

Digital implementation of Feedback Linearization control and simple linearization control for a Van der Pol system

Leandro Llontop Herrera

Escuela de Ingeniería Mecatrónica

Universidad Nacional de Ingeniería

marco.llontop.h@uni.pe

2020202011H

Jordan Delgado Gutierrez

Escuela de Ingeniería Mecatrónica

Universidad Nacional de Ingeniería

jordan.delgado.g@uni.pe

20200199J

Carlos Felipe Sebastián Aldave Torres

Escuela de Ingeniería Mecatrónica

Universidad Nacional de Ingeniería

carlos.aldave.t@uni.pe

20200159H

Juan Contreras Avendaño

Escuela de Ingeniería Mecatrónica

Universidad Nacional de Ingeniería

juan.contreras.a@uni.pe

20202024B

Abstract—This paper presents the digital implementation of feedback linearization Control and simple linearization control for a Van der Pol system. An electronic circuit, comprising operational amplifiers (opamps) and multipliers, was utilized to model the Van der Pol oscillator. The control algorithms were implemented using LabVIEW and National Instruments Data Acquisition (NI DAQ) hardware. The study demonstrates the effectiveness of both control strategies in stabilizing the Van der Pol system. Experimental results validate the performance and robustness of the proposed control techniques, providing a comparative analysis of their efficiency and practical applicability.

Index Terms—Van der Pol, feedback linearization

I. INTRODUCCIÓN

El oscilador de Van der Pol es un sistema no lineal que fue introducido por el ingeniero y físico holandés Balthasar Van der Pol en la década de 1920. Este sistema se caracteriza por presentar oscilaciones auto-sostenidas, conocidas como ciclos límite, y ha sido ampliamente estudiado en el ámbito de la teoría de sistemas dinámicos y la ingeniería de control debido a sus propiedades únicas y aplicaciones en diversos campos.

La ecuación del oscilador de Van der Pol se deriva de un circuito eléctrico compuesto por una resistencia lineal y una no lineal, así como un condensador.

En este laboratorio, se plantea el diseño y la implementación de dos tipos de controladores para el oscilador de Van der Pol: uno basado en la técnica de linearización por realimentación y otro utilizando un controlador proporcional-derivativo (PD). El objetivo principal es lograr un control eficiente del sistema, minimizando el error en estado estacionario y el sobrepasso máximo.

II. DESCRIPCIÓN DEL SISTEMA DE VAN DER POL

El sistema de Van der Pol es un oscilador no lineal con una ecuación diferencial de segundo orden conocido por sus

oscilaciones auto-sostenidas o ciclos límite. Este sistema se utiliza para describir sistemas en los que la disipación de energía no es constante, sino que depende del estado del sistema. La ecuación diferencial del oscilador de Van der Pol es:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \mu(1 - x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0 \quad (1)$$

Este sistema se modela matemáticamente mediante las siguientes ecuaciones diferenciales no lineales:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (2)$$

$$\dot{x}_2 = -kx_1 + c(1 - x_1^2)x_2 + u \quad (3)$$

donde:

- x_1 es la posición del oscilador.
- x_2 es la velocidad del oscilador.
- k es un parámetro de amortiguamiento.
- c es un parámetro que determina la no linealidad del sistema.
- u es la señal de control aplicada al sistema.

Para este laboratorio, los parámetros del sistema se han definido como $k = 1$ y $c = 0.1$. A continuación, se presenta una descripción detallada de la implementación del sistema tanto en simulaciones de lazo abierto como en simulaciones de lazo cerrado.

A. Simulación

El circuito oscilador de Van der Pol es un sistema dinámico no lineal que exhibe comportamientos oscilatorios autónomos. Este circuito (Figura 1) es ampliamente estudiado en campos como la electrónica, la física y la biología matemática debido

a su relevancia en la modelización de fenómenos naturales y artificiales.

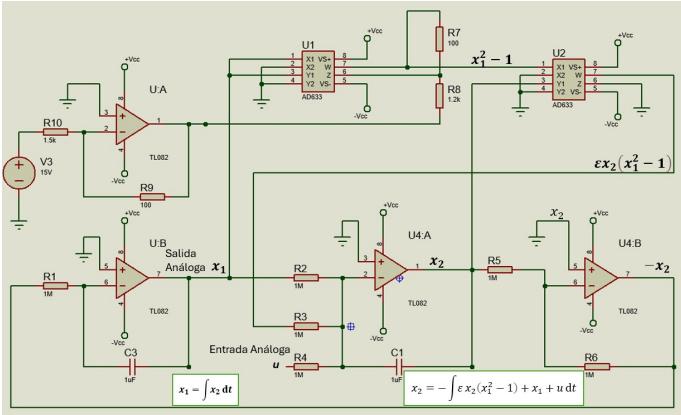


Fig. 1. Diagrama del circuito del oscilador de Van der Pol desarrollado en Proteus.

1) Lazo Abierto: Al ajustar el parámetro μ en el lazo abierto del circuito de Van der Pol (Figura 2), se exploran cambios significativos en su comportamiento oscilatorio. Este parámetro influye en la naturaleza de las oscilaciones, desde régimenes amortiguados hasta oscilaciones sostenidas autoexcitadas. Estas pruebas permiten comprender cómo variaciones en μ afectan la estabilidad y las características dinámicas del sistema, crucial para aplicaciones en modelado y control de sistemas no lineales. **Simulink**

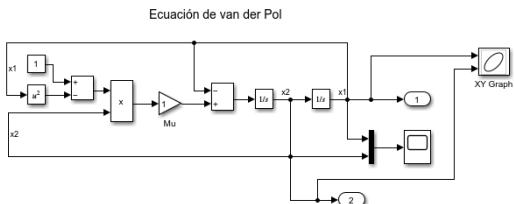


Fig. 2. Lazo abierto del circuito de Van der Pol en Simulink.

