Нахождения уравнения изгиба балки

Докладчик: Пиневич В. Г.
Научный руководитель: Чередниченко А. В.

группа ФН2-41Б

15 июня 2022 г.

Условия равновесия

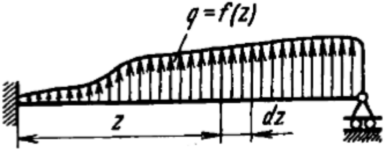
Состояния равновесия

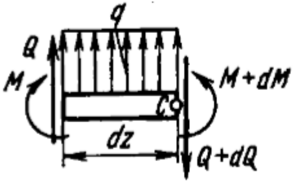
$$\begin{cases}\sum F_z = 0\\ \sum M_z = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Q + qdz - Q - Qdz = 0 \\ M + Qdz + qdz\frac{dz}{z} - M - dM = 0\end{cases}$$

Получаем итоговые условия равновесия

$$\begin{cases}\frac{dQ}{dz} = q\\ \frac{dM}{dz} = Q\end{cases}$$

Равно распределенная нагрузка



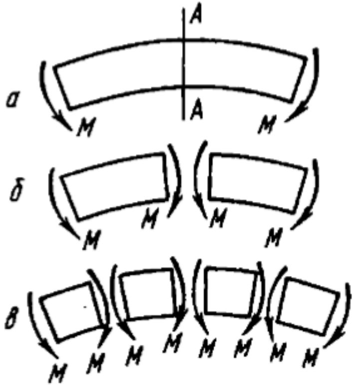


Чистый изгиб

Условия чистого изгиба

Только изгибающие моменты, $Q = 0, M = const$

Сечение балки

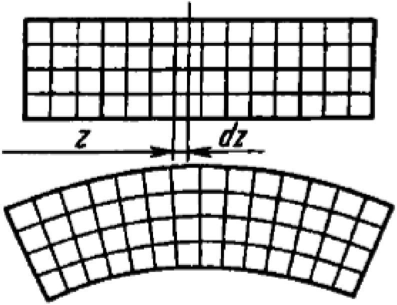


Деформация сечения

Рассмотрим деформацию как поворот плоских поперечных сечений относительно друг друга. Слой который не изменится при изгибе — нейтральный.

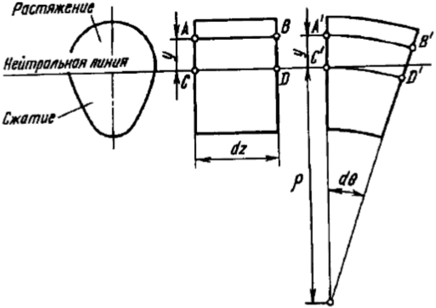
Кривизна нейтрального слоя

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dz}$$



Относительное удлинение и напряженность

Случайный отрезок $AB = dz$ получит приращение $A'B' - AB$. С учетом того, что сечение остается плоским,
$A'B' - AB = (\rho + y)d\theta - \rho d\theta = y d\theta$,
где y — расстояние от AB до CD.



Относительное удлинение AB

$$\varepsilon = \frac{y d\theta}{dz} = \frac{y}{\rho}$$

Напряженность

$$\sigma = E\varepsilon = E\frac{y}{\rho}$$

Изгибающий момент

Изгибающий момент в поперечном сечении стержня может быть выражен через напряжения σ.
Момент сил σdF относительно оси y равен нулю, а относительно x – полному изгибающему моменту M.

Изгибающий момент M_y

$$M_y = \int_F \sigma x dF = \frac{E}{\rho} \int_F y x dF = 0$$

Изгибающий момент M_x

$$M_x = \int_F \sigma y dF = \frac{E}{\rho} \int_F \sigma y^2 dF = M$$

Зависимость кривизны стержня от изгибающего момента

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ_x}$$

Дифференциальное уравнение равновесия стержня

Форма изогнутого стержня

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} \approx y''$$

Дифференциальное уравнение балки

$$y'' = \frac{M}{EJ_x}$$

Угол поворота

$$\theta = y'$$

Момент

$$M = EJ_x y''$$

Точечная сила

$$Q = EJ_x y'''$$

Распр. нагрузка

$$q_y = EJ_x y^{IV}$$

Метод начальных коэффициентов

Представим полученные выражения в виде системы. Учитывая граничные условия, решаем ее, получаем уравнение прогиба стержня $y(z)$.

