LinAlys 2022: Ugeopgave 9 til aflevering i uge 12.

Bemærk: som i forelæsningerne vil vi bruge firkantede klammer til at notere ordnede baser. Vi skriver altså f.eks. $B = [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n]$ i stedet for bogens notation (f.eks. i definition 3.24) med { og }.

9.1 Lad $T_1 : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{R}$ være givet ved $T_1(p) = p(1)$.

- **(a)** Vis at T_1 er lineær.
- **(b)** Hvad er matricen for T_1 relativ til den ordnede basis $B = [1, x, x^2, x^3]$ for $\mathbb{P}_3$ og basen $B' = [1]$ for $\mathbb{R}$.
- **(c)** Lad nu a være et vilkårligt reelt tal og definér $T_a(p) = p(a)$. Find matricen for T_a relativ til de samme baser som i (b).

9.2 Lad $B = [1, x, x^2, x^3]$. Det må bruges uden bevis at B er en basis for $\mathbb{P}_3$.

- **(a)** Vis at $B_a = [1, x-a, (x-a)^2, (x-a)^3]$ er en basis for $\mathbb{P}_3$ for ethvert $a \in \mathbb{R}$.
- **(b)** Find en formel for basisskiftmatricen for at skifte fra B_a til B.

9.3 For $A, B \in \mathbb{M}_{2,2}$ defineres kommutatoren

$$[A, B] = AB - BA \in \mathbb{M}_{2,2}.$$

I denne opgave vil vi også skrive $K_B(A) = [A, B]$ når vi tænker på B som fastholdt og $A \mapsto K_B(A)$ som en afbildning $\mathbb{M}_{2,2} \to \mathbb{M}_{2,2}$.

- **(a)** Vis at $K_B : \mathbb{M}_{2,2} \to \mathbb{M}_{2,2}$ er lineær for ethvert $B \in \mathbb{M}_{2,2}$
- **(b)** Beskriv $\mathrm{Ker}(K_B)$ når $B = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ for $a, b \in \mathbb{R}$. (Vink: svaret afhænger af om $a = b$ eller $a \neq b$.)
- **(c)** Vis at $B \in \mathrm{Ker}(K_B)$ for ethvert $B \in \mathbb{M}_{2,2}$, og brug dimensionsformlen til at konkludere at K_B ikke er surjektiv.