldsymbol{\phi}$ поперечного сечения вокруг его центра тяжести (рис. 1.12). Благодаря условию малости перемещений приближенно будем иметь

$$\begin{aligned} d\mathbf{M}_{\text{ин}} &= dM_{x'} \mathbf{i}' + dM_{y'} \mathbf{j}' + dM_{z'} \mathbf{k}' \cong dM_{x'} \mathbf{i} + dM_{y'} \mathbf{j} + dM_{z'} \mathbf{k} = \\ &= -\{ [dI_{x'} \dot{\omega}_{x'} + (dI_{z'} - dI_{y'}) \omega_{z'} \omega_{y'}] \mathbf{i} + [dI_{y'} \dot{\omega}_{y'} + (dI_{x'} - dI_{z'}) \omega_{x'} \omega_{z'}] \mathbf{j} + \\ &+ [dI_{z'} \dot{\omega}_{z'} + (dI_{y'} - dI_{x'}) \omega_{y'} \omega_{x'}] \mathbf{k} \} \cong -\{ [dI_{x'} \dot{\phi}_x + (dI_{z'} - dI_{y'}) \dot{\phi}_z \phi_y] \mathbf{i} + \\ &+ [dI_{y'} \dot{\phi}_y + (dI_{x'} - dI_{z'}) \dot{\phi}_x \phi_z] \mathbf{j} + [dI_{z'} \dot{\phi}_z + (dI_{y'} - dI_{x'}) \dot{\phi}_y \phi_x] \mathbf{k} \} = \\ &= -\rho_0 dz \{ [J_{x'} \ddot{\phi}_x + (J_{p'} - J_{y'}) \ddot{\phi}_z \phi_y] \mathbf{i} + [J_{y'} \ddot{\phi}_y + (J_{x'} - J_{p'}) \ddot{\phi}_x \phi_z] \mathbf{j} + \\ &+ [J_{p'} \ddot{\phi}_z + (J_{y'} - J_{x'}) \ddot{\phi}_y \phi_x] \mathbf{k} \}. \end{aligned}$$

Сравнив данное выражение с (2.15), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_{\text{ин}} &= -\rho_0 \{ [J_x \ddot{\phi}_x + (J_p - J_y) \ddot{\phi}_z \phi_y] \mathbf{i} + [J_y \ddot{\phi}_y + (J_x - J_p) \ddot{\phi}_x \phi_z] \mathbf{j} + \\ &+ [J_p \ddot{\phi}_z + (J_y - J_x) \ddot{\phi}_y \phi_x] \mathbf{k} \}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Если малыми являются не только компоненты вектора поворота ϕ_x , ϕ_y , ϕ_z , но и компоненты вектора угловой скорости $\dot{\phi}_x$, $\dot{\phi}_y$, $\dot{\phi}_z$, то тогда выражение (2.16) упростится и примет вид

$$\mathbf{m}_{\text{ин}} = -\rho_0 (J_x \ddot{\phi}_x \mathbf{i} + J_y \ddot{\phi}_y \mathbf{j} + J_p \ddot{\phi}_z \mathbf{k}). \quad (2.17)$$

Запишем уравнения равновесия (2.11) в проекциях на оси координат $Oxyz$ (рис. 2.1). С этой целью воспользуемся разложениями

$$\mathbf{P} = Q_x \mathbf{i} + Q_y \mathbf{j} + N \mathbf{k}, \quad \mathbf{q} = q_x \mathbf{i} + q_y \mathbf{j} + q_z \mathbf{k},$$

$$\mathbf{M} = M_x \mathbf{i} + M_y \mathbf{j} + M_z \mathbf{k}, \quad \mathbf{m} = m_x \mathbf{i} + m_y \mathbf{j} + m_z \mathbf{k},$$

$$\mathbf{P} \times \mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ Q_x & Q_y & N \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}Q_y - \mathbf{j}Q_x.$$

В результате получим шесть уравнений относительно шести неизвестных:

$$\begin{aligned} \frac{dQ_x}{dz} &= -q_x, & \frac{dQ_y}{dz} &= -q_y, & \frac{dN}{dz} &= -q_z, \\ \frac{dM_x}{dz} &= -m_x + Q_y, & \frac{dM_y}{dz} &= -m_y - Q_x, & \frac{dM_z}{dz} &= -m_z. \end{aligned}$$

Данные уравнения целесообразно разбить на четыре группы:

$$\frac{dN}{dz} = -q_z, \quad (2.18)$$

$$\frac{dM_z}{dz} = -m_z, \quad (2.19)$$

$$\begin{cases} \frac{dQ_y}{dz} = -q_y, \\ \frac{dM_x}{dz} = -m_x + Q_y, \end{cases} \quad (2.20)$$

$$\begin{cases} \frac{dQ_x}{dz} = -q_x, \\ \frac{dM_y}{dz} = -m_y - Q_x. \end{cases} \quad (2.21)$$

Уравнение (2.18) позволяет решать задачи на растяжение стержня и находить (с точностью до одной постоянной интегрирования) распределение продольной силы N по известной погонной осевой нагрузке q_z . Уравнение (2.19) позволяет решать задачи на кручение стержня и находить распределение (с точностью до одной постоянной интегрирования) крутящего момента M_z по известной погонной моментной крутящей нагрузке m_z . Система уравнений (2.20) описывает изгиб стержня в главной плоскости Oyz (рис. 2.1) и позволяет находить (с точностью до двух постоянных интегрирования) распределение поперечной силы Q_y и изгибающего момента M_x по известным погонным нагрузкам q_y , m_x – поперечной силовой и моментной изгибающей нагрузками. Наконец, система уравнений (2.21) описывает изгиб стержня в главной плоскости Oxz (рис. 2.1) и позволяет

находить (с точностью до двух постоянных интегрирования) распределение поперечной силы Q_x и изгибающего момента M_y по известным погонным нагрузкам q_x , m_y – поперечной силовой и моментной изгибающей нагрузками.

В случае статически определимой задачи значения всех постоянных интегрирования определяются из соответствующих силовых граничных условий, отражающих условия нагружения концов стержня.

В динамических задачах используются уравнения движения

$$\frac{dN}{dz} = -q_z + \rho_0 F \ddot{u}_z, \quad (2.22)$$

$$\frac{dM_z}{dz} = -m_z + \rho_0 J_p \ddot{\phi}_z, \quad (2.23)$$

$$\begin{cases} \frac{dQ_y}{dz} = -q_y + \rho_0 F \ddot{u}_y, \\ \frac{dM_x}{dz} = -m_x + Q_y + \rho_0 J_x \ddot{\phi}_x, \end{cases} \quad (2.24)$$

$$\begin{cases} \frac{dQ_x}{dz} = -q_x + \rho_0 F \ddot{u}_x, \\ \frac{dM_y}{dz} = -m_y - Q_x + \rho_0 J_y \ddot{\phi}_y, \end{cases} \quad (2.25)$$

которые вытекают из (2.13), (2.14), (2.17). В данном случае одних динамических уравнений (2.22)–(2.25) недостаточно, так как число неизвестных превышает число уравнений. Для решения задачи необходимы дополнительные уравнения.

2.2. Геометрические уравнения

Обратимся к рис. 1.12 и формулам (1.22), (2.1), согласно которым

$$\frac{dz'}{dz} = 1 + e, \quad \mathbf{k}' = \mathbf{k} + \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{k}, \quad (2.26)$$

$$\mathbf{r}'_C = \mathbf{r}_C + \mathbf{u}_C, \quad \mathbf{r}_C = z\mathbf{k}, \quad \mathbf{u}_C = u_x\mathbf{i} + u_y\mathbf{j} + u_z\mathbf{k}, \quad \boldsymbol{\varphi} = \varphi_x\mathbf{i} + \varphi_y\mathbf{j} + \varphi_z\mathbf{k}. \quad (2.27)$$

Отсюда имеем

$$\mathbf{k}' = \mathbf{k} + \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{k} = \mathbf{k} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \varphi_x & \varphi_y & \varphi_z \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\varphi_y - \mathbf{j}\varphi_x + \mathbf{k}. \quad (2.28)$$

С другой стороны, орт касательной изогнутой оси стержня равен

$$\mathbf{k}' = \frac{d\mathbf{r}'_C}{dz'}.$$

Поэтому с учётом (2.26), (2.27)

$$\mathbf{k}' = \frac{d\mathbf{r}'_C}{dz} \frac{dz}{dz'} = \frac{1}{1+e} \left(\frac{d\mathbf{r}_C}{dz} + \frac{d\mathbf{u}_C}{dz} \right) = \frac{1}{1+e} \left[\frac{du_x}{dz} \mathbf{i} + \frac{du_y}{dz} \mathbf{j} + \left(1 + \frac{du_z}{dz} \right) \mathbf{k} \right]. \quad (2.29)$$

Приравняв (2.28) и (2.29), находим

$$\varphi_y = \frac{1}{1+e} \frac{du_x}{dz}, \quad \varphi_x = -\frac{1}{1+e} \frac{du_y}{dz}, \quad (2.30)$$

$$e = \frac{du_z}{dz}. \quad (2.31)$$

В приближении малых деформаций, когда относительное удлинение элементов оси стержня имеет пренебрежимо малую величину по сравнению с единицей (т. е. $|e| \ll 1$), формулы (2.30) упрощаются:

$$\varphi_y \cong \frac{du_x}{dz}, \quad \varphi_x \cong -\frac{du_y}{dz}. \quad (2.32)$$

Однако формула (2.31) и в этом случае сохраняют свою значимость.

Таким образом, из шести компонент вектора перемещения \mathbf{u}_C и вектора поворота $\boldsymbol{\varphi}$ независимыми являются только четыре компоненты. В качестве таковых удобно взять компоненты

$$u_z, u_y, u_x, \varphi_z, \quad (2.33)$$

каждая из которых отвечает растяжению, изгибу в главной плоскости Oyz , изгибу в главной плоскости Oxz и кручению стержня соответственно. Остальные две компоненты – углы поворота φ_x, φ_y , включая относительное удлинение элементов оси e , определяются из выражений (2.31) и (2.32), которые можно рассматривать как кинематические ограничения, накладываемые гипотезой плоских сечений на перемещения стержня.

Растяжение. Рассмотрим сначала деформацию чистого растяжения, когда из величин (2.33) только $u_z \neq 0$. Записав размерную цепочку (рис. 2.2, а)

$$u_z + dz' = dz + (u_z + du_z),$$

получим

$$dz' = dz + du_z.$$

Значит, при чистом растяжении относительное удлинение материальных отрезков, параллельных оси стержня, одинаково по величине:

$$\varepsilon_{\text{раст}} = \frac{dz' - dz}{dz} = \frac{du_z}{dz} = e. \quad (2.34)$$

Поэтому при упругом изотермическом растяжении в соответствии с законом Гука (1.19) в поперечных сечениях стержня возникают равномерно распределённые нормальные напряжения (рис. 2.2, б)

$$\sigma_{\text{раст}} = E\varepsilon_{\text{раст}} = Ee. \quad (2.35)$$

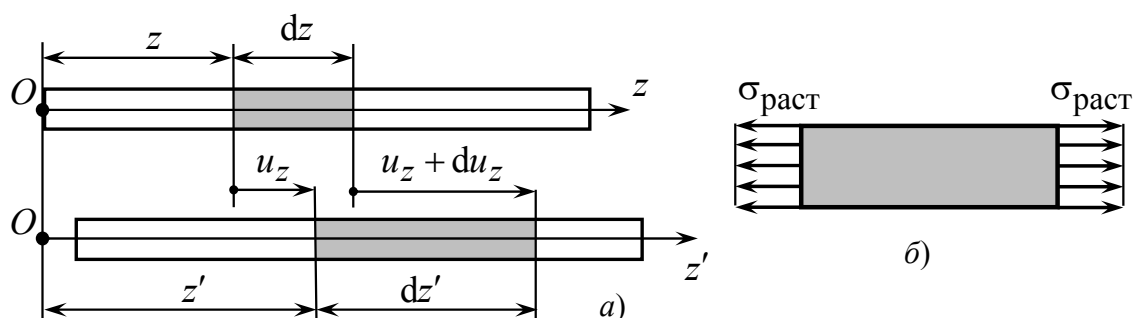


Рис. 2.2. Чистое растяжение стержня

Изгиб в плоскости Oyz . Рассмотрим далее деформацию чистого изгиба в главной плоскости Oyz , когда из величин (2.33) только $u_y \neq 0$ (рис. 2.3). Так как $u_z = 0$, из формул (2.31), (2.1) следует, что

$$e = du_z/dz = 0, \quad dz' = dz.$$

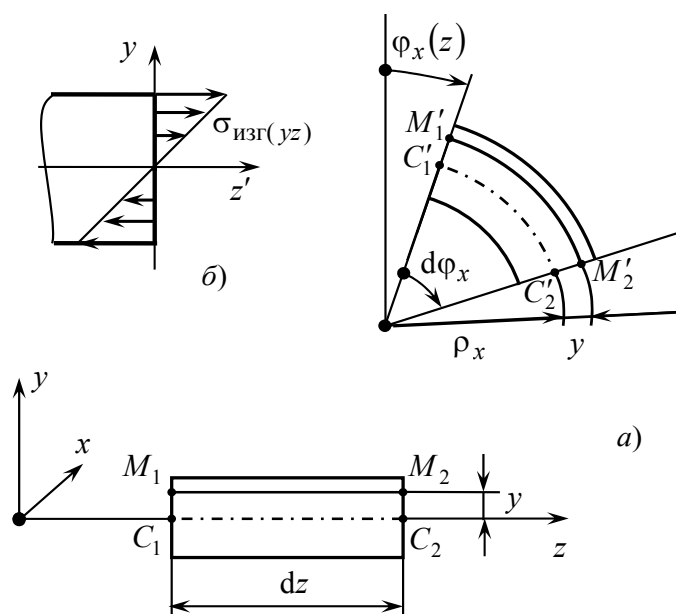


Рис. 2.3. Чистый изгиб в главной плоскости Oyz

Значит, элемент оси C_1C_2 (рис. 2.3, *a*) при изгибе сохраняет свою длину, а другие элементарные отрезки, параллельные оси, либо растягиваются, либо удлиняются. Иными словами, глядя на рис. 2.3, *a* и полагая $d\varphi_x > 0$, имеем

$$\begin{aligned} |C_1C_2| &= |C'_1C'_2|, & |C_1C_2| &= dz, & |C'_1C'_2| &= \rho_x d\varphi_x, \\ |M_1M_2| &= dz, & |M'_1M'_2| &= (\rho_x + y) d\varphi_x. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$dz = \rho_x d\varphi_x, \quad |M'_1M'_2| = \rho_x d\varphi_x + y d\varphi_x.$$

Отсюда получается выражение

$$\frac{1}{\rho_x} = \frac{d\varphi_x}{dz}, \quad (2.36)$$

определяющее алгебраическое значение радиуса кривизны изогнутой оси стержня, а также выражение для относительного удлинения материального элемента M_1M_2 , параллельного оси стержня (рис. 2.3):

$$\varepsilon_{\text{изг}(yz)} = \frac{|M'_1M'_2| - |M_1M_2|}{|M_1M_2|} = \frac{y}{\rho_x}. \quad (2.37)$$

Из (2.36) следует, что радиус кривизны изогнутой оси стержня ρ_x имеет положительное (отрицательное) алгебраическое значение, если угол поворота поперечного сечения является возрастающей (убывающей) функцией $\varphi_x(z)$. Если $\rho_x > 0$, то согласно (2.37) при $y > 0$ имеет место растяжение, а при $y < 0$ – сжатие соответствующего материального элемента.