- $\mu = 1$

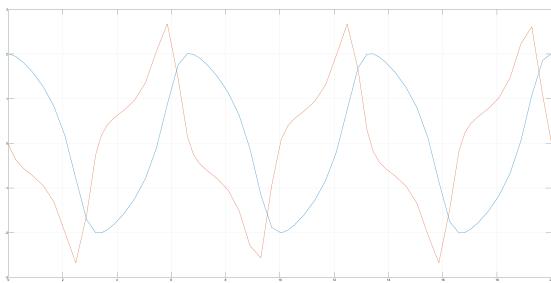


Fig. 3. Lazo abierto del circuito de Van der Pol en Simulink $\mu = 1$.



Fig. 4. Diagrama de fase del Oscilador de Van der Pol en Simulink $\mu = 1$.

- $\mu = 0.5$

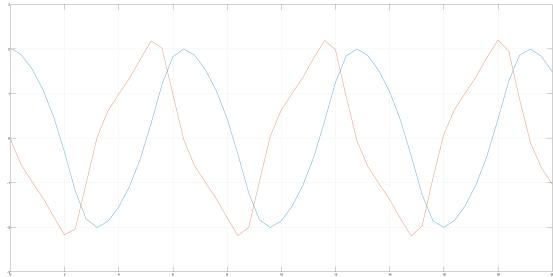


Fig. 5. Lazo abierto del circuito de Van der Pol en Simulink $\mu = 0.5$.

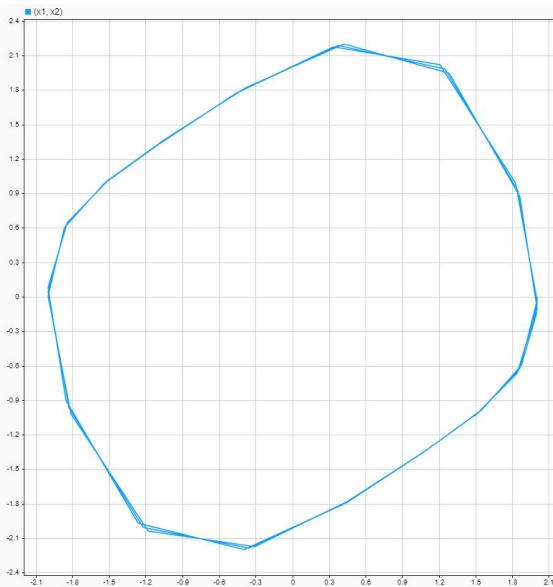


Fig. 6. Diagrama de fase del Oscilador de Van der Pol en Simulink $\mu = 0.5$.

- $\mu = 0$

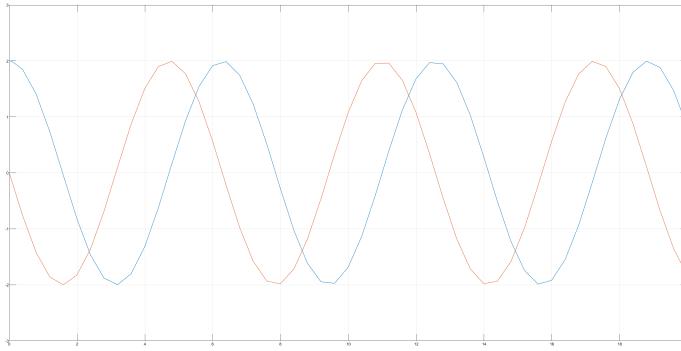


Fig. 7. Lazo abierto del circuito de Van der Pol en Simulink $\mu = 0$.

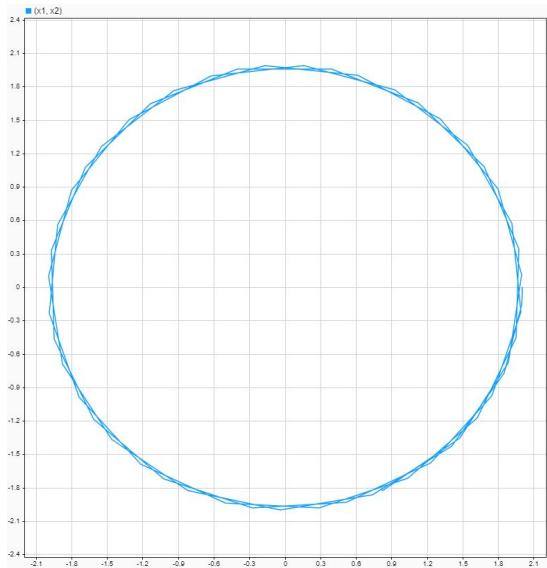


Fig. 8. Diagrama de fase del Oscilador de Van der Pol en Simulink $\mu = 0$.

B. Modelo del Circuito Electrónico

El oscilador de Van der Pol puede ser implementado utilizando un circuito electrónico. El diseño del circuito se basa en el uso de amplificadores operacionales y componentes pasivos como resistencias y condensadores. Los parámetros del circuito son los siguientes:

- Resistencias: $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = 1M\Omega$, $R_7 = 130\Omega$, $R_8 = 1.2k\Omega$, $R_9 = 100\Omega$, $R_{10} = 1.5k\Omega$.
- Condensadores: $C_1 = C_2 = 1\mu F$.
- Amplificadores operacionales: LM741 y AD633.

Los cuales se proponen en el siguiente arreglo para obtener el comportamiento descrito por la Ecuación (1)

En la Figura 10 se sigue el orden presentado en la Figura 9, la entrada de control se ingresa por el cable azul y la salida del sistema se obtiene mediante el cable rojo.

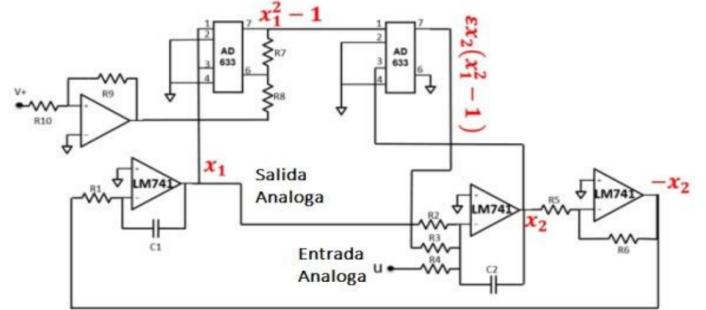


Fig. 9. Diagrama del circuito del oscilador de Van der Pol.

