



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Московский государственный технический университет  
имени Н. Э. Баумана  
(национальный исследовательский университет)»  
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

---

ФАКУЛЬТЕТ \_\_\_\_\_ Фундаментальные науки

КАФЕДРА \_\_\_\_\_ Прикладная математика

---

РАСЧЕТНО-ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА  
*К КУРСОВОЙ РАБОТЕ*  
*НА ТЕМУ:*  
*Нахождения уравнения*  
*изгиба балки*

Студент \_\_\_\_\_  
ФН2-41Б  
(Группа)

\_\_\_\_\_  
(Подпись, дата)

В. Г. Пиневич  
\_\_\_\_\_  
(И. О. Фамилия)

Руководитель курсовой работы

\_\_\_\_\_  
(Подпись, дата)

А. В. Чередниченко  
\_\_\_\_\_  
(И. О. Фамилия)

2022 г.

## Оглавление

<b>Введение</b>	3
<b>1. Постановка задачи</b>	3
1.1. Чистый изгиб	3
1.2. Дифференциальное уравнение равновесия стержня	7
<b>2. Теоретическая часть</b>	8
2.1. Метод начальных коэффициентов	8
2.2. Метод обобщенных коэффициентов	8
<b>3. Практическая часть</b>	10
3.1. Балка в заделке	10
3.1.1. Метод начальных коэффициентов	10
3.1.2. Метод обобщенных коэффициентов	12
3.2. Двух опорная балка	12
3.2.1. Метод начальных коэффициентов	13
3.2.2. Решение методом обобщенных функций	14
<b>Заключение</b>	17
<b>Список использованных источников</b>	18

## Введение

Проблема вычисления уравнение прогиба балки возникает во многих задачах, в частности в строительной механике. В силу наличия большого числа действующих сил и моментов решение такой задачи классическим методом, т.е. вычислением дифференциального уравнения вызывает сложности в виду большого числа граничных условий. Однако с развитием теории обобщенных функций и сопротивление материалов было найдено более удобный способ расчета прогиба балки. Данная работа посвящена анализу методов решения подобных задач, выделение их недостатков и преимуществ.

### 1. Постановка задачи

Для расчета уравнения гибкого стержня необходимо ввести несколько понятий.  $q$  — распределенная нагрузка,  $Q$  — сосредоточенная сила,  $M$  — момент.

#### 1.1. Чистый изгиб

Обратимся к источнику [1]. Рассмотрим стержень, закрепленный произвольным образом. Выделим часть стержня длиной  $dz$  и приложим поперечные силы  $Q + dQ$  и моменты  $M + dM$ . Поскольку  $dz$  мало, то можно считать нагрузку равно распределенной (рис. 1).

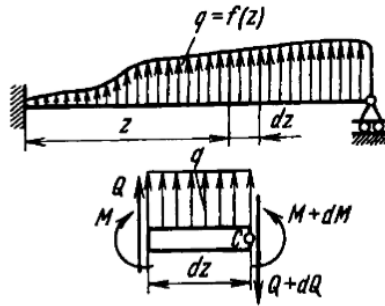


Рис. 1. Равно распределенная нагрузка

Имеем состояния равновесия:

$$\begin{cases} \sum F_z = 0 \\ \sum M_z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Q + qdz - Q - Qdz = 0 \\ M + Qdz + qdz \frac{dz}{z} - M - dM = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Выражение  $qdz \frac{dz}{z}$  можно отбросить, как величину высшего порядка малости.

Из системы (1) следует, что если балка нагружена только сосредоточенными силами, то  $q = 0$ ,  $Q = \text{const}$ ,  $M$  — линейная функция от  $z$ , если  $q = \text{const}$ , то функция  $Q$  будет линейной.

Итого из системы (1) получаем:

$$\frac{dQ}{dz} = q, \quad \frac{dM}{dz} = Q, \quad (2)$$

Далее рассмотрим наиболее простой случай изгиба — чистый изгиб. Под таким видом изгиба понимаются случаи, при которых в поперечных сечениях стержня возникают только изгибающие моменты, а  $Q = 0$ . Для участка балки, где это условия выполняются  $M = \text{const}$  (2). Рассмотрим только этот участок. На нем стержень изогнется по действию моментов  $M$ . Тогда при условии, что сечение балки однородное, в любом сечении будет одинаковый момент, а значит изменение кривизны стержня будет одинаковым. Следовательно, при чистом изгибе ось однородной балки принимает форму дуги окружности.