При изотермическом изгибе в поперечных сечениях стержня возникают нормальные напряжения, распределённые в соответствии с законом Гука (1.19) и формулой (2.37) по линейному закону (рис. 2.3, *б*):

$$\sigma_{\text{изг}(yz)} = E \varepsilon_{\text{изг}(yz)} = E \frac{y}{\rho_x}. \quad (2.38)$$

Изгиб в плоскости Oxz . Аналогичный результат получается при рассмотрении деформации чистого изгиба в главной плоскости Oxz , когда из величин (2.33) только $u_x \neq 0$ (рис. 2.4). Поскольку $u_z = 0$, то, как и ранее, $dz' = dz$. Поэтому при $d\varphi_y > 0$ из рис. 2.4, *a* имеем

$$\begin{aligned} |C_1C_2| &= |C'_1C'_2|, & |C_1C_2| &= dz, & |C'_1C'_2| &= \rho_y d\varphi_y, \\ |M_1M_2| &= dz, & |M'_1M'_2| &= (\rho_y - x) d\varphi_y. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$dz = \rho_y d\varphi_y, \quad |M'_1 M'_2| = \rho_y d\varphi_y - x d\varphi_y.$$

Отсюда вытекает выражение для алгебраического значения радиуса кривизны изогнутой оси стержня

$$\frac{1}{\rho_y} = \frac{d\varphi_y}{dz}, \quad (2.39)$$

а также выражение для относительного удлинения материального элемента $M_1 M_2$, параллельного оси стержня (рис. 2.4, а):

$$\varepsilon_{\text{изг}(xz)} = \frac{|M'_1 M'_2| - |M_1 M_2|}{|M_1 M_2|} = -\frac{x}{\rho_y}. \quad (2.40)$$

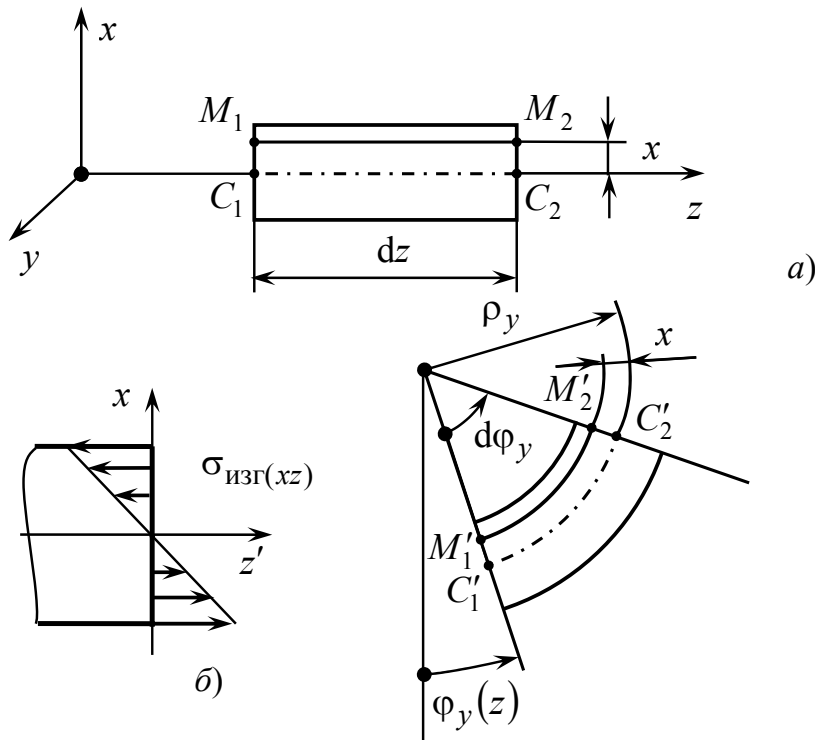


Рис. 2.4. Чистый изгиб в главной плоскости Oxz

Из (2.39) следует, что радиус кривизны изогнутой оси стержня ρ_y принимает положительное (отрицательное) алгебраическое значение, если угол поворота поперечного сечения является возрастающей (убывающей) функцией $\varphi_y(z)$. Если $\rho_y > 0$, то в согласии с (2.40) при $x > 0$ имеет место сжатие, а при $x < 0$ – растяжение соответствующего материального элемента.

При изотермическом изгибе в поперечных сечениях стержня возникают нормальные напряжения, распределённые в соответствии с законом Гука (1.19) и формулой (2.40) по линейному закону (рис. 2.4, б):

$$\sigma_{\text{изг}(xz)} = E\varepsilon_{\text{изг}(xz)} = -E \frac{x}{\rho_y}. \quad (2.41)$$

Кручение. Рассмотрим чистое кручение, когда из всех величин (2.33) лишь $\varphi_z \neq 0$. В этом случае торцы элемента стержня длиной dz поворачиваются на относительный угол $d\varphi_z$ (рис. 2.5, а). За счёт этого на цилиндрической поверхности радиуса r наблюдается сдвиговая деформация мысленно нанесённой сетки. Угол сдвига γ определяется равенством (рис. 2.5, а)

$$r d\varphi_z = dz \gamma.$$

Следовательно,

$$\gamma = \frac{d\varphi_z}{dz} r. \quad (2.42)$$

В соответствии с законом Гука (1.21) в поперечных сечениях стержня возникают касательные напряжения (рис. 2.5, б), которые с учётом (2.42) распределены по линейному закону (рис. 2.5, в):

$$\tau_z = G\gamma = G \frac{d\varphi_z}{dz} r. \quad (2.43)$$

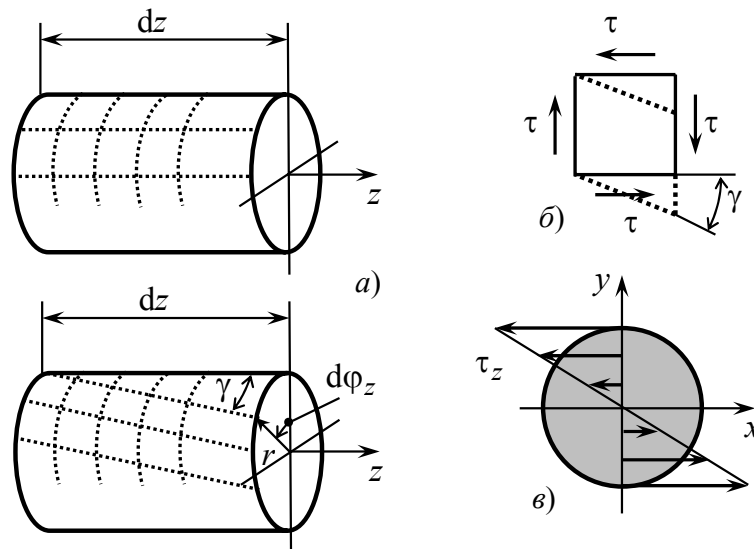


Рис. 2.5. Кручение стержня

По закону парности касательных напряжений (рис. 2.5, б) такое же распределение касательных напряжений имеет место и в диаметральных плоскостях продольных сечений стержня (рис. 2.6).

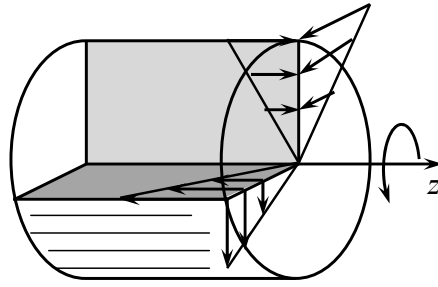


Рис. 2.6. Распределение касательных напряжений при кручении

Нетрудно заметить (рис. 2.5, а), что отрезки длиной dz , параллельные оси стержня до деформации, после деформации имеют длину

$$\frac{dz}{\cos \gamma}.$$

Поэтому их относительное удлинение равно

$$\varepsilon_{\text{круч}} = \frac{1}{\cos \gamma} - 1 \cong \frac{\gamma^2}{2}. \quad (2.44)$$

При упругом деформировании угол сдвига (2.42) крайне мал (для стали порядок максимального значения 10^{-3} рад). Поэтому величина (2.44) имеет второй порядок малости и ей можно пренебречь по сравнению с относительными удлинениями при растяжении и изгибе.

В общем случае малых перемещений стержня относительное удлинение элементарных отрезков, параллельных оси стержня до деформации, складывается из относительных удлинений при растяжении и изгибе:

$$\varepsilon = \varepsilon_{\text{раст}} + \varepsilon_{\text{изг}(yz)} + \varepsilon_{\text{изг}(xz)}. \quad (2.45)$$

С учётом (2.34), (2.37), (2.40) формула (2.45) принимает вид

$$\varepsilon = e + \frac{y}{\rho_x} - \frac{x}{\rho_y}. \quad (2.46)$$

Если же принять во внимание (2.36), (2.39), будем иметь

$$\varepsilon(x, y, z) = \frac{du_z(z)}{dz} + \frac{d\varphi_x(z)}{dz} y - \frac{d\varphi_y(z)}{dz} x. \quad (2.47)$$

В записи формулы (2.47) отражена структура зависимости относительного удлинения от координат точек стержня, являющихся началом бесконечно малых элементов стержня, нормальных к поперечным сечениям, как до деформации, так и после деформации (рис. 2.2, рис. 2.3, а, рис. 2.4, а).

Если привлечь зависимости (2.32), то тогда (2.47) перепишется так:

$$\varepsilon(x, y, z) = \frac{du_z(z)}{dz} + \frac{d^2u_y(z)}{dz^2}y - \frac{d^2u_x(z)}{dz^2}x. \quad (2.48)$$

Как видим, относительная деформация в данной точке стержня полностью определяется через перемещения точек оси стержня.

2.3. Физические уравнения

Деформации относительного удлинения (2.47) и сдвига (2.42) связаны законом Гука (1.19), (1.21) с нормальными напряжениями σ_z и касательными напряжения τ_z , действующими в поперечном сечении стержня (рис. 2.7):

$$\sigma_z = E(\varepsilon - \alpha\vartheta) = E\left[\left(\frac{du_z}{dz} - \alpha\vartheta\right) + \frac{d\varphi_x}{dz}y - \frac{d\varphi_y}{dz}x\right], \quad (2.49)$$

$$\tau_z = G\gamma = G\frac{d\varphi_z}{dz}r. \quad (2.50)$$

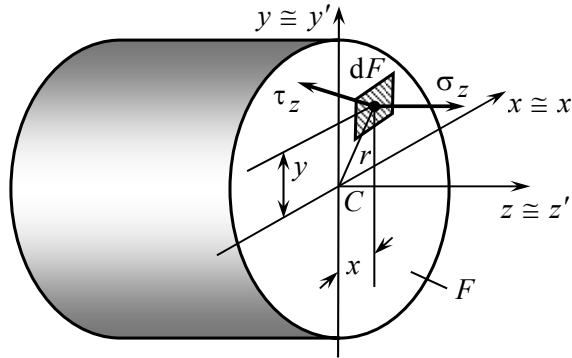


Рис. 2.7. Нормальные и касательные напряжения в сечении

Располагая выражениями (2.49) и (2.50), можно вычислить внутренние силовые факторы (1.9):

$$N = \int_F \sigma_z dF = E\left[\left(\frac{du_z}{dz} - \alpha\vartheta\right) \int_F dF + \frac{d\varphi_x}{dz} \int_F y dF - \frac{d\varphi_y}{dz} \int_F x dF\right] = EF\left(\frac{du_z}{dz} - \alpha\vartheta\right),$$

$$M_x = \int_F \sigma_z y dF = E\left[\left(\frac{du_z}{dz} - \alpha\vartheta\right) \int_F y dF + \frac{d\varphi_x}{dz} \int_F y^2 dF - \frac{d\varphi_y}{dz} \int_F xy dF\right] = EJ_x \frac{d\varphi_x}{dz},$$

$$M_y = -\int_F \sigma_z x dF = E\left[-\left(\frac{du_z}{dz} - \alpha\vartheta\right) \int_F x dF - \frac{d\varphi_x}{dz} \int_F yx dF + \frac{d\varphi_y}{dz} \int_F x^2 dF\right] = EJ_y \frac{d\varphi_y}{dz},$$

$$M_z = \int_F \tau_z r dF = G \frac{d\varphi_z}{dz} \int_F r^2 dF = GJ_p \frac{d\varphi_z}{dz}.$$

Здесь принято во внимание, что оси x , y являются главными центральными осями поперечного сечения стержня (разд. 1.1).

Таким образом, внутренние силовые факторы связаны с геометрическими характеристиками деформации и тепловым расширением стержня следующими определяющими соотношениями:

$$\frac{du_z}{dz} - \alpha \vartheta = \frac{N}{EF}, \quad \frac{d\varphi_x}{dz} = \frac{M_x}{EJ_x}, \quad \frac{d\varphi_y}{dz} = \frac{M_y}{EJ_y}, \quad (2.51)$$

$$\frac{d\varphi_z}{dz} = \frac{M_z}{GJ_p}. \quad (2.52)$$

Подставив (2.51), (2.52) в (2.49), (2.50), можно выразить распределение нормальных и касательных напряжений в сечении через внутренние силовые факторы:

$$\sigma_z(x, y, z) = \frac{N(z)}{F} + \frac{M_x(z)}{J_x} y - \frac{M_y(z)}{J_y} x, \quad (2.53)$$

$$\tau_z(x, y, z) = \frac{M_z(z)}{J_p} r(x, y). \quad (2.54)$$

Выражение (2.53) называется *трёхчленной формулой Навье*. Данная формула вместе с формулами (2.51) составляет основу технической теории прямых стержней произвольного поперечного сечения. По формуле (2.53) нормальные напряжения линейно зависят от координат x , y точек поперечного сечения стержня.

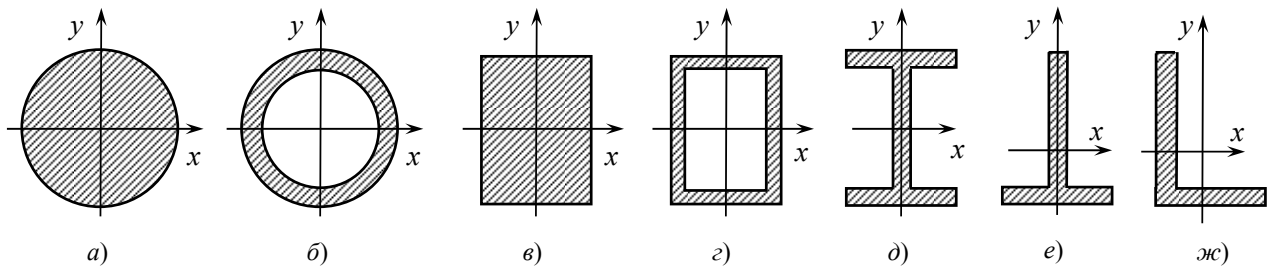


Рис. 2.8. Типовые поперечные сечения

Формулы (2.52), (2.54), в которые входит полярный момент инерции J_p и полярный радиус r , справедливы только для стержней круглого (рис. 2.8, а) и кольцевого (рис. 2.8, б) поперечного сечения. Для остальных видов сечений, например прямоугольного (рис. 2.8, в), коробчатого (рис. 2.8, г), двутаврового (рис. 2.8, д), таврового (рис. 2.8, е), уголкового (рис. 2.8, ж) и т. п., формула (2.52) заменяется формулой

$$\frac{d\varphi_z}{dz} = \frac{M_z}{GJ_k}, \quad (2.55)$$

а скалярная формула (2.54) – векторной формулой

$$\tau_z(x, y, z) = \frac{M_z(z)}{J_k} \mathbf{f}(x, y). \quad (2.56)$$

Здесь $\tau_z = \tau_{zx}\mathbf{i} + \tau_{zy}\mathbf{j}$ – вектор касательных напряжений, J_k – геометрический параметр, называемый *моментом инерции сечения при кручении*, $\mathbf{f}(x, y)$ – некоторая векторная функция. Указанные величины не могут быть определены элементарными методами сопротивления материалов. Данный вопрос решается методами теории упругости. И только для круглого и кольцевого сечений

$$J_k = J_p, \quad \mathbf{f}(x, y) = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \times \mathbf{k}.$$

2.4. Полная система дифференциальных уравнений технической теории стержней

Соберём вместе результаты (2.18)–(2.21), (2.32), (2.51), (2.55), сгруппировав их по типам напряжённо-деформированного состояния стержня.

Растяжение (сжатие) прямого стержня:

$$\frac{dN}{dz} = -q_z, \quad \frac{du_z}{dz} = \frac{N}{EF} + \alpha\vartheta. \quad (2.57)$$

Кручение прямого стержня:

$$\frac{dM_z}{dz} = -m_z, \quad \frac{d\varphi_z}{dz} = \frac{M_z}{GJ_k}. \quad (2.58)$$

Изгиб прямого стержня в главной плоскости yz :

$$, , \quad \frac{d\varphi_x}{dz} = \frac{M_x}{EJ_x}, \quad \frac{du_y}{dz} = -\varphi_x. \quad (2.59)$$

$$\frac{dQ_x}{dz} = -q_x, \quad \frac{dM_y}{dz} = -m_y - Q_x, \quad \frac{d\varphi_y}{dz} = \frac{M_y}{EJ_y}, \quad \frac{du_x}{dz} = \varphi_y. \quad (2.60)$$

При известных внешних силовых нагрузках $q_z(z)$, $q_y(z)$, $q_x(z)$, внешних моментных нагрузках $m_z(z)$, $m_y(z)$, $m_x(z)$ и температурном воздействии на стержень $\vartheta(z)$ система 12 обыкновенных дифференциальных уравнений (2.57)–(2.60) позволяет находить 12 неизвестных величин $(N, u_z; M_z, \varphi_z; Q_y, M_x, \varphi_x, u_y; Q_x, M_y, \varphi_y, u_x)$ с точностью до 12 постоянных интегрирования, определяемых из граничных условий.

После этого по соответствующим формулам можно найти распределение нормальных и касательных напряжений в поперечных сечениях стержня.

3. УСЛОВИЯ ПРОЧНОСТИ И ЖЁСТКОСТИ

Напомним, что жёсткость – это способность конструкций и деталей машин выдерживать рабочие нагрузки без значительных упругих деформаций – удлинений стержней, прогибов балок, углов закручивания валов и т. п., которые могут нарушить их нормальную работу. После определения линейных и угловых перемещений делается проверка на жёсткость элементов конструкций или подбираются их сечения из условий жёсткости вида

$$\begin{aligned} \max|u_x| \leq [u_x], \max|u_y| \leq [u_y], \max|u_z| \leq [u_z], \\ \max|\varphi_x| \leq [\varphi_x], \max|\varphi_y| \leq [\varphi_y], \max|\varphi_z| \leq [\varphi_z]. \end{aligned}$$

Допускаемые значения линейных и угловых перемещений $[u_x]$, $[u_y]$, $[u_z]$, $[\varphi_x]$, $[\varphi_y]$, $[\varphi_z]$ регламентируются нормами проектирования, устанавливаемыми из условий эксплуатации или опытных данных. Например, в строительстве наибольший прогиб (стрела прогиба) $f = [u_y]$ ($f = [u_x]$) обычно составляет

$$f = (1/200 \dots 1/1000)l,$$

где l – длина пролёта балки.