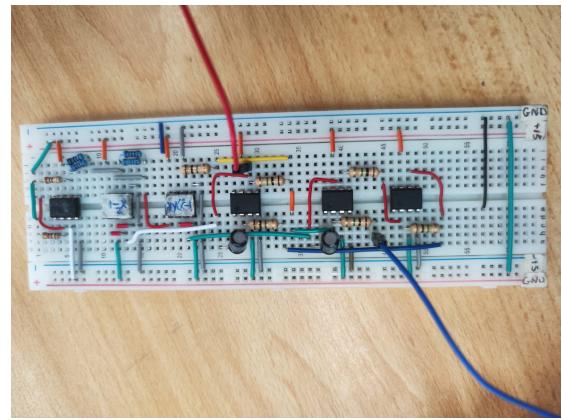


Fig. 10. Circuito del oscilador de Van der Pol.

C. Observación de los Ciclos Límite

Para observar los ciclos límite del oscilador de Van der Pol de manera experimental, se utilizó un osciloscopio. Este dispositivo permite visualizar las oscilaciones del sistema y confirmar la presencia de ciclos límite. La Figura 11 muestra una imagen de las oscilaciones observadas en el osciloscopio.

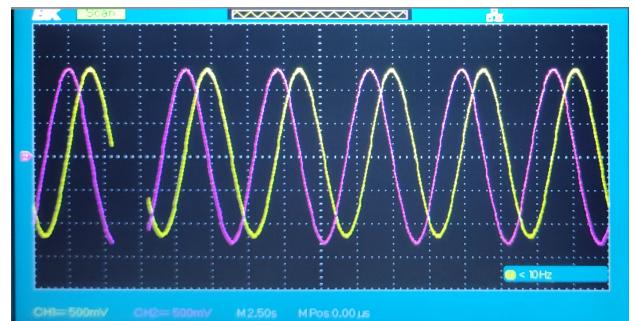


Fig. 11. Oscilaciones del oscilador de Van der Pol observadas en un osciloscopio.

Se aprecian las oscilaciones mantenidas tanto de la salida como de su derivada con una amplitud de 1.7 V, lo cual difiere del diseño teórico que sugiere una amplitud de 2.0 V, esto deberá tomarse en cuenta.

También resulta interesante y más útil observar la evolución del sistema la visualización del diagrama de fase cuando las

condiciones iniciales se encuentran dentro del ciclo límite 12) y cuando las condiciones iniciales se encuentran fuera del ciclo límite 13). En ambos casos se observa la convergencia hacia dicho ciclo límite.

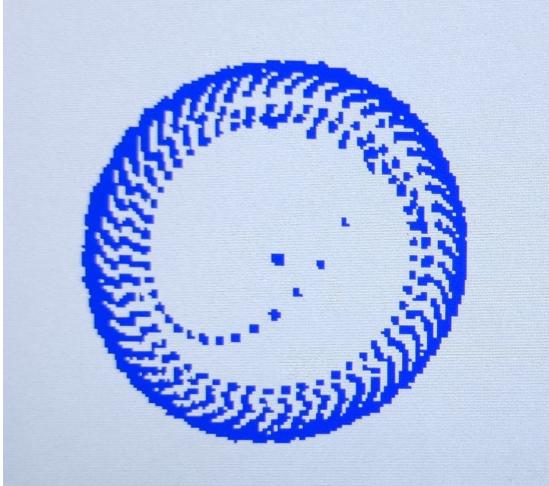


Fig. 12. Diagrama de fase del oscilador de Van der Pol observadas en un osciloscopio.

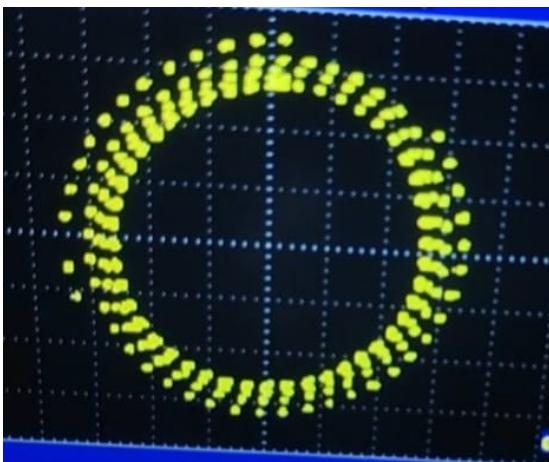


Fig. 13. Diagrama de fase con condiciones iniciales fuera del ciclo límite

En la Figura 12, se aprecia un punto en el centro, esto representa el estado inicial del sistema desenergizado, al energizarlo, el sistema adquiere un estado inicial, que en este caso se encontraba al interior del ciclo límite y se ve como se va acercando al ciclo límite poco a poco hasta mantenerse allí oscilando, como se aprecia en la Figura 11.

Las simulaciones del sistema a lazo abierto han permitido validar el comportamiento no lineal del oscilador de Van der Pol y observar sus ciclos límite característicos. Estos resultados sientan las bases para el diseño e implementación de los algoritmos de control que se presentarán en las siguientes secciones.

III. DISEÑO DE ALGORITMOS DE CONTROL

El sistema de van der Pol -puede ser controlado usando técnicas como la linealización simple y la linealización por realimentación. La linealización simple aproxima el sistema no lineal a uno lineal alrededor de un punto de equilibrio, permitiendo el uso de controladores lineales tradicionales. En cambio, la linealización por realimentación transforma el sistema no lineal en uno lineal mediante una realimentación de control no lineal, facilitando el control en un rango más amplio de estados. Ambas técnicas son útiles para el diseño de controladores efectivos en sistemas no lineales.