Разрезая стержень на равные части сечением  $A-A$ , получаем участки вдвое меньше (рис. 2), которое все еще остается плоским в силу того, что обе стороны являются полностью равноценными. Процесс деления можно проложить дальше. Таким образом доказано, что в неограниченной области близости от любого заданного сечения можно задать бесконечно много сечений, которые в совокупности будут эквивалентны искомому. Это утверждение является точным для чистых сечений, для остальных видов является приближенным.

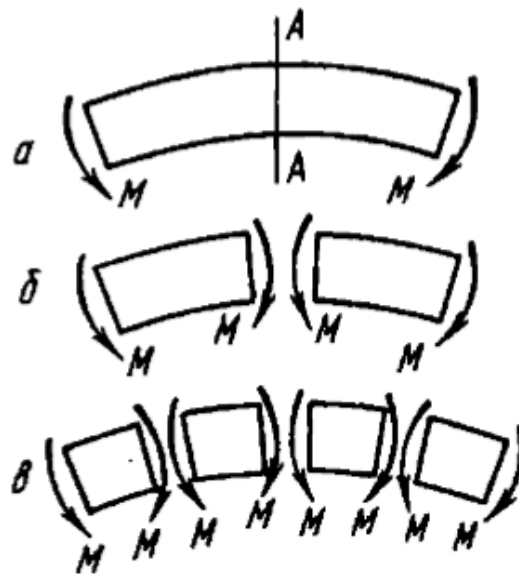


Рис. 2. Сечение  $A-A$

Деформацию можно рассматривать как поворот плоских поперечных сечений относительно друг друга (рис. 3).

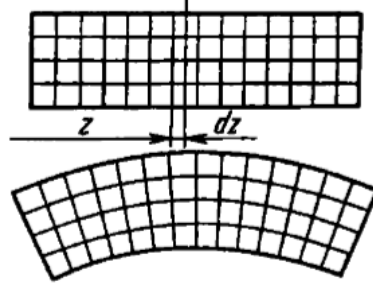


Рис. 3. Деформация плоского поперечного сечения

Рассмотрим два смежных сечения, расположенных на расстоянии  $dz$  (рис. 4). Примем левое сечение за неподвижное. При повороте правого сечения на угол  $d\theta$  верхние слои удлинятся, нижние – укоротятся. Слой, который не изменится назовем нейтральным и обозначим  $CD$ . После поворота кривизна нейтрального слоя изменится следующим образом:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dz}, \quad (3)$$

Случайный отрезок  $AB = dz$  (рис. 4) получит приращение  $A'B' - AB$ . С учетом того, что сечение остается плоским,  $A'B' - AB = (\rho + y)d\theta - \rho d\theta = yd\theta$ , где  $y$  – расстояние от  $AB$  до  $CD$ .

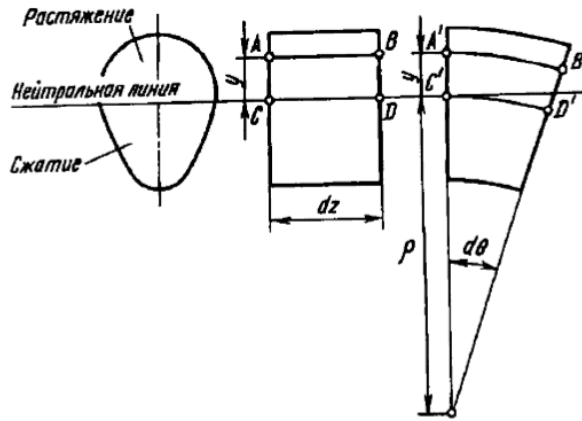


Рис. 4. Образование деформации при чистом изгибе

Относительное удлинение  $AB$  равно

$$\varepsilon = \frac{yd\theta}{dz} = \frac{y}{\rho}. \quad (4)$$

По закону Гука,

$$\sigma = E\varepsilon = E\frac{y}{\rho}. \quad (5)$$

Геометрическое место точек в сечении, где напряженность  $\sigma = 0$ , называется нейтральной линией сечения.