Под прочностью понимается способность конструкций и деталей машин выдерживать рабочие нагрузки без разрушения и пластических деформаций. Основные конструкционные материалы, применяемые в машиностроении, обладают ярко выраженными пластическими свойствами и одинаково работают как на растяжение, так и сжатие. Поэтому *предельным состоянием*, которое может нарушить нормальную работу детали

или конструкции, является переход из упругого состояния в пластическое состояние в одной из точек детали или конструкции. Данный переход характеризуется некоторым критерием, называемым *критерием прочности* (в сопротивлении материалов) или *условием пластичности* (в теории пластичности). В настоящее время наиболее обоснованным экспериментально и теоретически является критерий прочности, традиционно именуемый в сопротивлении материалов как *энергетическая* (или *четвёртая*) *теория прочности*. В теории пластичности тот же самый критерий называется *условием пластичности Губера – Мизеса*.

Сформулируем указанный критерий прочности в виде, удобном для общего практического использования, и проиллюстрируем его применение для разных случаев напряжённого состояния в стержнях.

3.1. Критерий прочности Губера – Мизеса

Выделим в окрестности точки тела бесконечно малый параллелепипед, рёбра которого параллельны осям декартовой системы координат (рис. 3.1). В общем случае на гранях этого параллелепипеда будут действовать нормальные напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ и касательные напряжения $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$ (рис. 3.1, а). Из данных величин можно составить *матрицу напряжений*

$$T = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}, \quad (3.1)$$

элементы которой называются *компонентами тензора напряжений* в данной системе координат. По закону парности касательных напряжений

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{xz} = \tau_{zx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}.$$

Поэтому матрица напряжений (3.1) является симметрической:

$$T = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

У неё только шесть независимых элементов.

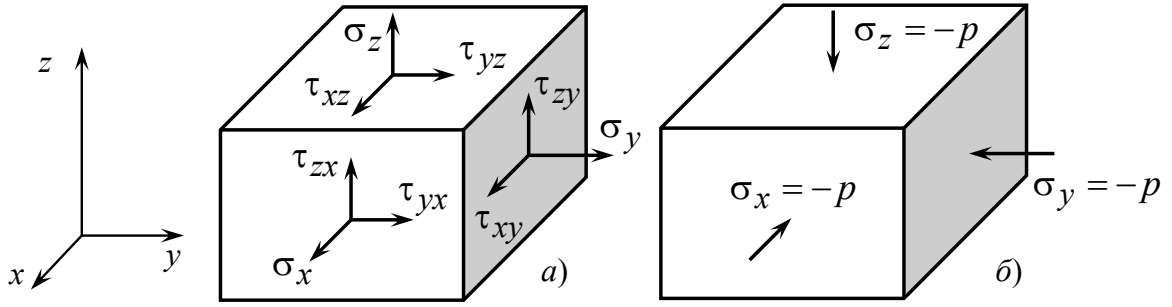


Рис. 3.1. Напряжённое состояние в точке тела:
 a – общий случай; b – случай всестороннего сжатия

Сумма диагональных элементов любой матрицы A называется *следом матрицы* и обозначается через $\text{tr}A$. Матрица с нулевым следом называется *девиатором* и обозначается через \tilde{A} . Корень квадратный из суммы квадратов всех элементов матрицы A называется её *нормой* и обозначается как $\|A\|$. Например, для матрицы (3.2)

$$\text{tr}T = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z, \quad (3.3)$$

$$\|T\| = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + 2\tau_{xy}^2 + 2\tau_{xz}^2 + 2\tau_{yz}^2}. \quad (3.4)$$

Следует подчеркнуть, что все введённые здесь понятия имеют смысл для любой матрицы, а не только для матрицы напряжений.

Величина

$$\sigma_{\text{cp}} = \frac{\text{tr}T}{3} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} \quad (3.5)$$

называется *средним напряжением*. Используя единичную матрицу

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

след которой $\text{tr}I = 3$, матрицу (3.2) можно представить в виде

$$T = \sigma_{\text{cp}}I + \tilde{T}, \quad \tilde{T} = \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_{\text{cp}} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_{\text{cp}} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_{\text{cp}} \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Поскольку

$$\text{tr}\tilde{T} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z - 3\sigma_{\text{cp}} = 0,$$

матрица \tilde{T} в (3.6) является *девиатором матрицы напряжений*. Очевидно, что у матрицы \tilde{T} только пять независимых элементов.

При всестороннем сжатии (рис. 3.1, б) матрица напряжений имеет вид

$$T = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix},$$

где p – гидростатическое давление (при всестороннем растяжении $p < 0$). При этом все элементы девиатора матрицы напряжений (3.6) равны нулю. Как показывает опыт, при таком виде нагружения любой материал деформируется упруго. Поэтому переход в пластическое состояние может произойти только *при отличном от нуля девиаторе матрицы напряжений \tilde{T}* .

По условию пластичности Губера – Мизеса (четвёртой теории прочности)

$$\|\tilde{T}\| \leq k, \quad (3.7)$$

где k – некоторая постоянная. Когда в (3.7) выполняется строгое неравенство, материал деформируется упруго. Знак равенства соответствует предельному состоянию начала пластического деформирования.

Критерий прочности (3.7) допускает простую геометрическую интерпретацию. Для любого напряжённого состояния в данной точке тела девиатору матрицы напряжений \tilde{T} можно поставить в соответствие вектор напряжений $\vec{\sigma}$ с пятью независимыми компонентами, длина которого $|\vec{\sigma}| = \|\tilde{T}\|$. Пока приложенные к телу нагрузки таковы, что конец вектора $\vec{\sigma}$ находится внутри сферы радиусом k (рис. 3.2, а), имеет место упругое состояние. Когда по мере увеличения приложенных нагрузок конец вектора $\vec{\sigma}$ достигает сферы радиусом k (рис. 3.2, б), наступает предельное состояние в данной точке тела.

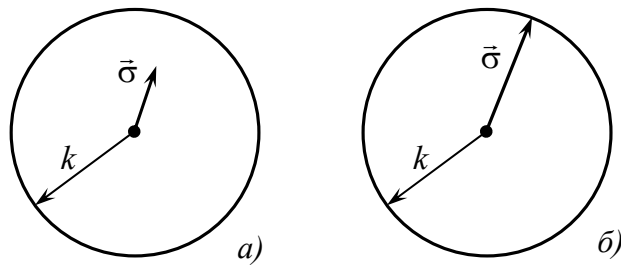


Рис. 3.2. Интерпретация условия пластичности Губера – Мизеса

Чтобы определить значение постоянной k для данного материала, достаточно провести испытания на растяжение (рис. 3.3), при которых

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}, \quad \sigma_{\text{ср}} = \frac{\sigma_z}{3}, \quad \tilde{T} = T - \sigma_{\text{ср}} I = \begin{bmatrix} -\sigma_z/3 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_z/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sigma_z/3 \end{bmatrix}.$$

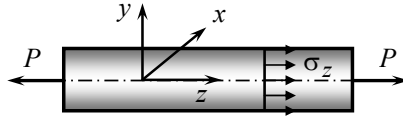


Рис. 3.3. Испытание образца материала на одноосное растяжение

Отсюда получаем

$$\|\tilde{T}\|^2 = \frac{\sigma_z^2}{9} + \frac{\sigma_z^2}{9} + \frac{4\sigma_z^2}{9} = \frac{2}{3}\sigma_z^2.$$

Следовательно, для предельного состояния в соответствии с (3.7)

$$\sqrt{2/3}|\sigma_z| = k.$$

С другой стороны, наступление пластического состояния при одноосном растяжении (сжатии) характеризуется пределом текучести σ_T :

$$|\sigma_z| = \sigma_T.$$

Сравнивая последние два равенства, находим

$$k = \sqrt{2/3}\sigma_T.$$

Это позволяет переписать критерий (3.7) в виде

$$\sqrt{3/2}\|\tilde{T}\| \leq \sigma_T. \quad (3.8)$$

В сопротивлении материалов левая часть (3.8) называется¹ *эквивалентным напряжением* $\sigma_{\text{эКВ}}$, а правая часть – *допускаемым напряжением* $[\sigma]$:

$$\sigma_{\text{эКВ}} = \sqrt{3/2}\|\tilde{T}\|, [\sigma] = \sigma_T, \sigma_{\text{эКВ}} \leq [\sigma]. \quad (3.9)$$

В то же время по ряду причин допускаемое напряжение нельзя принимать равным пределу текучести (необходимо иметь некоторый запас прочности на случай возможных перегрузок в процессе эксплуатации, неточного изготовления детали, отклонения свойств применяемого материала от тех свойств, которые установлены при испытании образца и т. д.). Поэтому для пластических материалов принимают следующее значение допускаемого напряжения:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T}, \quad (3.10)$$

где n_T – *коэффициент запаса прочности по отношению к пределу текучести*; этот коэффициент всегда больше, чем единица. Например, в строительных машиностроительных конструкциях обычно $n_T = 1.5$.

Таким образом, в общем случае напряжённого состояния критерий прочности имеет вид

$$\sigma_{\text{эКВ}} \equiv \sqrt{3/2}\|\tilde{T}\| \leq [\sigma]. \quad (3.11)$$

¹ В теории пластичности левая часть (3.8) называется *интенсивностью нормальных напряжений* и обозначается, как правило, через σ_{II} .

3.2. Формулировка критерия прочности для частных случаев напряжённого состояния стержня

Для суждения о прочности стержня необходимо знать вид напряжённого состояния в наиболее опасной точке. В общем случае стержень подвергается растяжению (сжатию), кручению и изгибу. При этом в поперечных сечениях стержня возникают нормальные напряжения σ_z от нормальной силы и изгибающих моментов, определяемые формулой Навье (2.53), и касательные напряжения τ_z от крутящего момента и перерезывающих сил (рис. 3.4).

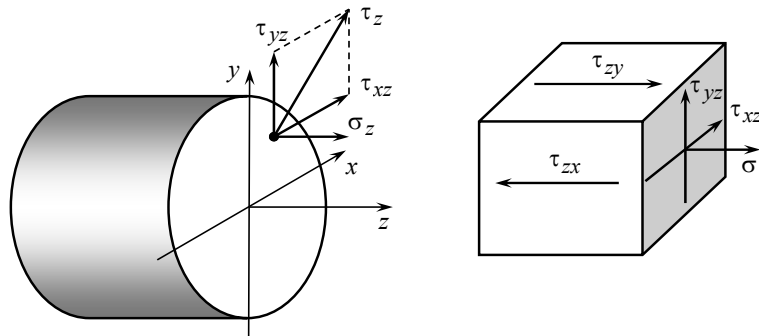


Рис. 3.4. Напряжённое состояние в точке стержня

В данном напряжённом состоянии

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}, \quad \sigma_{\text{ср}} = \frac{\sigma_z}{3}, \quad \tilde{T} = \begin{bmatrix} -\frac{\sigma_z}{3} & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & -\frac{\sigma_z}{3} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \frac{2\sigma_z}{3} \end{bmatrix}.$$

Поэтому

$$\|T\|^2 = \frac{\sigma_z^2}{9} + \frac{\sigma_z^2}{9} + \frac{4\sigma_z^2}{9} + 2\tau_{xz}^2 + 2\tau_{yz}^2 = \frac{2}{3}\sigma_z^2 + 2\tau_z^2 = \frac{2}{3}(\sigma_z^2 + 3\tau_z^2),$$

где $\tau_z = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2}$ – полное касательное напряжение в сечении (рис. 3.4). Подставив полученное значение

$$\|T\| = \sqrt{2/3} \sqrt{\sigma_z^2 + 3\tau_z^2}$$

в общее условие прочности (3.11), будем иметь

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma_z^2 + 3\tau_z^2} \leq [\sigma]. \quad (3.12)$$

Детализируем условие прочности (3.12) применительно к частным случаям напряжённого состояния, наиболее часто встречающимся на практике. Для упрощения записи конечных выражений введём обозначения

$$\sigma_{\max} = \max_{x,y,z} \{\sigma_{\text{экв}}(x,y,z)\}$$

для эквивалентного напряжения в наиболее опасной точке стержня,

$$\begin{aligned} |N|_{\max} &= \max_z |N(z)|, \quad |M_z|_{\max} = \max_z |M_z(z)|, \\ |M_x|_{\max} &= \max_z |M_x(z)|, \quad |M_y|_{\max} = \max_z |M_y(z)| \end{aligned}$$

для наибольших абсолютных значений продольной (нормальной) силы, крутящего и изгибающих моментов в поперечных сечениях стержня.

Растяжение-сжатие стержня. В данном случае согласно (2.53)

$$\sigma_z = \frac{N(z)}{F}, \quad \tau_z = 0, \quad \sigma_{\text{экв}} = |\sigma_z| = \frac{|N(z)|}{F}.$$

Поэтому

$$\sigma_{\max} = \frac{|N|_{\max}}{F} \leq [\sigma]. \quad (3.13)$$

Кручение стержня. В данном случае по формуле (2.56)

$$\sigma_z = 0, \quad \tau_z(x,y,z) = \frac{|M_z(z)|}{J_k} |\mathbf{f}(x,y)|, \quad \sigma_{\text{экв}} = \sqrt{3}\tau_z = \sqrt{3} \frac{|M_z(z)|}{J_k} |\mathbf{f}(x,y)|.$$

Следовательно,

$$\sigma_{\max} = \sqrt{3} \max_{x,y,z} \{\tau_z\} = \sqrt{3} \frac{\max_z |M_z(z)|}{J_k} \max_{x,y} |\mathbf{f}(x,y)| \leq [\sigma].$$

Величина

$$W_k = \frac{J_k}{\max_{x,y} |\mathbf{f}(x,y)|} \quad (3.14)$$

называется *моментом сопротивления сечения стержня при кручении*.

Поэтому

$$\sigma_{\max} = \sqrt{3} \max_{x,y,z} \{\tau_z\} = \sqrt{3} \frac{|M_z|_{\max}}{W_k} \leq [\sigma].$$

Данное выражение можно переписать в виде

$$\tau_{\max} = \frac{|M_z|_{\max}}{W_k} \leq [\tau], \quad (3.15)$$

где

$$\tau_{\max} = \max_{x,y,z} \{\tau_z\}, [\tau] = \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}} \cong 0.577[\sigma] \quad (3.16)$$

– модуль полного касательного напряжения в опасной точке и *допускаемое касательное напряжение при кручении* соответственно.

В случае стержня кругового или кольцевого сечения формулы (3.14), (3.15) принимают следующий вид:

$$W_p = \frac{J_p}{r_{\max}}, \tau_{\max} = \frac{|M_z|_{\max}}{W_p} \leq [\tau], \quad (3.17)$$

где W_p – полярный момент инерции сечения, r_{\max} – радиус наибольшей окружности кольцевого сечения или радиус круга.

Изгиб стержня в главной плоскости yz . В данном случае по (2.53)

$$\sigma_z = \frac{M_x(z)}{J_x} y, \tau_z = 0, \sigma_{\text{экв}} = |\sigma_z| = \frac{|M_x(z)|}{J_x} |y|.$$

Поэтому

$$\sigma_{\max} = \max_{x,y,z} |\sigma_z| = \frac{\max_z |M_x(z)|}{J_x} |y|_{\max} \leq [\sigma],$$

где $|y|_{\max}$ – модуль координаты y наиболее удалённой точки сечения.

Величина

$$W_x = \frac{J_x}{|y|_{\max}} \quad (3.18)$$

называется *моментом сопротивления сечения относительно оси x* .

Поэтому

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_x|_{\max}}{W_x} \leq [\sigma]. \quad (3.19)$$

Изгиб стержня в главной плоскости xz . Пользуясь аналогией с предыдущим случаем, можно сразу записать условие прочности

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_y|_{\max}}{W_y} \leq [\sigma], \quad (3.20)$$

где

$$W_y = \frac{J_y}{|x|_{\max}} \quad (3.21)$$

– *момент сопротивления сечения относительно оси y* , $|x|_{\max}$ – модуль координаты x наиболее удалённой точки сечения.

