

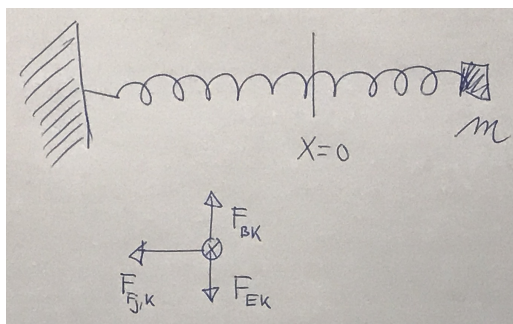
# Kapitel 8

## Harmonisk Oscillator

### 8.1 Simpel Harmonisk Oscillator

En fjeder, der bliver trukket stykket  $x$  væk fra ligevægts-stillingen (se figur 8.1), vil opleve en genoprettende kraft (restoring force), som vi kender fra Hookes lov,  $F = -kx$ , hvor  $k$  er fjederkonstanten. Lad os betragte en kasse med inert  $m$ , der står på et gnidningsfrit bord, og er forbundet til en fjeder. Vi kan løse den resulterende kraftligning, og vi finder  $ma = -kx$ , hvilket kan omskrives til

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0. \quad (8.1)$$



Figur 8.1: En fjeder...

Vi gætter på at løsningen til denne ligning kan skrives som

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi_0), \quad (8.2)$$

hvor  $A$  er amplituden af udsvinget,  $\omega$  er vinkel-frekvensen, og  $\phi_0$  er en fase, der kan findes fra begyndelses-betingelserne.

Du kan nu tage de afledte (gør det!)

$$\dot{x} = -A\omega \sin(\omega t + \phi_0) \quad (8.3)$$

$$\ddot{x} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi_0), \quad (8.4)$$

og ser at accelerationen,  $\ddot{x}(t)$  er proportional med  $x(t)$ , dvs ligning (8.1) kan skrives som

$$\left(-\omega^2 + \frac{k}{m}\right) x(t) = 0, \quad (8.5)$$

og da dette skal gælde til alle tider, så ser du at

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (8.6)$$

Det betyder blandt andet at denne vinkelfrekvens ikke afhænger af hverken amplituden  $A$ , eller af faseforskydningen  $\phi_0$ .

Lad os som eksempel betragte en fjeder med fjederkonstant  $k = 20\text{N/m}$  og inert  $m = 0.1\text{kg}$ . Vi tager startbetingelser til at være  $x_0 = 0$  til klokken  $t = 0$ , og  $v_0 = -5\text{m/s}$ .

Vis at  $\omega \approx 14/\text{sek}$ , og find perioden

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (8.7)$$

Vis også at  $A \approx 0.36\text{m}$ , og at  $\phi_0 = \pi/2$ . Nedskriv hele  $x(t)$ .

Hvis du er bekymret for at vi ovenfor “blot” gættede at løsningen til ligning (8.1) er givet ved (8.2), så kan du istedet finde den analytiske løsning ved de teknikker du kommer til at lære i matematik. Her ser du at en homogen anden-ordens differentiaalligning med konstante koefficienter kan løses med karakterligningen

$$R^2 + \omega^2 = 0. \quad (8.8)$$

De 2 imaginære rødder  $R = \pm i\omega$  giver den helt generelle løsning  $x(t) = B_1 \cos(\omega t) + B_2 \sin(\omega t)$ , hvor  $B_i$  er ukendte koefficienter. Du kan nu bruge nogle cosinus-sinus relationer til at omskrive denne løsning til ligning (8.2).

### 8.1.1 Sammenhæng mellem kraft, arbejde og potentiel energi

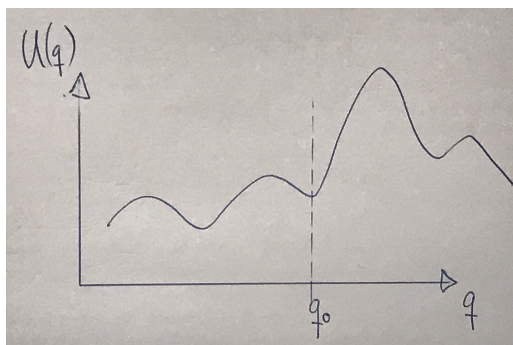
Vi ved, at helt generelt er arbejdet for at bringe en partikel fra punkt  $A$  til punkt  $B$  givet ved

$$W_{AB} = \int_A^B F dx, \quad (8.9)$$

så hvis vi f.eks strækker en fjeder fra ligevægtsstillingen til afstanden  $x$ , så skal vi modarbejde kraften fra fjederen, dvs

$$W = \int_0^x (-F) dx = \int_0^x kx dx = \frac{1}{2} kx^2. \quad (8.10)$$

Dette er dermed udtrykket for den potentielle energi i en fjeder. Du kan huske denne sammenhæng mellem kraft og potential, ved at “en kraft skubber en partikel ned ad potential-bakken”,



Figur 8.2: Et potential ...