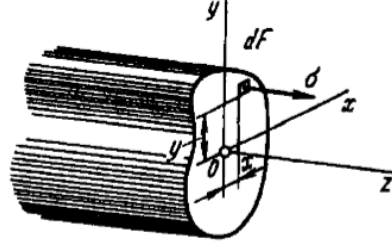


Рис. 5. Сечение балки

Сумма сил  $\sigma dF$  (рис. 5) образует нормальную силу  $N$  в сечении. При чистом изгибе  $N = 0$ , поэтому  $N = \int_F \sigma dF = 0$ , с учетом 5,  $\frac{E}{\rho} \int_F y dF = 0$ , откуда

$$\int_F y dF = 0. \quad (6)$$

Получили статический момент относительно нейтральной линии. Поскольку он равен нулю, нейтральная линия проходит через центр тяжести сечения. Таким образом мы можем определить координату  $y$  в выражениях (4), (5): она отсчитывается от центральной оси, перпендикулярной плоскости кривизны. Аналогично определяется и кривизна  $\frac{1}{\rho}$ , как кривизна оси стержня.

Зададим систему координат  $x, y, z$ , связанную с сечением (рис. 5). Начало координат  $O$  совместим с центром тяжести сечения. Ось  $z$  направим по нормали к сечению,  $x$  — по нейтральной линии. Ось  $y$  лежит в плоскости кривизны.

Изгибающий момент в поперечном сечении стержня, как и нормальная сила, может быть выражен через напряжения  $\sigma$ .

$$\int_F \sigma x dF = M_y, \int_F \sigma y dF = M_x \quad (7)$$

Стоит отметить, что изменение кривизны стержня происходит не обязательно в плоскости изгибающего момента.

При указанных условиях момент сил  $\sigma dF$  относительно оси  $y$  равен нулю, а относительно  $x$  — полному избегающему моменту  $M$ . Тогда получаем

$$\frac{E}{\rho} \int_F y x dF = 0, \frac{E}{\rho} \int_F \sigma y^2 dF = M. \quad (8)$$

Первое выражение сводится к  $J_{xy} = 0$ , т.е. изменение кривизны стержня происходит в плоскости момента в том случае, если последняя проходит через одну из главных осей сечения.

Из выражений (8) получаем зависимость кривизны стержня от изгибающего момента:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ_x}, \quad (9)$$

где  $J_x$  — момент инерции сечения относительно главной центральной оси, перпендикулярной плоскости изгибающего момента,  $E$  — модуль упругости,  $M$  — изгибающий момент. Величина  $EJ_x$  называется жесткостью стержня при изгибе.

Для стержня круглого сечения с диаметром  $D$ :

$$J_x = \frac{\pi D^4}{64}. \quad (10)$$

Для стержня прямоугольного сечения со сторонами  $b, h$ :

$$J_x = \frac{bh^3}{12}. \quad (11)$$

## 1.2. Дифференциальное уравнение равновесия стержня

Форму изогнутого стержня можно определить при помощи выражения (9). В неподвижной системе координат  $yOz$  (рис. 6).

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (12)$$

Поскольку мы рассматриваем случай малых перемещений, то тангенс  $\theta$  между касательной к упругой линии изгиба и осью  $z$  мал. Поэтому квадратом  $y'$  можно пренебречь. и принять

$$\frac{1}{\rho} \approx y'', \quad (13)$$

откуда

$$y'' = \frac{M}{EJ_x}. \quad (14)$$

Таким образом, мы получили дифференциальное уравнение стержня (14). Сопоставим выражения (2) и (14), получаем четыре выражения, которые объясняют физический смысл производных 1–4 порядков соответственно:

$$\theta = y', \quad M = EJ_x y'', \quad Q = EJ_x y''', \quad q_y = EJ_x y^{IV}. \quad (15)$$

$y' = \theta$  — угол поворота сечения,  $y''$ ,  $y'''$ ,  $y^{IV}$  прямо пропорционально зависят от момента  $M$ , точечной силы  $Q$ , распределенной нагрузки  $q$  соответственно. В свою очередь,  $y$  — отклонение точек осевой линии стержня от ее положения в недеформированном состоянии.