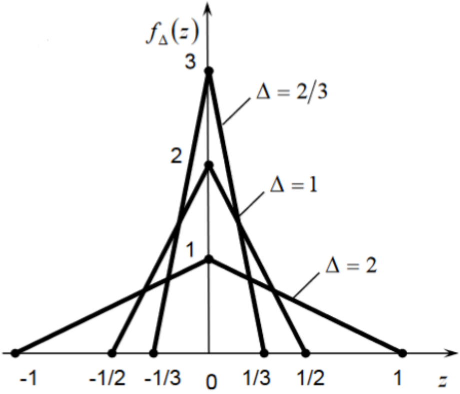
$$\begin{cases} \frac{dQ}{dz} - q_y(z) = 0 \\ \frac{dM}{dz} - Q = 0 \\ \frac{d\theta}{dz} - \frac{M}{EJ_x(z)} = 0 \\ \frac{dy}{dz} - \theta = 0 \end{cases}$$

Метод обобщенных коэффициентов

Функция Дирака

$$\int_{-\infty}^{z} \delta(z-a)\varphi(z)dz = \begin{cases} \infty, z = a \\ 0, z \neq a \end{cases}$$

Возможное представление функции Дирака

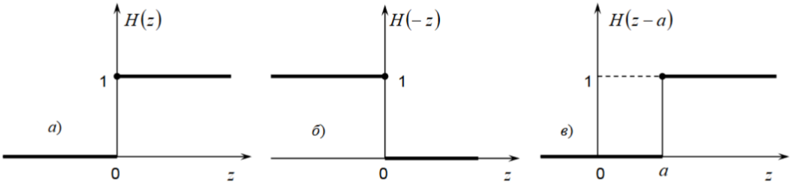


Метод обобщенных коэффициентов

Функция Хевисайда

$$H(z-a)=\begin{cases}0, z<a\\ 1, z\geqslant a\end{cases}$$

Единичная функция Хевисайда



Метод обобщенных коэффициентов

Связь функций Дирака и Хевисайда

$$\int_{-\infty}^{z} \delta(z-a)dz = H(z)$$

Интегрирование функции Дирака

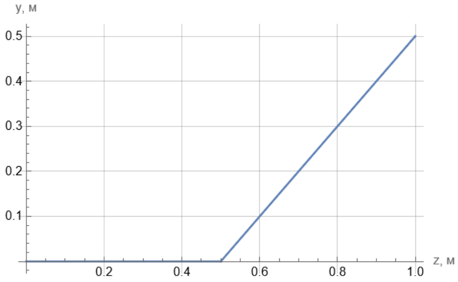
$$\int_{0}^{z} f(z)\delta(z-a)dz = f(a)H(z-a)$$

Интегрирование функции Хевисайда

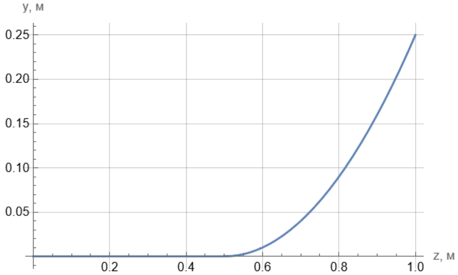
$$\int_{0}^{z} f(z)H(z-a)dz = H(z-a)\int_{a}^{z} f(z)dz$$

Интегрирование функции Хевисайда

Интеграл функции Хевисайда

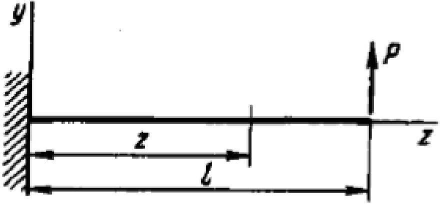


Повторный интеграл функции Хевисайда



Балка в заделке

Задача. Составить уравнение упругой линии в заделке, нагруженной на конце сосредоточенной силой $P = 1$ Н. $E_{Al} = 70$ ГПа, $J_x = \frac{lh^3}{12}$ кг $\cdot$ м^2, $h = 0.01$ м, $l = 1$ м.



Решение методом начальных коэффициентов

Граничное условие

$$y = 0;\ \theta = 0, \text{ при } z = 0$$

1. Найдем момент $M = \int_z^l P dz = P(l - z)$
2. Далее ищем угол наклона сечения θ:

$$\theta = \frac{P}{EJ_x} \int_z^l (l - z) dz = \frac{P}{EJ_x} (\frac{z^2}{2} - lz + c_1)$$

3. Получаем уравнение изгиба балки:

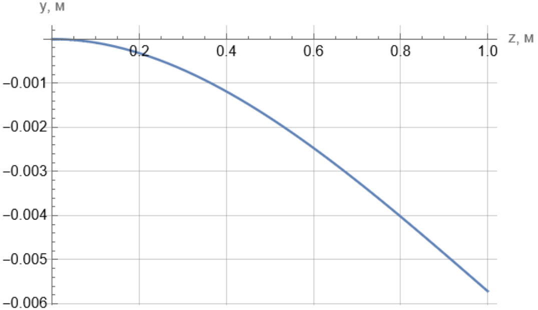
$$y = \frac{P}{EJ_x} \int_z^l (\frac{z^2}{2} - lz + c_1) dz = \frac{P}{EJ_x} (\frac{z^3}{6} - \frac{z^2 l}{2} + c_1 z + c_2)$$

Решение методом начальных коэффициентов

Найдем c_1 и c_2. Из граничных условий следует, что $c_1 = 0$, поскольку $y(0) = 0$, а $c_2 = 0$, так как $\theta(0) = 0$.