$F = -dU/dx$ . Det vil med andre ord sige, at hvis du kender potentialet, så kender du også kraften.

Lad os derfor betragte et helt generelt potential, og se om vi kan sige noget om en partikels bevægelse i dette potential. Lad os sige at vi kender potentialet,  $U(q)$ , som en funktion af en variabel  $q$ . Denne  $q$  kan f.eks være en position eller en vinkel (se figur 8.2).

Lad os betragte alle ekstrema, dvs steder, hvor den afledte er nul,  $dU/dq = 0$ . Disse punkter er interessante, fordi det er steder, hvor kraften er nul,  $F = -dU/dq$ . Hvis vi kun betragter minima, så er det stabile punkter: ved maxima vil den mindste påvirkning få partiklen til at bevæge sig væk fra punktet. På figur 8.2 er der indikeret et sådant minimum ved punktet  $q_0$ .

Vi vil nu kigge på det helt generelle matematiske resultat, at alle fysiske funktioner kan beskrives eksakt ved at lave en Taylor udvikling omkring et punkt <sup>1</sup>. I en given fysisk situation har du måske brug for 1, 2, 3, eller flere elementer af denne rækkeudvikling, mens den eksakte rækkeudvikling har uendelig mange led. Vi vil derfor skrive funktionen  $U(q)$  ved dennes Taylor udvikling omkring punktet  $q_0$

$$U(q) = U(q_0) + \left. \frac{\partial U}{\partial q} \right|_{q_0} (q - q_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q^2} \right|_{q_0} (q - q_0)^2 + \frac{1}{6} \left. \frac{\partial^3 U}{\partial q^3} \right|_{q_0} (q - q_0)^3 + \dots \quad (8.11)$$

Vi kan frit vælge nulpunktet for energien, så lad os sætte  $U(q_0) = 0$ . Vi ved også at vi betragter et ekstremum, så leddet med  $\left. \frac{\partial U}{\partial q} \right|_{q_0}$  er nul.

Det næste skridt er nu, at vi nøjes med at betragte en område tilstrækkeligt tæt på  $q_0$ . Hermed mener vi, at vi kun kigger på  $q - q_0$  så små, at vi kan se bort fra alle led med  $(q - q_0)^3$  og højere. Vi har derfor

$$U(q) = \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q^2} \right|_{q_0} (q - q_0)^2. \quad (8.12)$$

Hvis vi omdøber  $\left. \frac{\partial^2 U}{\partial q^2} \right|_{q_0} = k$ , og vi kalder  $(q - q_0) = x$ , så ser vi at

$$U = \frac{1}{2} k x^2, \quad (8.13)$$

hvilket præcist er, hvad vi fandt var arbejdet vi udfører på en fjeder, når vi f.eks trykker den lidt sammen. Arbejdet vi har udført på fjederen var jo den opmaganiserede potentielle energi.

<sup>1</sup>Hvis du har lyst kan du spørge en matematiker, hvilke formelle egenskaber en funktion skal have, for at man kan Taylor udvikle funktionen omkring et punkt.

Bemærk at denne udledning ikke er begrænset til noget bestemt fysisk system, men den gælder helt generelt: hvis du betragter et system (f.eks en partikel) som er tæt ved et stabilt ligevægtspunkt, så vil systemet have en opførsel, som præcist er givet ved den samme slags harmoniske oscillator, som en simpel fjeder er givet ved. Du vil se at dette fænomen kommer igen i elektromagnetismen, i optikken, i partikel fysikken, i astronomien og mange andre steder.