Растяжение, изгиб, кручение стержня кругового (кольцевого) сечения. В данном случае по формулам (2.53), (2.54), (3.12)

$$\sigma_z = \frac{N(z)}{F} + \frac{M_x(z)}{J_x} y - \frac{M_y(z)}{J_y} x, \quad \tau_z = \frac{M_z(z)}{J_p} r, \quad \sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma_z^2 + 3\tau_z^2} \leq [\sigma].$$

Благодаря симметрии сечения данные формулы можно упростить, перейдя к новой системе координат (рис. 3.5, а), относительно которой

$$\sigma_z = \frac{N(z)}{F} + \frac{M'_x(z)}{J_{x'}} y', \quad \tau_z = \frac{M_z(z)}{J_p} r, \quad \sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma_z^2 + 3\tau_z^2} \leq [\sigma].$$

Здесь $J_{x'} = J_x = J_y = J_p/2$, $M'_x = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$ – результирующий изгибающий момент. На основании этого можно записать

$$\sigma_{\max} = \max_{x,y,z} \sqrt{\sigma_z^2 + 3\tau_z^2} = \max_z \sqrt{\max_{x,y} (\sigma_z^2 + 3\tau_z^2)}.$$

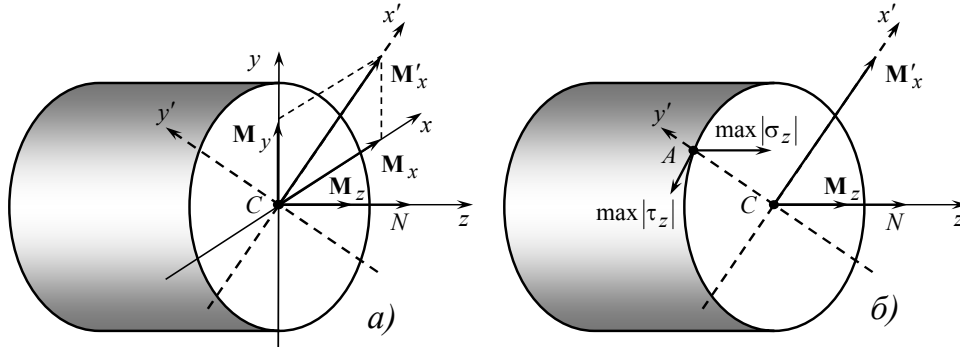


Рис. 3.5. К замене системы координат

Нетрудно заметить (рис. 3.5, б), что в поперечном сечении с координатой z опасной является точка A , в которой складываются нормальные напряжения от действия продольной силы $N(z)$ и изгибающего момента $M'_x(z)$. Для данной точки с координатой $y' = r_{\max}$ с учётом (3.17), (3.18) имеем

$$\begin{aligned} \max_{x,y} (\sigma_z^2 + 3\tau_z^2) &= \left[\frac{|N(z)|}{F} + \frac{|M'_x(z)|}{J_{x'}} r_{\max} \right]^2 + 3 \left[\frac{M_z(z)}{J_p} r_{\max} \right]^2 = \\ &= \left[\frac{|N(z)|}{F} + \frac{|M'_x(z)|}{W_x} \right]^2 + 3 \left[\frac{M_z(z)}{W_p} \right]^2. \end{aligned}$$

Отсюда получаем искомое условие прочности

$$\sigma_{\max} = \max_z \sqrt{\left[\frac{|N(z)|}{F} + \frac{\sqrt{M_x^2(z) + M_y^2(z)}}{W_x} \right]^2 + 3 \left[\frac{M_z(z)}{W_p} \right]^2} \leq [\sigma]. \quad (3.22)$$

4. ЕДИНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЁННОЙ НАГРУЗКИ И ХАРАКТЕРИСТИК ЖЁСТКОСТИ СТЕРЖНЕЙ ЧЕРЕЗ ОБОБЩЁННЫЕ ФУНКЦИИ ДИРАКА И ХЕВИСАЙДА

Рассмотрим одну из типовых схем нагружения прямого стержня распределённой нагрузкой интенсивностью $q(z)$ и сосредоточенной силой P , которые для простоты изложения и без ограничения общности положим действующими перпендикулярно оси стержня (рис. 4.1).

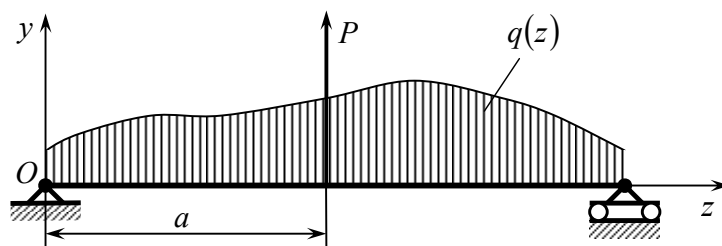


Рис. 4.1. Схема нагружения прямого стержня

В данном случае распределение внешних сил по длине стержня описывается функцией погонной нагрузки $q_y(z)$, которая складывается из непрерывной функции $q(z)$ и некоторой функции $\hat{q}(z)$, учитывающей действие сосредоточенной силы P :

$$q_y(z) = q(z) + \hat{q}(z). \quad (4.1)$$

Поскольку сила P приложена в точке $z = a$, чисто формально имеем

$$\hat{q}(z) = \begin{cases} \frac{P}{0} = \infty, & z = a; \\ 0, & z \neq a. \end{cases} \quad (4.2)$$

В рамках математического анализа функция вида (4.2) не имеет смысла. Чтобы преодолеть эту трудность, можно пойти по простейшему пути и отказаться от использования единого представления распределённой нагрузки (4.1). Однако такой шаг влечёт за собой ряд неудобств из-за необходимости привлечения искусственных приёмов при решении задач сопротивления материалов. Другой, более продуктивный путь состоит в привлечении достаточно простого и наглядного математического аппарата обобщённых функций, который широко применяется в математической физике, квантовой механике и других дисциплинах для описания точечных масс и зарядов, точечных источников теплоты, сосредоточенных сил и моментов.

4.1. Обобщённые функции Дирака и Хевисайда

В 1926 г. английский физик Дирак ввёл в квантовой механике символ $\delta(z)$, названный им *дельта-функцией*, которая явилась первой систематически применяемой обобщённой функцией. С физической точки зрения δ -функция представлялась Дираком как плотность единичного заряда, помещённого в начале координат. Если этот заряд имеет величину m , то его линейная плотность (величина заряда на единицу длины)

$$\rho(z) = m\delta(z).$$

Из физических соображений следует, что символ $\delta(z)$ обладает свойствами

$$\delta(z) = \begin{cases} \infty, & z = 0; \\ 0, & z \neq 0; \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(z) dz = 1. \quad (4.3)$$

С математической точки зрения символ $\delta(z)$ со свойствами (4.3) не представляет собой функцию в обычном понимании. В результате сложился некоторый интуитивно ясный формализм в применении δ -функции Дирака, с помощью которого физиками достаточно просто были исследованы некоторые важные физические явления. Математикам понадобилось несколько десятков лет, чтобы строго обосновать методы, широко используемые физиками.

Не ставя перед собой задачи полного изложения основ теории обобщённых функций¹, познакомимся с техникой применения обобщённых функций, опираясь на физическое содержание моделируемых явлений.

Дельта-функцию Дирака $\delta(z)$ можно определить соотношением

$$\int_{-\infty}^z \delta(z)\varphi(z)dz = \begin{cases} 0 & \text{при } z < 0, \\ \varphi(0) & \text{при } z \geq 0, \end{cases} \quad (4.4)$$

где $\varphi(z)$ – любая непрерывная функция.

Из (4.4) вытекает, что при сдвиге координаты z

$$\int_{-\infty}^z \delta(z-a)\varphi(z)dz = \begin{cases} 0 & \text{при } z < a, \\ \varphi(a) & \text{при } z \geq a. \end{cases} \quad (4.5)$$

¹ См., например, Кеч В., Теодореску П. Введение в теорию обобщённых функций с приложениями в технике. М.: Мир, 1978. 518 с.

Действительно, при замене переменной $\zeta = z - a$ из (4.4) будем иметь

$$\int_{-\infty}^z \delta(z-a)\varphi(z)dz = \int_{-\infty}^{\zeta} \delta(\zeta)\varphi(\zeta+a)d\zeta = \begin{cases} 0, & \zeta < 0, \\ \varphi(0+a), & \zeta \geq 0. \end{cases}$$

Если в (4.4) положить $\varphi(z) = 1$, придём к соотношениям

$$\int_{-\infty}^z \delta(z)dz = H(z) \Leftrightarrow \frac{dH(z)}{dz} = \delta(z), \quad (4.6)$$

связывающим δ -функцию Дирака и так называемую *единичную функцию Хевисайда*¹ (рис. 4.2, а):

$$H(z) = \begin{cases} 0, & z < 0; \\ 1, & z \geq 0. \end{cases} \quad (4.7)$$

Очевидно, что при сдвиге координаты z на величину a (рис. 4.2, в)

$$H(z-a) = \begin{cases} 0, & z < a; \\ 1, & z \geq a. \end{cases} \quad (4.8)$$

Функция Хевисайда обладает следующими интересными свойствами:

$$[H(z-a)]^\alpha = H(z-a), \quad H(z-a) \cdot H(z-b) = H(z-b), \quad (4.9)$$

т. е. при возведении в любую степень $\alpha > 0$ функция Хевисайда остаётся неизменной, при перемножении двух функций Хевисайда результат равен тому сомножителю, у которого сдвиг координаты больше: $b > a$. В частности, функция Хевисайда безразмерна. Поэтому, как следует из (4.6), размерность δ -функции Дирака обратна размерности аргумента z .

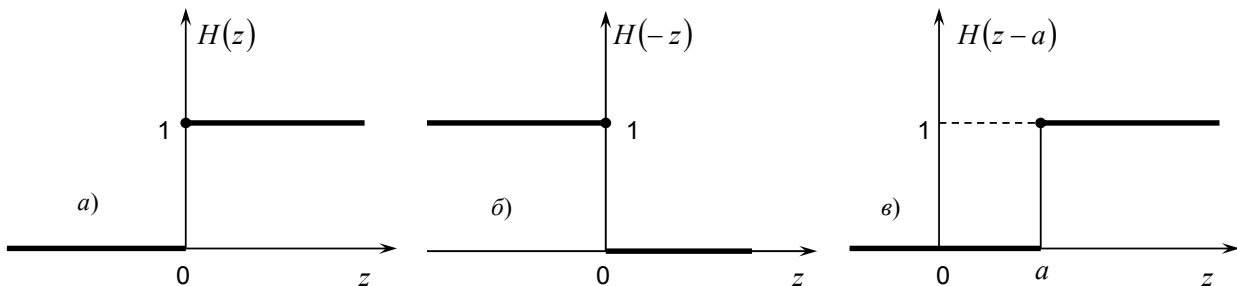


Рис. 4.2. Единичная функция Хевисайда

¹ Функция (4.7) была введена в 1898 г. английским инженером Хевисайдом и сыграла исторически важную роль в решении операционными методами некоторых дифференциальных уравнений теории электрических цепей.

Исходя из (4.7), можно записать (рис. 4.2, б)

$$H(-z) = \begin{cases} 0, & -z < 0 \text{ (или } z > 0); \\ 1, & -z \geq 0 \text{ (или } z \leq 0). \end{cases}$$

Поэтому

$$H(z) + H(-z) = 1. \quad (4.10)$$

Дифференцируя (4.10) по z и учитывая (4.6), будем иметь

$$\delta(z) = \delta(-z). \quad (4.11)$$

Равенство (4.11) указывает на чётность δ -функции Дирака.

Для практических целей чрезвычайно важно, что обобщённую δ -функцию Дирака можно представить как предел последовательности некоторых «хороших» функций, которые называются *дельтообразными последовательностями*.

Самой простой является последовательность вида (рис. 4.3, а)

$$h_{\Delta}(z) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & \text{при } z \in [-\Delta/2, \Delta/2], \\ 0 & \text{при } z \notin [-\Delta/2, \Delta/2], \end{cases} \quad (\Delta > 0). \quad (4.12)$$

Действительно, для любой непрерывной функции $\varphi(z)$ при $z < -\Delta/2$

$$\int_{-\infty}^z h_{\Delta}(z)\varphi(z)dz = \int_{-\infty}^z 0\varphi(z)dz = 0,$$

а при $z \geq \Delta/2$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^z h_{\Delta}(z)\varphi(z)dz &= \int_{-\infty}^{-\Delta/2} h_{\Delta}(z)\varphi(z)dz + \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} h_{\Delta}(z)\varphi(z)dz + \int_{\Delta/2}^z h_{\Delta}(z)\varphi(z)dz = \\ &= \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} h_{\Delta}(z)\varphi(z)dz = \frac{1}{\Delta} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \varphi(z)dz = \frac{1}{\Delta} [\varphi(\xi)\Delta] = \varphi(\xi), \end{aligned}$$

где по интегральной теореме о среднем $-\Delta/2 < \xi < \Delta/2$. Устремляя теперь положительное число Δ к нулю, приходим к равенству

$$\lim_{\Delta \rightarrow +0} \int_{-\infty}^z h_{\Delta}(z)\varphi(z)dz = \begin{cases} 0 & \text{при } z < 0, \\ \varphi(0) & \text{при } z \geq 0. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\lim_{\Delta \rightarrow +0} h_{\Delta}(z) = \delta(z).$$

Данное предельное равенство обеспечивается благодаря тому, что при любом Δ площадь каждого прямоугольника равна единице (рис. 4.3, а).

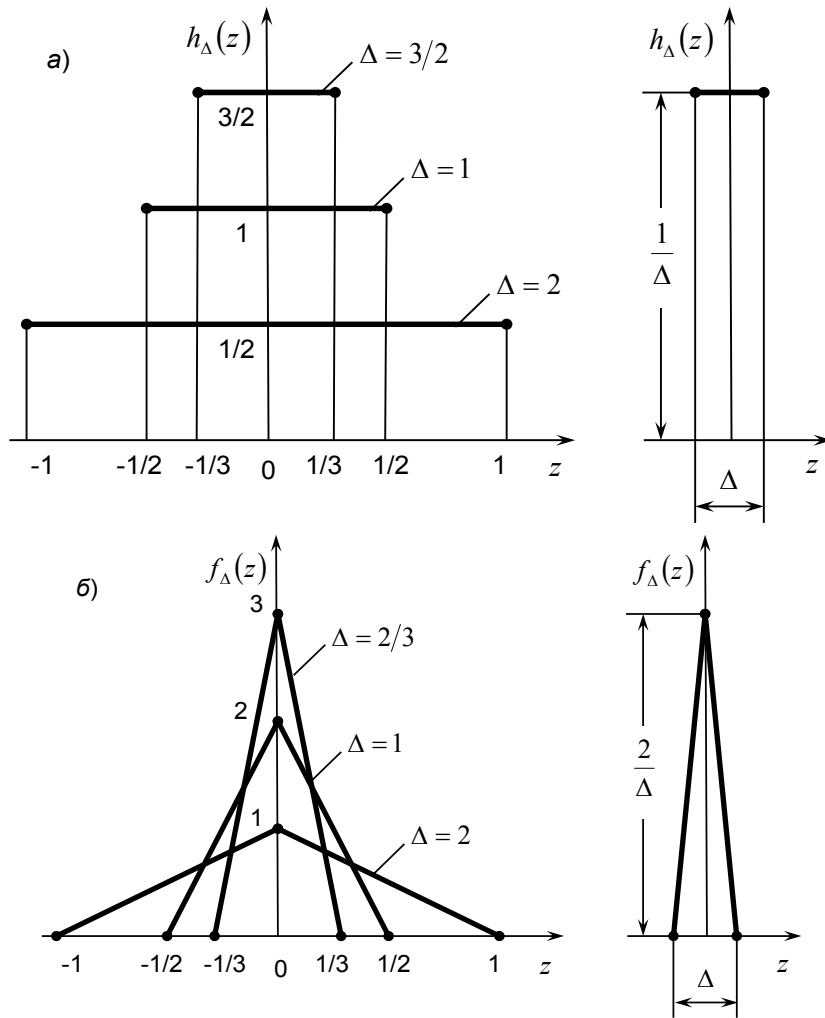


Рис. 4.3. Возможные представления δ -функции Дирака

Чуть более сложной является последовательность вида (рис. 4.3, б)

$$f_\Delta(z) = \begin{cases} 0 & \text{при } z < -\Delta/2, \\ \Delta/2 + \frac{2/\Delta}{\Delta/2} z & \text{при } -\Delta/2 \leq z \leq 0, \\ \Delta/2 - \frac{2/\Delta}{\Delta/2} z & \text{при } 0 < z \leq \Delta/2, \\ 0 & \text{при } z > \Delta/2. \end{cases} \quad (4.13)$$

Так как площадь каждого треугольника равна единице при любом Δ (рис. 4.3, б), легко убедиться в справедливости равенства

$$\lim_{\Delta \rightarrow +0} \int_{-\infty}^z f_\Delta(z) \varphi(z) dz = \begin{cases} 0 & \text{при } z < 0, \\ \varphi(0) & \text{при } z \geq 0, \end{cases}$$

которое означает, что

$$\lim_{\Delta \rightarrow +0} f_\Delta(z) = \delta(z).$$

Дельтообразных последовательностей, подобных (4.12) и (4.13), существует бесконечно много. Каждую из них можно использовать для представления сосредоточенной силы (или сосредоточенного момента) при проведении численных расчётов на ЭВМ. Делается это следующим простым способом.