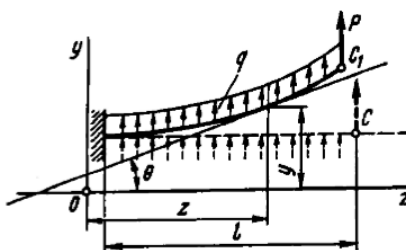


Рис. 6. Упругая линия изгиба балки

Целью данной работы является изучение двух методов его решения: начальных коэффициентов и с помощью обобщенных функций. Будут рассмотрены два вида задач: балка в консольной заделке и двух опорный стержень. После решения этих задач будут сделаны выводы о эффективности и удобности рассмотренных методов.

## 2. Теоретическая часть

### 2.1. Метод начальных коэффициентов

Обратимся к источнику [1]. Выражения (15) можно представить в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \frac{dQ}{dz} - q_y(z) = 0 \\ \frac{dM}{dz} - Q = 0 \\ \frac{d\theta}{dz} - \frac{M}{EJ_x(z)} = 0 \\ \frac{dy}{dz} - \theta = 0, \end{cases} \quad (16)$$

В результате решения системы (16) получаем отклонение точек осевой линии стержня от ее положения в недеформированном состоянии  $y$ , что и будет являться ответом.

### 2.2. Метод обобщенных коэффициентов

Обратимся к источнику [2]. В 1926 г. английский физик Дирак ввёл в квантовой механике символ  $\delta(z)$ , названный им дельта функцией.

Дельта функцию (рис. 7) можно определить как

$$\int_{-\infty}^z \delta(z-a)\varphi(z)dz = \begin{cases} \infty, z < a \\ 0, z \geq a \end{cases} \quad (17)$$



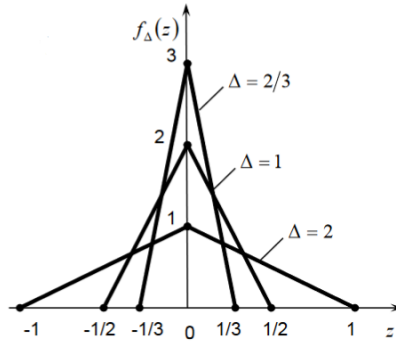


Рис. 7. Возможное представление функции Дирака (17)

Функция Хевисайда определяется как

$$H(z - a) = \begin{cases} 0, & z < a \\ 1, & z \geq a \end{cases} \quad (18)$$

Она обладает следующими свойствами:

$$[H(z - a)]^\alpha = H(z - a), \quad H(z - a)H(z - b) = H(z - b), \quad (19)$$

т. е. при возведении в любую степень  $0 < \alpha$  функция Хевисайда остаётся неизменной, при перемножении двух функций Хевисайда результат равен тому сомножителю, у которого сдвиг координаты больше:  $a > b$ .

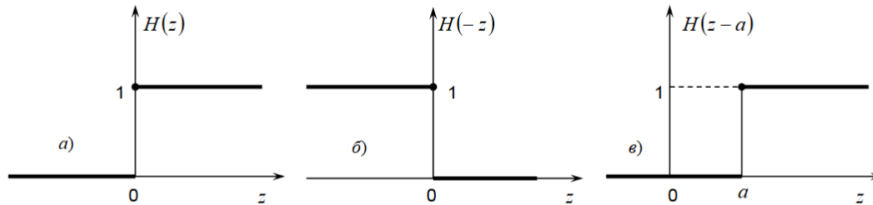


Рис. 8. Единичная функция Хевисайда (19)

Если взять  $\varphi(z) = 1$ , получим соотношение,

$$\int_{-\infty}^z \delta(z - a) dz = H(z) \quad (20)$$

которое связывает функцию Дирака и функцию Хевисайда (рис. 20).

