Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Национальный исследовательский университет
ИТМО»

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Лабораторная работа №6

«Работа с системой компьютерной вёрстки LaTeX»

Вариант №22

Группа: P3112
Выполнил: Балин А. А.

Проверил: к. т. н., преподаватель
Белозубов А. В.

Санкт-Петербург, 2022

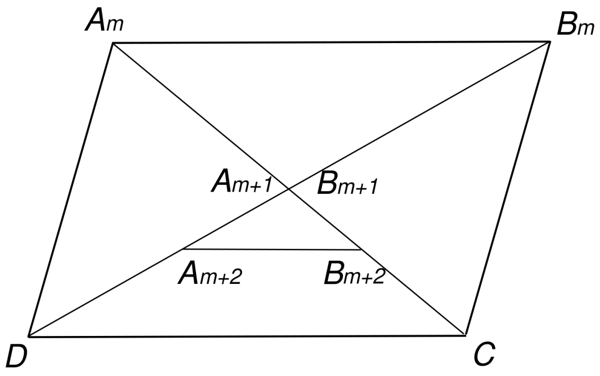

Рисунок 5.

К сожалению, некоторые читатели пишут: «Поскольку последовательность не монотонная, она не стремится к пределу». Это рассуждение, конечно, неверно. Докажем строго, пользуясь определением предела, что

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{b}{3}. \tag{4}$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Тогда если $n > N$, где $N = N_{(\varepsilon)}$ – наименьшее целое число, для которого $2^N\varepsilon > 2^m|\delta_m|$, то $|a_n - \frac{b}{3}| = |\delta_n| = \frac{|\delta|}{2^{n-m}} < \frac{|\delta_m|}{2^{N-m}} < \varepsilon$. Тем самым (4) доказано.

Разумеется, предел равен $\frac{b}{3}$ и в том случае, когда $a_m = \frac{b}{3}$ – в этом случае все последующие члены тоже равны $\frac{b}{3}$. Выясним, при каких значениях a возникает этот случай. Если $m = 0$, то $a = \frac{b}{3}$. Если $m = 1$ и $a_1 = \frac{a-b}{2} = \frac{b}{3}$, то $a = \frac{5b}{3}$.

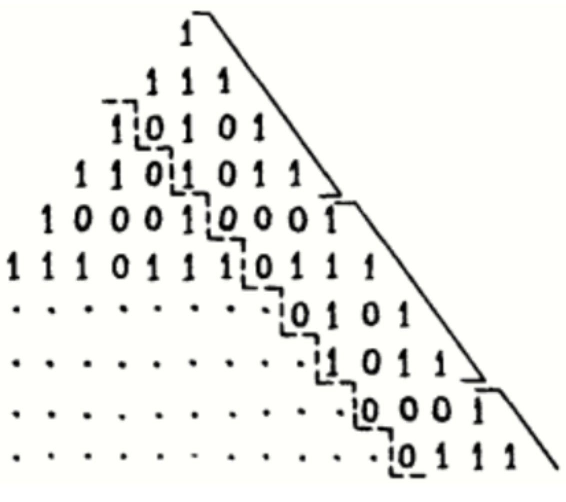

Рисунок 6.

Вообще, если $a_m = \frac{b}{3}$, то $a = a_0$ получается из $a_m = \frac{b}{3}$ после m-кратного применения формулы $a_{n-1} = 2a_n + b$. Таким образом, как нетрудно проверить, значения a, при которых $a_m = \frac{b}{3}$, составляют последовательность $\frac{b}{3}, \frac{5b}{3}, \frac{13b}{3}, \ldots, \frac{(2^k-3)b}{3}, \ldots$ При всех (и только этих) значениях a последовательность получается монотонной (и с некоторого места – постоянной).

Мы не выделили случай, когда $a_m = b$ (при этом $a_{m+1} = 0$, $a_{m+2} = \frac{b}{2}, \ldots$), – с алгебраической точки зрения он ничем не примечателен, но соответствующие $n = m$ и $n = m+1$ трапеции вырождаются в параллелограмм и в треугольник (точки B_{m+1} и C_{m+1} совпадают); начиная с $n = m+2$, получаются настоящие трапеции, и, как всегда, a_n стремится к пределу $\frac{b}{3}$.

M98

Докажите, что в таблице

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & 1 & 1 & & \\ & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 6 & 3 & 1 \\ \end{array}$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

где каждое число равно сумме трёх, стоящих над ним, в каждой строке (начиная с третьей) есть чётное число. В каждой ли строке (кроме первых двух) встречается число, делящееся на три?

Исследуем сначала вопрос о делимости на два. Будем в нашей таблице вместо чётных чисел писать 0, а вместо нечётных – 1. Тогда таблицу 0 и 1 нужно будет составлять по тому же правилу (каждое число получается как сумма трёх, стоящих над ним в предыдущей строке), только сложение нужно выполнять «по модулю два» – по правилам $0+0=0$, $0+1=1+0=1$, $1+1=0$.

Первое решение основано на таком соображении: последние четыре числа в каждой строке зависят только от того, каковы последние четыре числа в предыдущей строке, и поэтому нет ничего удивительного в том, что эта четвёрка переодически повторяется (с периодом 4, см. рисунок 6)[1])

Другое решение, предложенное рядом читателей – доказательство от противного. Предположим, что какая-то строка целиком состоит из единиц:

111 111

Тогда предыдущая строка, как легко убедиться, может быть только такой:

100100... ...001001,

а идущая перед ней – только такой:

110000110000 ... ... 000011000011.

Но это невозможно, поскольку в каждой строчке нашей таблицы нечётное количество чисел.

[1]Аналогичное решение приводится в книге Д. О. Шклярского, Н. Н. Ченцова и И. М. Яглома «Избранные задчачи и теоремы элементарной математики», изд. 4-е, «Наука», 1965, задача 10.