Рассмотрим равномерно распределённую на отрезке $[-\Delta/2, \Delta/2]$ ($\Delta > 0$) погонную нагрузку (рис. 4.4, а)

$$q_{\Delta}(z) = \begin{cases} \frac{P}{\Delta}, & z \in [-\Delta/2, \Delta/2]; \\ 0, & z \notin [-\Delta/2, \Delta/2]. \end{cases} \quad (4.14)$$

Используя дельтообразную последовательность (4.12), распределение (4.14) можно представить в виде

$$q_{\Delta}(z) = Ph_{\Delta}(z). \quad (4.15)$$

Переходя в (4.15) к пределу $\Delta \rightarrow +0$, получаем

$$\hat{q}(z) = \lim_{\Delta \rightarrow +0} q_{\Delta}(z) = P \lim_{\Delta \rightarrow +0} h_{\Delta}(z) = P\delta(z). \quad (4.16)$$

Это и есть математическое представление распределённой нагрузки от действия сосредоточенной силы. В векторной форме (4.16) можно записать так:

$$\hat{\mathbf{q}}(z) = \hat{q}(z)\mathbf{j} = P\mathbf{j}\delta(z) = \mathbf{P}\delta(z), \quad (4.17)$$

где \mathbf{j} – орт оси y . Если сила \mathbf{P} приложена не в начале координат, а в другой точке с координатой $z = a$ (рис. 4.4, б), то тогда соответствующее распределение получается из (4.17) простым сдвигом:

$$\hat{\mathbf{q}}(z) = \mathbf{P}\delta(z - a).$$

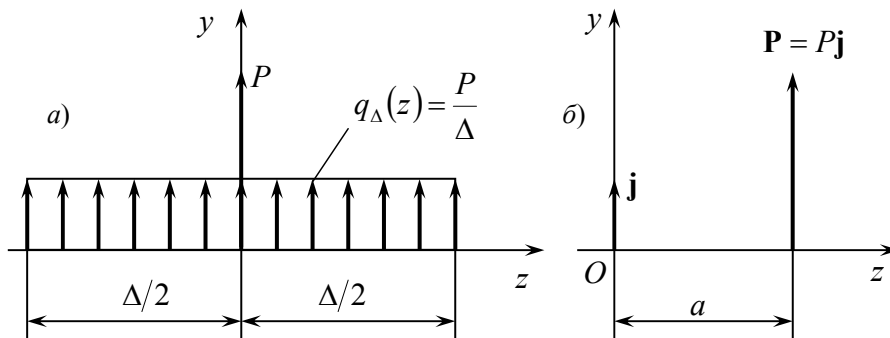


Рис. 4.4. Представление сосредоточенной силы в виде равномерно распределённой нагрузки

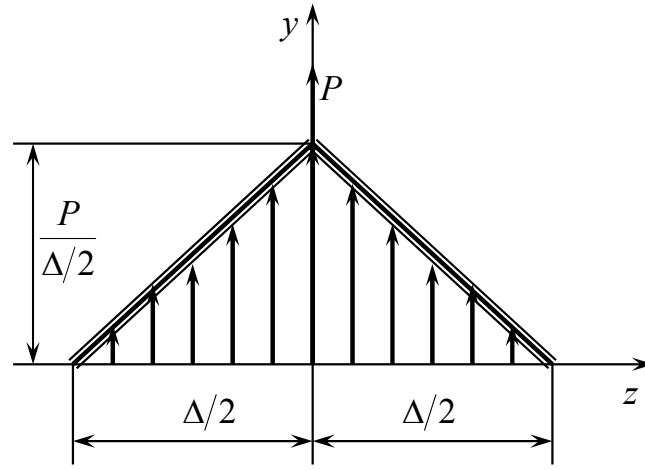


Рис. 4.5. Представление сосредоточенной силы
в виде линейно распределённой нагрузки

Заметим, что в (4.15), (4.16) функция $h_{\Delta}(z)$ играет вспомогательную роль. Вместо неё можно использовать любую другую дельтообразную последовательность, например (4.13). В последнем случае надо рассмотреть нагрузку, распределённую в виде равнобедренного треугольника площадью P (рис. 4.5):

$$q_{\Delta}(z) = \begin{cases} \frac{P}{\Delta/2} \left(1 + \frac{z}{\Delta/2}\right) & \text{при } z \in [-\Delta/2, 0], \\ \frac{P}{\Delta/2} \left(1 - \frac{z}{\Delta/2}\right) & \text{при } z \in [0, \Delta/2], \\ 0 & \text{при } |z| > \Delta/2. \end{cases}$$

Если переписать (4.13) эквивалентным образом

$$f_{\Delta}(z) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta/2} \left(1 + \frac{z}{\Delta/2}\right) & \text{при } z \in [-\Delta/2, 0], \\ \frac{1}{\Delta/2} \left(1 - \frac{z}{\Delta/2}\right) & \text{при } z \in [0, \Delta/2], \\ 0 & \text{при } |z| > \Delta/2, \end{cases}$$

то тогда будем иметь

$$q_{\Delta}(z) = P f_{\Delta}(z).$$

Переходя к пределу $\Delta \rightarrow +0$, получаем

$$\hat{q}(z) = \lim_{\Delta \rightarrow +0} q_{\Delta}(z) = P \lim_{\Delta \rightarrow +0} f_{\Delta}(z) = P\delta(z),$$

что совпадает с представлением (4.16).

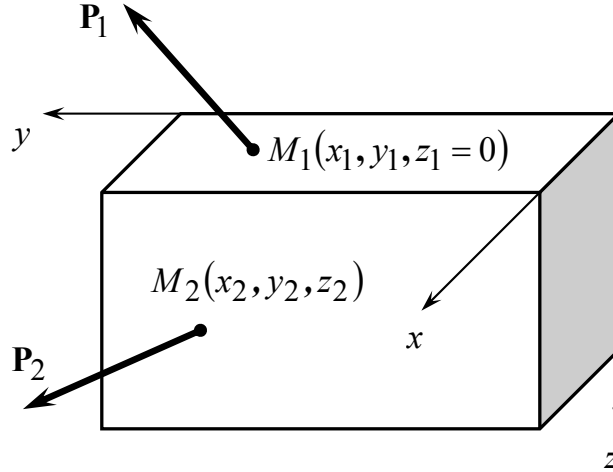


Рис. 4.6. К представлению сосредоточенной силы в виде поверхностной и объёмной распределённой нагрузки

Замечание. До сих пор рассматривалась распределённая нагрузка, приходящаяся на единицу длины. Если сила \mathbf{P}_1 приложена в точке $M_1(x_1, y_1, z_1 = 0)$ на грани параллелепипеда, то она может быть представлена в виде распределённой нагрузки, приходящейся на единицу площади (рис. 4.6):

$$\hat{\mathbf{q}}_1(x, y) = \mathbf{P}_1 \delta(x - x_1) \delta(y - y_1).$$

Соответственно, сосредоточенная сила \mathbf{P}_2 , приложенная в некоторой внутренней точке $M_2(x_2, y_2, z_2)$ параллелепипеда, может быть представлена в виде нагрузки, распределённой по объёму (рис. 4.6):

$$\hat{\mathbf{q}}_2(x, y) = \mathbf{P}_2 \delta(x - x_2) \delta(y - y_2) \delta(z - z_2) \equiv \mathbf{P}_2 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2),$$

где $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ – радиус-вектор произвольной точки пространства, $\mathbf{r}_2 = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}$ – радиус-вектор точки $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

4.2. Табличные интегралы и их практическое применение

При решении задач сопротивления материалов достаточно располагать двумя табличными интегралами, содержащими обобщенные функции Дирака и Хевисайда:

$$\int_0^z f(z)\delta(z-a)dz = f(a)H(z-a), \quad (4.18)$$

$$\int_0^z f(z)H(z-a)dz = H(z-a)\int_a^z f(z)dz, \quad (4.19)$$

где $f(z)$ – некоторая непрерывная функция, $0 \leq z \leq l$, $0 < a < l$. Справедливость (4.18), (4.19) вытекает из (4.5), (4.8):

$$\begin{aligned} \int_0^z f(z)\delta(z-a)dz &= \begin{cases} 0, & z < a; \\ f(a), & z \geq a; \end{cases} & f(a)H(z-a) &= \begin{cases} 0, & z < a; \\ f(a), & z \geq a; \end{cases} \\ \int_0^z f(z)H(z-a)dz &= \begin{cases} 0, & z < a; \\ \int_a^z f(z)dz, & z \geq a; \end{cases} & H(z-a)\int_a^z f(z)dz &= \begin{cases} 0, & z < a; \\ \int_a^z f(z)dz, & z \geq a. \end{cases} \end{aligned}$$

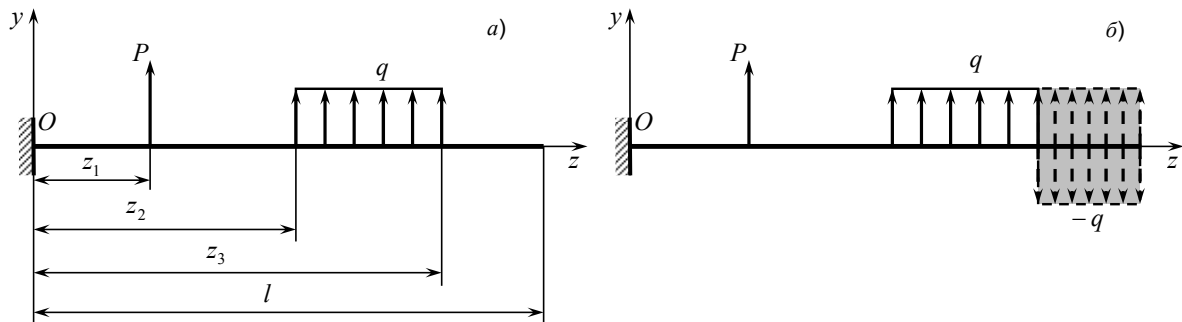


Рис. 4.7. Пример представления активной распределённой нагрузки

Приведём пример вычисления интегралов, содержащих обобщённые функции Дирака и Хевисайда. Глядя на рис. 4.7, а, можно записать

$$q_y(z) = P\delta(z - z_1) + q[H(z - z_2) - H(z - z_3)]$$

или в развёрнутом виде

$$q_y(z) = P\delta(z - z_1) + qH(z - z_2) - qH(z - z_3). \quad (4.20)$$

Последние два слагаемых в (4.20) можно интерпретировать как продолжение действия равномерно распределённой нагрузки интенсивностью q

до конца стержня и одновременное добавление нагрузки с интенсивностью обратного знака $-q$, которая, чтобы ничто не изменилось, равномерно распределена на крайне правом участке стержня (рис. 4.7, б).

Вычисляя интеграл от (4.20) с учётом (4.18) и (4.19), получим

$$\begin{aligned}\int_0^z q_y(z)dz &= P \int_0^z \delta(z-z_1)dz + q \int_0^z H(z-z_2)dz - q \int_0^z H(z-z_3)dz = \\ &= PH(z-z_1) + qH(z-z_2) \int_{z_2}^z dz - qH(z-z_3) \int_{z_3}^z dz = \\ &= PH(z-z_1) + q \cdot (z-z_2) \cdot H(z-z_2) - q \cdot (z-z_3) \cdot H(z-z_3)\end{aligned}$$

или в развёрнутом виде

$$\int_0^z q_y(z)dz = \begin{cases} 0, & 0 \leq z < z_1; \\ P, & z_1 \leq z < z_2; \\ P + q \cdot (z-z_2), & z_2 \leq z < z_3; \\ P + q \cdot (z-z_2) - q \cdot (z-z_3), & z_3 \leq z \leq l. \end{cases}$$

Для полноты общей картины возьмём повторный интеграл:

$$\begin{aligned}\int_0^z \left(\int_0^z q_y(z)dz \right) dz &= \int_0^z [PH(z-z_1) + q(z-z_2)H(z-z_2) - q(z-z_3)H(z-z_3)]dz = \\ &= PH(z-z_1) \int_{z_1}^z dz + qH(z-z_2) \int_{z_2}^z (z-z_2)dz - qH(z-z_3) \int_{z_3}^z (z-z_3)dz = \\ &= P \cdot (z-z_1) \cdot H(z-z_1) + q \cdot \frac{(z-z_2)^2}{2} \cdot H(z-z_2) - q \cdot \frac{(z-z_3)^2}{2} \cdot H(z-z_3).\end{aligned}$$

В развёрнутом виде данное выражение предстанет так:

$$\int_0^z \left(\int_0^z q_y(z)dz \right) dz = \begin{cases} 0, & 0 \leq z < z_1; \\ P \cdot (z-z_1), & z_1 \leq z < z_2; \\ P \cdot (z-z_1) + q \frac{(z-z_2)^2}{2}, & z_2 \leq z < z_3; \\ P \cdot (z-z_1) + q \frac{(z-z_2)^2}{2} - q \frac{(z-z_3)^2}{2}, & z_3 \leq z \leq l. \end{cases}$$

Во всех этих выражениях нетрудно усмотреть простую закономерность.

4.3. Формулировка силовых граничных условий

Для решения практических задач система дифференциальных уравнений технической теории стержней (разд. 2.4) должна быть дополнена силовыми и геометрическими (кинематическими) граничными условиями, отражающими условия закрепления стержня и условия нагружения на его концах.

Возможны два варианта записи силовых граничных условий:

1. Если силы и моменты, приложенные к концам стержня, включаются в выражения погонных силовых и моментных нагрузок q_z , q_y , q_x и m_z , m_y , m_x , то во всех задачах силовые граничные условия являются однородными, т. е.

$$Q_x|_{z=0}=0, Q_y|_{z=0}=0, N|_{z=0}=0, M_x|_{z=0}=0, M_y|_{z=0}=0, M_z|_{z=0}=0;$$

$$Q_x|_{z=l}=0, Q_y|_{z=l}=0, N|_{z=l}=0, M_x|_{z=l}=0, M_y|_{z=l}=0, M_z|_{z=l}=0.$$

2. Если силы и моменты, приложенные к концам стержня, не включаются в выражения погонных нагрузок q_z , q_y , q_x и m_z , m_y , m_x , то тогда в каждой задаче имеют место свои силовые граничные условия вида

$$\begin{cases} Q_x|_{z=0} = -P'_x, Q_y|_{z=0} = -P'_y, N|_{z=0} = -P'_z; \\ M_x|_{z=0} = -L'_x, M_y|_{z=0} = -L'_y, M_z|_{z=0} = -L'_z; \end{cases} \quad (4.21)$$

$$\begin{cases} Q_x|_{z=l} = P''_x, Q_y|_{z=l} = P''_y, N|_{z=l} = P''_z; \\ M_x|_{z=l} = L''_x, M_y|_{z=l} = L''_y, M_z|_{z=l} = L''_z. \end{cases} \quad (4.22)$$

Здесь P'_x , P'_y , P'_z – компоненты внешней силы \mathbf{P}' , а L'_x , L'_y , L'_z – составляющие момента внешних сил \mathbf{L}' , приложенных к левому концу стержня $z=0$. Соответственно, P''_x , P''_y , P''_z – компоненты внешней силы \mathbf{P}'' , а L''_x , L''_y , L''_z – составляющие момента внешних сил \mathbf{L}'' , приложенных к правому концу стержня $z=l$. Наличие знака минус в (4.21) и его отсутствие в (4.22) является следствием ранее принятого соглашения о знаках внутренних силовых факторов для «левой» и «правой» сторон одного и того же поперечного сечения стержня (разд. 1.7) и интегральных уравнений равновесия (1.14), (1.15).

Оба варианта записи силовых граничных условий абсолютно равноправны, выбор того или иного варианта определяется соображениями простоты. Так, первый вариант записи удобен при выводе энергетических соотношений. Второй вариант записи граничных условий удобен при интегрировании системы дифференциальных уравнений (2.57)–(2.60).

5. ТИПОВЫЕ ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ

Проиллюстрируем применение универсального метода решения задач сопротивления материалов с использованием обобщённой функции Дирака и единичной функции Хевисайда на нескольких типовых примерах, расположенных по мере возрастания их сложности.

5.1. Расчёт балки на изгиб

Порядок записи силовых граничных условий (4.21), (4.22) поясним на примере решения статически определимой задачи изгиба стержня постоянной жёсткости (рис. 5.1).

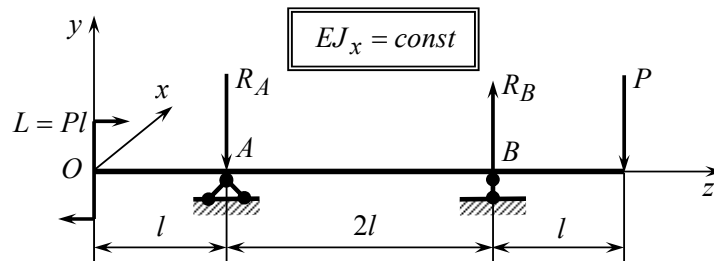


Рис. 5.1. Изгиб стержня постоянной жёсткости

Предварительно определим реакции опор. Для этого запишем уравнение равновесия в проекции на ось y и уравнение моментов относительно точки A :

$$-R_A + R_B - P = 0, \quad P \cdot 3l - R_B \cdot 2l + L = 0.$$

Отсюда находим

$$R_A = P, \quad R_B = 2P.$$

Изгиб стержня описывается системой уравнений (2.59):

$$\frac{dQ_y}{dz} = -q_y, \quad \frac{dM_x}{dz} = -m_x + Q_y, \quad \frac{d\varphi_x}{dz} = \frac{M_x}{EJ_x}, \quad \frac{du_y}{dz} = -\varphi_x, \quad (5.1)$$

которые следует дополнить силовыми граничными условиями

$$Q_y(z=0) = 0, \quad M_x(z=0) = -L, \quad Q_y(z=4l) = -P, \quad M_x(z=4l) = 0,$$

и кинематическими граничными условиями

$$u_y(z=l) = 0, \quad u_y(z=3l) = 0. \quad (5.2)$$

Согласно рис. 5.1 внешние погонные нагрузки равны $q_y(z) = -R_A\delta(z-l) + R_B\delta(z-3l) = -P\delta(z-l) + 2P\delta(z-3l)$, $m_x(z) = 0$.