При решении задач сопротивления материалов достаточно располагать двумя табличными интегралами, содержащими обобщенные функции Дирака и Хевисайда:

$$\int_0^z f(z) \delta(z - a) dz = f(a) H(z - a), \quad (21)$$

$$\int_0^z f(z) H(z - a) dz = H(z - a) \int_a^z f(z) dz. \quad (22)$$

При интегрировании функции Хевисайда будем получать луч:

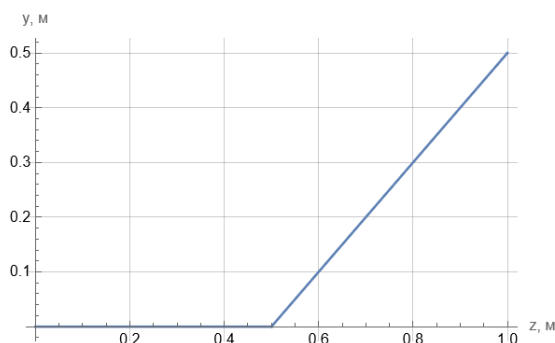


Рис. 9. Интеграл функции Хевисайда (20)

При повторном интегрировании функции Хевисайда будем получать полупараболу:

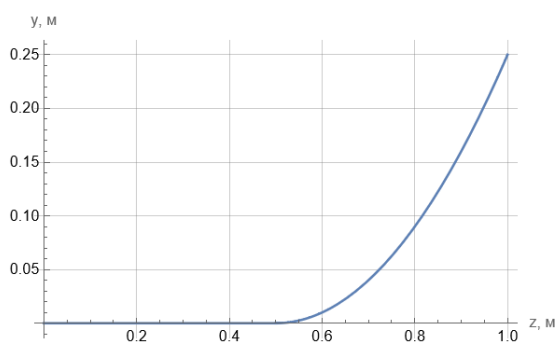


Рис. 10. Повторный интеграл функции Хевисайда (20)

Последний график (рис. 10) по форме сильно напоминает изгиб упругого стержня, что и будет использовано для решения задач для нахождения уравнения изгиба балки.

## 3. Практическая часть

### 3.1. Балка в заделке

Балка в заделке (рис. 11). Составить уравнение упругой линии в заделке, нагруженной на конце сосредоточенной силой  $P = 1$  Н.  $E_{Al} = 70$  ГПа,  $J_x = \frac{lh^3}{12}$  кг \* м<sup>2</sup>,  $h = 0.01$  м,  $l = 1$  м.

#### 3.1.1. Метод начальных коэффициентов

Рассмотрим граничное условие:

$$y = 0; \theta = 0, \text{ при } z = 0. \quad (23)$$

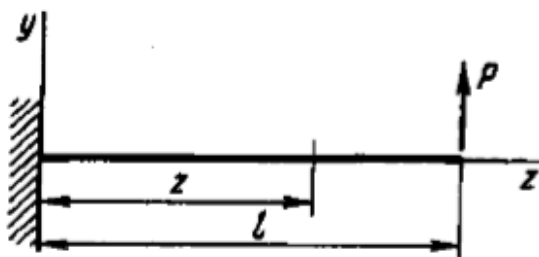


Рис. 11. Балка в заделке

Распределенная сила  $q_y$  равна 0, так как она не приложена. Найдем момент  $M$ :

$$\frac{dM}{dz} = P \Rightarrow M = \int_z^l P dz = P(l - z). \quad (24)$$

Далее ищем угол наклона сечения  $\theta$ :

$$\theta = \frac{P}{EJ_x} \int_z^l (l - z) dz = \frac{P}{EJ_x} \left( \frac{z^2}{2} - lz + c_1 \right). \quad (25)$$

Получаем уравнение изгиба балки:

$$y = \frac{P}{EJ_x} \int_z^l \left( \frac{z^2}{2} - lz + c_1 \right) dz = \frac{P}{EJ_x} \left( \frac{z^3}{6} - \frac{z^2 l}{2} + c_1 z + c_2 \right). \quad (26)$$