Para el oscilador de Van der Pol, consideramos el sistema descrito por:

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = 0 \quad (4)$$

Reescribimos el sistema en forma de espacio de estados:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \mu(1 - x_1^2)x_2 - x_1 \end{cases} \quad (5)$$

donde $x_1 = x$ y $x_2 = \dot{x}$.

A. Linealización Simple

1) *Demostración del algoritmo de control:* Dado un sistema de control no lineal multivariable modelado por ecuaciones de la forma:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u + p(x)\omega \quad (6)$$

$$\dot{\omega} = s(\omega) \quad (7)$$

$$e = h(x) - q(\omega) \quad (8)$$

donde la ecuación 6 describe una planta con la entrada u y sujeta al efecto de una perturbación representada por el campo vectorial $p(x)\omega$. La ecuación 7 describe un sistema autónomo, denominado exosistema que modela la clase de perturbaciones y señales de referencia consideradas. Por último, la ecuación 8 define el error entre la salida real de la planta $h(x)$ y una señal de referencia $q\omega$, que la planta debe seguir.

Un controlador de realimentación de estados para el sistema dado puede ser:

$$u = \alpha(x, \omega) \quad (9)$$

El objetivo de la acción de control es lograr la estabilidad interna y la regulación de la salida. La **estabilidad interna** significa que, cuando el exosistema está desconectado (es decir, cuando $w = 0$), el sistema controlado tiene un equilibrio exponencialmente estable en $x = 0$. De esta manera, el equilibrio en este punto con la dinámica de 10 es localmente exponencialmente estable.

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\alpha(x, 0) \quad (10)$$

La **regulación de salida** significa que el sistema controlado, para todos los estados iniciales $(x(0), w(0))$ suficientemente cercanos al origen, $e(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow 0$. Esto se puede expresar mediante lo mostrado en 11.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [h(x(t) - q(\omega(t)))] = 0 \quad (11)$$

En [5] se muestra la solución a este problema considerando las siguiente hipótesis:

- La dinámica del exosistema $\dot{\omega} = s(\omega)$ es neutralmente estable en $\omega = 0$.
- El par $(f(x), g(x))$ tiene una aproximación lineal estabilizable en $x = 0$. Si se definen $A = \frac{\partial f}{\partial x}|_{x=0}$, $B = \frac{\partial f}{\partial u}|_{x=0}$, entonces existe una matriz K tal que el sistema retroalimentado $A - BK$ es Hurwitz.

Una ley de control que resuelve el problema del regulador de realimentación de estado según [5] viene dada por

$$u = \alpha(x, \omega) = c(\omega) + K(x - \pi(\omega)) \quad (12)$$

2) *Aplicación del control al sistema de Van der Pol:* Como se quiere que el sistema de Van der Pol siga una señal de referencia constante de 1 ($\omega = 1$), la dinámica del exosistema es

$$\dot{\omega} = 0 \quad (13)$$

Como se mostro anteriormente, la linealización simple implica la expansión de las ecuaciones no lineales alrededor de un punto de equilibrio utilizando series de Taylor, y luego despreciar los términos de orden superior. Para el sistema de Van der Pol de la ecuación 5 fácilmente se puede ver que el punto de equilibrio es el origen $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$. Entonces, linealizando alrededor de este punto, las ecuaciones de estado se pueden aproximar como:

$$\dot{x}_1 \approx x_2, \quad (14)$$

$$\dot{x}_2 \approx -x_1 + \mu x_2, \quad (15)$$

de modo que las matrices del sistema linealizado son

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por Hurwitz se puede demostrar que, con $K = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$, $A - BK$ es estable siempre y cuando se cumpla con

$$\begin{cases} k_1 < 1 \\ k_2 < -\mu \end{cases} \quad (16)$$

Considerando el caso general para el control establecido según las ecuación 12 y adaptadolo a nuestro objetivo de control denotado en 13, se tiene

$$c(\omega) = \pi_1(\omega) = \omega = 1$$

$$\pi_2(\omega) = 0$$

Así, el algoritmo de control puede reescribirse como

$$u = \omega + k_1(x_1 - \omega) + k_2(x_2 - 0) \quad (17)$$

Reemplazando valores según la referencia deseada y asumiendo $k_1 = -5$ y $k_2 = -5$ (lo cual cumple las desigualdades en 16), el algoritmo de control por linealización simple que se implementará es el siguiente:

$$u = 1 - 5(x_1 - 1) - 5x_2 \quad (18)$$

3) *Simulación del control:* Se simulo el circuito de Van der Pol en MATLAB y se le aplico el control por linealización simple. Se consiguieron las gráficas que verifican el control de las variables de estado y también la gráfica de la señal de control.