Интегрируя первое уравнение (5.1) от нуля до z , имеем

$$\begin{aligned} Q_y(z) &= Q_y(0) - \int_0^z q_y dz = \int_0^z [P\delta(z-l) - 2P\delta(z-3l)] dz = \\ &= P[H(z-l) - 2H(z-3l)]. \end{aligned}$$

Подставляя выражение для $Q_y(z)$ во второе уравнение (5.1), находим

$$\begin{aligned} M_x(z) &= M_x(0) + \int_0^z Q_y dz = -L + P \int_0^z [H(z-l) - 2H(z-3l)] dz = \\ &= -Pl + P[(z-l)H(z-l) - 2(z-3l)H(z-3l)]. \end{aligned}$$

Затем, подставив значение $M_x(z)$ в третье уравнение (5.1), получаем

$$\begin{aligned} \varphi_x(z) &= \varphi_x(0) + \int_0^z \frac{M_x}{EJ_x} dz = \\ &= \varphi_x(0) + \frac{P}{EJ_x} \int_0^z [-l + (z-l)H(z-l) - 2(z-3l)H(z-3l)] dz = \\ &= \varphi_x(0) + \frac{P}{EJ_x} \left[-lz + \frac{(z-l)^2}{2} H(z-l) - (z-3l)^2 H(z-3l) \right]. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Наконец, подставляя значение $\varphi_x(z)$ в последнее уравнение (5.1), имеем

$$\begin{aligned} u_y(z) &= u_y(0) - \int_0^z \varphi_x dz = \\ &= u_y(0) - \int_0^z \left\{ \varphi_x(0) + \frac{P}{EJ_x} \left[-lz + \frac{(z-l)^2}{2} H(z-l) - (z-3l)^2 H(z-3l) \right] \right\} dz = \\ &= u_y(0) - \varphi_x(0)z - \frac{P}{EJ_x} \left[-l \frac{z^2}{2} + \frac{(z-l)^3}{6} H(z-l) - \frac{(z-3l)^3}{3} H(z-3l) \right]. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Чтобы отыскать постоянные интегрирования $u_y(0)$, $\varphi_x(0)$ – прогиб и угол поворота поперечного сечения левого конца стержня, обратимся к кинематическим граничным условиям (5.2):

$$u_y \Big|_{z=l} = u_y(0) - \varphi_x(0)l + \frac{Pl^3}{2EJ_x} = 0,$$

$$u_y|_{z=3l} = u_y(0) - 3\varphi_x(0)l + \frac{19Pl^3}{6EJ_x} = 0.$$

Решая данную систему двух алгебраических уравнений, находим

$$u_y(0) = \frac{5Pl^3}{6EJ_x}, \quad \varphi_x(0) = \frac{4Pl^2}{3EJ_x}.$$

В результате выражения (5.3), (5.4) для углов поворотов φ_x и прогибов u_y полностью определены.

5.2. Расчёт ступенчатых стержней на растяжение

Порядок расчёта ступенчатых стержней, поперечные сечения которых меняются скачкообразно, рассмотрим на примере решения статически определимой задачи изотермического растяжения стержня (рис. 5.2).

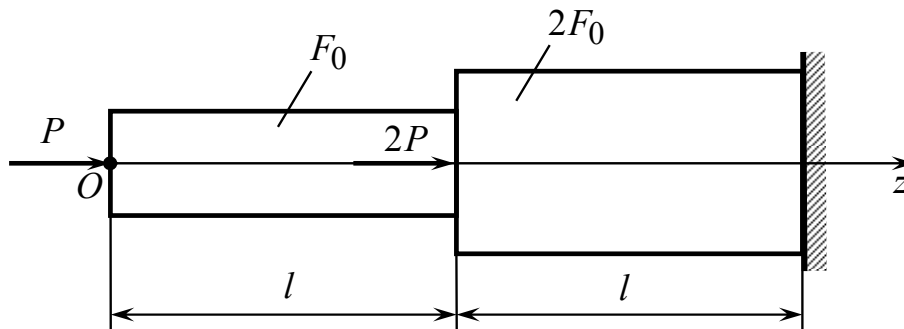


Рис. 5.2. Растяжение ступенчатого стержня

Растяжение стержня описывается системой уравнений (2.57):

$$\frac{dN}{dz} = -q_z, \quad \frac{du_z}{dz} = \frac{N}{EF}. \quad (5.5)$$

которые следует дополнить силовым граничным условием

$$N(z=0) = -P \quad (5.6)$$

и кинематическим граничным условием

$$u_z(z=2l) = 0. \quad (5.7)$$

Второе силовое граничное условие содержит подлежащую определению реакцию опоры R :

$$N(z=2l) = R.$$

Согласно рис. 5.2 внешняя погонная нагрузка равна

$$q_z(z) = 2P\delta(z-l).$$

Отсюда с помощью первого уравнения (5.5) и граничного условия (5.6) находится распределение продольной силы

$$N(z) = N(0) - \int_0^z q_z dz = -P - \int_0^z 2P\delta(z-l) dz = -P[1 + 2H(z-l)].$$

Жесткость ступенчатого стержня изменяется по закону (рис. 5.2)

$$EF(z) = \begin{cases} EF_0, & 0 \leq z < l; \\ 2EF_0, & l \leq z \leq 2l. \end{cases}$$

С использованием функции Хевисайда это выражение принимает вид

$$EF(z) = EF_0[1 - H(z-l)] + 2EF_0H(z-l).$$

Аналогичным выражением описывается и податливость стержня:

$$\frac{1}{EF(z)} = \frac{1}{EF_0}[1 - H(z-l)] + \frac{1}{2EF_0}H(z-l) = \frac{1}{2EF_0}[2 - H(z-l)].$$

Отсюда с учётом (4.9) получаем

$$\frac{N(z)}{EF(z)} = -\frac{P[1 + 2H(z-l)]}{2EF_0}[2 - H(z-l)] = -\frac{P}{2EF_0}[2 + H(z-l)].$$

Подставляя данное выражение во второе уравнение (5.5), находим

$$\begin{aligned} u_z(z) &= u_z(0) + \int_0^z \frac{N(z)}{EF(z)} dz = u_z(0) - \frac{P}{2EF_0} \int_0^z [2 + H(z-l)] dz = \\ &= u_z(0) - \frac{P}{2EF_0} [2z + (z-l)H(z-l)]. \end{aligned}$$

Постоянную интегрирования $u_z(0)$ – осевое смещение поперечного сечения левого конца стержня – можно определить из граничного условия (5.7):

$$u_z|_{z=2l} = u_z(0) - \frac{5Pl}{2EF_0} = 0.$$

Следовательно,

$$u_z(0) = \frac{5Pl}{2EF_0}.$$

5.3. Расчёт разрезной балки на изгиб

Рассматриваемый метод решения задач сопротивления материалов охватывает также случай составного стержня, отдельные части которого связаны между собой внутренними связями типа шарнирного соединения, подвижной заделки и т. п. Порядок решения данного типа задач проиллюстрируем на примере разрезной постоянной жёсткости балки, работающей на изгиб (рис. 5.3).

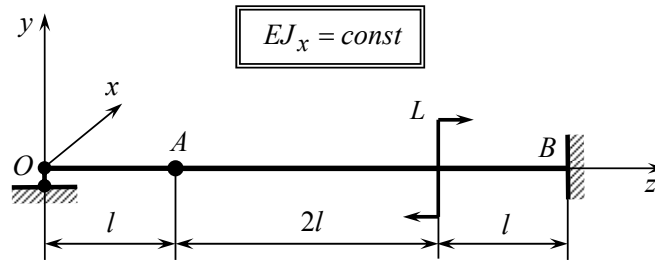


Рис. 5.3. Изгиб разрезной балки постоянной жёсткости

Изгиб сплошной балки в плоскости yz описывается системой уравнений (2.59). Если балка содержит один или несколько врезанных шарниров, то нужно внести изменение в третье уравнение (2.59), записав его в виде

$$\frac{d\varphi_x}{dz} = \frac{M_x}{EJ_x} + \sum_{k=1}^n \Phi_k \delta(z - z_k). \quad (5.8)$$

Здесь n – число врезанных шарниров;

$$\Phi_k = \varphi_x(z_k + 0) - \varphi_x(z_k - 0) \quad (5.9)$$

– скачок угла поворота поперечного сечения балки при переходе через врезанный шарнир, положение которого (в недеформированном состоянии) определяется координатой z_k . При решении задачи величины (5.9) заранее неизвестны, их численное значение определяется с помощью дополнительных ограничивающих условий

$$M_x(z_k) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (5.10)$$

накладываемых на изгибающий момент в сечениях $z = z_k$.

В рассматриваемой задаче (рис. 5.3) изгиб разрезной балки с врезанным шарниром A описывается системой уравнений

$$\frac{dQ_y}{dz} = -q_y, \quad \frac{dM_x}{dz} = -m_x + Q_y, \quad \frac{d\varphi_x}{dz} = \frac{M_x}{EJ_x} + \Phi \delta(z - l), \quad \frac{du_y}{dz} = -\varphi_x. \quad (5.11)$$

Внешние погонные нагрузки равны

$$q_y(z) = 0, \quad m_x(z) = L\delta(z - 3l). \quad (5.12)$$

Кинематические и силовые граничные условия имеют вид

$$u_y(0) = 0, \quad M_x(0) = 0, \quad u_y(4l) = 0, \quad \varphi_x(4l) = 0. \quad (5.13)$$

К ним нужно добавить ограничение

$$M_x(l) = 0. \quad (5.14)$$

Пяти соотношений (5.13), (5.14) достаточно, чтобы определить пять неизвестных величин $Q_y(0)$, $\varphi_x(0)$, $Q_y(4l)$, $M_x(4l)$, Φ .

Проинтегрируем первые два уравнения (5.11) с учётом (5.12), (5.13). В результате получим

$$Q_y(z) = Q_y(0), \quad M_x(z) = Q_y(0)z - LH(z - 3l). \quad (5.15)$$

Отсюда на основании (5.14) имеем

$$M_x(l) = Q_y(0)l = 0$$

или

$$Q_y(0) = 0.$$

Это позволяет переписать (5.15) в виде

$$Q_y(z) = 0, \quad M_x(z) = -LH(z - 3l). \quad (5.16)$$

Подставим (5.16) в третье уравнение (5.11) и проведём интегрирование:

$$\varphi_x(z) = \varphi_x(0) + \Phi H(z - l) - \frac{L}{EJ_x}(z - 3l)H(z - 3l). \quad (5.17)$$

В свою очередь, подстановка (5.17) в последнее уравнение (5.11) и последующее интегрирование с учётом (5.13) даёт следующий результат:

$$u_y(z) = -\varphi_x(0)z - \Phi(z - l)H(z - l) + \frac{L}{EJ_x} \frac{(z - 3l)^2}{2} H(z - 3l). \quad (5.18)$$

Наконец, воспользуемся двумя последними граничными условиями (5.13). На основании (5.17), (5.18) будем иметь

$$u_y(4l) = -4\varphi_x(0)l - 3\Phi l + Ll^2/(2EJ_x) = 0, \quad \varphi_x(4l) = \varphi_x(0) + \Phi - Ll/(EJ_x) = 0.$$

Решая систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 4\varphi_x(0) + 3\Phi = \frac{Ll}{2EJ_x}, \\ \varphi_x(0) + \Phi = \frac{Ll}{EJ_x}, \end{cases}$$

находим

$$\varphi_x(0) = -\frac{5}{2} \frac{Ll}{EJ_x}, \quad \Phi = \frac{7}{2} \frac{Ll}{EJ_x}.$$

Таким образом, задача решена полностью.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Заполните таблицу для геометрических характеристик плоского сечения F , выбирая обозначения и расчётные формулы из следующих двух списков:

$$\{F, S_x, S_y, J_x, J_y, J_{xy}, J_p\}$$

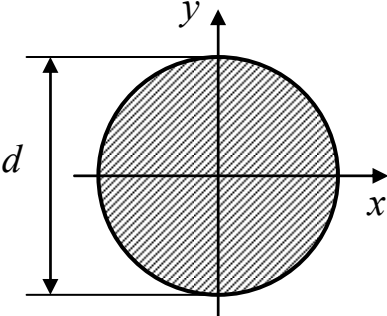
$$\left\{ \iint_F y dx dy, \int_F x dF, \iint_F xy dx dy, \int_F x^2 dF, \iint_F y^2 dx dy, \iint_F (x^2 + y^2) dx dy, \iint_F dx dy \right\}$$

Геометрическая характеристика	Обозначение	Расчётная формула
Статический момент относительно оси x		
Площадь сечения		
Центробежный момент инерции		
Полярный момент инерции		
Осей момент инерции относительно оси x		
Статический момент относительно оси y		

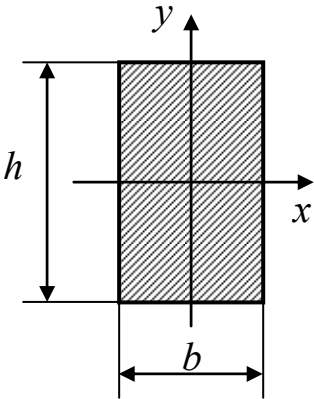
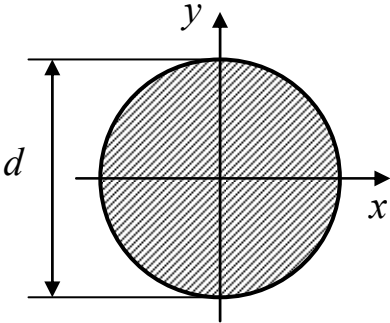
2. Для плоского сечения F оси x, y являются

- центральными осями, если _____
- главными осями, если _____

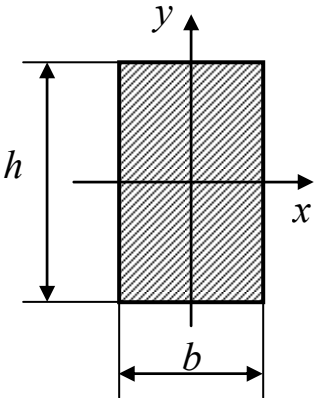
3. Чему равен полярный момент сопротивления сечения?

	<ul style="list-style-type: none"> • $\pi d^3/16$ • $\pi d^3/32$ • $\pi d^4/16$
---	---

4. Чему равен осевой момент инерции сечения относительно центральной оси x ?

	<ul style="list-style-type: none"> • $bh^3/12$ • $bh^3/6$ • $hb^3/12$
	<ul style="list-style-type: none"> • $\pi d^4/32$ • $\pi d^4/64$ • $\pi d^4/12$

5. Чему равен момент сопротивления сечения относительно центральной оси x ?

	<ul style="list-style-type: none"> • $bh^2/12$ • $bh^2/6$ • $hb^2/6$
---	--

6. В нагруженном теле внутренняя сила, приходящаяся на единицу площади какого-либо сечения, называется _____ в данной точке на данной площадке.

- продольной силой
- поперечной силой
- напряжением
- критической силой
- сосредоточенной силой

7. Как называется проекция вектора полного напряжения на плоскость сечения?

- нормальное напряжение
- касательное напряжение
- главное напряжение

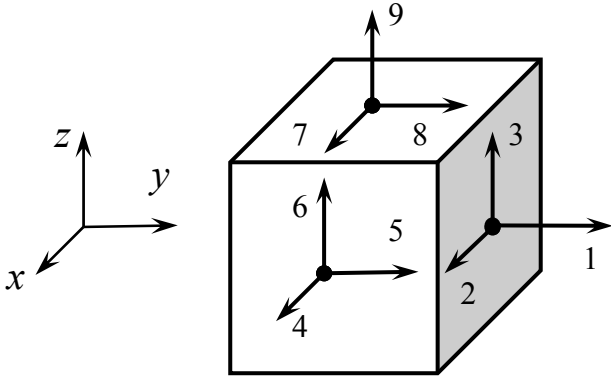
8. Как называется проекция вектора полного напряжения на нормаль сечения?

- нормальное напряжение
- касательное напряжение
- главное напряжение

9. Что такое главная площадка напряжений?

- площадка, на которой отсутствуют нормальные напряжения
- площадка, на которой нормальные и касательные напряжения между собой равны
- площадка, на которой отсутствуют касательные напряжения

10. Впишите номер вектора, соответствующего указанным напряжениям:

	<ul style="list-style-type: none"> • σ_x — _____ • τ_{xy} — _____ • σ_z — _____
---	--

11. Какие выражения соответствуют закону парности касательных напряжений?

- | | | |
|----------------------------|-------------------------|--------------------------|
| • $\tau_{xy} = \tau_{zx}$ | $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ | $2\tau_{xy} = \tau_{yx}$ |
| • $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ | $\tau_{xz} = \tau_{xy}$ | $\tau_{xz} = 2\tau_{zx}$ |
| • $\tau_{zy} = -\tau_{yz}$ | $\tau_{zy} = \tau_{xz}$ | $\tau_{zy} = \tau_{yz}$ |

12. Каков физический смысл модуля Юнга?

- коэффициент пропорциональности между поперечной и продольной деформацией
- коэффициент пропорциональности между нормальным напряжением и линейной деформацией
- коэффициент пропорциональности между касательным напряжением и угловой деформацией

13. Каков физический смысл модуля сдвига?