Som eksempel kan vi igen se på det simple pendul. Det er givet ved en partikel med inertie  $m$ , som hænger i en snor med længde  $l$ , og laver udsving med vinklen  $\theta$ . Vi ved at kraftligningen er givet ved

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin(\theta) . \quad (8.14)$$

Hvis vi definerer  $\omega^2 = g/l$ , så ser vi at dette for små udsving hvor  $\sin\theta \approx \theta$  præcist er givet ved den simple harmoniske oscillator ligning

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0 , \quad (8.15)$$

som har løsningerne

$$\theta(t) = A \cos(\omega t + \phi_0) , \quad (8.16)$$

hvor  $A$  og  $\phi_0$  må bestemmes ud fra begyndelsesbetingelser.

Vi bruger ganske ofte at Taylor-udvikle f.eks en sinus eller en cosinus. Det er derfor rimeligt at vi overvejer præcist hvad vi mener med “tilstrækkeligt små vinkler”.

Lad os som eksempel kigge på en Taylor udvikling for sinus

$$\sin(\theta) = \theta - \frac{\theta^3}{6} - \frac{\theta^5}{120} + \dots \quad (8.17)$$

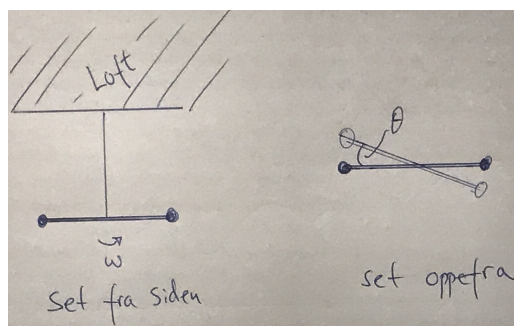
Hvis vi tager en tilfældig vinkel, lad os sige 10 grader, så vil det sige (da 360 grader svarer til  $2\pi$ ),  $\theta = 10^\circ (2\pi/360^\circ) \approx 0.1745$ . Det vil altså sige at

$$\sin(10^\circ) = 0.1745 - \frac{0.1745^3}{6} - \frac{0.1745^5}{120} + \dots \quad (8.18)$$

Vi kan f.eks spørge, hvor stor  $\theta^3$  leddet er i forhold til  $\theta$  leddet, og vi ser at  $\theta^3/6/\theta = \theta^2/6 \approx 0.005$ . Så hvis vi smider  $\theta^3$ -led væk, så laver vi en fejl der er mindre end 1 procent. Du kunne også direkte udregne hvad er sinus til 10 grader, og svaret er 0.1736, i fin overensstemmelse med konklusionen ovenfor.

Hvis du laver den samme regning for  $22.5^\circ$  så ser du at  $\theta^3$ -leddet er 2.6 procent af  $\theta$ -leddet. Ved  $45^\circ$  er det omkring 10 procent, og så er det nok ikke så god en tilnærmelse længere.

Prøv selv at vælge en vinkel, for at udregne hvor stor en fejl du laver ved at ignorere de højere ordens led.



Figur 8.3: Et torsions pendul ...

Et andet eksempel er et torsions-pendul. En solid stang (måske med 2 kugler i enderne) er ophængt fra loftet (se figur 8.3). Stangen kan rotere vinkelret på snoren, parallelt med loftet. Når stangen roteres en vinkel  $\theta$  vil indre kræfter i snoren forsøge at genoprette ligevægts-stillingen, og derved fremkommer en bevægelses-ligning givet ved

$$\tau = -\kappa \theta, \quad (8.19)$$

hvor  $\kappa$  kaldes torsions-koefficienten. Vi bemærker det negative fortegn, som skyldes at kraftmomentet er modsat rettet positiv-retningen af  $\theta$  - det er med andre ord et genoprettende kraftmoment, på samme måde som en fjeder har en genoprettende kraft. Da vi ved at kraftmomentet er givet ved  $\tau = I\ddot{\theta}$ , så kan vi se, at denne ligning kan skrives som

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0, \quad (8.20)$$

hvor vi har defineret  $\omega^2 = \sqrt{\kappa/I}$ . Igen ser vi, at dette præcist er ligningen for en simple harmonisk oscillator, som vi kender løsningerne til.

Denne opstilling blev berømt da Cavendish brugte en træ-stang på  $l = 1.8$  m med nogle små kugler for enden (hver med inertie på  $m = 0.73\text{ kg}$ ), som blev gravitationelt tiltrukket af nogle store kugler med inertie  $M = 158$  kg. Ved brug af nogle spejle og en lysstråle kunne han herved måle Newtons gravitationelle konstant,  $G$ .