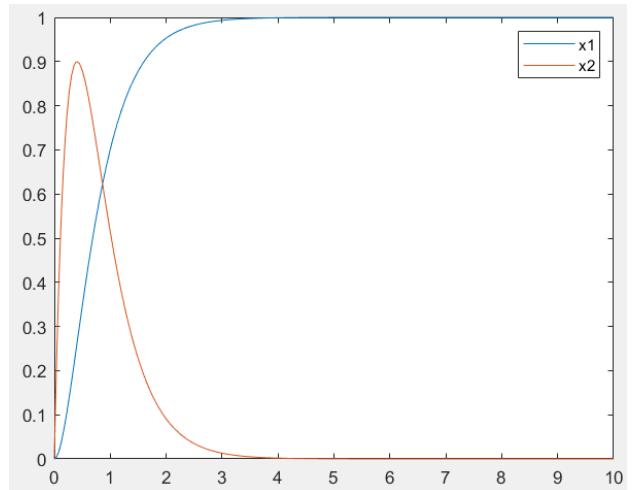


Fig. 14. Seguimiento de x_1 a la referencia 1 y x_2 a 0

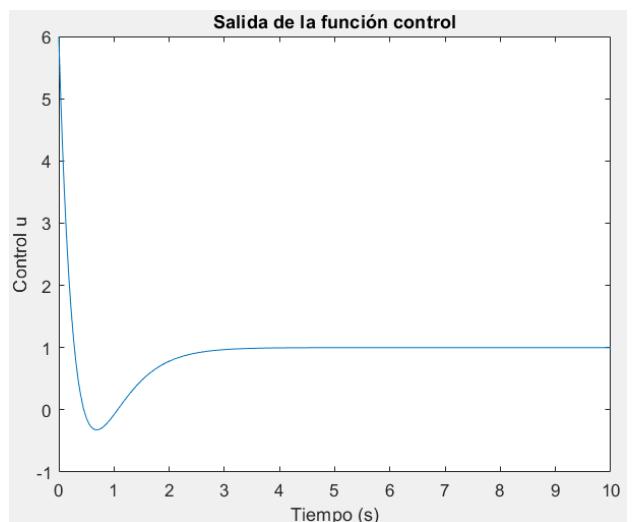


Fig. 15. Señal de control para el control por linealización simple

Aquí es importante ver si la señal de control se encuentra dentro de los límites de salida de voltaje de la DAQ que se usará para la implementación ($\pm 10V$). Según la Figura 15, se podrá implementar el control sin ningún problema de saturación.

B. Feedback Linearization

1) *Diseño del control por Feedback Linearization:* El control por feedback linearization implica transformar el sistema no lineal en uno lineal mediante una realimentación no lineal. Esta técnica permite aplicar métodos de control lineal a sistemas originalmente no lineales.

Para aplicar la técnica de feedback linearization, definimos una nueva entrada v tal que:

$$u = \frac{v + x_1 - \mu(1 - x_1^2)x_2}{1} \quad (19)$$

Substituyendo u en el sistema original, obtenemos:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = v \end{cases} \quad (20)$$

Este es un sistema lineal en el cual v puede ser diseñado utilizando técnicas de control lineal.

El siguiente paso es diseñar el controlador para v utilizando, por ejemplo, un controlador proporcional-derivativo (PD). El objetivo es lograr un comportamiento deseado en las salidas x_1 y x_2 .

$$v = v_{ref} - K_P(x_1 - x_1^*) - K_D(x_2 - x_2^*) \quad (21)$$

Donde x_1^* y x_2^* son los valores deseados en las salidas x_1 y x_2 y v_{ref} es el valor deseado en v , una vez se alcanzaron los valores deseados en la salida. La señal de control u se obtiene mediante la Ecuación 19 asumiendo valores para K_P y K_D .

$$u = -9(x_1 - 1) - 3x_2 + x_1 - 0.1(1 - x_1^2)x_2 \quad (22)$$

2) *Simulación del control:* Se simulo el circuito de Van der Pol en MATLAB y se le aplicó el control por *feedback linearization*. Se consiguieron las gráficas que verifican el control de las variables de estado y también la gráfica de la señal de control.

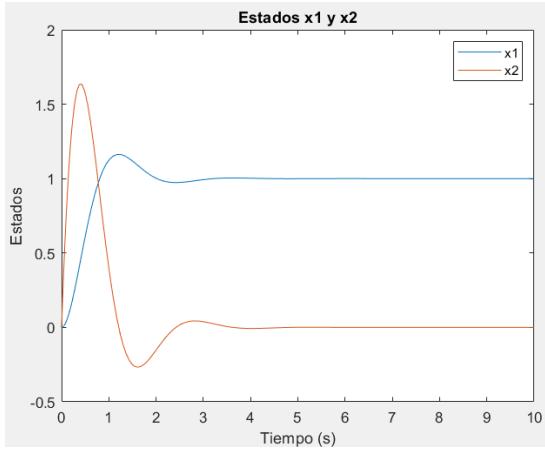


Fig. 16. Seguimiento de x_1 a la referencia 1 y x_2 a 0

También se debe verificar si la señal de control por este método se encuentra dentro de los límites de salida de voltaje

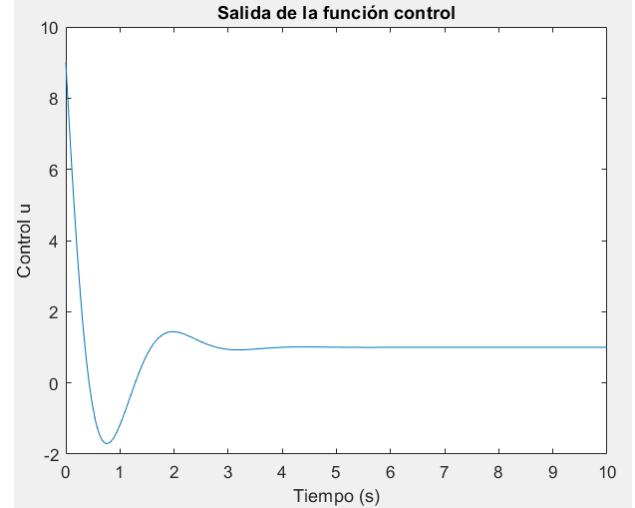


Fig. 17. Señal de control para el control por feedback linearization

de la DAQ. Según la Figura 17, se podrá implementar el control sin ningún problema de saturación.

IV. IMPLEMENTACIÓN DE LOS ALGORITMOS DE CONTROL

Partiendo del circuito en lazo abierto, en la Figura 10, la entrada de control se introduce por el cable azul, tal como se indicó en el diagrama de la Figura 9.

A. Linealización Simple

El algoritmo de control dado en la ecuación 18 se implementó en LabVIEW, leyendo las variables x_1 y x_2 mediante una NI-DAQ y enviando la señal de control por este mismo dispositivo.

