

Kapitel 7

Rotationsmekanik

Vi så i tidligere kapitler, at der er en tæt sammenhæng mellem impuls og kraft (Kap 4) samt mellem kraft og energi (via kraftens arbejde; Kap 6). Indtil nu har vi kun betragtet lineære translationer under impuls- og kraftpåvirkninger, hvor orienteringen af systemet i rummet ikke ændres. I det tilfælde har vi kunnet nøjes med at beskrive hvordan massemidtpunktet (*center of mass*, CM) bevæger sig. I dette kapitel skal vi se, hvordan vi kan beskrive roterende bevægelser (eller cirkelbevægelser) ved hjælp af bevægelsesenergi og -mængde (dvs. impuls) og ændringer af disse bevægelser når ydre kræfter virker.

7.1 Definitioner

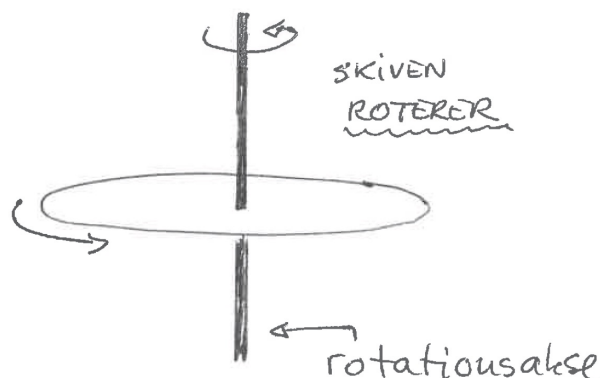
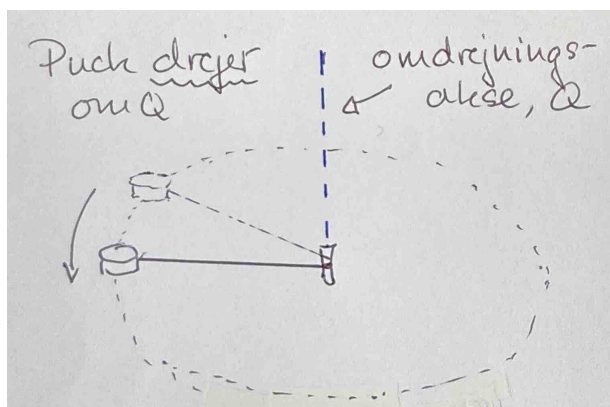
Før vi går videre er det nyttigt at præcisere betydningen af diverse begreber og at definere et hensigtsmæssigt koordinatsystem.

7.1.1 Begreberne drejning og rotation

Når et legeme bevæger sig omkring en akse, i en bestemt afstand r fra akse, siger vi at legemet *drejer om* akse. Når et legeme drejer om sin egen symmetri akse (f.eks. en akse der går gennem CM), siger vi at legemet roterer (om akse). Vi skelner altså mellem om bevægelsen sker omkring en akse internt i legemet ('rotation') eller eksternt i forhold til legemet ('drejer om' og banebevægelser). Figur 7.1 illustrerer situationen. Pucken på skiven *drejer omkring* akse Q, mens skiven *roterer* om den centrale akse (i figuren har akse ikke fået navn).

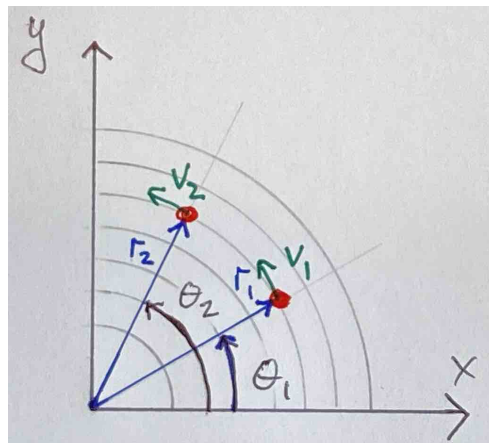
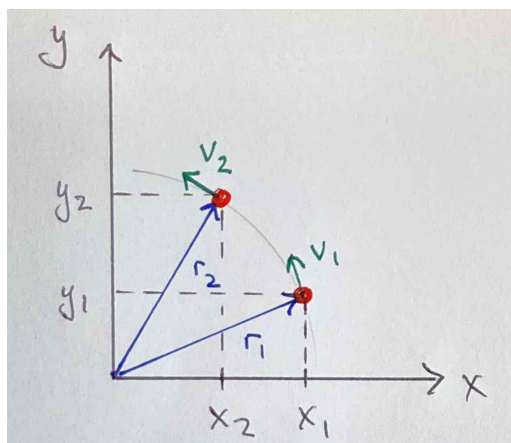
7.1.2 Koordinatsystemer - Polære koordinater

I figur 7.2 er en punktpartikel forbundet med en stram, inertiøs snor til den centrale akse, placeret i Origo i koordinatsystemerne. Partiklen drejer om Origo mod uret. Vi kan sagtens beskrive bevægelsen i et almindeligt Kartesisk koordinatsystem, hvor x - og y -akserne ligger i planet og står vinkelrette på hinanden. Som partiklen flytter sig i planet med tiden, beskrives partiklens position med et sæt x, y koordinater, hvor x og y ændres med tiden. Stedvektoren for partiklen \vec{r} beskrives derfor med forskellige $x(t)$ og $y(t)$ værdier som tiden går, selvom længden af \vec{r} vektoren er konstant. Bruger vi i stedet polære koordinater (r, θ) , beskriver vi



Figur 7.1: Vi skelner mellem om et legeme *drejer om* en ekstern akse eller *roterer om* en akse internt i legemet.

partiklens position til tiden t ved henholdsvis længden r ($r = |\vec{r}|$) og retningen af stedvektoren \vec{r} . Retningen af \vec{r} beskrives ved vinklen θ som \vec{r} danner med den positive x akse. Fordelen er her, at r er konstant og blot θ ændres med tiden. Det vil ofte simplificere beregningerne.

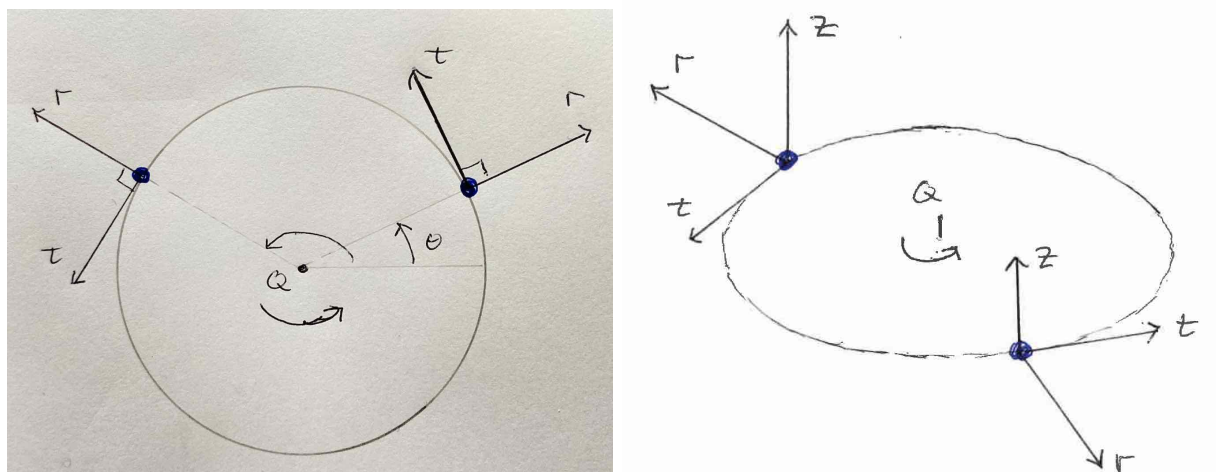


Figur 7.2: En cirkulær bevægelse kan beskrives ved Kartesiske koordinater (venstre panel). Det er dog ofte nemmere at regne med polære koordinater (højre panel) specielt når stedvektorens længde r er konstant. Under drejninger og rotation behøver \vec{r} dog ikke være konstant.

7.1.3 Koordinatsystem der følger med cirkelbevægelsen

Når vi beskriver cirkelbevægelser er det til tider bekvemt at benytte et koordinatsystem, som følger med legemet i bevægelse. Den radiale akse r ($=$ parallelt med stedvektoren \vec{r}) peger væk fra aksen mod legemet. Vinkelret på r i positiv bevægelsesretning (og retningen af stigende vinkel) ligger den tangentielle akse t . Den tredje koordinat-akse, z , står vinkelret på planet. Både r -aksen og t -aksen roterer som legemet bevæger sig i cirklen. Når et objekt udfører en

jævn cirkelbevægelse, er farten konstant og hastighedsvektoren i cirkelbevægelsen er parallel med t -aksen. Dette kaldes tangential-hastigheden, \vec{v}_t .



Figur 7.3: I det roterende koordinatsystem peger den radiale akse r væk fra aksen Q der roteres (eller drejes) om. Den tangentielle akse t står vinkelret på r -aksen, men ligger også i planet. t -aksen peger i retning af stigende vinkel θ . z -aksen står vinkelret på planet (kun vist i højre panel). r og t akserne ændrer retning som legemet drejer, da de følger med legemet i dens bevægelse. Bemærk, at z -aksen ikke ændrer retning.

7.2 Cirkelbevægelse

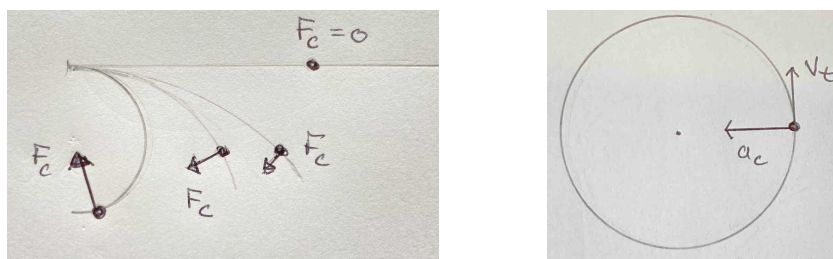
Du husker nok, at et isoleret legeme vil bevæge sig med konstant hastighed i en lige bane (Kap 3). Vi så i Kapitel 4 at en ydre kraft på et legeme vil ændre legemets hastighed. Da hastighed \vec{v} har både størrelse (=fart) og retning, skal der en kraft til at få legemet til at ændre retning. Derfor kræver det en kraft til at holde et legeme i en cirkelbevægelse. Og jo mindre radius af cirklen er, jo større kraft skal der til (Figur 7.4).

