# Kapitel 9

# Rum-tiden og Speciel Relativitetsteori

En begivenhed (en event) beskrives ved et punkt i rumtiden: når noget sker, så sker det til et tidspunkt og det sker et sted. Rumtiden er derfor den enorme samling af steder og tider, hvor noget i princippet kan ske. Vi kan afbilde rumtiden med rum ud ad x-aksen og tid op ad y-aksen. Det er altså en 2-dimensional figur, for i første omgang kigger vi bare på 1 rumlig dimension. Vi ved godt at der faktisk er 3 rumlige dimensioner, men det er så svært at tegne 4-dimensionelle figurer.

Lad os overveje hvordan bevægelse ser ud i rumtiden. Hvis vi forestiller os en partikel der ligger stille, så vil dens verdenslinie (worldline) være en helt lige vertikal linie (fordi tiden går). Hvis du istedet har en partikel der bevæger sig med konstant hastighed ud ad x-aksen, så kan vi afbilde dens verdenslinie, som en ret linie der går op til højre.

Tegn disse 2 muligheder for dig selv her i margen. Tegn også verdenslinien for en partikel der starter i ro, og derefter accelererer langs x-aksen?

Man kunne også have besluttet sig for at tegne rum-tiden anderledes, f.eks ved at tegne tiden langs $x$-aksen. Det giver godt mening, for i Danmark skriver vi fra venstre mod højre, så tidslig udvikling kan ses fra venstre til højre. Prøv at lave et sådant *omvendt* rum-tids diagram, og indtegn to partikler, en der ligger stille, og en der bevæger sig med konstant hastighed.
I hvilket rum-tids diagram svarer hastigheden af partiklen til hældningen af linien, i det normale eller i det omvendte? I resten af disse noter vil vi lade tiden gå opad $y$-aksen.

På Newtons tid tænkte man at rumtiden havde bestemte egenskaber, nemlig

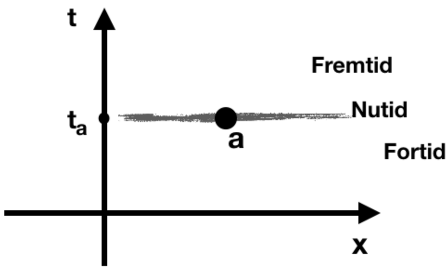
- Tiden er absolut. Hvis en observatør ser, at 2 begivenheder sker samtidig, så vil alle andre observatører være enige.
- Lysets hastighed afhænger af observatørens egen bevægelse.
- En observatør kan bevæge sig vilkårligt hurtigt.

Figur 9.1: Isaac Newton. Kilde: Universal History Archive.

> Vi ved, at der nok bliver ændret i vores forståelse af rumtiden, når vi lidt senere begynder at tale om Einstein, men overvej lige om nogle af ovenstående 3 egenskaber måske kan overleve.

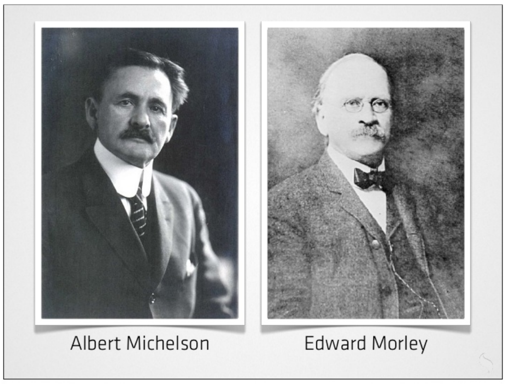
Tænk på en begivenhed **a** som sker til tiden $t_{\mathbf{a}}$. Vi kan i det Newtonske billede dele hele rumtiden op i 3 områder.

- Fortid i forhold til $t_{\mathbf{a}}$: alle begivenheder, hvor der gælder $t < t_{\mathbf{a}}$.
- Nutid i forhold til $t_{\mathbf{a}}$: alle begivenheder, hvor der gælder $t = t_{\mathbf{a}}$.
- Fremtid i forhold til $t_{\mathbf{a}}$: alle begivenheder, hvor der gælder $t > t_{\mathbf{a}}$.




Figur 9.2: Rumtiden som set på Newtons tid (ca 1687). Kausalitet gør at man kan dele rumtiden op i 3 områder. Der er ingen grænser for, hvor hurtigt information kan bevæge sig, så alle punkter i fortiden kan sende information til alle punkter i fremtiden.

> Nu har vi kun tegnet 1 dimension i rummet, men hvis vi havde tegnet 2 rum-dimensioner (plus tiden), så ville stregen i figur 9.2 have været en plan. Hvordan ville det se ud, hvis vi kunne tegne 3 rum-dimensioner (plus tiden)?