Итоговое уравнение

$$y = \frac{P}{EJ_x}\left(\frac{z^3}{6} - \frac{z^2 l}{2}\right)$$



Решение методом обобщенных коэффициентов

Граничное условие

$$y = 0; \ \theta = 0, \text{ при } z = 0$$

1. С помощью ф-ии Дирака запишем: $EJ_x y^{IV} = P\delta(z)$
2. Интегрируем: $EJ_x y''' = PH(z)$
3. Еще раз интегрируем: $P\int_l^z H(z)dz = PH(z)(z-l)$
4. Найдем угол поворота балки:

$$EJ_x y' = P\int_l^z PH(z)(z-l)dz = PH(z)(\frac{z^2}{2} - lz) + c_1$$

5. Получаем уравнение гибкого изгиба балки:

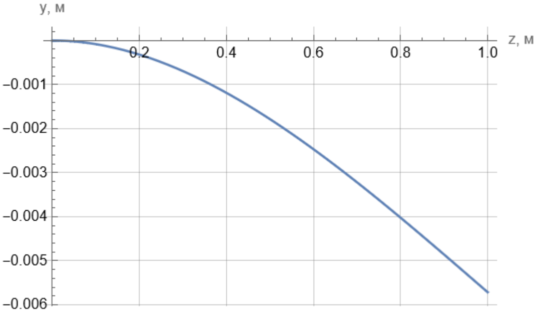
$$y = \frac{P}{EJ_x}(\frac{z^3}{6} - \frac{z^2 l}{2})H(z) + c_1 z + c_2$$

Решение методом обобщенных коэффициентов

Из граничных условий получаем: $c_1 = 0, c_2 = 0$. Учитывая, что $H(z) = 1$, при $z \leqslant l$, получаем ответ.

Итоговое уравнение

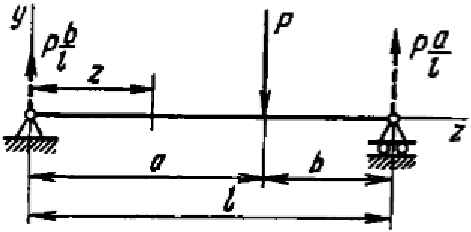
$$y = \frac{P}{EJ_x}\left(\frac{z^3}{6} - \frac{z^2 l}{2}\right)$$



Таким образом, графики двух методов совпали.

Двух опорная балка

Задача. Двух опорный стержень длинной l нагружен силой $P = 1$ Н, расположен на расстоянии а от левой опоры (рис. **??**). Составить уравнение упругой линии.
$E_{Al} = 70$ ГПа, $J_x = \frac{lh^3}{12}$ кг $\cdot$ м^2, $h = 0.01$ м, $l = 1$ м.



Решение методом начальных коэффициентов

Граничное условие

$$\begin{cases} y_1 = 0, \text{ при } z = 0 \\ y_2 = 0, \text{ при } z = l \\ y_1 = y_2, \text{ при } z = a \end{cases}$$

Разобьем стержень на 2 части: до точки приложения P и после.

1. Сила $Q_1 = \frac{Pb}{l}$.
2. Найдем момент $M_1 = \frac{b}{l}\int\limits_0^z Pdz = Pz + c_0^1$. Параметр $c_0^1 = 0$, так как момент равен нулю
3. Найдем угол поворота θ_1:

$$\theta_1 = \frac{b}{l}\frac{P}{EJ_x}\int\limits_0^z Pzdz = \frac{b}{l}\frac{P}{EJ_x}(\frac{b}{l}\frac{z^2}{2} + c_1^1)$$

Получаем первое уравнение изгиба балки y_1:

$$y_1 = \frac{b}{l}\frac{P}{EJ_x}\int\limits_0^z (\frac{z^2}{2} + \theta_1)dz = \frac{b}{l}\frac{P}{EJ_x}(\frac{z^3}{6} + c_1^1 z + c_2^1)$$

Параметр $c_2^1 = 0$, так как концах стержень неподвижен по оси y.

Рассмотрим вторую часть стержня.