7.2.1 Centripetalacceleration

Du ved nok allerede fra gymnasiet, at et legeme i cirkelbevægelse er påvirket af en acceleration, der peger mod centrum af cirklen (Fig. 7.4), kaldet *centripetal-acceleration*. 'Centripetal' er latin og betyder 'center-søgende'. Denne acceleration kan skabes ved hjælp af snorkræfter (f.eks. når du svinger en spand med vand), friktion (f.eks. når du på rulleskøjter eller cykel tager et skarpt sving), eller fra andre legemer (f.eks. når du sidder på en karussel). Jeg har forsøgt at illustrere det i figur 7.5.

Centripetal-accelerationen \vec{a}_c , der kræves for at holde et legeme i en cirkelbevægelse kan udtrykkes ved:

$$\vec{a}_c = -\frac{v_t^2}{r} \hat{r}, \quad (7.1)$$



Figur 7.4: *Venstre panel:* Et legeme der ikke er påvirket af en ydre kraft, vil bevæge sig i en ret linje med konstant hastighed. Der skal en kraft til at få et legeme til at dreje. Jo mindre krumningsradius er, jo større kraft skal der til. *Højre panel:* For at holde et legeme i en cirkelbevægelse kræver det en centripetal-acceleration a_c . Accelerationen er parallel med (og modsat rettet) stedvektoren (ikke vist på figuren) og vinkelret på hastigheden.

hvor v_t er tangential-hastigheden, r er radius af cirkelbevægelsen og \hat{r} er enhedsvektoren for stedvektoren (dvs. retningen af stedvektoren), som starter i centrum af cirklen og peger væk fra omdrejningsaksen mod legemet. Ligning (7.1) viser at \vec{a}_c er modsat rettet \hat{r} . Bemærk at \vec{a}_c er parallel med \vec{r} og vinkelret på \vec{v}_t .

Størrelsen af \vec{a}_c er derfor

$$a_c = |\vec{a}_c| = \frac{v_t^2}{r}. \quad (7.2)$$

Hvis legemets fart i cirkelbevægelsen er konstant kaldes det en jævn cirkelbevægelse. For en ikke-jævn cirkelbevægelse, så har legemet også en tangential-acceleration a_t , som står tangent på banebevægelsen (se afsnit 7.1.3):

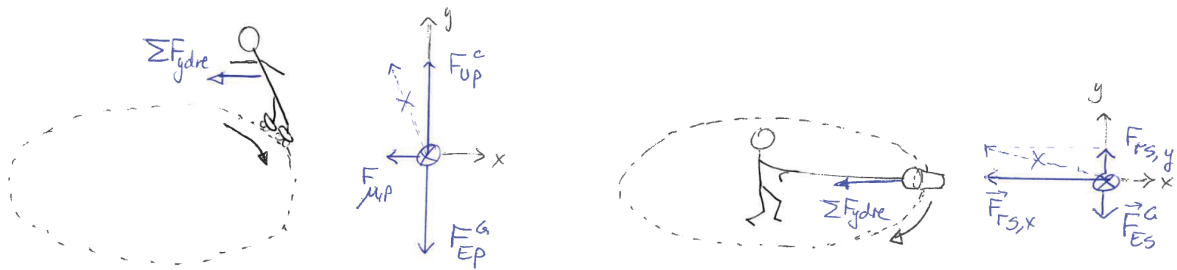
$$a_t = \frac{dv_t}{dt}. \quad (7.3)$$

Denne komponent af accelerationen (den anden komponent er a_c) ændrer nemlig tangential-farten, v_t . Bemærk, a_t er positiv, når v_t øges og a_t er negativ, når v_t sænkes.

Vi vil ikke udlede ligning (7.1) her, da det er kendt stof fra gymnasiet. Du kan dog finde links til små korte videoer inde på Absalon, som udleder ligningen på flere forskellige måder. Nogle af metoderne er lidt sjove. Du opfordres til at se videoerne hvis du har brug for en opfrisker eller hvis du synes den måde du blev introduceret til det i gymnasiet var lidt kryptisk. Hvilken er din favorit - de roterende vektorer, trigonometrisk projektioner, eller Månen i frit fald?

7.2.2 Centrifugalacceleration

Du har nok hørt om begrebet centrifugal-acceleration (eller centrifugalkraft), en acceleration (kraft) man føler når man sidder i en bil der drejer skarpt, eller når man sidder på en karussel. Man føler at man bliver slynget ud af, væk fra centrum af cirkelbevægelsen. Centrifugalkraften er dog en såkaldt fiktiv kraft. Den findes nemlig ikke, men er en konsekvens af at man befinder sig i et accelereret referencesystem. Dette er første indikation af at man gør det besværligt for een selv hvis man vælger et ikke inertial-system når man vælger et koordinat-system for sine beregninger.



Figur 7.5: Et legeme i cirkelbevægelse er påvirket af en centripetal-acceleration, \vec{a}_c . Denne (center-søgende) acceleration kan skabes af mange forskellige kraftpåvirkninger. Tager du et sving i en bil, på cykel, eller på rulleskøjter, vil friktionen med underlaget (statisk friktion μ_s) sørge for \vec{a}_c . Når du svinger en spand (højre panel), er det snorkraften, der skaber \vec{a}_c . Kraftdiagrammerne viser den resulterende horisontale kraft ($\sum \vec{F}_{ydre}$), som skaber centripetal-accelerationen til cirkelbevægelsen. Kraften med kryds over er den samlede kraft fra underlaget (venstre panel) og fra rebet (højre panel), hvor den horisontale komponent sørger for centripetal-accelerationen. $\vec{F}_{\mu,p}$ er friktionskraften på personen; \vec{F}_{up} er underlagets kraft på personen; \vec{F}_{Ep} er tyngdekraften på personen; $\vec{F}_{rs,x}$ og $\vec{F}_{rs,y}$ er henholdsvis x - og y -komponenten af kraften fra rebet på spanden; og \vec{F}_{Es} er tyngdekraften på spanden.

Hvad sker der egentlig i situationen med karussellen og bilen der drejer? Hvad vi oplever er ikke en kraft, der skubber os ud ad, men vi mærker konsekvensen af vores inertie. En person i en bil, der kører lige ud, har en impuls, der også peger lige ud. Drejer køretøjet fortsætter personen lige ud indtil siden af vognen skaber den centripetalacceleration, der skal til for at personen følger med vognen. Det tager dog lidt tid for vognen at ændre personens (oprindelige) bevægelsesretning (p.gr.a. inertien) og personen støder skulderen ind i vognen, hvis drejningen er skarp.

Står du på en roterende karrussel og holder fast i en stang, følger du cirkelbevægelsen fordi stangen skaber den nødvendige centripetalacceleration. Slipper du stangen vil du fortsætte lige ud, tangentielt til din oprindelige cirkelbevægelse. Du bliver ikke *slynget* ud af en kraft (i stedet mangler der en centripetalkraft). Din impulsvektor står vinkelret på din stedvektor, der udgår fra karrussellens rotationsakse. Uden en centripetalacceleration vil du fortsætte i en retlinet bane fra det punkt i cirkelbanen hvor du slap stangen.

7.3 Rotationskinematik

Det er oftest en fordel at benytte polære koordinater til at beskrive positionen af legemer, der drejer eller roterer. Det gør, at bevægelsesligningerne kommer til at se en smule anderledes ud. Det gode er, at der faktisk er en simpel 'oversættelse' og at ligningerne ligner meget det du kender fra den translatoriske (dvs lineære) bevægelse.

Denne sammenhæng (eller 'oversættelse') er, at buestykket s kan beskrives ved

$$s = r\theta, \quad (7.4)$$

idet for en given vinkel θ , vil s være større, jo længere r er. Se evt højre panel i figur 7.2.

Under en ren¹ rotation eller drejning, vil s og θ ændre sig i tiden. Tager vi den tidsafledte af ligning (7.4), får vi sammenhængen $\dot{s} = r\dot{\theta}$, som netop giver sammenhængen mellem den tangentielle fart v_t og vinkelhastigheden $\dot{\theta} = \omega$

$$v_t = r\omega. \quad (7.5)$$

Ligeledes gælder

$$a_t = r\alpha, \quad (7.6)$$

hvor $a_t = \dot{v}_t = \ddot{s}$ er den tangentielle acceleration og $\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\theta}$ er vinkel-accelerationen i bevægelsen.

Vi skifter dermed koordinater fra x til θ når vi arbejder med drejning og rotation:

$$x \rightarrow \theta \quad (7.7)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \dot{x} \rightarrow \omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \quad (7.8)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \dot{v} \rightarrow \alpha = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} \quad (7.9)$$

En translatorisk forskydning Δx er analog med en forskydning i vinklen $\Delta\theta$:

$$\Delta x = x_{\text{final}} - x_{\text{initial}} \rightarrow \Delta\theta = \theta_{\text{final}} - \theta_{\text{initial}}. \quad (7.10)$$

Ændringer i hastigheder og accelerationer er naturligvis analogt hermed.

For konstant acceleration (a og α) gælder

$$x_f = x_i + v_i \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot (\Delta t)^2 \rightarrow \theta_f = \theta_i + \omega_i \cdot t + \frac{1}{2} \alpha \cdot (\Delta t)^2 \quad (7.11)$$

$$v_f = v_i + a \cdot \Delta t \rightarrow \omega_f = \omega_i + \alpha \cdot \Delta t \quad (7.12)$$

$$\text{og } v_f^2 - v_i^2 = 2a\Delta x \rightarrow \omega_f^2 - \omega_i^2 = 2\alpha\Delta\theta \quad (7.13)$$

At arbejde med drejning og rotation er altså helt analogt til hvad vi er vant til fra tidligere. Det er de samme ligninger. Der er ikke så meget nyt. Vi skal bare huske at skifte koordinater.