Du kan prøve at overbevise dig om, at dette overhovedet er muligt. Du skal lave 2 skridt: først finde  $\kappa$  af snoren ved at måle perioden,  $T = 2\pi/\omega$ , af nogle oscillationer og bruge at du kan udregne inertie-momentet. Derefter skal du flytte de store kugler tæt på de små kugler (og måle afstanden mellem dem,  $r$ ). Hvis du kender Newtons gravitationelle lov,  $F = GmM/r^2$ , så kan du opstille en kraftmomentligning for ligevægt, det vil sige  $\sum \tau = 0$ , som gælder ved den vinkel, hvor kraftmomentet fra snoren præcist ophæves af kraftmomentet fra tyngden mellem kuglerne,  $lF = \kappa\theta_{\max}$ .

### 8.1.2 Harmonisk oscillerende pind

Lad os betragte en pind med inertie  $M$  og længde  $l$ , som bliver ophængt af et gnidningsfrit søm gennem et hul,  $P$ , ved afstanden  $b$  fra CM. Vi betragter svingninger med vinklen  $\theta$  i forhold til når pinden hænger lodret. Denne pind vil opleve en masse indre kræfter som tvinger den til

at svinge frem og tilbage med en vinkelfrekvens  $\omega$ . Disse indre kræfter vil også virke i punktet  $P$ .

Når vi opskriver en udvidet kraft-ligning ved vi heldigvis, at alle disse kræfter i punktet  $P$  ikke giver et bidrag til kraftmomentligningen (hvorfor?), så kraftmomentligningen bliver

$$\tau_P = -Mgb \sin \theta. \quad (8.21)$$

På den anden side ved vi også at kraftmomentet kan skrives ved

$$\tau_P = I_P \frac{d\omega}{dt} = I_P \ddot{\theta}. \quad (8.22)$$

Hvis vi betragter små vinkler, hvor  $\sin \theta \approx \theta$ , så ser vi derfor at vi har ligningen  $MGb\theta = -I_P d\omega/dt$ , som kan skrives som

$$\ddot{\theta} + \frac{Mgb}{I_P} \theta = 0. \quad (8.23)$$

Dette er jo en SHO ligning, og vi kender løsningerne  $\theta(t) = \theta_{\max} \cos(\omega t + \phi_0)$ . Det er interessant at da  $I_P \sim M$ , så ser vi at  $\omega$  er uafhængig af inertien.

Hvis vi betragter en tynd pind, så kender vi inerti-momentet, og specielt ser vi at oscillationens periode er givet ved

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{12}l^2 + b^2}{gb}}. \quad (8.24)$$

Overvej nu hvor lang perioden er, hvis sømmet er helt ude i enden af pinden, i forhold til hvis sømmet er lidt væk fra enden: hvilken periode er længst? Overvej nu hvor lang oscillationsperioden er, hvis sømmet er tæt ved CM.

Fra ovenstående har du nok gennemskuet, at der må være en minimum: der er et bestemt sted på pinden, hvor perioden vil være minimal. Lad os finde dette punkt.

Man finder jo et minimum ved at differentiere og sætte til nul. Vi er altså ude efter at løse

$$\frac{d}{db} \left( \frac{\frac{1}{12}l^2 + b^2}{gb} \right) = 0. \quad (8.25)$$

Du kan løse dette (gør det!) og finder at

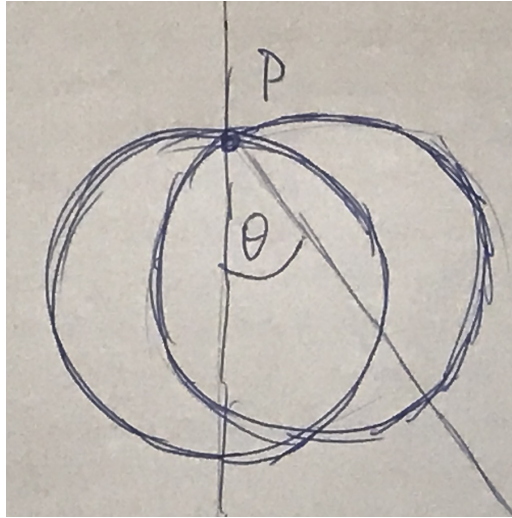
$$b = \frac{l}{\sqrt{12}} \quad (8.26)$$

er løsningen.