Figur 9.3: Albert Michelson og Edward Morlley

## 9.1 Lysets hastighed

Vi ved jo at Jorden bevæger sig med ca 30 km/s rundt om Solen, og vi ved at Solen bevæger sig med ca 220 km/s rundt i vores Galakse. Der er flere målinger der indikerer at vores galakse bevæger sig med ca 600 km/s imod en stor samling af galakse-hobe der ligger langt væk.

I 1887 målte Michelson og Morley på lysets hastighed i forskellige retninger, for at måle hvor hurtigt Jorden bevæger sig igennem æteren. Det lykkedes dem ikke! Istedet måtte de konkludere, at lysets hastighed er den samme i alle retninger.

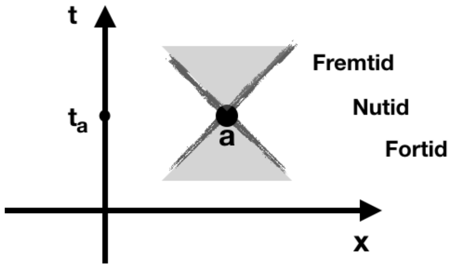
> Hvad sker der med vores rumtids-diagram, hvis information har en maximal udbredelses hastighed? Hvis vores observatør udsender lys i alle retninger klokken $t_{\mathbf{a}}$, hvilken del af rumtiden kan så modtage disse signaler? Og tilsvarende, hvilke dele af fortiden kan udsende signaler, så de kan nå frem til vores observatør?

Der er mange forskellige enheder for lysets hastighed. Du kunne vælge SI enheder m/s, og så er værdien $3 \times 10^8$. Du kunne også vælge enheder lysår/år, og så er værdien 1. Dette sidste kaldes relativistiske enheder. Når vi bruger relativistiske enheder så er alle hastigheder enhedsløse. Det er sjovt, for hastighed er jo rum divideret med tid. Hvis vi bruger sekunder som tids-enhed, og som afstand bruger vi den afstand lyset når på 1 sekund, kaldet et lys-sekund, så har vi effektivt at vi bruger sekund som enhed for afstand. F.eks kalder jeg 30 cm for et nano-sekund. På den måde bliver alle hastighederne enhedsløse. Ofte vil vi bruge $c = 1$, for det fremhæver symmetrien i flere af formlerne; men når vi skal bruge tal med SI enheder, så bruger vi altid $c = 3 \times 10^8$ m/s.

Jeg har på figur 9.4 prøvet at illustere rumtiden på Michelson og Morleys tid: de opdagede at den endelige lys-hastighed er den samme i alle retninger, men Einstein var endnu ikke kommet på banen. Der er egentlig ikke den store forskel på de to figurer 9.2 og 9.4. Fortid og fremtid er stadig absolutte størrelser, noget som alle observatører kan blive enige om.

Figuren er igen kun lavet for 1 rumlig dimension. Hvis vi laver figuren for 2 rumlige dimensioner udover den tidslige, så bliver det 2 kegler, hvis spidser mødes ved begivenhed **a**. Med 3 dimensioner plus tiden bliver det lidt vanskeligere at forestille sig, hvordan det ser ud.

Der er en række filosofiske aspekter, som i høj grad ledte Einstein til at tænke nye tanker.




Figur 9.4: Rumtiden på Michelson og Morleys tid (ca 1887). Den universelle tid gør stadig at man kan dele rumtiden op i 3 områder. Nu er det dog ikke muligt at sende beskeder fra alle punkter til alle punkter, da information (lys) har en endelig udbredelses hastighed.

Den første er, at en observatør er enten i hvile eller i bevægelse. Men hvordan kan man måle at en helt bestemt observatør virkelig er i hvile? Er Jorden i absolut hvile? Er vores galakse i absolut hvile? Hvad hvis vi lægger os i et rumskib, der er i hvile i forhold til den kosmiske baggrundsstråling? Og det direkte afledte spørgsmål er, findes der et absolut rum uafhængigt af alt stof og stråling? Eller er det måske alt stof i universet, der tilsammen skaber en slags struktur, som man kan være i hvile i forhold til?

Det andet filosofiske spørgsmål er, hvordan lysets hastighed kan være konstant? Hvis jeg sidder i et rumskib, der flyver med $v = 0.1c$ imod en stjerne, så måler jeg stadig at lyset fra stjernen bevæger sig med $c$ imod mig. Præcis som du måler fra Jorden.