7.4 Inerti og Inertimoment (rotationsinerti)

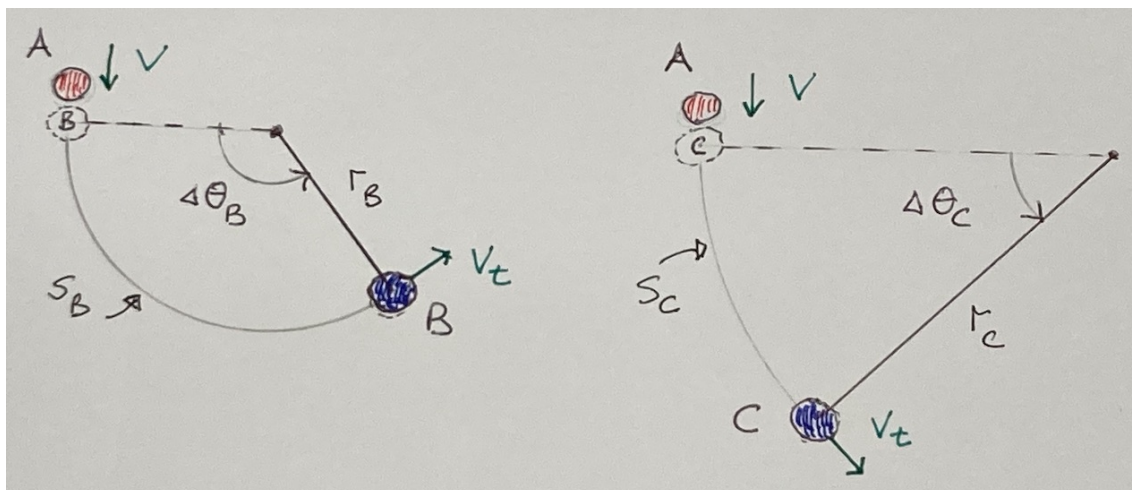
Inerti er træghed (modvillighed) mod at blive accelereret. I kapitel 3 så vi på trægheden for legemer i en lineær bane. Legemer har også en træghed mod at blive roteret eller at få ændret deres rotationshastighed. Denne inertikalderes rotations-inerti eller inertimoment. Ordet ‘moment’ (på dansk) henviser til rotationer eller drejninger. Denne træghed mod at blive roteret kender vi fra kørsel i bil eller tog, eller når vi tager en tur i rutchebanen (afsnit 7.2.2). Inertimomentet afhænger af inertien og hvordan den er fordelt i legemet (dvs massefordelingen). Vi skal senere se på hvordan vi kan bestemme rotationsinertien af et legeme.

Før vi kaster os ud i det er det instruktivt at se på et eksempel, som illustrerer denne træghed mod at blive roteret. Vi betragter tre identiske pucker A, B og C (samme inertimoment m),

¹dvs hvor der ikke sker en translatorisk bevægelse samtidigt. Sker det, kan r også ændres, naturligvis.

som kan bevæge sig friktionsløst på et plant underlag. Puckene B og C er i hvile og er hver i sær forbundet til en akse, fastankret vinkelret på underlaget, via en stram, inertiøs snor (se figur 7.6). Snoren i puck B er kortere end snoren i puck C. Vi foretager nu to eksperimenter hvor vi lader puck A bevæge sig i en ret linje med den konstante fart v , hvorefter den støder sammen med én af de to stationære pucke (først puck B og derefter puck C). I det elastiske stød afleverer puck A alt sin impuls til pucken i hvile, så puck A er i hvile efter stødet.

Forklar hvorfor der må gælde, at puck A afleverer alt sin impuls til den stationære puck. Hvad ved vi om systemet bestående af de to pucke? Skriv det i boksen her og inkludér gerne en passende ligning:



Figur 7.6: Illustration af inertimoments påvirkning af et legemes rotation. Puckene A, B, og C er identiske med samme inertier m og de bevæger sig på et friktionsløst underlag. Puck A bevæger sig i en ret linje med farten v og støder sammen med en stationær puck. Stødet er elastisk og Puck A afleverer alt sin impuls til pucken i hvile. Den resulterende vinkelhastighed $\omega = \Delta\theta/\Delta t$ afhænger af snorens længde r . Jo større snorlængden er, jo lavere er vinkelhastigheden. Overvej lige, hvorfor det er sådan!

Lad os først betragte stødet med puck B. Da puckene har identiske inertier vil puck B opnå farten v efter stødet². Snoren gør at puck B bevæger sig i en cirkel omkring aksen. Efter tiden Δt vil puck B have bevæget sig buestykket $s_B = v\Delta t$ og snoren har fejet over vinklen θ_B . (I figur 7.6 er vinklen angivet som $\Delta\theta_B = \theta_{B,\text{final}} - \theta_{B,\text{init}} = \theta_B$ når vinklen til start, $\theta_{B,\text{init}}$, er sat til nul). Da snoren har længden r_B gælder der nemlig: $s_B = \theta_B r_B$ (ligning 7.4).

Nu lader vi puck A med samme begyndelsesfart v støde ind i puck C. Puck C vil ligesledes opnå farten v efter stødet. Efter samme tidsperiode Δt vil puck C have bevæget sig

²Hvis du er i tvivl om hvorfor, genlæs Kapitel 3

buestykket $s_C = r_C \theta_C$ og drejet vinklen θ_C omkring aksens. Af symmetri-grunde må længden s_C nødvendigvis være identisk med s_B :

$$s_C = s_B \quad (7.14)$$

$$r_C \theta_C = r_B \theta_B \quad (7.15)$$

$$\frac{r_C}{r_B} = \frac{\theta_B}{\theta_C} \quad (7.16)$$

I den sidste ligning har jeg isoleret længden af snorene på venstresiden og vinklerne på højresiden. Da snoren i puck C er længere end snoren i puck B, er $r_C > r_B$ og dermed må $\theta_B > \theta_C$. Vi ser altså, at selvom B og C har samme tangential-fart v_t og de bevæger sig samme længde (af buestykket) så er vinkelhastigheden $\omega = \Delta\theta/\Delta t$ forskellig for de to pucker. Da snoren i puck B er kortere end snoren i puck C, vil puck B bevæge sig over en større vinkel i tidrummet Δt . Ergo, er dens vinkelhastighed ω_B større end vinkelhastigheden ω_C af puck C. Med andre ord udviser puck C en større træghed mod at blive roteret.

Da puckene har samme inertie m , vil de have samme træghed mod at blive accelereret i en lineær bane (dvs i en translatorisk bevægelse). Vi ser her, at trægheden mod rotation ikke kun afhænger af inertien, men også har noget at gøre med afstanden til omdrejningsaksen (eller rotationsaksen).

7.4.1 Matematisk beskrivelse af rotationsinerti

Rotationsinerti af punkt-partikel

I eksemplet ovenfor er systemet af de to pucker (puck A og puck B, eller puck A og puck C) både isoleret og lukket. Det betyder at systemets impuls og energi begge er konstant. Da inertierne er ens vil puck A aflevere alt sin impuls ($p = mv$) og alt sin kinetiske energi til pucken i hvile, som dermed opnår den kinetiske energi $K = \frac{1}{2}mv^2$. Vi kan omskrive dette til at afhænge af vinkelhastigheden, idet $v = v_t = r\omega$, hvor v_t er tangential-farten i cirkelbevægelsen:

$$K = \frac{1}{2}m(v_t^2) = \frac{1}{2}m(r\omega)^2 = \frac{1}{2}(mr^2)\omega^2 \quad (7.17)$$

Vi ser, at hvis vi sætter³ $I \equiv mr^2$, får vi et udtryk for den rotationskinetiske energi

$$K_{\text{rot}} = \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (7.18)$$

som ligner den translatoriske kinetiske energi ($K = \frac{1}{2}mv^2$) meget, nemlig en faktor halv gange en inertie (I) gange kvadratet på en hastighed (ω). Ligning (7.17) viser at SI enheden for K_{rot} er $\text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-2} = \text{Joule}$, som netop er enheden for energi.

Udtrykket

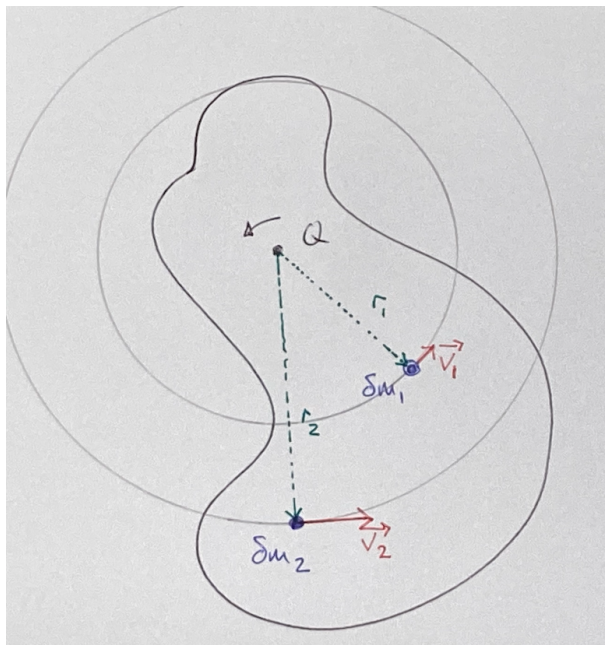
$$I = I_Q = mr^2, \quad (7.19)$$

repræsenterer rotationsinertien, som har SI enheden $\text{kg}\cdot\text{m}^2$. Ligningen viser, at for en punkt-partikel afhænger trægheden mod at blive roteret (dvs mod en ændring af rotationshastigheden ω) af inertien og specielt afstanden r fra omdrejningsaksen Q hvor inertien befinder sig, netop som vi så i eksemplet med puckene ovenfor (se figur 7.6).

³Bemærk, tegnet ' \equiv ' betyder at udtrykket er en definition

Da størrelsen af inertimomentet er kraftigt afhængigt af positionen af omdrejningsaksen i forhold til massefordelingen er det vigtigt at vi definerer omdrejningsaksen Q som I er målt i forhold til. Vi vil ofte bruge notationen I_Q til at gøre dette klart. Hvis I er målt i forhold til en akse gennem massemidtpunktet af et udstrakt legeme, bruges ofte notationen I_{CM} ('CM' for 'center of mass').

Rotationsinerti af et udstrakt, stift legeme



Figur 7.7: For et udstrakt legeme vil hvert et del-element δm af legemet dreje om omdrejningsaksen Q . Inertimomentet af et udstrakt legeme kan beskrives ved at betragte summen over alle del-elementer, som beskrevet i teksten.