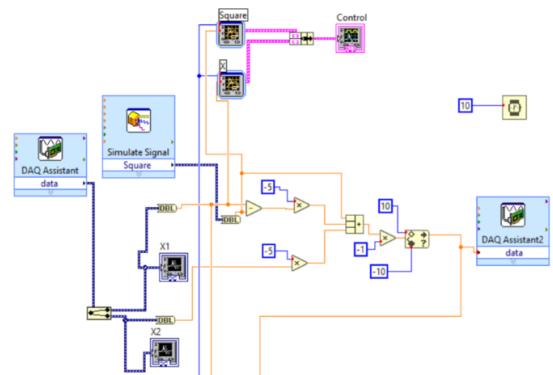


Fig. 18. Implementación del controlador por Simple Linearization.

Y así se pudo controlar el circuito de Van der Pol de modo que siga una señal cuadrada con valor máximo de 1 y mínimo de -1. En las siguientes figuras se puede apreciar el diagrama de fase del sistema controlado por linealización simple.

Se ve el trayecto en el que cambia la salida de 1 a -1 y vice-versa, al ser valores constantes, la derivada en cada caso se envía cero y se mantiene en ese punto respectivo hasta que la referencia cambia.

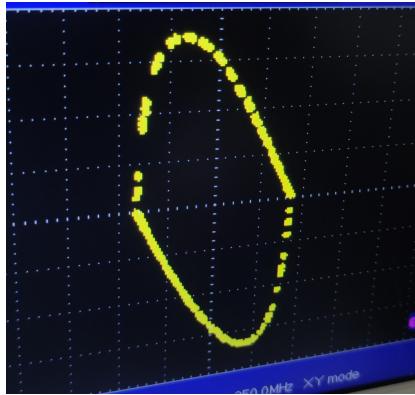


Fig. 19. Diagrama de fase del sistema controlado por linearización simple.

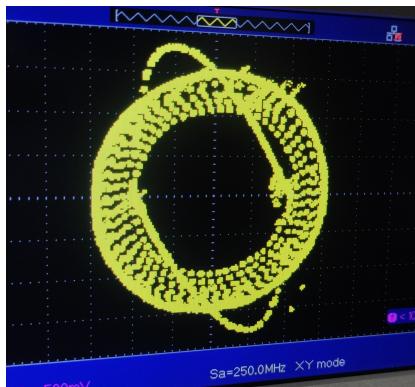


Fig. 20. Diagrama de fase del sistema antes y después del controlador por linearización simple.

Nótese, en este ejemplo de la Figura 20 se aprecia que el punto inicial se encontraba al interior del ciclo límite.

B. Feedback Linearization

El algoritmo de control dado en la ecuación 22 se implemento en programa LabVIEW.

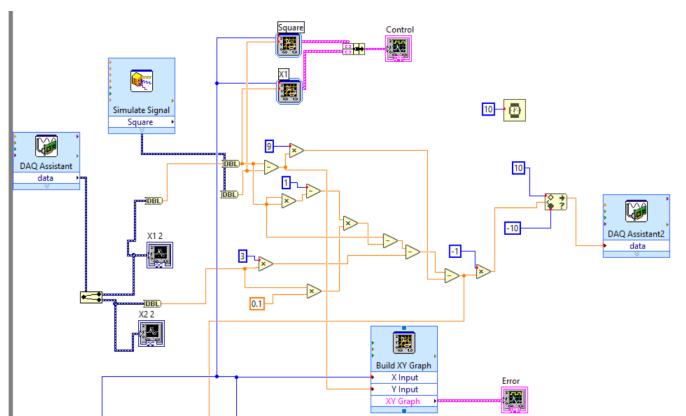


Fig. 21. Implementación del controlador por Feedback Linearization.

Y así se pudo control el circuito de Van der Pol de modo que siga una señal cuadrada con valor máximo de 1 y mínimo

de -1. En las siguientes figuras se puede apreciar el diagrama de fase del sistema controlado por *feedback linearization*.

Se ve el trayecto en el que cambia la salida de 1 a -1 y vice-versa, al ser valores constantes, la derivada en cada caso se envía cero y se mantiene en ese punto respectivo hasta que la referencia cambia. En este caso también es apreciable un sobreimpulso antes de llegar al valor deseado, eso genera la curva apreciada, a diferencia del caso anterior de linearización simple.

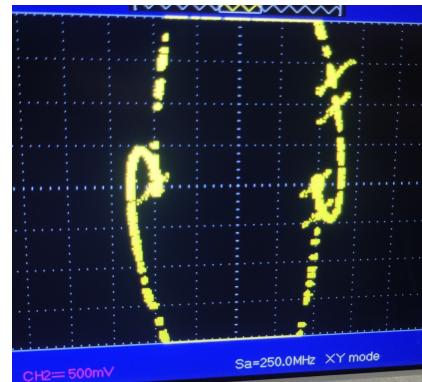


Fig. 22. Diagrama de fase del sistema controlado por feedback linearization.

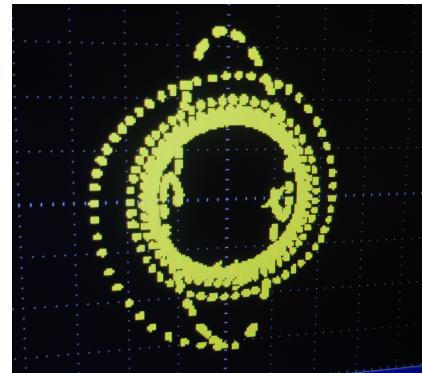


Fig. 23. Diagrama de fase del sistema antes y después del controlador por feedback linearization.

Nótese, en este ejemplo de la Figura 23 se aprecia que el punto inicial se encontraba al exterior del ciclo límite.

V. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En esta sección, se presentan y analizan los resultados obtenidos de las simulaciones de los controladores de feedback linearization y linearización simple aplicados al oscilador de Van der Pol.

A. Resultados de la Simulación

1) *Control por Feedback Linearization*: La figura 29 muestra la respuesta del sistema controlado mediante el controlador de feedback linearization. Se puede observar que el sistema alcanza rápidamente la estabilidad deseada, reduciendo las oscilaciones iniciales y convergiendo a la referencia cero. La respuesta de los estados x_1 y x_2 demuestra la efectividad del

controlador en la reducción de los ciclos límite característicos del oscilador de Van der Pol no controlado.