Og sluttelig så stemmer Maxwells ligninger for elektrodynamik (som beskriver lys og ladede partikler) ikke overens med Galilei transformationer (som er grundlæggende for Newtonsk klassisk mekanik). Hvis Maxwells ligninger er rigtige, så er der noget fundamentalt galt med Galilei transformationerne og dermed med vores Newtonske billede af rum-tiden. Ifølge Maxwells ligninger så er lysets hastighed uafhængig af observatørens hastighed.

## 9.2 Speciel Relativitetsteori

Einstein publicerede sin imponerende artikel på tysk i 1905. Oversat var titlen "Om elektrodynamik af bevægede legemer". I simple termer siger han: hvad skal vi ændre i forhold til Galilei transformationerne, for at Maxwells ligninger er perfekte?

Allerede på første side siger han (frit oversat) "de resultater, vi udvikler her, har intet krav om *et absolut stationært rum* med specielle egenskaber". Mic drop! Han siger altså, at der slet ikke er noget absolut rum. Hvis det er rigtigt, så er alle de filosofiske overvejelser ovenfor løst.

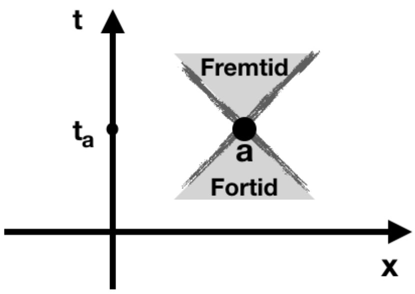
Til sine overvejselser måtte Einstein lave følgende antagelser

- Der er ikke nogen absolut tid. To observatører behøver derfor ikke være enige om begrebet samtidighed.

- Ingen information (ingen foton, ingen partikel, ingen observatør) kan bevæge sig hurtigere end lyset. Og lysets hastighed er en konstant. Med andre ord, så er lysets hastighed $c$ uafhængig af hvilken observatør, der måler den.

Figur 9.5: Albert Einstein, omkring år 1905

Prøv at gå tilbage til de 3 antagelser Newton lavede omkring rum-tiden, og se hvor mange af dem Einstein herved har fejet af bordet.




Figur 9.6: Rumtiden som den blev set efter Einstein (ca 1905). Kausalitet, såsom hvad der er fortid og fremtid, afhænger nu af observatøren.

Igen, med 2 rumlige dimensioner udover tiden bliver figuren med rum-tiden til 2 kegler, hvis spidser rammer i begivenhed **a**. Fotoner bevæger sig med lysets hastighed, så de bevæger sig langs keglerne (eller langs linierne på figur 9.6).

Hvis du har en partikel med inerti, som altid bevæger sig langsommere end lyset, hvor kan den så bevæge sig i figuren, hvis den er i punktet $a$ til tiden $t_a$?

## 9.3 Koordinat transformationer

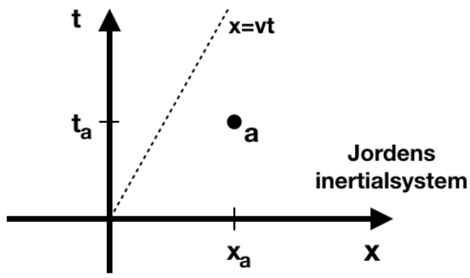
Lad os et øjeblik gå tilbage til rumtiden som set på Newtons tid. Vi vil se, hvordan man grafisk let ser, hvordan koordinat transformationer ser ud, blot ved at kigge på rumtiden.

Du betragter alle begivenheder fra et inertialsystem på Jorden. Det betyder, at du sidder stille på Jorden, og dermed følger med Jorden bevægelser. Hvis du ser en begivenhed, $a$, (f.eks at et lyn der slår ned i et træ ved siden af dig) beskriver du det med dine koordinater $(x_a, t_a)$.

Jeg sidder i et rumskib, som flyver med konstant hastighed $v$ i forhold til dig. Du vælger at kalde min position $x = 0$ når dit ur siger $t = 0$. Hvis du vil beskrive min bevægelse, så gør du det ved

$$x = vt\,. \tag{9.1}$$

Det er altså ligningen for min verdenslinie set i dit inertialsystem (se figur 9.7).




Figur 9.7: Det rumtids diagram der gælder for dig som en observatør i hvile i Jordens inertialsystem. Jeg bevæger mig med den konstante hastighed, $v$, i forhold til dit inertialsystem, så min verdenslinie kan du beskrive ved $x = vt$.

Hvis jeg ville beskrive min egen verdenslinie, så kan jeg gøre det i mit eget inertialsystem, ved $x' = 0$. Jeg sidder jo i hvile i mit eget koordinat system, for hele mit koordinat system følger med mig.