Vi betragter et udstrakt stift legeme med inert m , som roterer om en akse Q . Se figur 7.7. Legemet kan inddeles i N små del-elementer, δm_i , hvor $m = \sum_i^N \delta m_i$. Hvert del-element δm_i vil dreje om aksen Q med den samme vinkelhastighed ω men med hver deres fart v_i , afhængig af hvor i legemet del-elementet befinder sig. For et del-element δm_i i afstanden r_i fra Q , er $v_i = r_i \omega$. Den samlede kinetiske energi af alle del-elementer er

$$K = \frac{1}{2}\delta m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}\delta m_2 v_2^2 + \dots + \frac{1}{2}\delta m_N v_N^2 = \sum_i^N \left(\frac{1}{2}\delta m_i v_i^2\right). \quad (7.20)$$

Dette udtryk for den kinetiske energi er dog besværligt at arbejde med da v_i varierer over hele legemet. Jeg vælger derfor at udtrykke v_i ved den konstante vinkelhastighed ω (se udtrykket ovenfor):

$$K = \sum_i^N \left(\frac{1}{2}\delta m_i (r_i \omega)^2\right) = \frac{1}{2} \left(\sum_i^N (\delta m_i r_i^2)\right) \omega^2 = \frac{1}{2} I_Q \omega^2, \quad (7.21)$$

Vi ser, at den (rotations-)kinetiske energi kan skrives som det velkendte udtryk $K_{\text{rot}} = \frac{1}{2}I_Q\omega^2$, hvis vi definerer trægheden mod rotation (inertimomentet) som

$$I_Q = \sum_i^N (\delta m_i r_i^2). \quad (7.22)$$

Vi ser, at vi kan bestemme inertimomentet ved at summe over alle del-elementer. For tilstrækkelig små del-elementer ($\delta m \rightarrow 0$) skal vi altså blot integrere dette udtryk over legemet

$$I_Q = \lim_{\delta m \rightarrow 0} \sum_i^N (\delta m_i r_i^2) \equiv \int r^2 dm. \quad (7.23)$$

Integralet er svært at evaluere (dvs opskrive og løse analytisk) for et vilkårligt legeme der ikke er symmetrisk (der må man benytte andre metoder som vi ser på senere). Dog, hvis et legeme har en vis symmetri og en jævn massefordeling kan vi omskrive ligning (7.23) så I_Q er nemmere at beregne. For 1-dimensionelle legemer med jævn massefordeling, kan vi placere vores x -akse langs legemet og indføre en ny variabel $\lambda = dm/dx$, som beskriver den gennemsnitlige massefordeling per længdeenhed dx . Dermed kan vi erstatte dm med $dm = \lambda dx$, hvor λ er en konstant og

$$I_Q = \lambda \int x^2 dx \quad (1 \text{ dimension, jævn massefordeling}), \quad (7.24)$$

hvor integralet er over hele længden af legemet.

For et to-dimensionalt legeme med jævn massefordeling kan vi omskrive dm til at afhænge af overflade-arealet, σ . Vi benytter, at $dm = \sigma dA$, hvor $\sigma = \text{konstant}$:

$$I_Q = \sigma \int r^2 dA \quad (2 \text{ dimensioner, jævn massefordeling}), \quad (7.25)$$

hvor integralet er over hele arealet af legemet.

For et 3-dimensionalt legeme med jævn massefordeling kan vi definere en ny variabel $\rho = dm/dV$, hvor V er volumet og massefylden, ρ , er konstant.

$$I_Q = \rho \int r^2 dV \quad (3 \text{ dimensioner, jævn massefordeling}), \quad (7.26)$$

hvor integralet er over hele volumet af legemet.

Jeg viser lidt forskellige eksempler nedenfor hvordan man kan beregne inertimomentet af forskellige symmetriske legemer. Du kan også finde en oversigt i slides fra Plenum.

7.4.2 Eksempel - Inertimoment af stang omkring central akse

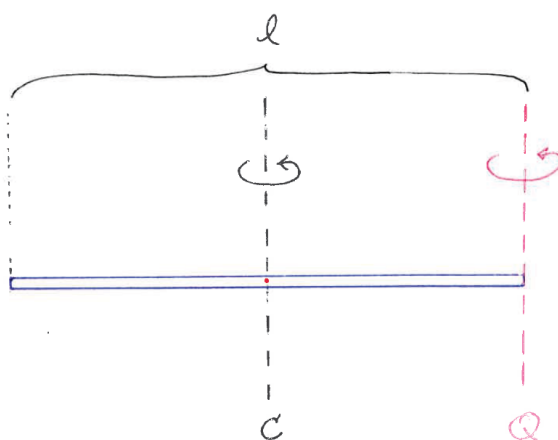
Inertimomentet af en tynd stang med jævn massefordeling og længde l kan beregnes fra ligning (7.24). Da massefordelingen er jævn, gælder $\lambda = m/l$, hvor m er inertien af stangen.

I tilfældet hvor rotationen sker om en central akse C (se evt Figur 7.8), skal vi integrere hele stangen fra radius $-l/2$ til $+l/2$:

$$I_C = \lambda \int x^2 dx = \frac{m}{l} \int_{-l/2}^{+l/2} x^2 dx \quad (7.27)$$

$$= \frac{m}{l} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-l/2}^{+l/2} \quad (7.28)$$

$$I_C = \frac{1}{12} ml^2 \quad (7.29)$$



Figur 7.8: En tynd stang med inertimoment m og længde l kan rotere omkring dens centrale akse C. Aksen Q for enden af stangen (se afsnit 7.4.3) er også vist.

7.4.3 Eksempel - Inertimoment af stang omkring akse i den ene ende

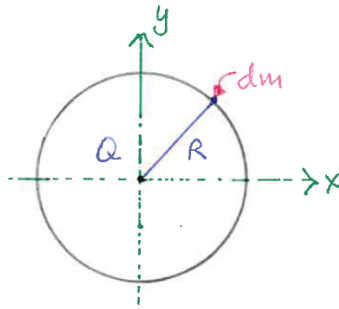
Har vi brug for inertimomentet beregnet i forhold til en akse Q i enden af stangen (se evt Figur 7.8), kan vi blot integrere ligning (7.24) fra $x = 0$ til $x = l$:

$$I_Q = \lambda \int x^2 dx = \frac{m}{l} \int_{x=0}^{x=l} x^2 dx = \frac{m}{l} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=l} = \frac{1}{3} ml^2 \quad (7.30)$$

Man kan også benytte parallel-akse-teoremet (se afsnit 7.4.8) fordi aksen Q er parallel med den centrale akse C (se evt afsnit 7.4.2):

$$I_Q = I_C + m \cdot d^2 = \frac{1}{12} ml^2 + m \cdot \left(\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{1}{3} ml^2 \quad (7.31)$$

hvor d er afstanden mellem de to parallelle akser, C og Q.



Figur 7.9: En tynd ring med inert m og radius R kan rotere omkring dens centrale akse C. Delelementet dm er vist.

7.4.4 Eksempel - Inertimoment af ring omkring central akse

Vi betragter en tynd ring med radius R og inert m (Figur 7.9). Ringens tykkelse (i r -retningen) er meget lille i forhold til R : $dr \ll R$. Vi kan inddеле ringen i et stort antal bittesmå segmenter som hver har en inert dm . Vi skal beregne inertimomentet af en akse Q gennem centrum af ringen, hvor aksen står vinkelret på ringens plan. Vi kan benytte ligning (7.23)

$$I_Q = \int r^2 dm.$$

hvor vi integrerer over hele legemet (dvs vi summer over alle delelementerne dm).

Da alle segmenter har samme afstand R fra aksen Q ($r = R$ er konstant) kan vi skrive dette som

$$I_Q = R^2 \int dm = mR^2. \quad (7.32)$$

Dette giver god mening: hvis vi betragter hvert lille delelement dm som en punktpartikel, vil inertimomentet af delementet være $I_{Q, dm} = dm \cdot R^2$. Hele ringen består af summen af alle delelementer ($m = \sum dm$) og det totale inertimoment er:

$$I_Q = \sum I_{Q, dm} = \sum dm \cdot R^2 = \left(\sum dm \right) R^2 = mR^2 \quad (7.33)$$

7.4.5 Inertimoment af tynd hul cylinder omkring central akse

Forklar hvorfor det giver mening at inertimomentet af en tynd hul cylinder omkring en central akse Q , der er parallel med længden af cylinderen er det samme som for en tynd ring (ligning 7.32), ligegyldigt hvor lang cylinderen er:

$$I_Q = mR^2 \quad (7.34)$$

hvor R er radius af cylinderen. Skriv argumentet her:

Brug ligning (7.25) til at vise med beregninger at ligning (7.34) gælder for en tynd, hul cylinder (Vink: måske det næste eksempel kan inspirere dig). Skriv beregningerne her:

7.4.6 Eksempel - Inertimoment af solid cylinder omkring central akse

For en solid cylinder med jævn massefordeling, længde l og radius R kan vi beregne inertimomentet I_Q omkring den centrale akse Q langs cylinderen ved at benytte ligning (7.26), eftersom det er et 3-dimensionelt legeme:

$$I_Q = \rho \int r^2 dV.$$

Vi skal altså inddele legemet i bittesmå delelementer, i dette tilfælde i små volumen-enheder dV og finde et udtryk for inertien per volumen-enhed, ρ .

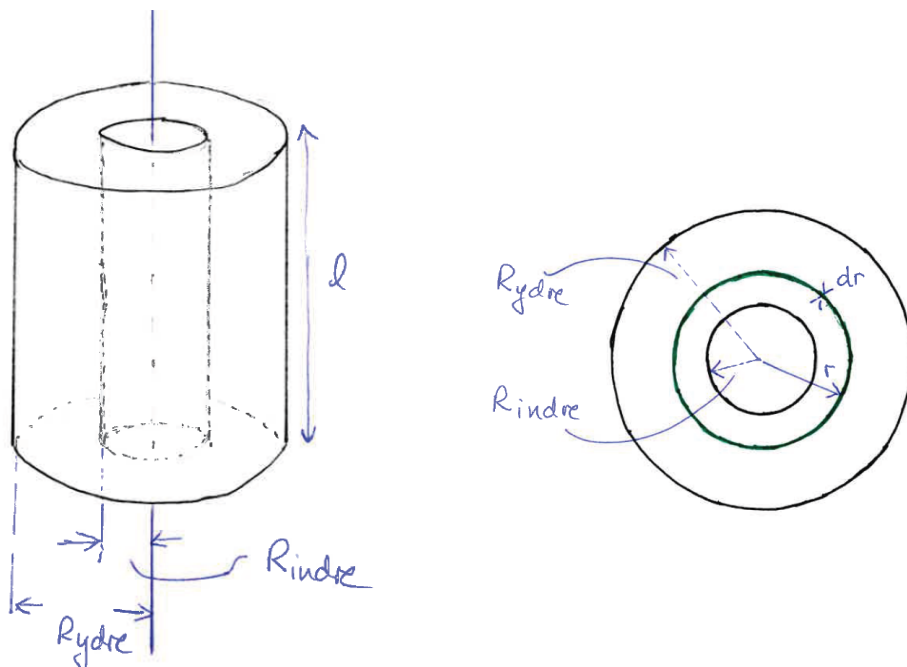
En solid cylinder kan inddeles i mange koncentriske tynde skaller med længde l og en uendelige lille tykkelse $dr \ll R$, således at inertien i hver skal befinder sig i samme afstand til akse Q ; det gør nemlig beregningen nemmere. Volumen af hver cylinder-skal kan beskrives som $dV = dA \cdot dr$, nemlig overflade-arealet af skallen ($dA = 2\pi r \cdot l$) gange tykkelsen af skallen dr : $dV = 2\pi r \cdot l \cdot dr$. Hver af de tynde skaller har en inertie $dm = \rho dV$. For en jævn massefordeling er blot $\rho = m/V$. Da det samlede volumen af en solid cylinder er $V = \pi R^2 \cdot l$, kan vi udtrykke ρ som $\rho = m/(\pi R^2 \cdot l)$. Vi kan nu indsætte i ligning (7.26):

$$I_Q = \rho \int r^2 dV = \rho \int_{r=0}^{r=R} r^2 (2\pi r \cdot l \cdot dr) = \rho \int_{r=0}^{r=R} 2\pi l r^3 dr \quad (7.35)$$

$$= 2\pi \rho l \left[\frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^{r=R} = \frac{1}{2} \pi \rho l (R^4 - 0) \quad (7.36)$$

$$I_Q = \frac{1}{2} \pi l \frac{m}{\pi R^2 \cdot l} R^4 = \frac{1}{2} m R^2 \quad (7.37)$$