Найдем  $c_1$  и  $c_2$ . Для этого рассмотрим граничные условия (28), из них следует, что  $c_1 = 0$ , поскольку  $y(0) = 0$ , а  $c_2 = 0$ , так как  $\theta(0) = 0$ . Получим итоговое уравнение:

$$y = \frac{P}{EJ_x} \left( \frac{z^3}{6} - \frac{z^2 l}{2} \right). \quad (27)$$

Максимальны прогиб будет равен  $y_{max} = \frac{Plz^2}{EJ_x 2}$  при  $z = l$ . Уравнение изгиба балки будет иметь следующий график:

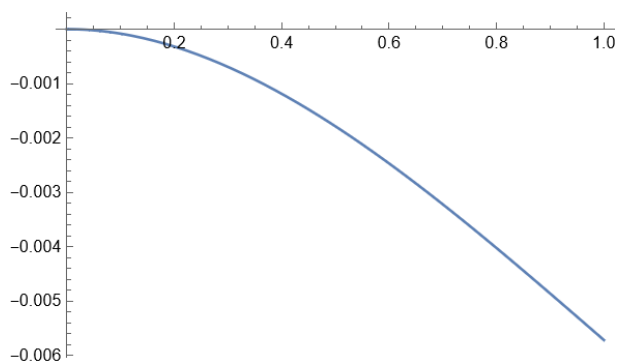


Рис. 12. Упругая линия изгиба балки (27)

### 3.1.2. Метод обобщенных коэффициентов

Рассмотрим граничное условие:

$$y = 0; \theta = 0, \text{ при } z = 0. \quad (28)$$

Рассмотрим уравнения (16) и функцию Дирихле (17). Запишем с помощью выражений (16) и (17) начальное уравнение:

$$EJ_x y^{IV} = P\delta(z). \quad (29)$$

Интегрируем, согласно (21) получаем:

$$EJ_x y''' = PH(z). \quad (30)$$

Интегрируем (22), согласно (21) получаем:

$$P \int_l^z H(z) dz = PH(z)(z - l). \quad (31)$$

Найдем угол поворота балки в плоскости сечения:

$$EJ_x y' = P \int_l^z PH(z)(z - l) dz = PH(z) \left( \frac{z^2}{2} - lz \right) + c_1. \quad (32)$$

Получаем уравнение гибкого изгиба балки:

$$y = \frac{P}{EJ_x} \left( \frac{z^3}{6} - \frac{z^2 l}{2} \right) H(z) + c_1 z + c_2. \quad (33)$$

Из граничных условий получаем:

$$c_1 = 0, c_2 = 0. \quad (34)$$

Учитывая, что  $H(z) = 1$ , при  $z \leq l$ , получаем итоговое уравнение изгиба балки

$$y = \frac{P}{EJ_x} \left( \frac{z^3}{6} - \frac{z^2 l}{2} \right) \quad (35)$$

Таким образом, ответ метода обобщенных функций (35) совпал с ответом способа начальных коэффициентов (27).

### 3.2. Двух опорная балка

Двух опорный стержень длиной  $l$  нагружен силой  $P$ , расположен на расстоянии  $a$  от левой опоры (рис. 13). Составить уравнение упругой линии.  $E_{Al} = 70$  ГПа,  $J_x = \frac{lh^3}{12}$ ,  $h = 0.01$  м,  $l = 1$  м.

Решение

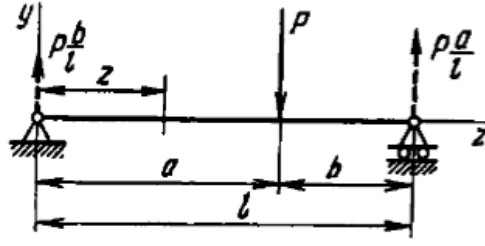


Рис. 13. Двух опорный стержень

### 3.2.1. Метод начальных коэффициентов

Рассмотрим граничные условия:

$$\begin{cases} y_1 = 0, \text{ при } z = 0 \\ y_2 = 0, \text{ при } z = l \\ y_1 = y_2, \text{ при } z = a \end{cases} \quad (36)$$