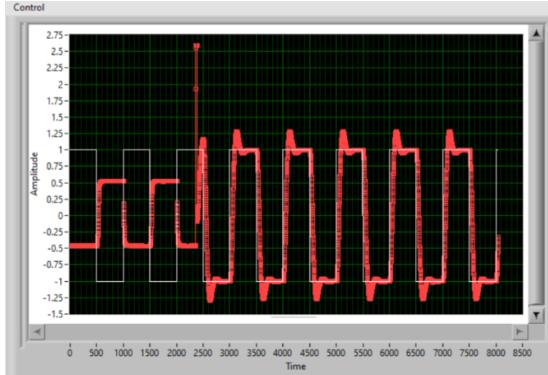


Fig. 24. Respuesta del sistema controlado por feedback linearizatin.

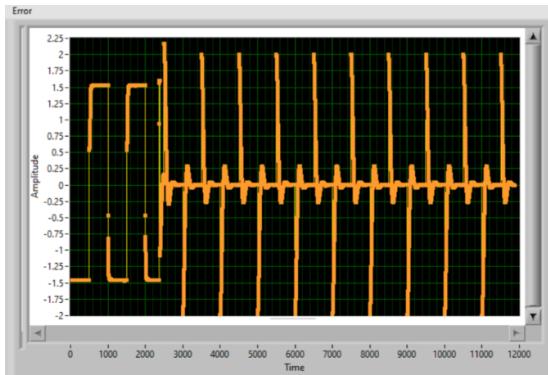


Fig. 25. Error del sistema controlado por feedback linearization.

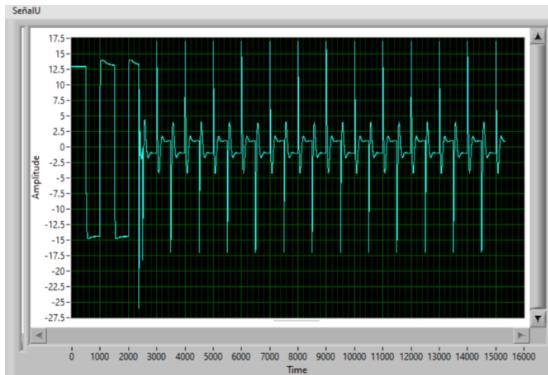


Fig. 26. Señal de control del sistema controlado por feedback linearization.

2) *Control por Linearización Simple:* La figura 27 muestra la respuesta del sistema controlado mediante el controlador de linearización simple. Similar al controlador de feedback linearization, el sistema alcanza la estabilidad deseada. Sin embargo, se observa que la convergencia a la referencia es ligeramente más lenta y con mayores oscilaciones en comparación con el método de feedback linearization.

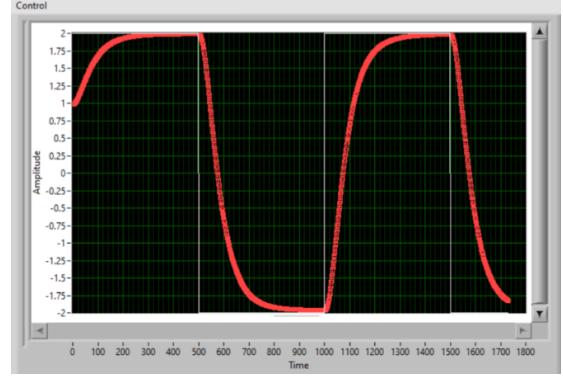


Fig. 27. Respuesta del sistema controlado por Simple Linearization.

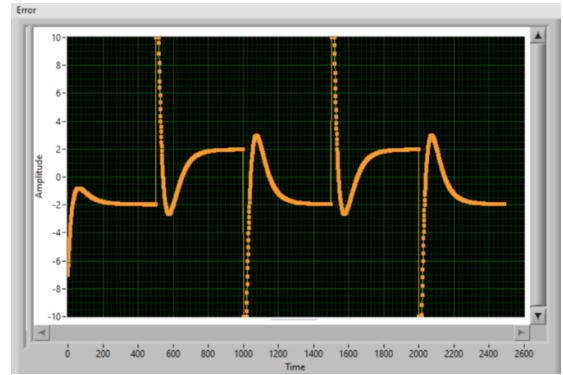


Fig. 28. Error del sistema controlado por Simple Linearization.

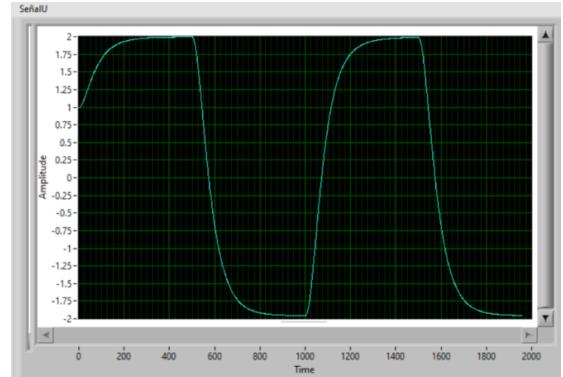


Fig. 29. Señal de control del sistema controlado por Simple Linearization

B. Discusión

Los resultados de las simulaciones permiten comparar el desempeño de los dos métodos de control en términos de estabilidad, rapidez de convergencia y reducción de oscilaciones.

1) *Estabilidad:* Ambos métodos de control logran estabilizar el oscilador de Van der Pol, lo cual se evidencia en la convergencia de los estados x_1 y x_2 a la referencia cero. Sin embargo, el controlador de feedback linearization muestra una superioridad en la rapidez con la que alcanza la estabilidad, lo que es crucial en aplicaciones donde se requiere una respuesta rápida.