7.4.7 Eksempel - Inertimoment af tyk-vægget hul cylinder omkring central akse



Figur 7.10: En tyk-vægget cylinder med inertie m , indre radius R_{indre} og ydre radius R_{ydre} . Rotationsaksen er den centrale akse parallelt med cylinderen. Cylinderen kan inddeles i uendelig mange koncentriske tynde cylindreskaller med radius r og tykkelse dr .

En tyk-vægget hul cylinder (Figur 7.10) kan inddeles i mange koncentriske tynde cylindreskaller fra en indre radius R_{indre} til en ydre radius R_{ydre} . Vi kan derfor bestemme inertimomentet omkring en central akse Q langs længden af cylinderen på analog måde som i afsnit 7.4.6, men hvor vi integrerer fra $r = R_{\text{indre}}$ til $r = R_{\text{ydre}}$:

$$I_Q = \rho \int r^2 dV = \rho \int_{r=R_{\text{indre}}}^{r=R_{\text{ydre}}} r^2 (2\pi r \cdot l \cdot dr) = \rho \int_{r=R_{\text{indre}}}^{r=R_{\text{ydre}}} 2\pi l r^3 dr \quad (7.38)$$

$$= 2\pi \rho l \left[\frac{r^4}{4} \right]_{r=R_{\text{indre}}}^{r=R_{\text{ydre}}} = \frac{1}{2} \pi l \rho (R_{\text{ydre}}^4 - R_{\text{indre}}^4) \quad (7.39)$$

I dette tilfælde er det samlede volumen af cylinderen lig volumenet af en solid cylinder med radius R_{ydre} minus volumenet af en indre central cylinder med radius R_{indre} :

$$V = \pi R_{\text{ydre}}^2 \cdot l - \pi R_{\text{indre}}^2 \cdot l \quad (7.40)$$

og derfor er $\rho = m / [\pi l (R_{\text{ydre}}^2 - R_{\text{indre}}^2)]$. Ligning (7.39) kan derfor skrives som

$$I_Q = \frac{1}{2} \pi l \frac{m}{\pi l (R_{\text{ydre}}^2 - R_{\text{indre}}^2)} (R_{\text{ydre}}^4 - R_{\text{indre}}^4) \quad (7.41)$$

$$= \frac{1}{2} m (R_{\text{ydre}}^2 + R_{\text{indre}}^2) \quad (7.42)$$

hvor jeg i den sidste ligning har benyttet at $x^4 - y^4 = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2)$. Tjekker vi grænsen $R_{\text{ydre}} = R_{\text{indre}}$ ser vi, at $I_Q = m R^2$ som vi netop forventer for en tynd-skallet cylinder (sammenlign med ligning (7.34)).

Bemærk, at i dette tilfælde går akse Q igennem massemidtpunktet CM, så vi kunne også have kaldt inertimomentet i ligning (7.42) for I_{CM} .

7.4.8 Parallel-akse-teoremet

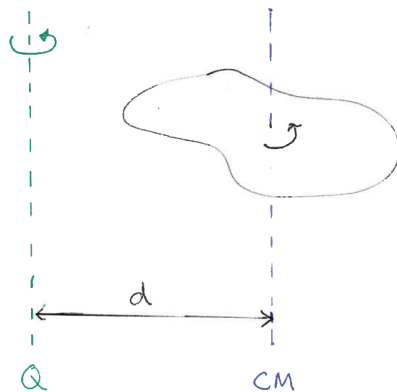
Der findes en simpel relation mellem et legemes inertimoment omkring en akse gennem massemidtpunktet I_{CM} og legemets inertimoment omkring en anden akse I_Q , når blot akse Q er parallel med akse gennem CM (Figur 7.11):

$$I_Q = I_{\text{CM}} + m \cdot d^2, \quad (7.43)$$

hvor d er afstanden mellem de to parallelle akser. Denne sammenhæng kaldes *Parallel-akse-teoremet*. Det hænder, at vi betegner det 'PAT' til plenum.

Ét eksempel på brug af teoremet blev vist i afsnit 7.4.3 til beregning af inertimomentet af en stang omkring en akse i den ene ende af stangen. Et andet eksempel er en cylinder, som roteres om en akse S fastgjort på ydersiden af cylinderens lange side, hvor akse S er afstanden R_{ydre} fra den centrale akse langs længden af cylinderen. Inertimomentet om akse S for en tyk-vægget cylinder (se afsnit 7.4.7) er dermed

$$I_S = I_{\text{CM}} + m R_{\text{ydre}}^2 = \frac{1}{2} m (R_{\text{ydre}}^2 + R_{\text{indre}}^2) + m R_{\text{ydre}}^2, \quad (7.44)$$



Figur 7.11: Der er en sammenhæng mellem inertimomentet omkring en vilkårlig akse Q og inertimomentet omkring en akse gennem massemidtpunktet (CM) når akserne er parallelle. Det er parallelakse-teoremet.

hvor I_{CM} er inertimomentet om den centrale akse gennem massemidtpunktet CM og det sidste led skyldes parallel-akse-teoremet.

Endnu et eksempel er Månen i omløb om Jorden. Månen i rotation omkring en akse gennem Jordens massemidtpunkt Q har dermed inertimomentet

$$I_{\text{total, Q}} = I_{\text{CM, Måne}} + M_{\text{Måne}} R_{\text{JM}}^2, \quad (7.45)$$

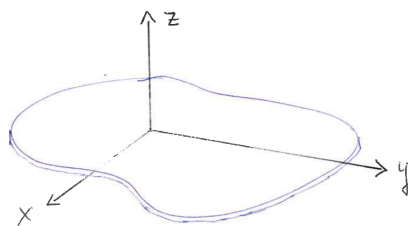
hvor $I_{\text{CM, Måne}}$ er inertimomentet af Månen om dens symmetriakse og det sidste led $M_{\text{Måne}} R_{\text{JM}}^2$ skyldes PAT fordi Månens symmetriakse er i afstanden R_{JM} fra omdrejningsaksen og parallel dermed. R_{JM} er afstanden mellem centrum af Jorden og centrum af Månen. I denne model er aksen igennem Jorden og aksen igennem Månen parallelle. Ledet $I_{\text{CM, Måne}}$ skal med selvom Månen har samme side mod Jorden, fordi Månen også roterer om dens egen symmetriakse når den bevæger sig i dens bane omkring Jorden.

7.4.9 Vinkelret-akse-teoremet

For et tyndt, plant legeme er der også en sammenhæng mellem inertimomenterne I_x , I_y og I_z om de tre koordinat-akser x, y, z som alle står vinkelret på hinanden:

$$I_z = I_x + I_y. \quad (7.46)$$

Relationen gælder kun når tykkelsen af legemet dz er meget lille i forhold til udstrækningen i x og y retningen: $dz \ll dx$ og $dz \ll dy$ (Figur 7.12). Denne sammenhæng kaldes *Vinkelret-akse-teoremet*.



Figur 7.12: For et tyndt legeme kan inertimomentet omkring z -aksen vinkelret på planet udtrykkes som summen af inertimomenterne omkring henholdsvis x og y -aksen. Dette er vinkelretakseteoremet.

7.5 Rotationskinetisk energi

Den rotationskinetiske energi er bevægelsesenergien for legemer der drejer eller roterer. Vi så i eksemplet med de tre pucker at den kan udtrykkes som

$$K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I_Q \omega^2, \quad (7.47)$$

hvor ω er vinkelhastigheden og I_Q er inertimomentet (rotationsinertien) af systemet målt i forhold til omdrejningsaksen Q .

Den kinetiske energi af et legeme (eller system) i bevægelse består generelt af et bidrag fra en translation af legemets massemidtpunkt K_{CM} samt et bidrag fra rotation, K_{rot} :

$$K_{\text{tot}} = K_{\text{CM}} + K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} m v_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{2} I_Q \omega^2. \quad (7.48)$$

I specifikke situationer kan enten K_{CM} , K_{rot} eller begge have værdien nul, hvis legemet ikke har en translation eller roterer (drejer).

7.6 Impulsmoment

En lille opgave du ikke må skippe

Vi ser igen på eksemplet med de tre pucke i afsnit 7.4. Hvis $r_C = 2r_B$, bestem forholdet mellem inertimomenterne af puck B og C: I_B/I_C . Dernæst, bestem forholdet mellem pucken's vinkelhastigheder: ω_B/ω_C . Er du overrasket over størrelsen af ω_B/ω_C , taget inertimomenterne i betragtning?

Hvis trægheden mod rotation af puck B, I_B , i Figur 7.6 er fire gange mindre end trægheden for puck C, I_C , så kan det måske overraske dig at se at vinkelhastigheden af puck B, ω_B , blot er dobbelt så stor som ω_C og ikke fire gange større.