- коэффициент пропорциональности между поперечной и продольной деформацией
- коэффициент пропорциональности между нормальным напряжением и линейной деформацией
- коэффициент пропорциональности между касательным напряжением и угловой деформацией

14. Заполните таблицу для внутренних усилий в поперечном сечении F , выбирая обозначения и расчётные формулы из следующих двух списков:

$$\{ N, Q_x, Q_y, M_x, M_y, M_z \}$$

$$\left\{ \int_F \sigma_z x dF, -\int_F \sigma_z x dF, \int_F \sigma_z dF, \int_F \sigma_z y dF, -\int_F \sigma_z y dF, \int_F \tau_{xz} dF, \int_F \tau_{yz} dF, \right. \\ \left. \int_F (\tau_{yz} x - \tau_{xz} y) dF, \int_F (\tau_{xz} y - \tau_{yz} x) dF \right\}$$

Внутреннее усилие	Обозначение	Расчётная формула
Поперечная сила по оси x		
Поперечная сила по оси y		
Продольная сила		
Крутящий момент		
Изгибающий момент в плоскости xz		
Изгибающий момент в плоскости yz		

15. Данная система дифференциальных уравнений

$$dN/dz = -q_z, du_z/dz = N/EF$$

описывает

- растяжение-сжатие прямого стержня
- изгиб прямого стержня в плоскости yz
- кручение прямого стержня

16. Данная система дифференциальных уравнений

$$dM_z/dz = -m_z, d\varphi_z/dz = M_z/GJ_k$$

описывает

- растяжение-сжатие прямого стержня
- изгиб прямого стержня в плоскости yz
- кручение прямого стержня

17. Данная система дифференциальных уравнений

$$dQ_y/dz = -q_y, dM_x/dz = Q_y - m_x, d\varphi_x/dz = M_x/EJ_x, du_y/dz = -\varphi_x$$

описывает

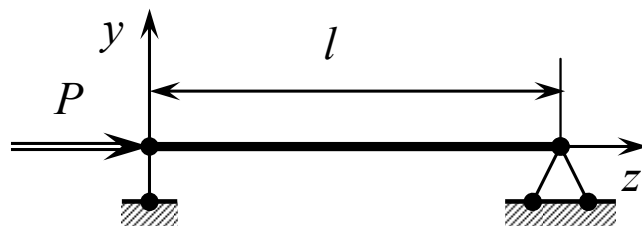
- растяжение-сжатие прямого стержня
- изгиб прямого стержня в плоскости yz
- кручение прямого стержня

18. Запишите систему дифференциальных уравнений, моделирующих растяжение-сжатие прямого стержня:

19. Запишите систему дифференциальных уравнений, моделирующих кручение прямого стержня:

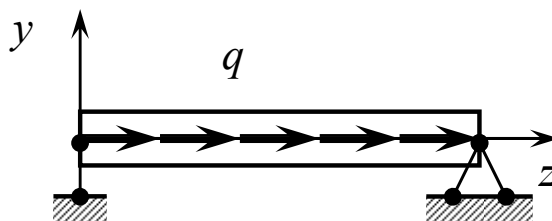
20. Запишите систему дифференциальных уравнений, моделирующих изгиб прямого стержня в плоскости yz :

21. Укажите правильный вариант записи силового граничного условия. Для выбранного варианта впишите кинематические граничные условия.



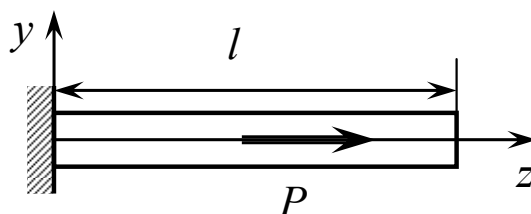
- $N(0) = P$, _____
- $N(0) = -P$, _____
- $N(l) = 0$, _____

22. Укажите правильный вариант записи силового граничного условия. Для выбранного варианта впишите кинематические граничные условия.



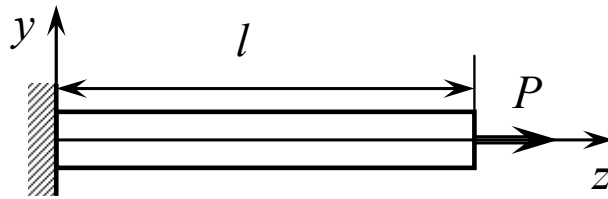
- $N(0) = 0$, _____
- $N(0) = -q$, _____
- $N(0) = q$, _____

23. Укажите правильный вариант записи силового граничного условия. Для выбранного варианта впишите кинематические граничные условия.



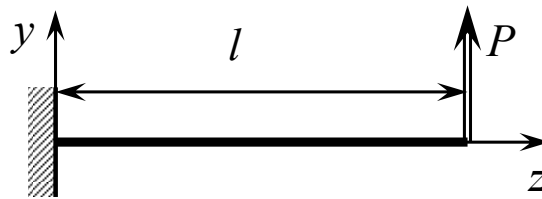
- $N(0) = -P$, _____
- $N(l) = P$, _____
- $N(l) = 0$, _____

24. Укажите правильный вариант записи силового граничного условия. Для выбранного варианта впишите кинематические граничные условия.



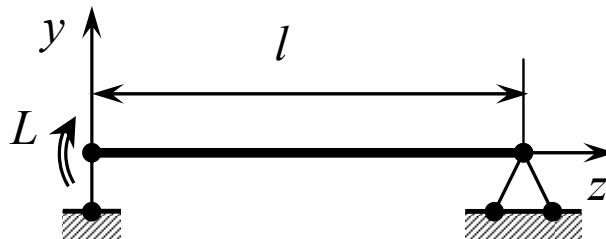
- $N(l) = -P$, _____
- $N(l) = P$, _____
- $N(l) = 0$, _____

25. Укажите правильный вариант записи силового граничного условия. Для выбранного варианта впишите кинематические граничные условия.



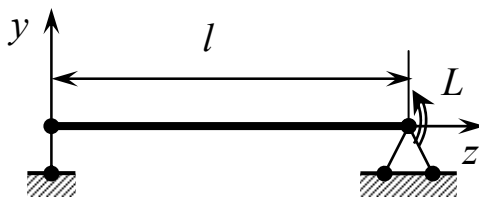
- $Q_y(l) = -P$, $M_x(l) = 0$, _____
- $Q_y(l) = P$, $M_x(l) = 0$, _____

26. Укажите правильный вариант записи силового граничного условия. Для выбранного варианта впишите кинематические граничные условия.



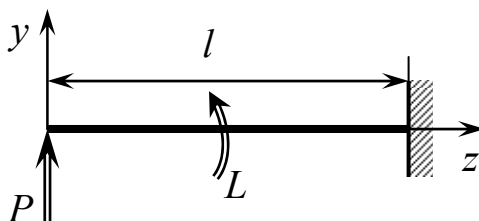
- $Q_y(0) = 0$, $M_x(l) = 0$, _____
- $M_x(0) = -L$, $M_x(l) = 0$, _____
- $M_x(0) = L$, $M_x(l) = 0$, _____

27. Укажите правильный вариант записи силового граничного условия. Для выбранного варианта впишите кинематические граничные условия.



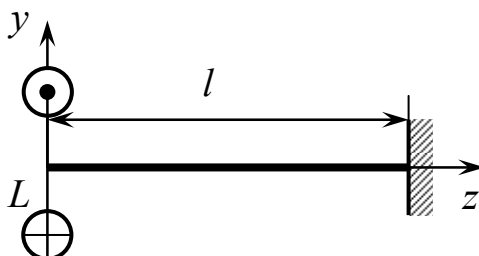
- $Q_y(0) = 0$, $M_x(l) = -L$, _____
- $M_x(l) = -L$, $M_x(0) = 0$, _____
- $M_x(l) = L$, $M_x(0) = 0$, _____

28. Укажите правильный вариант записи силового граничного условия. Для выбранного варианта впишите кинематические граничные условия.



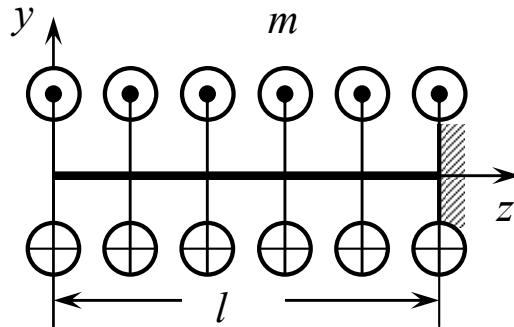
- $M_x(0) = 0$, $M_x(l) = L$, _____
- $Q_y(0) = P$, $M_x(l) = L$, _____
- $Q_y(0) = -P$, $M_x(0) = 0$, _____

29. Укажите правильный вариант записи силового граничного условия. Для выбранного варианта впишите кинематические граничные условия.



- $M_z(0) = 0$, _____
- $M_z(0) = L$, _____
- $M_z(0) = -L$, _____

30. Укажите правильный вариант записи силового граничного условия. Для выбранного варианта впишите кинематические граничные условия.



- $M_z(0) = m$, _____
- $M_z(0) = 0$, _____
- $M_z(l) = 0$, _____

31. Способность конструкций и деталей машин выдерживать рабочие нагрузки без разрушения и пластических деформаций называется

- прочностью
- жесткостью
- устойчивостью

32. Способность конструкций и деталей машин выдерживать рабочие нагрузки без значительных упругих деформаций, которые могут нарушить их нормальную работу, называется

- прочностью
- жесткостью
- устойчивостью

33. Способность конструкции и её элементов сохранять определенную начальную форму упругого равновесия под нагрузкой называется

- прочностью
- жесткостью
- устойчивостью

34. Способность материальных тел восстанавливать первоначальную форму и размеры после снятия нагрузки называется

- упругостью
- пластичностью
- материальной однородностью
- изотропностью

35. Способность материальных тел не восстанавливать первоначальную форму и размеры после снятия нагрузки называется

- упругостью
- пластичностью
- материальной однородностью
- изотропностью

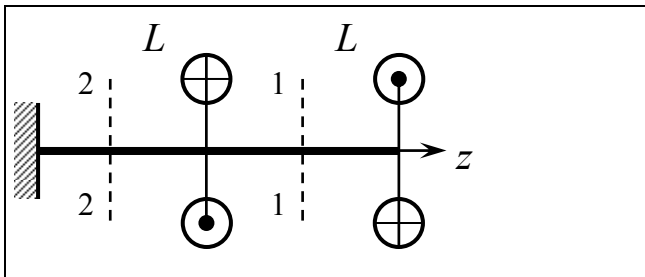
36. Способность материала проявлять одинаковые свойства во всех точках называется

- упругостью
- пластичностью
- материальной однородностью
- изотропностью

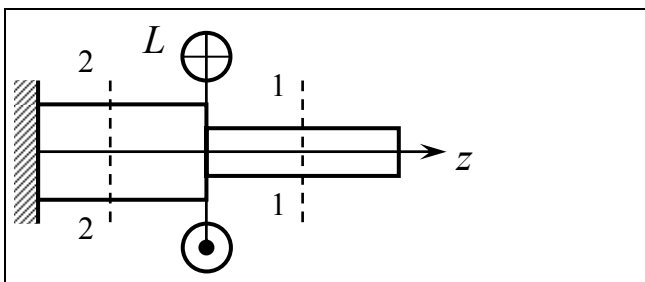
37. Способность материала проявлять одинаковые свойства во всех направлениях называется

- упругостью
- пластичностью
- материальной однородностью
- изотропностью

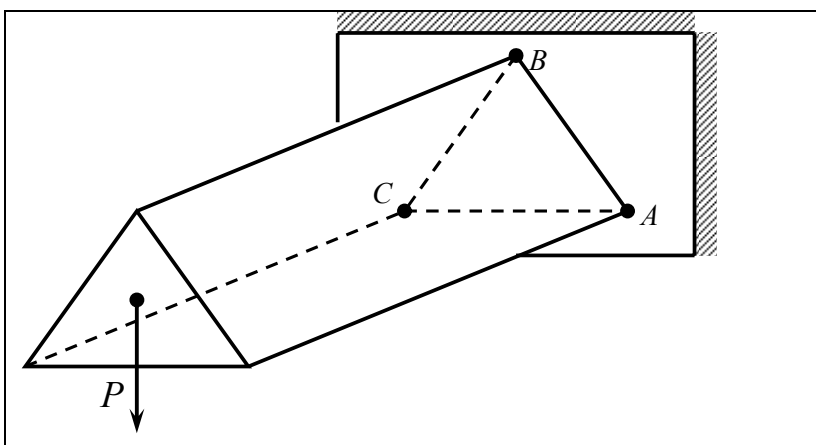
38. Чему равны крутящие моменты в сечениях бруса 1 – 1 и 2 – 2?

	<ul style="list-style-type: none"> • $M_{z1} = 0, M_{z2} = L$ • $M_{z1} = L, M_{z2} = 0$ • $M_{z1} = L, M_{z2} = 2L$ • $M_{z1} = L, M_{z2} = -L$
---	--

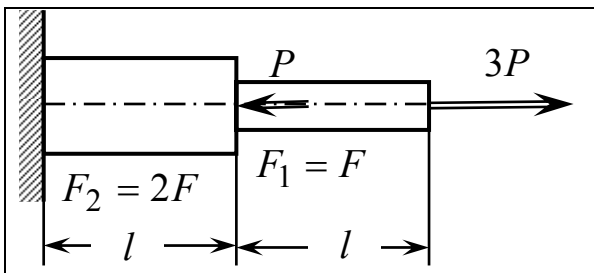
39. Как соотносятся между собой крутящие моменты в сечениях бруса 1 – 1 и 2 – 2?

	<ul style="list-style-type: none"> • $M_{z1} = M_{z2}$ • $M_{z1} < M_{z2}$ • $M_{z1} > M_{z2}$
---	--

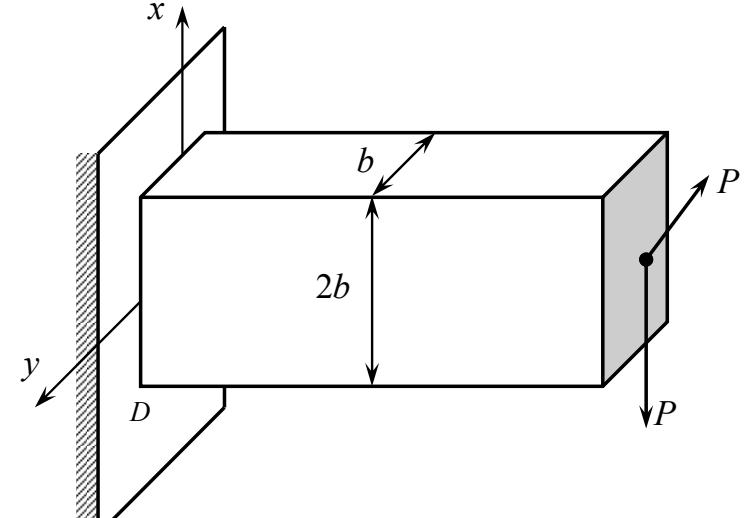
40. В какой из точек возникнут наибольшие по модулю нормальные напряжения?

	<ul style="list-style-type: none"> • A • B • C
---	---

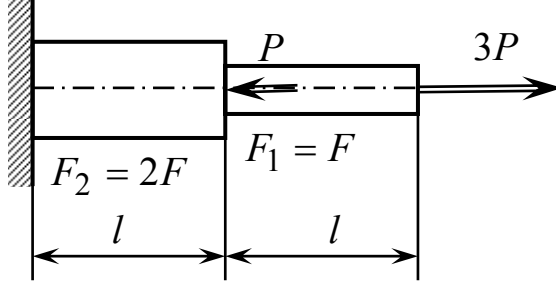
41. Определите абсолютное удлинение ступенчатого стержня.

	<ul style="list-style-type: none"> • $\Delta l = 2 Pl / EF$ • $\Delta l = 4 Pl / EF$ • $\Delta l = 5 Pl / EF$
---	---

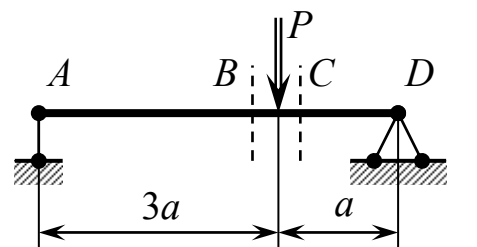
42. Как изменится напряжение в точке D , если убрать силу P , параллельную оси y ?

	<ul style="list-style-type: none"> • увеличится в два раза • уменьшится в два раза • изменится знак • уменьшится в три раза • не изменится
---	---

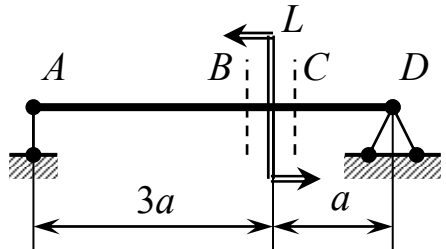
43. Определите абсолютное удлинение ступенчатого стержня.

	<ul style="list-style-type: none"> • $\Delta l = 2 \frac{Pl}{EF}$ • $\Delta l = 4 \frac{Pl}{EF}$ • $\Delta l = 5 \frac{Pl}{EF}$
--	---

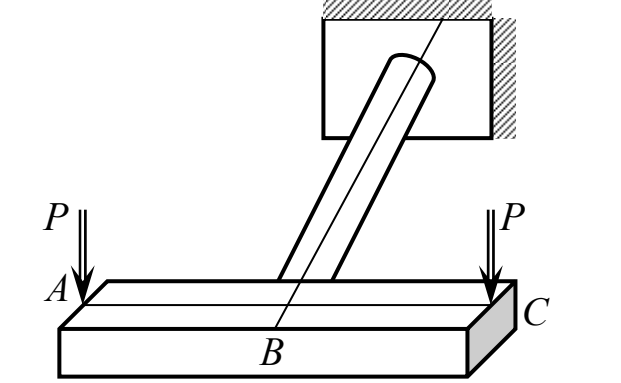
44. Чему равны (по модулю) изгибающие моменты в сечениях A , B , C , D ? (Сечения B и C находятся на ничтожно малых расстояниях от сечения, где приложена сила P).

	<ul style="list-style-type: none"> • $M_A = 0, M_B = M_C = 2P/3, M_D = Pa$ • $M_A = M_B = 0, M_C = 2Pa, M_D = Pa$ • $M_A = M_D = 0, M_B = 2Pa, M_C = Pa$ • $M_A = M_D = 0, M_B = M_C = 3Pa/4$
---	---

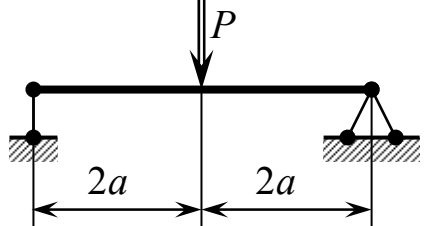
45. Чему равны (по модулю) изгибающие моменты в сечениях A , B , C , D ? (Сечения B и C находятся на ничтожно малых расстояниях от сечения, где приложен момент L).

