# LinAlys 2022: Ugeopgave 8 til aflevering i uge 11.

8.1 Find alle $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ som opfylder

$$\begin{aligned} iz_1 + (1+i)z_2 &= 1 + 3i \\ z_1 + (1-i)z_2 + z_3 &= 2 - i \\ (3+i)z_2 + z_3 &= 5 \end{aligned}$$

(Vink: overvej at Gauss-elimination også virker på ligninger med komplekse koefficienter.)

8.2 For en matrix $X = [x_{ij}] \in \mathbb{M}_{2,2}$ defineres *sporet* $\mathrm{Tr}(X) \in \mathbb{R}$ som

$$\mathrm{Tr}(X) = x_{11} + x_{22},$$

og den *transponerede* af $X$ defineres som $X^t = [x_{ji}]$, altså

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} \\ x_{12} & x_{22} \end{bmatrix}.$$

For matricer $A, B \in \mathbb{M}_{2,2}$ definerer vi $\langle A, B \rangle = \mathrm{Tr}(A^t B)$.

(a) Udregn

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \right\rangle$$

(b) Vis at $\langle\ ,\ \rangle$ opfylder aksiom 1 for indre produkt [Messer Definition 4.1].

Man kan også vise at $\langle\ ,\ \rangle$ opfylder de tre andre aksiomer i [Messer Definition 4.1], og dermed er et indre produkt på vektorrummet $\mathbb{M}_{2,2}$. Dette må bruges uden bevis i resten af opgaven, hvor vi vil bruge dette indre produkt på $\mathbb{M}_{2,2}$.

(c) Find en ortonormalbasis for underrummet af $\mathbb{M}_{2,2}$ udspændt af matricerne

$$U_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad U_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad U_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

8.3

(a) Udregn modulus og argument af det komplekse tal

$$\frac{(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}i)(\frac{1}{4}-\frac{3}{2}i)}{(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}i)i}$$

Beregn tallet med håndkraft, men tjek gerne resultatet med f.eks. Python.

(b) Lad $z = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}i$. Indtegn tallene

$$z^{-8}, z^{-7}, \ldots, z^{-1}, z^0, z, z^2, \ldots, z^8$$

i den komplekse plan og forklar hvilket mønster punkterne danner.