Нахождение уравнения изгиба балки

Докладчик: Пиневич В. Г.
Научный руководитель: Чередниченко А. В.

группа ФН2-41Б

1 июля 2022 г.

Постановка задачи

Условия равновесия

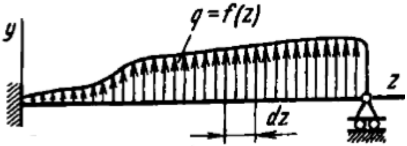
$$\begin{cases} \sum F_z = 0 \\ \sum M_z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P + qdz - P - dP = 0 \\ M + Pdz + qdz\frac{dz}{z} - M - dM = 0 \end{cases}$$

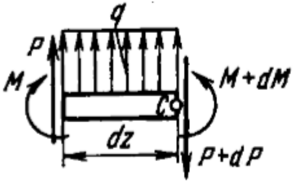
Кривизна изогнутого стержня

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} \approx y''$$

Связь кривизны и момента

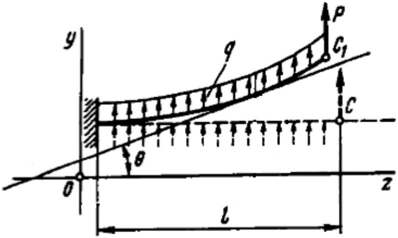
$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ_x}$$



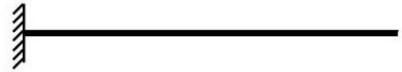


Уравнения равновесия стержня и граничные условия

$$\begin{cases} \frac{dP}{dz} = q(z) \\ \frac{dM}{dz} = P \\ \frac{d\theta}{dz} = \frac{M}{EJ_x} \\ \frac{dy}{dz} = \theta \end{cases}$$



$$\begin{cases} M = 0 \\ P = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} y = 0 \\ \theta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ M = 0 \end{cases}$$

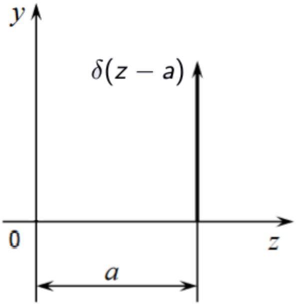
Обобщенные функции Дирака и Хевисайда

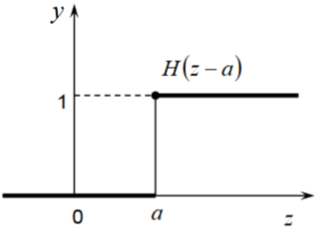
Функция Дирака

$$\delta(z-a) = \begin{cases} \infty, z = a \\ 0, z \neq a \end{cases}$$

Функция Хевисайда

$$H(z-a) = \begin{cases} 0, z < a \\ 1, z \geqslant a \end{cases}$$



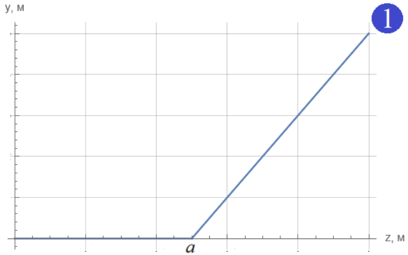


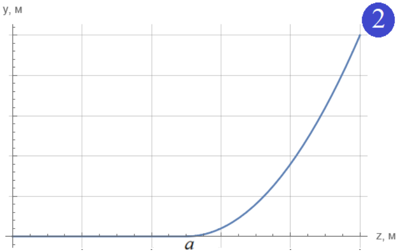
$$\int_b^z \delta(t-a)dt = H(z-a)$$

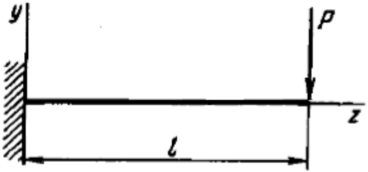
Интегрирование функции Хевисайда

1. $$\int_b^z f(t)H(t-a)dt = H(z-a)\int_b^z f(t)dt$$

2. $$\int_b^z H(t-a)\int_b^t f(t_1)dt_1dt = H(z-a)\int_b^z\int_b^t f(t_1)dt_1dt$$