Распределенная сила  $q_y$  равна 0, так как она не приложена. Разобьем стержень на 2 части: до точки приложения  $P$  и после. Сила  $Q_1 = \frac{Pb}{l}$ . Найдём момент  $M_1$ :

$$\left\{ M_1 = \frac{b}{l} \int_0^z P dz = Pz + c_1^1 \right. \quad (37)$$

Параметр  $c_0^1 = 0$ , так как момент равен нулю (не консоль). Найдём угол поворота  $\theta_1$ :

$$\left\{ \theta_1 = \frac{b}{l} \frac{P}{EJ_x} \int_0^z Pz dz = \frac{b}{l} \frac{P}{EJ_x} \left( \frac{b}{2} z^2 + c_1^1 \right) \right. \quad (38)$$

Получаем первое уравнение изгиба балки  $y_1$ :

$$y_1 = \frac{b}{l} \frac{P}{EJ_x} \int_0^z \left( \frac{z^2}{2} + \theta_1 \right) dz = \frac{b}{l} \frac{P}{EJ_x} \left( \frac{z^3}{6} + c_1^1 z + c_2^1 \right), \quad (39)$$

Параметр  $c_2^1 = 0$ , так как конца стержень неподвижен по оси  $y$ .

Рассмотрим вторую часть стержня. Сила  $Q_2 = \frac{Pa}{l}$ . Найдём момент  $M_2$ :

$$\left\{ M_2 = \frac{a}{l} \int_l^z P dz = -P(z + l) \right. \quad (40)$$

Найдём угол поворота  $\theta_2$ :

$$\theta_2 = -\frac{a}{l} \frac{P}{EJ_x} \int_l^z P(z + l) dz = -\frac{a}{l} \frac{P}{EJ_x} \left( \frac{z^2}{2} + zl - c_1^2 \right). \quad (41)$$

Получаем второе уравнение изгиба балки  $y_2$ :

$$y_2 = -\frac{a}{l} \frac{P}{EJ_x} \int_l^z \left( \frac{z^2}{2} + zl - c_1^2 \right) dz = -\frac{a}{l} \frac{P}{EJ_x} \left( \frac{z^3}{6} + \frac{z^2 l}{2} - c_1^2 z + c_2^2 \right), \quad (42)$$

Из граничных условий (36) получаем:

$$c_2^1 = 0, c_2^2 = a^3 \frac{1}{6}. \quad (43)$$

А так же из граничных условий (36) получается:

$$\begin{cases} y_1 = y_2 \\ y_1' = y_2' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b(\frac{z^3}{6} + c_1^1 z + c_2^1) = a(\frac{z^3}{6} + \frac{z^2 l}{2} - c_1^2 z + c_2^2) \\ b(\frac{b}{l} \frac{z^2}{2} + c_1^1) = a(\frac{z^2}{2} + z l - c_1^2) \end{cases} \quad (44)$$

Решаем систему (44). Получаем:

$$\begin{cases} c_1^1 = \frac{a}{6l}(3al - 2l^2 - a^2) \\ c_1^2 = -\frac{a}{6l}(2l^2 + a^2) \end{cases} \quad (45)$$

Подставляем в уравнение  $y_1$  и  $y_2$ , получаем:

$$y(z) = \begin{cases} y_1 = \frac{P}{6EJ_x} \frac{b}{l} (z^3 - \frac{2}{3} z l (2l - \frac{2}{3} l)), \text{ при } 0 \leq z \leq a \\ y_2 = \frac{P}{6EJ_x} \frac{a}{l} (-z^3 + 3z^2 l - z(2l^2 + \frac{4}{9} l^2) + \frac{4}{9} l^4), \text{ при } a \leq z \leq b \end{cases} \quad (46)$$

Пусть  $a = \frac{2l}{3}, b = \frac{l}{3}$ , тогда уравнение изгиба балки будет иметь следующий график:

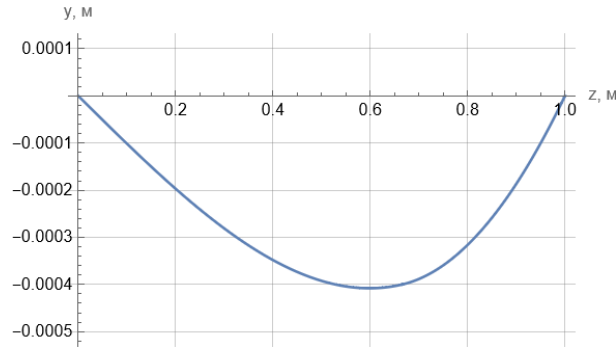


Рис. 14. Упругая линия изгиба балки (46)