Årsagen har noget at gøre med den evne (eller villighed) som puck A har for at skabe en rotation i et andet legeme (eller et andet system af legemer). Den villighed afhænger ikke kun af impulsen \vec{p}_A af puck A, men også hvor langt fra omdrejningsaksen puck A rammer. Lad os se på produktet af impulsen af puck A og afstanden fra omdrejningsaksen, hvor puck B modtager denne impuls: $m\vec{v} \cdot \vec{r}_B$. Det kan omskrives så inertimomentet af puck B ($I_{Q,B} = mr_B^2$) indgår:

$$m\vec{v} \cdot \vec{r}_B = (mr_B)v = (mr_B^2)\frac{v}{r_B}$$

Idet $v = r\omega$, kan dette omskrives til

$$(mr_B^2)\frac{v}{r_B} = (mr_B^2)\omega_B = I_{Q,B}\omega_B.$$

Denne størrelse er *villigheden eller evnen til at skabe rotation i et andet legeme*. Den minder meget om en form for impuls, nemlig en inerti (I_Q) gange en hastighed (ω) og derfor kan man kalde det en rotations-impuls. Den officielle betegnelse er *impulsmoment*, L . Da bevægelsesmængde er et andet dansk ord for impuls, kunne man ligeledes kalde denne evne til at skabe rotation for rotationsbevægelsesmængde. Da impulsmoment er 'angular momentum' på engelsk, bruges begrebet 'angulært moment' til tider også.

I afsnit 7.5 så vi, at den rotationskinetiske energi ligner den kendte ligning for (translatorisk) kinetisk energi. Vi skal blot erstatte inerti m med inertimoment I og hastighed v med vinkel-hastighed ω . Du har nok allerede set at udtrykket for impulsmoment i ligning (7.6) ligner udtrykket for impuls med akkurat det samme koordinatskift: $m \rightarrow I$ og $v \rightarrow \omega$:

$$p = mv \rightarrow I_Q \omega = L_Q.$$

Størrelsen af impulsmomentet af et legeme, der drejer (eller roterer) om en akse Q, er altså givet ved:

$$L_Q = I_Q \omega, \quad (7.49)$$

hvor størrelserne L og I afhænger af den specifikke omdrejningsakse Q.

Vi så i afsnit 7.4, at den kinetiske energi af puck A overføres helt til pucken i hvile. Akkurat som impulsen \vec{p} af et legeme i translatorisk bevægelse, kan impulsmomentet overføres mellem legemer (og systemer), men det kan ikke pludseligt opstå eller destrueres. Impulsmomentet er derfor konstant medmindre ydre kræfter virker på systemet. Det ser vi på i afsnit 7.7.



Figur 7.13: En umbraco nøgle, som oftest bruges til at samle IKEA møbler.

Prøv selv!

Tag en 30 cm plastic lineal med hul i den ene ende. Placer en blyant (eller en anden tynd genstand) i hullet så linealen kan rotere frit om den vandrette akse som blyanten udgør (dvs. linealen kan bevæge sig som et pendul). Giv den et lille puf: skub let med din finger eller en anden genstand i den frie ende af linealen så linealen drejer. Gentag forsøget, hvor du skubber med samme kraft i en afstand fra blyanten, der nu kun er $1/3$ af hele linealens længde. Husk: skubber du med samme kraft over det samme tidsinterval Δt , så overfører du den samme impuls: $\Delta p = F\Delta t$. Drejer linealen hurtigere, langsommere, eller lige så hurtigt som før?

Du oplever her direkte, at evnen til at skabe rotation af linealen netop afhænger af hvor på linealen du skubber og dermed overfører en impuls til linealen. Hvis du har prøvet at samle IKEA møbler har du nok haft en umbraco nøgle i hånden – en lille 'L' formet værktøj til at stramme skruer med (Figure 7.13). Du genkender nok, at det er nemmere at stramme skruerne, hvis du griber i den lange ende af nøglen, fremfor den korte ende.

Et andet eksempel er et barn siddende på en vippe som gerne vil have en vippetur. Du har nok allerede oplevet, at det er nemmere at løfte barnet i tyngdefeltet, hvis du giver vippen et puf ned ad helt ude i den fjerne ende af vippen, modsat barnet, fremfor at skubbe tæt på vippens horisontale omdrejningsakse. Det er helt analogt. Vi ser nærmere på vippen i forbindelse med kraftmomenter (Kap. 7.7).

7.6.1 Impulsmoment af et legeme, der drejer eller roterer

Vi så ovenfor, at vi kan bestemme størrelsen af 'villigheden til at skabe rotation', kaldet impulsmomentet, som $L = I\omega$. Både $\vec{\omega}$ og \vec{L} er vektorer:

$$\vec{L}_Q = I_Q \vec{\omega}, \quad (7.50)$$

hvor \vec{L} og I afhænger af omdrejningsaksen Q og $\vec{\omega}$ er vinkelhastigheden.

Vi ser nærmere på \vec{L} og $\vec{\omega}$ som vektorer i afsnit 7.6.3.

7.6.2 Impulsmoment af et legeme i lineær translatorisk bane

Vi så i eksemplet med puckene (figur 7.6), at puck B opnår et impulsmoment $\vec{L}_B = I_B \vec{\omega}_B$ efter sammenstødet med puck A. Da impulsmoment ikke kan skabes eller destrueres men blot

overføres mellem systemer, må puck A også have et impulsmoment, \vec{L}_A , selvom puck A ikke foretager en rotation eller en drejning. Dette er yderst vigtigt at bide mærke i. Det fortjener et udråbstegn i marginen.

Der gælder generelt at ethvert legeme i lineær translatorisk bevægelse har et impulsmoment i forhold til en reference-akse Q fordi det har evnen til at skabe en rotation eller drejning af et andet legeme omkring denne akse. Dette impulsmoment er givet ved

$$\vec{L}_Q = \vec{r}_Q \times \vec{p}, \quad (7.51)$$

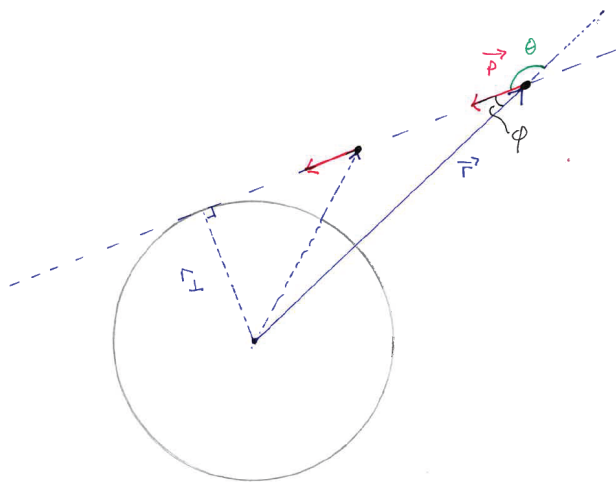
hvor \vec{r}_Q er stedvektoren fra akse Q til objektet og \vec{p} er impulsvektoren af objektet. Se figur 7.14. Ligningen udtrykker et vektor-krydsprodukt, hvor

$$\vec{L} = \vec{r}_\perp \vec{p} = \vec{r} \vec{p}_\perp = \vec{r} \vec{p} \sin \theta \quad (7.52)$$

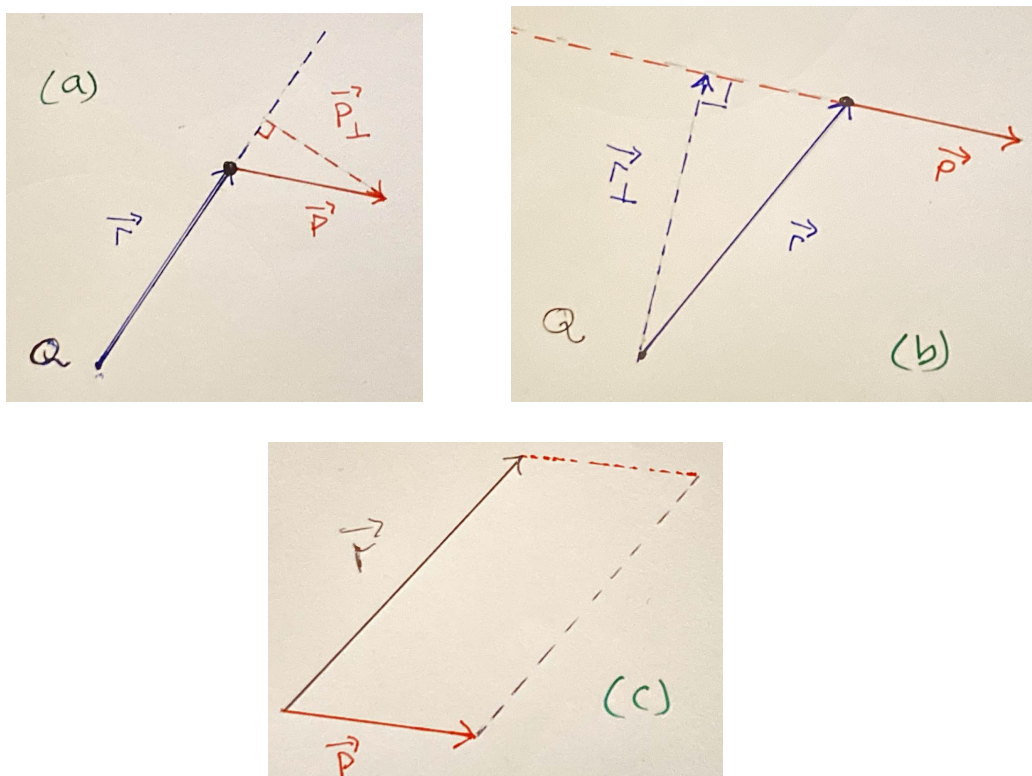
hvor θ er vinklen mellem de to vektorer, \vec{r} og \vec{p} . Vektoren \vec{r}_\perp er den komponent af stedvektoren \vec{r} , der står vinkelret på \vec{p} . Analogt er \vec{p}_\perp den vinkelrette \vec{p} -komponent på \vec{r} . Projektionerne er illustreret i figur 7.15.

Bemærk, at længden af \vec{L} er lig arealet af parallelogrammet udspændt af \vec{r} og \vec{p} . Retningen af \vec{L} står vinkelret på de to vektorer og er givet som en 'højreskrue' (se afsnit 7.6.4).

Lad os gå tilbage til eksemplet med de tre pucker A, B og C og se på stødet mellem puck A og B. Sammenlign størrelsen af impulsmomentet af puck A, L_A , før stødet med impulsmomentet af puck B, L_B , efter stødet. Hvorfor må \vec{L}_A være lige så stor som \vec{L}_B ?