Дано

$P = 1$ Н

$E = 70$ ГПа

$J_x = 8,33333 \cdot 10^{-6}$ кг $\cdot$ м^2

Граничные условия

$$\begin{cases} y = 0; y'' = 0, \text{ при } z = 0 \\ y'' = 0; EJ_x y''' = P, \text{ при } z = L \end{cases}$$

1. Найдем момент $M = -\int Pdz = P(L - z)$
2. Дважды интегрируем, получаем уравнение изгиба балки:

$$y = \frac{P}{EJ_x} \int \left(\frac{z^2}{2} - Lz + c_1 \right) dz = \frac{P}{EJ_x} \left(\frac{z^3}{6} - \frac{z^2 L}{2} + c_1 z + c_2 \right)$$

Итоговое уравнение

$$y = \frac{P}{EJ_x} \left(\frac{z^3}{6} - \frac{z^2 L}{2} \right)$$

Решение методом обобщенных функций

Граничные условия

$$\begin{cases} y = 0; \theta = 0, \text{ при } z = 0 \\ y'' = 0; EJ_x y''' = 0, \text{ при } z = L \end{cases}$$

1. С помощью функции Дирака запишем: $EJ_x y^{IV} = -P\delta(z-L)$
2. Интегрируем: $EJ_x y''' = -PH(z-L) + c_1$
3. Еще раз интегрируем: $EJ_x P\int(1 - H(z-L))dz = Pz + c_2$
4. Найдем угол поворота балки:

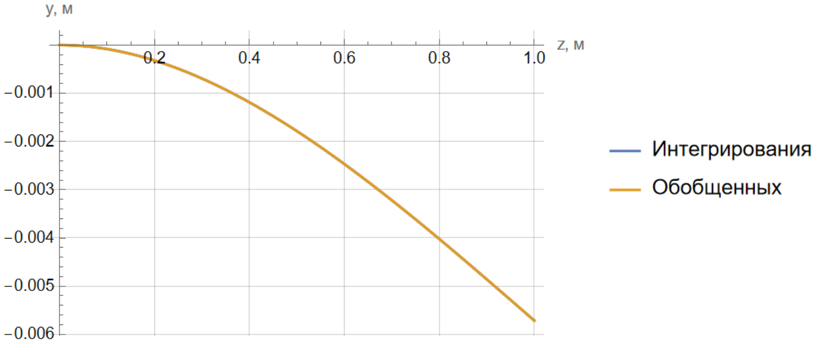
$$EJ_x y' = P\int(z-L)dz = P\left(\frac{z^2}{2} - Lz\right) + c_3$$

5. Получаем уравнение гибкого изгиба балки:

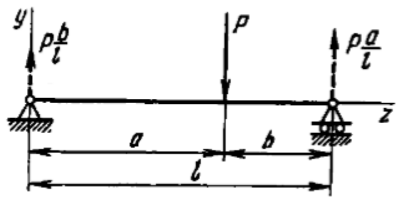
$$y = \frac{P}{EJ_x}\left(\frac{z^3}{6} - \frac{z^2 L}{2}\right) + c_3 z + c_4.$$

Итоговое уравнение

$$y = \frac{P}{EJ_x}\left(\frac{z^3}{6} - \frac{z^2 L}{2}\right)$$



Двух опорная балка



Дано

$P = 1$ Н
$E = 70$ ГПа
$J_x = 8,33333 \cdot 10^{-6}$ кг $\cdot$ м^2

Граничные условия

$$\begin{cases} y_1 = 0, \text{ при } z = 0 \\ y_2 = 0, \text{ при } z = L \\ y_1 = y_2 \text{ и } y_1' = y_2', \text{ при } z = a \end{cases}$$

1. Сила $P_1 = \frac{Pb}{L}$.
2. Четырежды интегрируем, получаем уравнение изгиба y_1:

$$y_1 = \frac{Pb}{EJ_xL}\left(\frac{z^3}{6} + c_1^1 z + c_2^1\right)$$

Рассмотрим вторую часть стержня.

