LinAlys 2022: Ugeopgave 10 til aflevering i uge 13.

10.1 Lad $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være givet ved $f(x, y) = \sin(x)\sin(y)$.

(a) Vis at $(0, 0)$ og $(0, \pi)$ er stationære punkter og udregn Hessematricen $Hf(0, 0)$.

(b) Brug Python til at skitsere grafen for f i nærheden af $(0, 0)$ og vurdér ud fra skitsen om $(0, 0)$ er et lokalt minimum, lokalt maksimum, eller et sadelpunkt.

(c) Brug konturer til at vise at $(0, \pi)$ er et sadelpunkt.

10.2 Lad $A \in \mathbb{M}_{3,3}$ være matricen

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

(a) Vis at $\det(A) = 1$.

(b) Beregn A^{-1} og bevis at $\det(A^{-1}) = 1$.

(c) Vis at hvis $B \in \mathbb{M}_{n,n}$ er en invertibel matrix så alle indgange i både B og B^{-1} er hele tal, så er enten $\det(B) = 1$ eller $\det(B) = -1$.

Bemærkning (ikke en del af opgaven): vi skal senere se at hvis B har heltalsindgange og $\det(B) \in \{+1, -1\}$, så har B^{-1} også heltalsindgange.

10.3 Lad $A \in \mathbb{M}_{2,2}$ være invertibel og opfylde $A^t = A$, hvor A^t betegner den transponerede som i pointopgave 8, og lad $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være funktionen givet ved prik-produktet

$$f(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (A\mathbf{v}).$$

(a) Vis at $\nabla f(\mathbf{v}) = 2A\mathbf{v}$ og konkludér at $\mathbf{v} = (0, 0)$ er det eneste stationære punkt for f. Vis også at Hessematricen $Hf(0, 0)$ er $2A$.

(b) Beregn diskriminanten af $p(x) = f(x, 1) \in \mathbb{P}_2$ og relatér den til determinanten af A. Vink: du skulle gerne få $-4\det(A)$.

(Husk fra gymnasiet at diskriminanten af et andengradspolynomium $ax^2 + bx + c$ er tallet $D = b^2 - 4ac$, og at hvis $a \neq 0$ så har polynomiet har to reelle rødder hvis og kun hvis diskriminanten er positiv.)

(c) Antag nu at $\det(A) < 0$, og brug (b) til at vise at der både findes et punkt $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ med $f(\mathbf{v}) > 0$ og et punkt $\mathbf{w}$ med $f(\mathbf{w}) < 0$.