1. Сила $Q_2 = \frac{Pa}{l}$.
2. Найдем момент $M_2 = \frac{a}{l} \int\limits_l^z P dz = -P(z+l)$
3. Найдем угол поворота θ_2:

$$\theta_2 = -\frac{a}{l}\frac{P}{EJ_x}\int\limits_l^z P(z+l)dz = -\frac{a}{l}\frac{P}{EJ_x}(\frac{z^2}{2} + zl - c_1^2)$$

4. Получаем второе уравнение изгиба балки y_2:

$$y_2 = -\frac{a}{l}\frac{P}{EJ_x}\int\limits_l^z (\frac{z^2}{2} + zl - c_1^2)dz = -\frac{a}{l}\frac{P}{EJ_x}(\frac{z^3}{6} + \frac{z^2 l}{2} - c_1^2 z + c_2^2)$$

Из граничных условий получаем:

$$\begin{cases} c_2^1 = 0 \\ c_2^2 = a^3 \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = y_2 \\ y_1' = y_2' \end{cases}$$

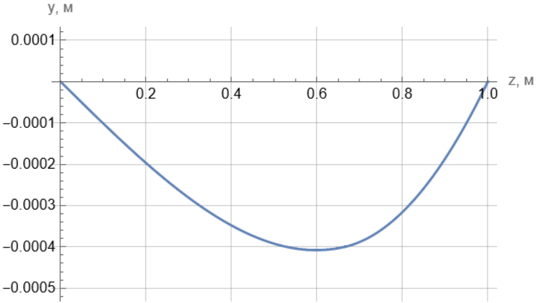
Решаем систему, подставляем параметры в уравнение y_1 и y_2.

Итоговые уравнения

$$y(z) = \begin{cases} y_1 = \frac{P}{6EJ_x} \frac{b}{l} (z^3 - \frac{2}{3} zl(2l - \frac{2}{3} l)), \text{ при } 0 \leqslant z \leqslant a \\ y_2 = \frac{P}{6EJ_x} \frac{a}{l} (-z^3 + 3z^2 l - z(2l^2 + \frac{4}{9} l^2) + \frac{4}{9} l^4), \text{ иначе} \end{cases}$$

Решение методом начальных коэффициентов

Пусть $a = \frac{2l}{3}, b = \frac{l}{3}$, тогда уравнение изгиба балки будет иметь следующий график



Решение методом обобщенных коэффициентов

Граничное условие

$$\begin{cases} y = 0, M = 0, \text{ при } z = 0 \\ y = 0, M = 0, \text{ при } z = l. \end{cases}$$

1. С помощью ф-ии Дирака запишем: $EJ_x y^{IV} = P\delta(z)$
2. Интегрируем: $EJ_x y''' = PH(z)$
3. Еще раз интегрируем: $M = P\int_l^z H(z)dz = PH(z)(z-l)$
4. Найдем угол поворота балки:

$$y = \frac{P}{EJ_x}(\frac{z^3}{6} - \frac{z^2 l}{2})H(z) + c_1 z + c_2$$

5. Получаем уравнение гибкого изгиба балки:

$$y = \frac{P}{EJ_x}(\frac{z^3}{6} - \frac{z^2 l}{2})H(z) + c_1 z + c_2$$

Решение методом обобщенных коэффициентов

Из граничных условий

$$c_2 = 0, c_1 = \frac{Pl(3a^2z^2 - 3alz + l^2)}{6a^3EJ_x}.$$

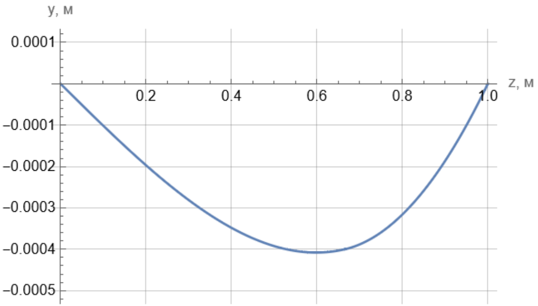
Кроме того, $H(z) = 1$, при $z \leqslant l$.

Итоговое уравнение

$$y = \frac{P}{EJ_x}\left(-\frac{z^3}{6}\frac{1}{a} + \frac{(z - \frac{l}{a})^3}{6}H(z - \frac{l}{a}) + \frac{l(3a^2z^2 - 3alz + l^2)}{6a^3}\right)$$

Решение методом обобщенных коэффициентов

Пусть $a = \frac{2l}{3}$, $b = \frac{l}{3}$, тогда уравнение изгиба балки будет иметь следующий график



Таким образом, графики двух методов совпали.

Результаты

В ходе работы получены следующие результаты

1. Изучены методы начальных коэффициентов и обобщенных функций нахождения уравнения упругого изгиба стержня.
2. Решены 2 типа задач с помощью этих методов, их результат оказался идентичны.
3. Метод начальных коэффициентов является более трудоемким и менее удобным по сравнению с методом обобщенных функций, поскольку требует учета большего количества граничных условий, больший объем вычислений.