

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Национальный исследовательский университет
ИТМО»

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Лабораторная работа №6

«Работа с системой компьютерной вёрстки L^AT_EX»

Вариант №22

Группа: Р3112

Выполнил: Балин А. А.

Проверил: к. т. н., преподаватель

Белозубов А. В.

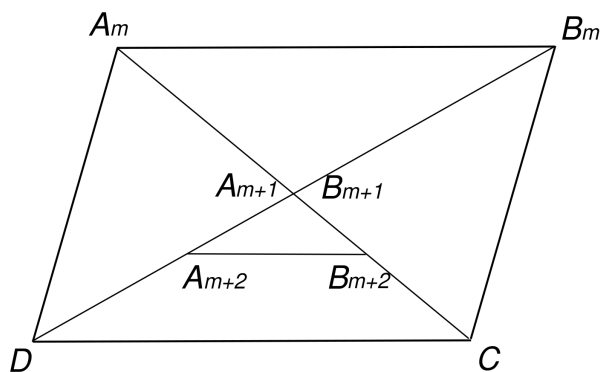


Рисунок 5.

К сожалению, некоторые читатели пишут: «Поскольку последовательность не монотонная, она не стремится к пределу». Это рассуждение, конечно, неверно. Докажем строго, пользуясь определением предела, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{b}{3}. \quad (4)$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Тогда если $n > N$, где $N = N(\varepsilon)$ – наименьшее целое число, для которого $2^N \varepsilon > 2^m |\delta_m|$, то $|a_n - \frac{b}{3}| = |\delta_n| = \frac{|\delta|}{2^{n-m}} < \frac{|\delta_m|}{2^{N-m}} < \varepsilon$. Тем самым (4) доказано.

Разумеется, предел равен $\frac{b}{3}$ и в том случае, когда $a_m = \frac{b}{3}$ – в этом случае все последующие члены тоже равны $\frac{b}{3}$. Выясним, при каких значениях a возникает этот случай. Если $m = 0$, то $a = \frac{b}{3}$. Если $m = 1$ и $a_1 = \frac{a-b}{2} = \frac{b}{3}$, то $a = \frac{5b}{3}$.

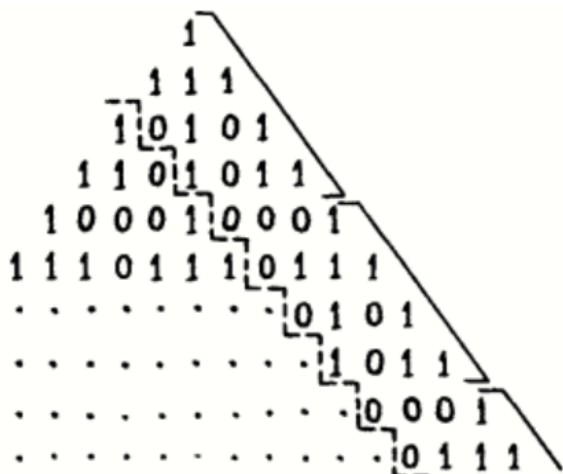


Рисунок 6.

Вообще, если $a_m = \frac{b}{3}$, то $a = a_0$ получается из $a_m = \frac{b}{3}$ после m -кратного применения формулы $a_{n-1} = 2a_n + b$. Таким образом, как нетрудно проверить, значения a , при которых $a_m = \frac{b}{3}$, составляют последовательность $\frac{b}{3}, \frac{5b}{3}, \frac{13b}{3}, \dots, \frac{(2^k-3)b}{3}, \dots$. При всех

(и только этих) значениях a последовательность получается монотонной (и с некоторого места – постоянной).

Мы не выделили случай, когда $a_m = b$ (при этом $a_{m+1} = 0, a_{m+2} = \frac{b}{2}, \dots$), – с алгебраической точки зрения он ничем не примечателен, но соответствующие $n = m$ и $n = m + 1$ трапеции вырождаются в параллелограмм и в треугольник (точки B_{m+1} и C_{m+1} совпадают); начиная с $n = m + 2$, получаются настоящие трапеции, и, как всегда, a_n стремится к пределу $\frac{b}{3}$.

M98

Докажите, что в таблице

								1
						1	1	1
			1	2	3	2	1	
	1	3	5	7	6	3	1	
.

где каждое число равно сумме трёх, стоящих над ним, в каждой строке (начиная с третьей) есть чётное число. В каждой ли строке (кроме первых двух) встречается число, делящееся на три?

Исследуем сначала вопрос о делимости на два. Будем в нашей таблице вместо чётных чисел писать 0, а вместо нечётных – 1. Тогда таблицу 0 и 1 нужно будет составлять по тому же правилу (каждое число получается как сумма трёх, стоящих над ним в предыдущей строке), только сложение нужно выполнять «по модулю два» – по правилам $0 + 0 = 0, 0 + 1 = 1 + 0 = 1, 1 + 1 = 0$.

Первое решение основано на таком соображении: последние четыре числа в каждой строке зависят только от того, каковы последние четыре числа в предыдущей строке, и поэтому нет ничего удивительного в том, что эта четвёрка периодически повторяется (с периодом 4, см. рисунок 6) *)

Другое решение, предложенное рядом читателей – доказательство от противного. Предположим, что какая-то строка целиком состоит из единиц:

111 111

Тогда предыдущая строка, как легко убедиться, может быть только такой:

100100... 001001,

а идущая перед ней – только такой:

110000110000 000011000011.

*) Аналогичное решение приводится в книге Дс. О. Ш к л я р с к о г о, Н. Н. Ч е ч е н ц о в а и И. М. Я г л о м а «Избранные задачи и теоремы элементарной математики», изд. 4-е, «Наука», 1965, задача 10.