	<ul style="list-style-type: none"> • $M_A = 0, M_B = M_C = L, M_D = 2L$ • $M_A = M_D = 0, M_B = 3L/4, M_C = 5L/4$ • $M_A = M_D = 0, M_B = 3L/4, M_C = L/4$ • $M_A = M_D = 0, M_B = M_C = 3L/4$
---	--

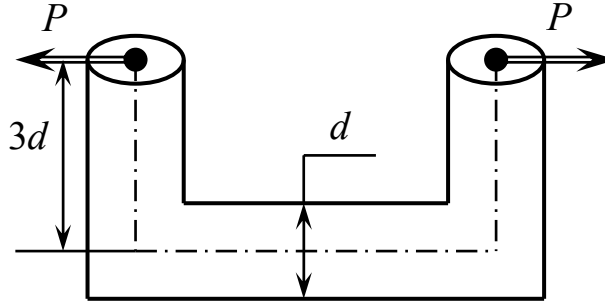
46. Стержневая система состоит из круглого бруса диаметром d , длиной l и перпендикулярного к нему стержня ABC . На концах стержня ABC приложены силы P , причём $AB = BC = 2l$. Момент сопротивления поперечного сечения бруса при кручении $W_k = \pi d^3/16$, а при изгибе $W_x = \pi d^3/32$. Как изменится наибольшее расчетное напряжение $\sigma_{экв} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$ в опасном сечении бруса, если убрать одну из сил?

	<ul style="list-style-type: none"> • уменьшится в четыре раза • не изменится • уменьшится в два раза • увеличится в два раза • уменьшится в полтора раза
---	---

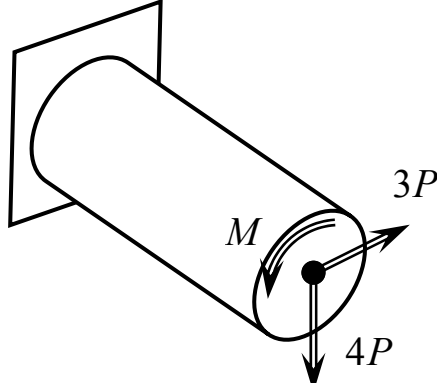
47. Укажите на формулу расчёта размера b квадратного поперечного сечения балки, исходя из условия прочности.

	<ul style="list-style-type: none"> • $b \geq \sqrt{6Pa/[\sigma]}$ • $b \geq \sqrt[4]{6Pa/[\sigma]}$ • $b \geq \sqrt[3]{6Pa/[\sigma]}$
---	---

48. Стержень подвергается изгибу с растяжением силами P . Момент сопротивления круглого сечения при изгибе равен $\pi d^3/32$. При каком значении сил P достигается предельное напряжённое состояние?

	<ul style="list-style-type: none"> • $P = \pi d^2 [\sigma] / 100$ • $P = \pi d^3 [\sigma] / 100$ • $P = \pi d^2 [\sigma] / 92$ • $P = \pi d^2 [\sigma] / 32$
---	--

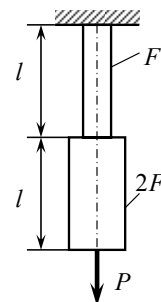
49. Один конец бруса диаметра d и длины l жестко закреплен, а другой конец нагружен вертикальной и горизонтальной силами, а также скручивающим моментом $M = 10Pl$. Момент сопротивления поперечного сечения бруса при кручении $W_k = \pi d^3/16$, а при изгибе $W = \pi d^3/32$. Используя энергетическую гипотезу прочности, по которой $\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$, определить наибольшее допустимое значение силы P .

	<ul style="list-style-type: none"> • $P = \pi d^3 [\sigma] / 16l$ • $P = \pi d^3 [\sigma] / 320l$ • $P = \pi d^3 [\sigma] / 32l$ • $P = \pi d^2 [\sigma] / 320l$
---	--

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

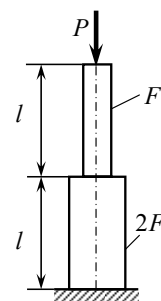
Задача 1

Вертикально расположенный ступенчатый брус нагружен на свободном конце растягивающей силой P . Найти распределение продольной силы, нормального напряжения и осевого перемещения по длине бруса. Заданы площадь F , длина l , удельный вес γ , модуль Юнга E .



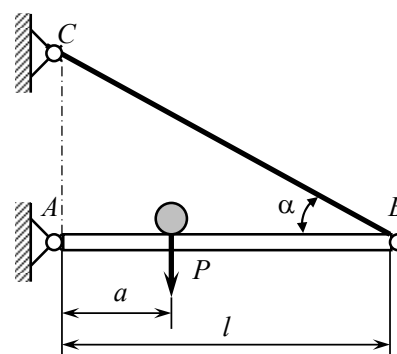
Задача 2

Вертикально расположенный ступенчатый брус нагружен на свободном конце сжимающей силой P . Найти распределение продольной силы, нормального напряжения и осевого перемещения по длине бруса. Известны площадь F , длина l , удельный вес γ , модуль Юнга E .



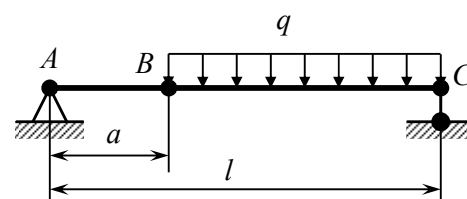
Задача 3

Консольный кран несёт нагрузку P . Определить внутренние усилия и перемещения балки AB , считая тягу BC нерастяжимой. Принять для балки AB площадь и момент инерции поперечного сечения равными F , J ; модуль Юнга — E . Геометрические размеры указаны на рисунке.

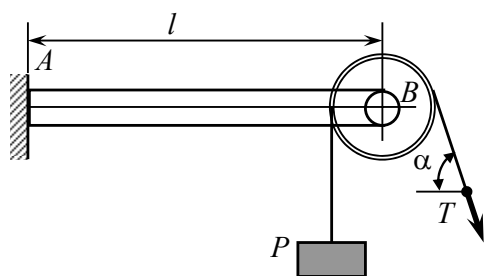


Задача 4

К шарнирно опёртой разрезной балке ABC приложена распределённая нагрузка интенсивностью q . Считая известными размеры a и l , модуль Юнга E и момент инерции поперечного сечения J , определить внутренние усилия и перемещения балки.

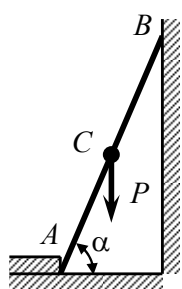


Задача 5



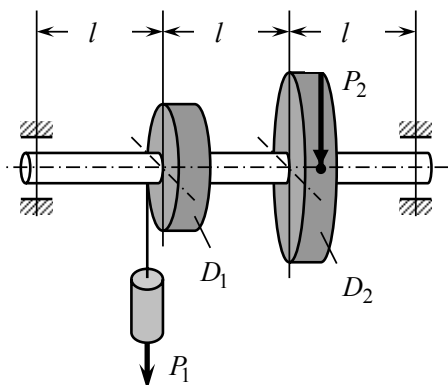
На свободном конце зашкелённой балки AB шарнирно закреплён блок, через который перекинут трос для поднятия груза P . Определить силу натяжения T , внутренние усилия и перемещения балки, считая известными длину l , угол α , модуль Юнга E , площадь F и момент инерции J поперечного сечения балки.

Задача 6



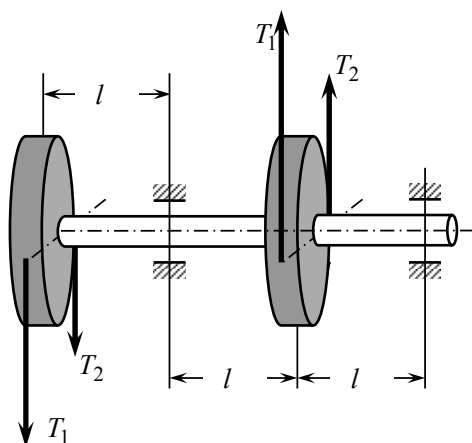
На середине лестницы AB , установленной под углом α , находится человек весом P . Считая лестницу балкой с поперечным сечением площадью F , моментом инерции J , длиной $AB = l$ и модулем Юнга E , определить внутренние усилия и перемещения. Силами трения пренебречь.

Задача 7



На круглый вал диаметром d насажены два колеса диаметром D_1 и D_2 , на которые действуют вес груза P_1 и уравновешивающая сила P_2 , как показано на рисунке. Определить величину силы P_2 , внутренние усилия и перемещения вала, полагая известными вес P_1 , модуль Юнга E , модуль сдвига G и длину l .

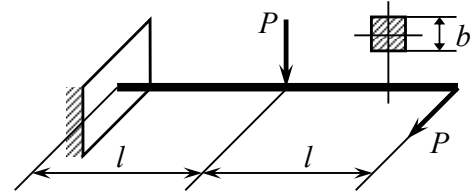
Задача 8



Два шкива одинакового диаметра D насажены на круглый вал диаметром d и передают мощность W при постоянной скорости вращения ω . Натяжение ведущего ремня вдвое больше натяжения ведомого ремня: $T_1 = 2T_2$. Определить силы натяжения, внутренние усилия и перемещения вала, полагая известными модуль Юнга E , модуль сдвига G и длину l .

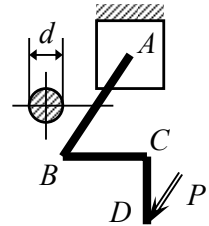
Задача 9

Определить внутренние усилия и перемещения прямого бруса, нагруженного вертикальной и горизонтальной силами одинаковой величины P , перпендикулярными оси бруса. Поперечное сечение бруса – квадрат со стороной b , модуль Юнга – E .



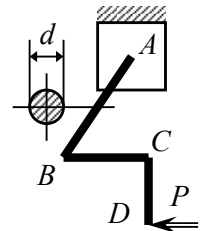
Задача 10

Определить внутренние усилия и перемещения на участке AB консольного пространственного бруса $ABCD$ круглого сечения диаметром d , нагруженного горизонтальной силой P . Модуль Юнга равен E , геометрические размеры: $AB = l$, $BC = CD = l/2$.



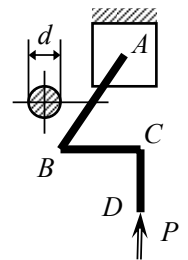
Задача 11

Определить внутренние усилия и перемещения на участке AB консольного пространственного бруса $ABCD$ круглого сечения диаметром d , нагруженного горизонтальной силой P . Модуль Юнга равен E , геометрические размеры: $AB = l$, $BC = CD = l/2$.



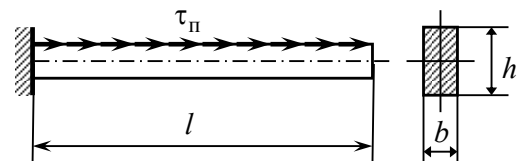
Задача 12

Определить внутренние усилия и перемещения на участке AB консольного пространственного бруса $ABCD$ круглого сечения диаметром d , нагруженного вертикальной силой P . Модуль Юнга равен E , геометрические размеры: $AB = l$, $BC = CD = l/2$.

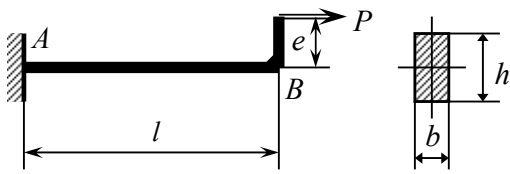


Задача 13

Определить внутренние усилия и перемещения бруса прямоугольного сечения, нагруженного по верхней грани касательной нагрузкой τ_{Π} , Па. Длина бруса l , модуль Юнга E .

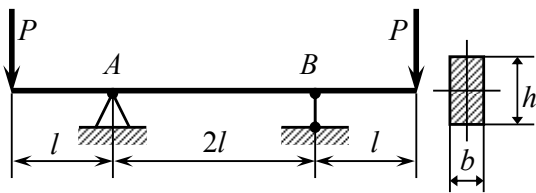


Задача 14



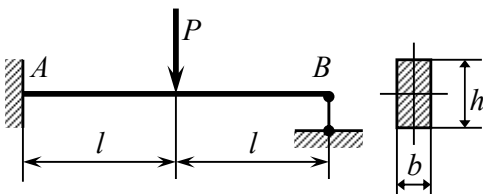
Определить внутренние усилия и перемещения консольного бруса AB прямоугольного сечения, нагруженного растягивающей силой P с эксцентриситетом e . Длина бруса l , модуль Юнга E .

Задача 15



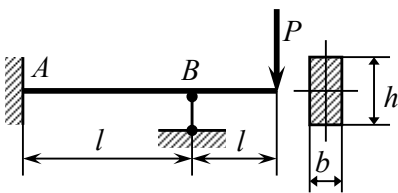
Определить внутренние усилия и перемещения консольной балки прямоугольного сечения, нагруженной двумя силами P , модуль Юнга равен E . Размеры указаны на рисунке.

Задача 16



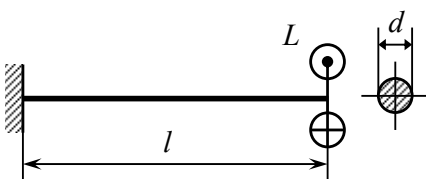
Определить внутренние усилия и перемещения консольной балки прямоугольного сечения, нагруженной силой P и имеющей удельный вес γ . Модуль Юнга равен E , размеры указаны на рисунке.

Задача 17



Определить внутренние усилия и перемещения консольной балки прямоугольного сечения, нагруженной консольной силой P . Модуль Юнга E , размеры указаны на рисунке.

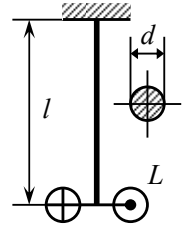
Задача 18



Найти внутренние усилия и перемещения горизонтальной балки круглого сечения, имеющей удельный вес γ и нагруженной на свободном конце крутящим моментом L . Модуль Юнга и модуль сдвига равны E , G . Размеры указаны на рисунке.

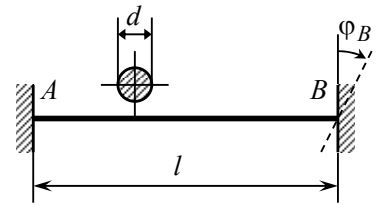
Задача 19

Найти внутренние усилия и перемещения вертикальной балки круглого сечения, имеющей удельный вес γ и нагруженной на свободном конце крутящим моментом L . Модули Юнга и сдвига равны E и G , размеры указаны на рисунке.



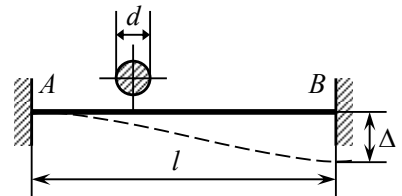
Задача 20

Определить внутренние усилия и перемещения ненагруженной балки AB с заделанными концами, если правая заделка будет повернута вокруг точки B на угол φ_B . Модуль Юнга равен E . Размеры указаны на рисунке.



Задача 21

Балка AB заделана по концам и не несёт нагрузки. Правая заделка B переместилась поступательно вниз на величину Δ . Определить внутренние усилия и перемещения. Модуль Юнга равен E . Размеры указаны на рисунке.



БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Александров, А.В.* Сопротивление материалов / А.В. Александров, В.Д. Потопов, Б.П. Державин. – М. : Высш. шк., 1995. – 560 с.
2. *Феодосьев, В.И.* Сопротивление материалов / В.И. Феодосьев. – М. : Наука, 1979. – 560 с.
3. *Феодосьев, В.И.* Десять лекций-бесед по сопротивлению материалов / В.И. Феодосьев. – М. : Наука, 1975. – 176 с.
4. *Белый, В.Д.* Прочность и устойчивость стержневых систем : учеб. пособие / В.Д. Белый. – Омск : ОмПИ, 1981. – 72 с.
5. *Писаренко, Г.С.* Справочник по сопротивлению материалов / Г.С. Писаренко, А.П. Яковлев, В.В. Матвеев. – Киев : Наукова думка, 1975. – 704 с.
6. *Макаров, Е.Г.* Сопротивление материалов на базе MathCad / Е.Г. Макаров. – СПб. : БХВ-Петербург, 2004. – 512 с.
7. Расчётные и тестовые задания по сопротивлению материалов: учеб. пособие / Л.С. Минин [и др.]; под ред. В.Е. Хроматова. – М. : Высш. шк., 2008. – 224 с.
8. *Соколовский, З.Н.* Расчётно-графические работы по сопротивлению материалов в MS Excel : учеб. пособие / З.Н. Соколовский, Е.П. Степанова, М.А. Фёдорова. – Омск : Изд-во ОмГТУ, 2008. – 80 с.

Учебное издание

Корнеев Сергей Александрович

ТЕХНИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ СТЕРЖНЕЙ. ПРИМЕНЕНИЕ ОБОБЩЁННЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ

Учебное пособие

Редактор *М. А. Болдырева*

Компьютерная верстка *Е. В. Беспаловой*

ИД № 06039 от 12.10.2001 г.

Сводный темплан 2011 г.

Подписано в печать 11.05.2011. Формат 60×84 ¹/₁₆. Бумага офсетная.

Отпечатано на дупликаторе. Усл. печ. л. 5,25. Уч.-изд. л. 5,25.

Тираж 50 экз. Заказ 347.

Издательство ОмГТУ. 644050, г. Омск, пр. Мира, 11; т. 23-02-12
Типография ОмГТУ