### 8.1.3 En oscillerende hulahop-ring

Vi forestiller os at vi har en solid og cirkulær hulahop-ring med inertie  $M$  og radius  $R$ . Vi banker et gnidningsløst søm igennem ringen ved punktet  $P$ . Sømmet sættes ind i en solid væg, så hulahop-ringen kan lave oscillationer med vinklen  $\theta$  fra lodret (se figur 8.4).

Igen vil der være indre krafter i ringen, og disse vil også virke i punktet  $P$ , men igen giver disse ikke noget kraftmoment da "armen" er nul omkring punktet  $P$ .



Figur 8.4: En hulahop ring ...

Tyngdekraften virker i CM og giver derfor et kraftmoment omkring punktet  $P$

$$\tau_P = -MgR \sin \theta, \quad (8.27)$$

og da det genoprettende kraftmoment er givet ved  $\tau = I_p d\omega/dt$ , så får vi for små vinkler ligningen

$$\ddot{\theta} + \frac{MgR}{I_p} \theta = 0. \quad (8.28)$$

Herfra kan vi finde vinkelfrekvensen  $\omega$  og dermed perioden

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_p}{MgR}} = 2\pi \sqrt{\frac{2R}{g}}, \quad (8.29)$$

hvor vi har benyttet parallelakse teoremet til  $I_P = I_{CM} + MR^2 = 2MR^2$ .

Dette resultat er ret sjovt, for det giver præcis samme periode som et pendul med længde  $2R$ .

## 8.2 Dæmpet Harmonisk Oscillator

I de fleste realistiske fysiske situationer skal man tage højde for energi-tab gennem friktion. Friktionen kan påvirke bevægelses-ligningerne på mange måder, men ofte kan effekten tilnærmes gennem et hastigheds-afhængigt led, som for små hastigheder er lineært. For en klods med inert  $m$ , der oscillerer med en fjederkonstant  $k$ , tager det formen

$$m \ddot{x} = -kx - b\dot{x}, \quad (8.30)$$

hvor  $b$  er en konstant der kan måles. For meget høje hastigheder kommer der nogle gange et led proportionalt med  $\dot{x}^2$  (mere om dette senere).

Hvis vi definerer nye konstanter

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad \text{og} \quad \gamma = \frac{b}{m}, \quad (8.31)$$

kan den relevante differential ligning skrives

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (8.32)$$

Bemærk at vi nu bruger et indeks "0" på vinkelfrekvensen, for at vise at det tidligere  $\omega$  er forskelligt fra  $\omega_0$ . Vi vil nedenfor udlede præcis hvad forskellen er.

Hvad er enhederne for  $\gamma$  og  $\omega_0$ ?

Er ligning (8.32) lineær (hvilket vil sige at superpositions-princippet gælder), og hvad betyder det for løsninger?

Dette er igen en lineær anden-ordens differential ligning, som er rimeligt ligetil at løse. Lad os se om vi kan gætte en løsning.

Hvis der ingen fjeder var, så ville bevægelsesligningen være

$$\dot{v} + \gamma v = 0. \quad (8.33)$$

Den kender vi løsningen til, nemlig  $v(t) = v_0 \exp(-\gamma t)$ . Du kan nu integrere og finder

$$x(t) = x_0 + \frac{v}{\gamma} (1 - \exp(-\gamma t)). \quad (8.34)$$

Det er altså en eksponentielt dæmpet bevægelse.

Hvis vi putter fjederen tilbage, så forventer vi en oscillerende bevægelse, som er eksponentielt dæmpet. Vi gætter derfor på løsningen

$$x(t) = A e^{-qt} \cos(\omega t + \phi_0). \quad (8.35)$$

Vi skal nu bare finde ud af hvordan  $q$  og  $\omega$  er relaterede til  $\gamma$  og  $\omega_0$ . Selve regningen er ligeud ad landevejen, men du opfordres til at udføre detaljerne selv.

Hvis vi tager vores gæt i ligning (8.35) så kan vi differentiere og finde  $\dot{x}$  og  $\ddot{x}$ . Dette kan vi indsætte i ligning (8.32) (gør det!). Herved finder du ligningen

$$\begin{aligned} & (-\omega^2 + q^2 - q\gamma + \omega_0^2) e^{-qt} \cos(\omega t + \phi_0) \\ & + (2qm - \gamma\omega) e^{-qt} \sin(\omega t + \phi_0) = 0. \end{aligned} \quad (8.36)$$