1. Сила $P_2 = \frac{Pa}{L}$.
2. Четырежды интегрируем, получаем уравнение изгиба y_2:

$$y_2 = -\frac{Pa}{EJ_x L}\left(\frac{z^3}{6} + \frac{z^2 L}{2} - c_1^2 z + c_2^2\right)$$

Из граничных условий получаем:

$$\begin{cases} c_2^1 = 0 \\ c_2^2 = a^3 \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1^1 = \frac{a}{6L}(3aL - 2L^2 - a^2) \\ c_1^2 = -\frac{a}{6L}(2L^2 + a^2) \end{cases}$$

Итоговые уравнения

$$y(z) = \begin{cases} y_1 = \frac{P}{6EJ_x}\frac{b}{L}(z^3 - \frac{2}{3}zL(2L - \frac{2}{3}L)), \text{ при } 0 \leqslant z \leqslant a \\ y_2 = \frac{P}{6EJ_x}\frac{a}{L}(-z^3 + 3z^2 L - z(2L^2 + \frac{4}{9}L^2) + \frac{4}{9}L^4), \text{ иначе} \end{cases}$$

Граничные условия

$$\begin{cases} y = 0, M = 0, \text{ при } z = 0 \\ y = 0, M = 0, \text{ при } z = L. \end{cases}$$

1. С помощью функции Дирака запишем:

$$EJ_x y^{IV} = -P\delta(z-a)$$

2. Два раза интегрируем, найдем момент M:

$$M = \frac{1}{EJ_x}\left(-P(z-a)H(z-a) + c_1 z\right) + c_2$$

3. Еще два раза интегрируем, получаем уравнение гибкого изгиба балки:

$$y = \frac{P}{EJ_x}\left(\frac{bz^3}{6L} - \frac{(z-a)^3}{6}H(z-a)\right) + c_3 z + c_4.$$

4. Из граничных условий получаем:

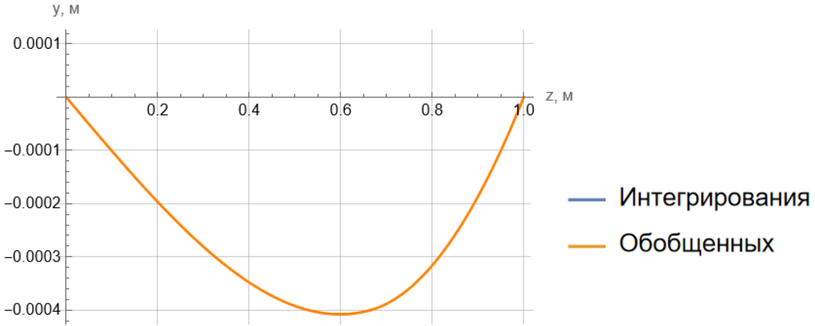
$$c_4 = 0, c_3 = -\frac{Pb}{6EJ_x L}\left(L^2 - b^2\right)$$

Решение методом обобщенных функций

Итоговое уравнение

$$y = \frac{P}{6EJ_x}\left(\frac{bz^3}{L} - \left(z - \frac{a}{L}\right)^3 H\left(z - \frac{a}{L}\right) - \frac{z}{L}\left(bL^2 + \frac{(a - L^2)^3}{L^3}\right)\right)$$

Пусть $a = \frac{2L}{3}, b = \frac{L}{3}$



Результаты

В ходе работы получены следующие результаты:

1. Изучены методы интегрирования и обобщенных функций нахождения уравнения упругого изгиба стержня.
2. Решены два типа задач с помощью этих методов, их результаты оказались идентичны.
3. Метод интегрирования является более трудоемким и менее удобным по сравнению с методом обобщенных функций, так как требует учета большего количества граничных условий и большего объема вычислений.