Figur 7.14: Et legeme i lineær translatorisk bevægelse har et impulsmoment i forhold til reference-aksen Q, fordi legemet har evnen til at skabe rotation omkring den akse i et andet legeme. På figuren er positionen af legemet angivet til to forskellige tidspunkter. Impulsmomentet \vec{L}_Q afhænger af impulsen \vec{p} og afstanden til akse Q, nemlig \vec{r}_\perp : $\vec{L}_Q = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r}_\perp \vec{p} = \vec{r} \vec{p} \sin \theta$. Bemærk, at man får det samme resultat om man benytter vinkel θ eller vinkel ϕ mellem de to vektorer \vec{r} og \vec{p} , da $\sin \theta = \sin \phi$ i dette tilfælde.



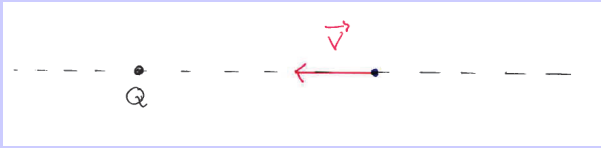
Figur 7.15: Impulsmomentet \vec{L}_Q er et krydsprodukt af to vektorer: $\vec{L}_Q = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r}_\perp \vec{p} = \vec{r} \vec{p}_\perp = \vec{r} \vec{p} \sin \theta$. Panel (a) illustrerer \vec{p} -vektorens vinkelrette projektion ($\vec{p}_\perp = \vec{p} \sin \theta$) ind på \vec{r} -vektoren: $\vec{L}_Q = \vec{r} \vec{p}_\perp$. Panel (b) viser \vec{r} -vektorens vinkelrette projektion ($\vec{r}_\perp = \vec{r} \sin \theta$) ind på \vec{p} -vektoren. Retningen af \vec{L} er vinkelret på \vec{r} og \vec{p} (se figur 7.18). Panel (c): Længden af \vec{L}_Q er arealet af parallelogrammet udspændt af de to vektorer i krydsproduktet.

En opgave du ikke må skippe:

For et legeme i translatorisk bevægelse i forhold til reference-aksen (eller reference-punktet) Q ændres \vec{r} hele tiden. Forklar, hvorfor impulsmomentet $\vec{L}_Q = \vec{r}_Q \times \vec{p}$ er konstant. Kan man se det geometrisk? (Vink: Se figur 7.14). Skriv svaret her:

Størrelsen af impulsmomentet \vec{L} af et legeme i bevægelse afhænger kraftigt af, hvor langt legemet er fra omdrejningsaksen. Derfor skal vi huske at vælge en reference-akse; faktisk er impulsmomentet \vec{L} slet ikke defineret, hvis vi ikke vælger en akse. Det er tydeligt ud fra ligning (7.51) idet \vec{r} ikke er defineret uden en reference-akse. Vi er dog frit stillet i vores valg af reference-akse. Nogle valg er dog mere praktiske end andre, som vi skal se.

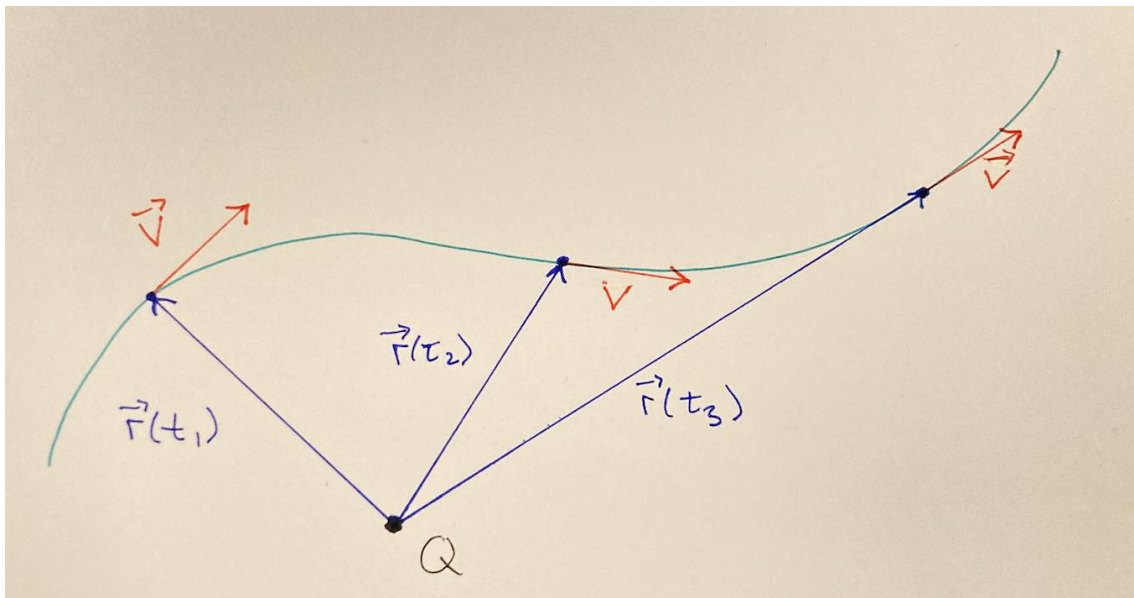
Endnu en opgave du ikke må skippe:



Figur 7.16: En partikel bevæger sig langs en ret-linet bane, der går gennem reference-aksen Q.

Se figur 7.16 Hvad er impulsmomentet L_Q af et objekt i forhold til reference-aksen Q, hvis objektet bevæger sig langs en ret linje, der går gennem punktet Q? Skriv svaret og forklaringen her:

Vi ser i figur 7.17 at impulsmomentet er en funktion af tiden $\vec{L}(t)$ som partiklen bevæger sig langs den bølgede kurve selvom farten af partiklen måske er konstant. Det skyldes bl.a. at \vec{r} ikke er konstant i tiden, men ændres hele tiden. I dette tilfælde ændres retningen af hastigheden også.

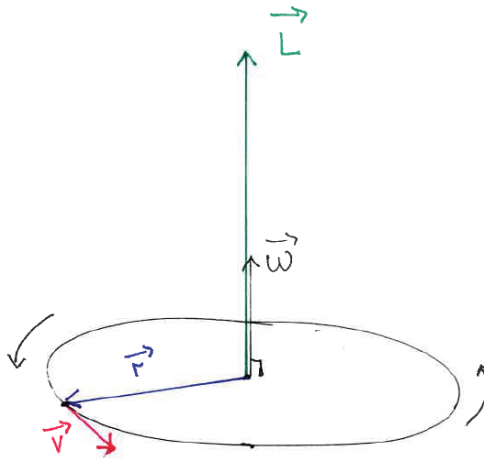


Figur 7.17: Når et legeme bevæger sig i en bane, der ikke er langs en ret linje, vil det have et impulsmoment i forhold til reference-aksen Q, der ændres med tiden, $L_Q = L(t)$. Her er stedvektoren og hastighedsvektoren vist for 3 forskellige tidspunkter, t_1, t_2, t_3 . Farten er til alle tidspunkter den samme ($v = |\vec{v}| = \text{konstant}$), men hastigheden ændres hele tiden (hvorfor?).

7.6.3 Impulsmoment og vinkelhastighed som vektorer

Vinkelhastigheden $\vec{\omega}$ er en vektor med en retning bestemt af retningen af \vec{r} og \vec{v} . For en cirkelbevægelse, hvor omdrejningen går i mod uret (vinklen øges mod uret) vil $\vec{\omega}$ stå langs omdrejningsaksen med start i planet (Figur 7.18). Vektoren $\vec{\omega}$ står derfor vinkelret på det plan, hvori bevægelsen sker. Impulsmoment-vektoren er parallel med $\vec{\omega}$, da $\vec{L}_Q = I_Q \cdot \vec{\omega}$. Det er illustreret i figur 7.18 for et objekt i en cirkelbevægelse mod uret. Retningen af drejningen er angivet med en krum pil, der viser hvordan vinklen øges.

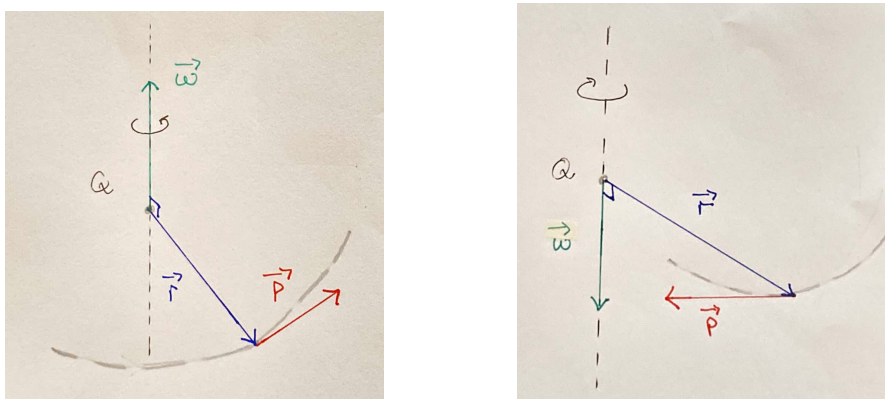
Hvorfor mon $\vec{\omega}$ og \vec{L}_Q står langs omdrejningsaksen, vinkelret på planet? Årsagen er, at der ikke er andre steder de to vektorer kan stå. Det er nemmest at se for et objekt i en jævn cirkelbevægelse, hvor vinkelhastigheden er konstant. Det eneste sted, hvor vi kan placere en vektor for objektet, så vektoren ikke ændrer længde, retning og position er langs omdrejningsaksen og ud ad planet. Alle vektorer nede i planet for dette objekt ændres hele tiden (se blot \vec{r} , \vec{v}_t og \vec{a}_c vektorerne). Se næste afsnit for hvordan du altid nemt kan finde retningen af $\vec{\omega}$ og \vec{L} .



Figur 7.18: Vinkelhastigheden og impulsmomentet er begge vektorer, der står vinkelret på planet, hvori bevægelsen sker, og langs med omdrejningsaksen. Retningen af de to vektorer (ind eller ud af planet) kan nemt bestemmes af højrehåndsreglen (se også afsnit 7.6.4).

7.6.4 Krydsprodukt af vektorer – Højrehåndsreglen

Retningen af $\vec{\omega}$ findes nemt ved at bruge højre-håndsreglen: Med din højre hånd folder du fingrene så de peger i samme retning, som den ting der drejer. Så vil din tommelfinger pege i retning af både $\vec{\omega}$ og \vec{L} . Figur 7.19 illustrerer, at retningen er op for en drejning i et vandret plan mod uret, mens retningen er ned for en drejning i et vandret plan med uret.