### 3.2.2. Решение методом обобщенных функций

Рассмотрим граничные условия:

$$\begin{cases} y = 0, M = 0, \text{ при } z = 0 \\ y = 0, M = 0, \text{ при } z = l. \end{cases} \quad (47)$$

Обратимся к источнику [3]. Рассмотрим уравнения (16) и функцию Дирихле (17).

$$EJ_x y^{IV} = P\delta(z). \quad (48)$$

Интегрируем (48), согласно (21) получаем:

$$EJ_x y''' = PH(z). \quad (49)$$

Найдем момент  $M$  согласно (22):

$$M = P \int_l^z H(z) dz = PH(z)(z - l). \quad (50)$$

Найдем угол поворота балки в плоскости сечения:

$$EJ_x y' = P \int_l^z PH(z)(z - l) dz = PH(z) \left( \frac{z^2}{2} - lz \right) + c_1. \quad (51)$$

Получаем уравнение гибкого изгиба балки:

$$y = \frac{P}{EJ_x} \left( \frac{z^3}{6} - \frac{z^2 l}{2} \right) H(z) + c_1 z + c_2. \quad (52)$$

Из граничных условий (47)  $c_2 = 0$ . Так же найдем  $c_1$  из условия  $y(l) = 0$  (47), обозначающий угол поворота сечения

$$c_1 = \frac{Pl(3a^2 z^2 - 3alz + l^2)}{6a^3 EJ_x} \quad (53)$$

Кроме того,  $H(z) = 1$ , при  $z \leq l$ . Тогда и итоговое уравнение изгиба балки имеет вид:

$$y = \frac{P}{EJ_x} \left( -\frac{z^3}{6a} + \frac{(z - \frac{l}{a})^3}{6} H(z - \frac{l}{a}) + \frac{l(3a^2 z^2 - 3alz + l^2)}{6a^3} \right) \quad (54)$$

Пусть  $a = \frac{2l}{3}, b = \frac{l}{3}$ , тогда уравнение изгиба балки будет иметь следующий график:

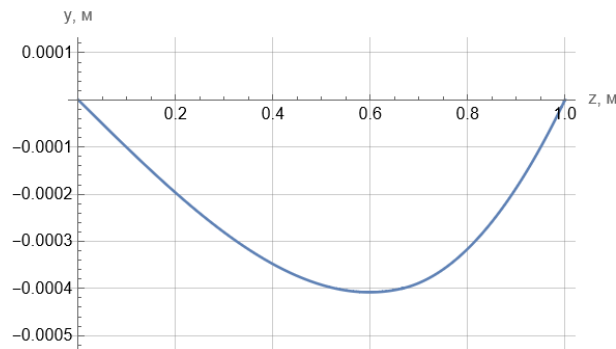


Рис. 15. Упругая линия изгиба балки (54)

Таким образом, график метода обобщенных функций (54) совпал с графиком способа начальных коэффициентов (46).

## Заключение

В ходе выполнения курсовой были изучены методы начальных коэффициентов и обобщенных функций нахождения уравнения упругого изгиба стержня. Были решены 2 типа задач с помощью этих методов, их результат оказался идентичным. Метод начальных коэффициентов является более трудоемким и менее удобным по сравнению с методом обобщенных функций, поскольку требует учета большего количества граничных условий, большой объем вычислений.



## Список использованных источников

1. В.И. Феодосьев Сопротивление материалов: учеб. для вузов. — 10-е изд., перераб. и доп. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 1999. — 590 с.
2. Техническая теория стержней. Применение обобщённых функций для решения задач сопротивления материалов [Электронный ресурс] : учеб. пособие / С. А. Корнеев. — Омск : Изд-во ОмГТУ, 2011.
3. И.А. Бригер, Р.Р. Мавлютов Сопротивление материалов: учебное пособие. - М.: Наука Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. — 560 с.