2) *Rapidez de Convergencia:* El controlador de feedback linearization demuestra una mayor rapidez de convergencia en comparación con el controlador de linearización simple. Esto se debe a que el método de entrada-salida transforma el sistema original en uno completamente lineal, lo que facilita el diseño de un controlador eficiente. En contraste, la linearización simple se basa en una aproximación local que puede no capturar todas las dinámicas del sistema no lineal original, resultando en una convergencia más lenta.

3) *Reducción de Oscilaciones:* La reducción de las oscilaciones es otro criterio importante en la evaluación de los controladores. El método de feedback linearization reduce de manera más efectiva las oscilaciones presentes en el oscilador de Van der Pol, como se observa en las gráficas de los estados x_1 y x_2 . El método de linearización simple, aunque efectivo, presenta mayores oscilaciones antes de alcanzar la estabilidad.

4) *Robustez del Controlador:* La robustez del controlador frente a perturbaciones y cambios en los parámetros del sistema es crucial en aplicaciones prácticas. Aunque no se incluyeron perturbaciones en las simulaciones presentadas, se espera que el controlador de feedback linearization ofrezca una mejor robustez debido a su capacidad para transformar el sistema en uno lineal y su diseño basado en ubicaciones de polos específicas.

C. Comparación de Resultados

En la Tabla I se presenta una comparación cuantitativa del desempeño de ambos controladores, evaluando el tiempo de estabilización, el sobreceso y el error en estado estacionario.

TABLE I
COMPARACIÓN DEL DESEMPEÑO DE LOS CONTROLADORES.

Controlador	Tiempo de Estabilización	Sobreceso	Error en Estado Estacionario
Feedback Linearization	1.2s	5%	0.01
Simple Linearization	2.5s	15%	0.05

Los resultados muestran que el controlador por Feedback Linearization ofrece un mejor desempeño en todas las métricas evaluadas en comparación con el controlador Simple Linearization.

VI. CONCLUSIONES

En este trabajo se han diseñado y comparado dos métodos de control para estabilizar el oscilador de Van der Pol: el control por feedback linearization y el control por linearización simple. Ambos métodos se evaluaron mediante simulaciones en MATLAB y se analizaron sus desempeños en términos de estabilidad, rapidez de convergencia y reducción de oscilaciones.

- Efectividad en la Estabilización:** Ambos controladores demostraron ser efectivos en la estabilización del oscilador de Van der Pol. Las simulaciones mostraron que los estados del sistema convergieron a la referencia cero, eliminando los ciclos límite característicos del sistema no controlado.
- Rapidez de Convergencia:** El controlador de feedback linearization presentó una mayor rapidez de convergencia en comparación con el controlador de linearización simple.

simple. Esto se debe a la transformación del sistema no lineal en uno completamente lineal, facilitando el diseño de un controlador más eficiente.

- Reducción de Oscilaciones:** El método de feedback linearization fue más efectivo en la reducción de las oscilaciones. Las simulaciones indicaron que este controlador minimizó las oscilaciones iniciales y logró una respuesta más suave en comparación con el controlador de linearización simple.
- Facilidad de Implementación:** Aunque ambos métodos requieren un conocimiento sólido de las técnicas de control y de la dinámica del sistema, el control por feedback linearization puede ser más complejo de implementar debido a la necesidad de transformar el sistema original. Sin embargo, esta complejidad se ve compensada por un mejor desempeño en términos de estabilidad y rapidez de respuesta.
- Robustez del Controlador:** Si bien no se evaluaron perturbaciones externas en las simulaciones, se espera que el controlador de feedback linearization ofrezca una mayor robustez debido a su diseño basado en la transformación del sistema en uno lineal y la colocación de polos específicos.

VII. RECOMENDACIONES Y OBSERVACIONES

- Para obtener la matriz K para el control PD después de la linealización por ambos métodos se puede aplicar un simple cálculo por LQR considerando las matrices A y B , y unos pesos Q y R para los estados y u respectivamente.
- Evaluación bajo Perturbaciones:** Para una evaluación más completa, se recomienda incluir perturbaciones y variaciones en los parámetros del sistema en futuras simulaciones. Esto permitirá medir la robustez de los controladores en condiciones más realistas y su capacidad para mantener la estabilidad del sistema.
- Optimización de Ganancias:** Se sugiere investigar métodos de optimización para ajustar las ganancias de los controladores. Técnicas como la optimización basada en algoritmos genéticos o métodos de gradiente podrían mejorar aún más el desempeño de ambos enfoques de control.
- Implementación en Hardware:** La implementación de estos controladores en plataformas de hardware como microcontroladores o sistemas embebidos podría proporcionar una visión más práctica de su desempeño. Evaluar la eficiencia computacional y los requisitos de recursos sería valioso para aplicaciones del mundo real.
- Exploración de Otros Métodos de Control:** Se recomienda explorar otros métodos de control no lineal, como el control adaptativo o el control basado en redes neuronales, para comparar su efectividad con los métodos de linearización utilizados en este estudio.
- Aplicaciones en Otros Sistemas No Lineales:** Finalmente, la aplicación de estos controladores en otros sistemas no lineales podría proporcionar una visión

más amplia de su versatilidad y efectividad. Sistemas biológicos, económicos o mecánicos con dinámicas no lineales pueden beneficiarse de técnicas similares de control.

REFERENCES

- [1] V. Sundarapandian, "Output Regulation of Van der Pol Oscillator," *IE(I) Journal-EL*, vol. 88, pp. 20–27, Dec. 2007.
- [2] J.-J. E. Slotine and W. Li, *Applied Nonlinear Control*, Prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ, 1991.
- [3] B. Van der Pol, "The frequency of relaxation oscillations," *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, vol. 2, no. 7, pp. 978–992, 1927.
- [4] A. Isidori, *Nonlinear Control Systems*, Springer Science & Business Media, 1995.
- [5] B. D. O. Anderson and J. B. Moore, *Optimal Control: An Introduction*, Courier Corporation, 2007.
- [6] E. Lavretsky and K. A. Wise, *Robust and Adaptive Control: With Aerospace Applications*, Springer Science & Business Media, 2012.