Denne ligning skal gælde til alle tider, og f.eks hvis vi kigger på den til tiden hvor  $\omega t + \phi_0 = 0$  så betyder der

$$(-\omega^2 + q^2 - q\gamma + \omega_0^2) = 0, \quad (8.37)$$

og tilsvarende til tiden hvor  $\omega t + \phi_0 = \frac{\pi}{2}$  gælder

$$(2qm - \gamma\omega) = 0. \quad (8.38)$$

Her er 2 ligninger med 2 ubekendte, som løses med

$$q = \frac{\gamma}{2} \quad \text{og} \quad \omega^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}. \quad (8.39)$$

Her ser vi igen at  $\omega$ ,  $\omega_0$  og  $\gamma$  har samme enhed, nemlig 1/sek. Vi ser at uden dæmpning,  $\gamma = 0$ , så har vi  $\omega = \omega_0$ , og vi ser at et dæmpet system oscillerer med en lidt længere periode.



Lad os kort estimere hvor stor forskellen er på  $\omega$  og  $\omega_0$ , altså hvis systemet er dæmpet, så vil svingningsperioden ændres en lille smule, men hvor meget?

Lad os betragte eksemplet hvor  $\omega = 1 \frac{1}{s}$  og  $\gamma = 0.1 \frac{1}{s}$ . Du kan nu indsætte og se at  $\omega_0 = 1.0012 \frac{1}{s}$ . Selvom dæmpningen er rimelig stor, så er svingningsfrekvensen stort set uændret.

Du kan også spørge hvornår det udæmpede og det dæmpede system vil være ude af fase? Det kan vi formulere matematisk ved hvornår der gælder  $(\omega_0 - \omega)t = \pi/2$ ?

Du kan f.eks Taylor udvikle og ser at

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} \approx \omega_0 \left(1 - \frac{\gamma^2}{8\omega_0^2}\right), \quad (8.40)$$

hvilke fører til  $t = 4\pi\omega/\gamma^2 \approx 1258$  sek.

Der går altså over tusind svingninger inden de 2 systemer er ude af fase.

Du kan samtidig spørge, hvor meget amplituden er faldet iløbet af denne tid, og du ser at amplituden er faldet med en faktor omkring  $10^{-28}$ . Tænk over hvad det betyder hvis udsvinget startede med at være 1 km, og sammenlign med radius af en proton (som er  $\sim 10^{-15}m$ ).

Det er muligt at du ovenfor blev bekymret da vi “gættede” på en løsning af formen (8.35). I matematik får du nogle værktøjer til at finde den formelle løsning. Den lineære anden-ordens differential ligning kan løses ved at finde karakterligningen

$$R^2 + \gamma R + \omega_0^2 = 0, \quad (8.41)$$

som har rødderne

$$R = -\frac{\gamma}{2} \pm i\omega_d, \quad (8.42)$$

hvor vi har indført  $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4}$ .

Ved at kigge på disse rødder kan vi se at der er 3 interessante klasser af løsninger, nemlig når  $\omega_0$  er større end, lig med, eller mindre end  $\gamma/2$

### 8.2.1 Svagt dæmpet oscillation

Tilfældet med  $\gamma \ll \omega_0$  kaldes *underdæmpet*, og vi ser at løsningen er

$$x(t) = A e^{-\frac{\gamma t}{2}} \cos(\omega_d t + \phi_0), \quad (8.43)$$

hvor  $\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\gamma}{2\omega_0}\right)^2}$ .

Ofte betragter man 2 forskellige tidsskalaer for svag dæmpning, hvor den ene er relateret til den naturlige periode,  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ . Den anden tidsskala er henfaldstiden, nemlig den tid det tager amplituden at falde til  $1/e$  efter  $2T_D$ , dvs  $T_D = 1/\gamma$ . Herved kan man kigge på forholdet mellem disse tider, og man definerer en *quality* ved  $Q = \omega_0/\gamma = 2\pi T_D/T_0$ . For et typisk mekanisk pendul har man  $Q \sim 10^2$ , og for en stemmegaffel har man typisk  $Q \sim 10^4$ .

Gennem dæmpning forsvinder energien. Vi ved at den potentielle energi for en fjeder er  $\frac{1}{2}kx^2$  og den kinetiske energi er  $\frac{1}{2}m\dot{x}^2$ . Det vil altså sige at

$$E \sim A^2 \exp(-\gamma t), \quad (8.44)$$

eftersom både sin og cos midler til  $1/2$  efter mange svingninger.