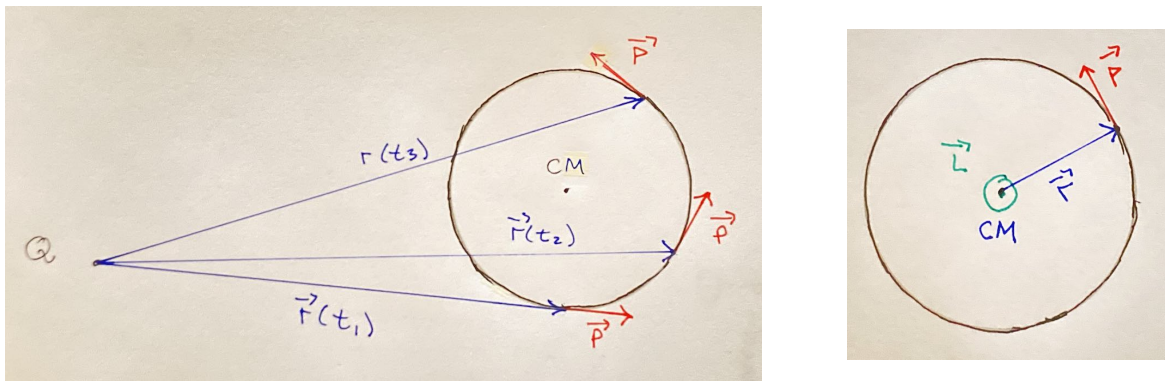


Figur 7.19: Højrehåndsreglen: Lad dine fingre på højre hånd pege i retningen af \vec{r} og vip (eller fold) fingrene i den retning \vec{p} peger, så viser din højre tommelfinger retningen af $\vec{\omega}$ og \vec{L} . *Venstre panel:* for omdrejningen mod uret, står $\vec{\omega}$ vektoren op ad planet hvori \vec{r} og \vec{v} (og dermed \vec{p}) ligger. *Højre panel:* $\vec{\omega}$ vender ned i omdrejningen med uret.

Da $\vec{L}_Q = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v})$ er et krydsprodukt af to vektorer kan vi altid finde retningen af \vec{L}_Q ved først at lade højre hånds fingre pege i retning af \vec{r} og dernæst folde fingrene i retningen af \vec{p} (eller \vec{v}). Tommelfingeren vil igen vise retningen af $\vec{\omega}$ og \vec{L} . Prøv selv! Læg mærke til, at du kan være nødt til at dreje hånden for at kunne vippe fingrene i retningen af \vec{p} . Det kan være lidt abstrakt at forstå ud fra tegninger og forklaringer, hvis man ikke kender højrehåndsreglen, men vi skal nok demonstrere det til plenum.

7.6.5 Bane-impulsmoment og Spin-impulsmoment

Lad os se på impulsmomentet af en partikel, der bevæger sig i en cirkelbane (Figur 7.20). Som nævnt tidligere er vi frit stillet i vores valg af reference-akse. Hvis vi vælger en referenceakse Q et sted uden for cirklen ser vi at \vec{L} ikke er konstant, men ændres hele tiden, selvom tangentialfarten i cirkelbanen er konstant. Dette er helt analogt med situationen i figur 7.17.



Figur 7.20: En planet i jævn cirkelbevægelse om dens moderstjerne bevæger sig om en akse gennem massemidtpunktet CM af systemet bestående af stjerne og planet. *Venstre panel:* Impulsmomentet af planeten i forhold til en ekstern akse Q, parallel med den centrale CM akse, vil ændres i tiden $L_Q = L(t)$. Derimod er impulsmomentet af planeten omkring CM akse konstant (*højre panel*).

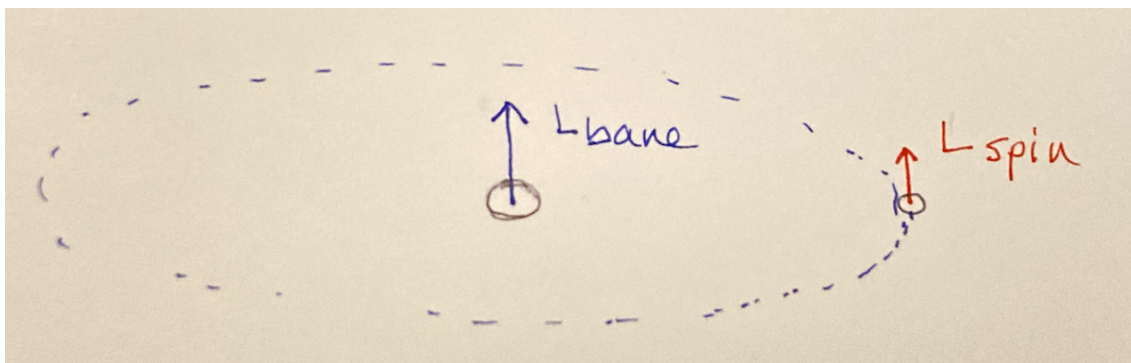
Betragt objektet i cirkelbevægelsen i venstre panel af figur 7.20. Hvis cirklen var en urskive, hvilken vej peger $L(t)$ når partiklen er henholdsvis ved kl 20, kl 17, kl 14, og kl 11? Gentag øvelsen for objektet i cirkelbevægelsen i højre panel i figur 7.20. (Vink: Brug højrehåndsreglen). Skriv svaret her:

CM er specielt. Vælger vi derimod en reference-akse igennem massemidtpunktet, CM, som her ligger i centrum af cirkelbanen, er \vec{L} konstant, hvis tangential-farten er konstant: længden af \vec{r} er konstant og \vec{r} og \vec{v}_t står vinkelret på hinanden, netop som i en jævn cirkelbevægelse (hvor accelerationen er parallel med og modsat rettet stedvektoren).

Impulsmomentet af et legeme i en banebevægelse (cirkelbane eller elliptisk bane) kaldes bane-impulsmomentet. En elektron i bane om en atomkerne vil have et bane-impulsmoment, \vec{L}_{bane} . Impulsmomentet for et legeme, der roterer om sin symmetriakse, kaldes spin-impulsmoment, \vec{L}_{spin} . Elektronen og Jorden har hver deres L_{spin} . Da Jorden er i banebevægelse om Solen og samtidig roterer, er det samlede impulsmoment for Jorden

$$\vec{L}_{\text{tot}} = \vec{L}_{\text{bane}} + \vec{L}_{\text{spin}}. \quad (7.53)$$

Dette er analogt for elektronen, som er i bane om protonen og også har et spin.



Figur 7.21: En planet, der roterer om sin CM-akse og er i banebevægelse om dens moderstjerne har både et bane-impulsmoment \vec{L}_{bane} og et spin-impulsmoment \vec{L}_{spin}

7.7 Kraftmoment

Vi så i Kap. 4, at den tidslige ændring af impulsen \vec{p} er en kraft, \vec{F} : Hvis impulsen ændres indenfor et vist tidsinterval skaber det en kraftpåvirkning:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

og ligeledes kræver det en kraft at ændre impulsen: $\Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t$.

Hvis impulsmomentet ikke er konstant men ændres med tiden, så er $d\vec{L}/dt \neq 0$. Lad os se på den tidslige afledte af \vec{L} :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (7.54)$$

$$= \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{F} \quad (7.55)$$

$$= \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \vec{F} \quad (7.56)$$

Da $\vec{v} \times \vec{v} = 0$ (vektorerne er parallelle) ser vi, at det kun er den vinkelrette komponent af en kraftpåvirkning, som kan skabe en ændring af impulsmomentet:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \vec{F} \sin \theta = \vec{r} \vec{F}_{\perp}, \quad (7.57)$$

hvor θ er vinklen mellem \vec{r} og \vec{F} vektorerne og \vec{F}_{\perp} er den komponent af kraften som står vinkelret på \vec{r} .

Vektoren

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (7.58)$$

kaldes kraftmomentet. Symbolet τ (udtales ‘tau’) benyttes da kraftmoment på engelsk kaldes ‘torque’. Enheden for kraftmoment er Newton \cdot meter. Størrelsen τ (længden af $\vec{\tau}$) er lig arealet af parallelogrammet udspændt af \vec{r} og \vec{F} og $\vec{\tau}$ står vinkelret på \vec{r} og \vec{F} . Igen bruger vi højrehåndsreglen til at finde retningen af $\vec{\tau}$.

Vi ser, at når \vec{L} ændres, f.eks. når impulsmomentet helt eller delvist overføres til et andet legeme, skaber det et kraftmoment $\vec{\tau}$. Ligeledes kræver det et kraftmoment $\vec{\tau}$ at ændre \vec{L} af et legeme. Dette er helt analogt med det vi har set for translatorisk kinematik.

Ligning (7.57) viser, at en kraft som virker på et legeme kan skabe rotation eller drejning af et andet legeme, eller ændre den rotation (dvs. det impulsmoment) legemet har i forvejen. Og evnen (eller villigheden) for at ændre rotationshastigheden afhænger af hvor på legemet kraften virker. Jo længere fra omdrejningsaksen (eller reference-aksen), jo større er evnen for at ændre rotationshastigheden. Tænk blot på eksemplet med barnet på vippen: Jo længere fra vippens akse du skubber vippen nedad, jo mindre kraft skal du bruge for at løfte barnet i tyngdefeltet. Ligning (7.57) viser ydermere, at det er den vinkelrette komponent af kraften \vec{F}_{\perp} , der har betydning for kraftmomentet.

Vi skal til plenum se mange eksempler på hvad der sker når et kraftmoment virker på et legeme der roterer eller drejer.

Rotationsmekanik index

- Angulært moment, 192
- Bevægelsesligninger, rotation, 179
- Centrifugalacceleration, 177, 178
- Centripetalacceleration, 177
- Cirkelbevægelse, 177
- Definitioner, 175
- Drejning, definition, 175
- Højrehåndsreglen, 198
- Impulsmoment, 192
- Impulsmoment om akse gennem massemidpunkt, 198
- Impulsmoment, Bane-, 198
- Impulsmoment, CM-, 198
- Impulsmoment, Spin-, 198
- Impulsmoment, translatorisk bane, 193
- Impulsmoment, vektor, 197
- Inertimoment, 180
- Inertimoment, ligning, 182
- Koordinatsystem, følger med cirkelbevægelsen, 176
- Kraftmoment, 201
- Krydsprodukt, vektorer, 193, 198
- Parallelaksetheorem, 189
- Polære koordinater, 175
- Rotation, definition, 175
- Rotations-impuls, 192
- Rotationsinerti, 180
- Rotationskinematik, 179
- Rotationskinetisk energi, 191
- Rotationsmekanik, 175
- Roterende koordinatsystem, 176
- Vinkelhastighed, størrelsen (skalar), 179
- Vinkelhastighed, vektor, 179, 197
- Vinkelretakseteorem, 190