Hvis vi kigger på energien ved 2 tider, ser vi

$$E(t) = E(t=0) \exp(-\gamma t) \quad (8.45)$$

$$E(t+T_0) = E(t=0) \exp(-\gamma(t+T_0)) = E(t) \exp(-\gamma T_0). \quad (8.46)$$

Med en Taylor udvikling får vi  $\exp(-\gamma T_0) \approx 1 - \gamma T_0$ , og vi ser derfor at

$$\Delta E = E(t) - E(t + \Delta t) \approx E(t) \gamma T_0 = E \frac{2\pi}{Q}, \quad (8.47)$$

hvilket vil sige, at efter en oscillation er den relative mistede energi givet ved

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{2\pi}{Q}. \quad (8.48)$$

Det betyder altså, at med en stor *quality* er der kun ganske lidt energi-tab.

### 8.2.2 Kritisk dæmpet oscillation

Det viser sig, at ved situationen  $\omega_0 = \gamma/2$  vil systemet hurtigst muligt nå tilbage til ligevægts-tilstanden. Dette er nyttigt når man laver støddæmpere til biler, eller når man laver dørlukkere: hvis dæmpningen er for stor, så lukker døren for langsomt, og hvis dæmpningen er for lille vil døren stå og svinge frem og tilbage.

Man kan i dette tilfælde vise at løsningen kan skrives

$$x(t) = A e^{-\frac{\gamma t}{2}} + B t e^{-\frac{\gamma t}{2}}. \quad (8.49)$$

Man bemærker at denne bevægelse faktisk ikke rigtigt er oscillerende, som vi normalt tænker oscillationer.

### 8.2.3 Stærkt dæmpet oscillation

I situationen hvor  $\gamma/2 > \omega_0$  ser man, at  $\omega_d$  bliver imaginær. Det betyder igen at bevægelsen ikke bliver oscillerende. Man finder at løsningen er givet ved

$$x(t) = A e^{-\gamma_+ t} + B e^{-\gamma_- t}. \quad (8.50)$$

hvor  $\gamma_{\pm} = \gamma/2 \pm \sqrt{\gamma^2/4 - \omega_0^2}$ .

Selvom dæmpningen er større, så vil det tage længere tid for energien at dissipere end i tilfældet med kritisk dæmpning.

### 8.2.4 Eksempel, en sten i en spand vand

Hvis du lægger en sten i en spand vand, hvordan vil dens hastighed så udvikle sig? Din intuition siger dig nok at den vil accelerere, indtil gnidningen med vandet er så stor at hastigheden er konstant. Dette er et eksempel på et stærkt dæmpet system, så vi tænker, at vi har en så svag fjeder, at vi i første omgang kan se bort fra fjederen. Lad os udlede detaljerne.

Vi tager begyndelsesbetingelser til at være  $x = 0$  m og  $v = 0$  m/s til  $t = 0$  s. Der vil være 2 krafter, hvor den ene er en samlet tyngdekraft  $F_g = mg - V\rho g$ , hvor det sidste opdrifts-led er den fortrængte mængde væske,  $\rho$  er tætheden af væsken og  $V$  er stenens volumen.

Gnidningskraften er negativ og proportional med hastigheden  $F_{\text{fric}} = -\beta v$ , hvor  $\beta$  er en eller anden konstant som nogle gange kan udledes fra væskens viskositet, stenens radius og form, og andre detaljer. Vi har derfor en kraftligning der hedder

$$m\ddot{x} = F_g + F_{\text{fric}}, \quad (8.51)$$

der kan skrives som

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F_g}{m} - \frac{\beta}{m} v \quad (8.52)$$

$$= \frac{-\beta}{m} \left( v - \frac{F_g}{\beta} \right). \quad (8.53)$$

Hvis vi kigger på højre siden står der  $v$  minus en konstant, og på venstresiden står der den afledte af  $v$ . Da den afledte af en konstant er nul, så har vi lov til at skrive venstresiden som

$$\frac{d\left(v - \frac{F_g}{\beta}\right)}{dt} = \frac{-\beta}{m} \left(v - \frac{F_g}{\beta}\right). \quad (8.54)$$

Nu kan vi bruge den matematiske teknik med separation af variabler til at skrive denne ligning som

$$\frac{d\left(v - \frac{F_g}{\beta}\right)}{\left(v - \frac{F_g}{\beta}\right)} = \frac{-\beta}{m} dt, \quad (8.55)$$

som integreres til at give

$$\log\left(v - \frac{F_g}{\beta}\right) = \frac{-\beta}{m} t + c_1, \quad (8.56)$$

hvor  $c_1$  er en konstant vi må finde fra begyndelses-betingelserne.

Ved at bruge vores begyndelses-betingelser ser du (gør det!) at løsningen er

$$v(t) = \frac{F_g}{\beta} \left( 1 - \exp\left(\frac{-\beta}{m} t\right) \right). \quad (8.57)$$

Hvis du plotter denne løsning ser du, at i starten stiger farten lineært, og efter et stykke tid flader farten ud ved terminal-hastigheden  $v_{\text{term}} = F_g/\beta$ .

En lille kommentar er nu relevant i forhold til at vi antog at gnidningen er proportional med hastigheden. Det kommer fra at hastigheden er så lille at der ikke opstår turbulens i væsken.

I dette tilfælde er flowet laminært, hvilket vil sige at væsken “smyger” sig roligt langs stenens overflade. Hvis hastigheden bliver meget stor, så opstår der turbulente bevægelser i væsken, og et nyt gnidningsled skal inkluderes, som ofte går som  $v^2$ . I det tilfælde får din kraftligning et udseende i retning af

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \alpha v^2, \quad (8.58)$$

som igen kan løses med separation af variabler og giver en løsning i retning af

$$v(t) = \sqrt{\frac{g}{\alpha}} \tanh(t \sqrt{g\alpha}). \quad (8.59)$$

### 8.2.5 Eksempel, et elektrisk kredsløb

Der kan indgå forskellig komponenter i et elektrisk kredsløb, og et af disse er en spole. Du vil om kort tid lære meget om spoler, f.eks at de blandt andet er karakteriserede ved at de gerne tillader at du sender strøm igennem dem, men de vil modarbejde dig, hvis du vil ændre på stømmen. En spole karakteriseres ved induktansen, som kaldes  $L$ . Hvis du måler det elektriske potential (som er 9 Volt hvis du måler det hen over et 9V batteri) hen over en spole, så finder du  $\Delta V_L = L \ddot{q}$ . Ladning er  $q$ , så strøm er ændring i ladning,  $\dot{q}$ . Og spolens potential er derfor noget med ændring af strøm at gøre,  $\ddot{q}$ .

På tilsvarende måde kender du måske en kapacitor fra din cykellygte. Den er karakteriseret ved at have en evne til at holde på ladning (kaldet en kapacitans,  $C$ ). Hvis du måler potentialet hen over en kapacitor, så finder du  $\Delta V_C = q/C$ : jo mere ladning der er på kapacitoren lige nu, jo større er potentialet hen over den.

Hvis du laver et super-simpelt kredsløb, der kun består af en spole og en kapacitor, så finder du ved at måle potentialet rundt i kredsen

$$L \ddot{q} + \frac{1}{C} q = 0. \quad (8.60)$$

Denne ligning ser underlig ud, men hvis vi omskriver den, så ser du at

$$\ddot{q} + \frac{1}{LC} q = 0, \quad (8.61)$$

som jo præcis er en SHO. Og den kan du løse uden problemer. Du ser altså hvordan ladningen står og oscillerer frem og tilbage i systemet, og du ser at frekvensen er givet ud fra  $\omega = \sqrt{1/LC}$ .

Du kunne også lave en endnu vanskeligere kreds, nemlig ved at inkludere en pære der lyser, når du sender strøm igennem den. Du ved at en pære er karakteriseret ved at have en indre modstand (en resistans,  $R$ ). Hvis du måler potentialet hen over en pære, så finder du  $\Delta V_R = R \dot{q}$ .

Hvis du måler potentialet hele vejen rundt i det elektrisk kredsløb finder du

$$L \ddot{q} + \frac{1}{C} q + R \dot{q} = 0. \quad (8.62)$$

Ved en lille omskrivning ser du at

$$\ddot{q} + \frac{R}{L} \dot{q} + \frac{1}{LC} q = 0, \quad (8.63)$$

som jo præcis er en dæmpet harmonisk oscillator. Du ser at modstanden spiller rollen af dæmpning (med  $\gamma = R/L$ ). Dette simple kredsløb er udgangspunktet for at lave en metal-detektor.

Det du skal huske fra ovenstående er, at alle disse teknikker omkring SHO og dæmpet harmonisk oscillator er noget du vil støde på mange gange i fysikken, fordi det er meget generelt.