Vi ønsker at kunne transformere mellem koordinatsystemer, så hvis du ved, hvor og hvornår en begivenhed sker, hvordan kan du så udregne, hvor og hvornår det sker i mit koordinatsystem? Vi kan udnytte at ovenstående ($x' = 0$ og $x = vt$) er 2 forskellige måder at beskrive, hvor jeg er, og derved får vi en transformation mellem dit og mit inertialsystem

$$x' = x - vt\,. \tag{9.2}$$

På Newtons tid troede man som sagt på eksistensen af universal tid, hvilket giver os ligningen

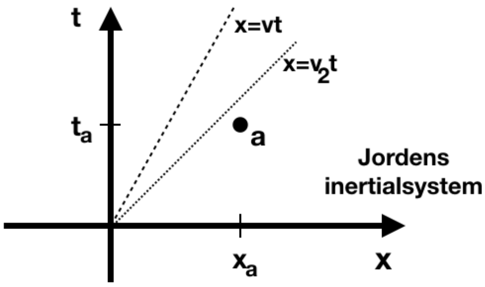
$$t' = t\,. \tag{9.3}$$

Læg mærke til at Galilei transformationerne ikke er symmetriske i $x$ og $t$: t er universel (transformerer ikke) hvorimod $x$ transformeres. Når vi kommer til Speciel Relativitetsteori så vil rum og tid blive blandet sammen. Da sker der også det at transformationerne bliver smukt symmetriske (op til faktorer af lysets hastighed, $c$).

Vis at de omvendte transformationer kan skrives som

$$t = t', \tag{9.4}$$
$$x = x' + vt'. \tag{9.5}$$

Hvis vi har en fælles veninde, som bevæger sig med hastigheden $v_2$ i forhold til dig, hvordan ser jeg så hendes bevægelse?




Figur 9.8: Rumtids diagram set fra Jordens inertialsystem. Jeg bevæger mig med den konstante hastighed $v$ i forhold til dig. Vores veninde bevæger sig med den konstante hastighed, $v_2$, i forhold til dig. Spørgsmålet er, hvordan finder vi hendes bevægelse i forhold til mig?

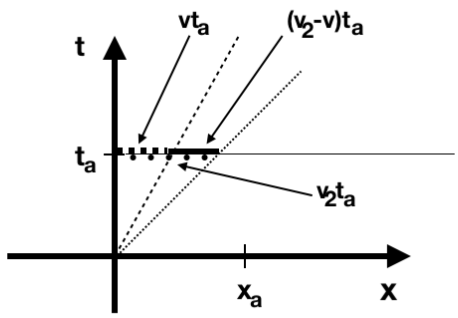
Vi kan naturligvis regne det ud, for hendes bevægelse set i dit inertialsystem (se figur 9.8) giver $x = v_2 t$, hvis vi antager at hun var i $x = 0$ klokken $t = 0$. Nu bruger vi bare transformationsreglerne fra oven ($x = x' + vt'$ og $t = t'$), til at finde $x' + vt' = v_2 t'$, hvilket vi kan omskrive til

$$x' = (v_2 - v)\, t', \tag{9.6}$$

hvor $x'$ er rummet set fra min synsvinkel, og $t'$ er tiden målt i mit bevægede koordinatsystem. Fra min synsvinkel flyver hun altså afsted med hastigheden $v_2 - v$. Dette viser det store problem med disse Galilei transformationer, for hvad hvis vores veninde er en foton, så ville hendes hastighed afhænge af, hvem der observerer hende. Og det er i modstrid med Michelson & Morleys målinger. Du kan lige overveje om noget ændres når hun bevæger sig langsommere end dig, eller måske ligefrem i den modsatte retning.

På Newtons tid var rumtiden helt uafhængig af om observatøren bevæger sig eller ej, så derfor kan vi direkte aflæse dette resultat i ligning (9.6) fra vores rumtids diagram. I figur 9.9 har vi gentaget figur 9.8, men denne gang har vi skrevet direkte, hvor langt hvert enkelt linie stykke er. Fra denne figur kan vi direkte aflæse resultatet i ligning (9.6).

Overbevis dig selv om, at ovenstående argument giver det korrekte. Hvad tror du der ville ske, hvis vi nu ikke kunne antage universal tid?




Figur 9.9: Du sidder i hvile i Jordens inertialsystem, og du ser at jeg bevæger mig mod højre med hastigheden $v$. Samtidig ser du at vores veninde bevæger sig til højre med hastigheden $v_2$. Hendes $x$-koordinat kan derfor beskrives ved $x_2 = v_2 t$. Ved direkte aflæsning på figuren ser vi, at vores veninde bevæger sig med hastigheden $v_2 - v$ i forhold til mig.

## 9.4 Samtidighed

Rumtiden indeholder information om al fortid og al fremtid, samlet i en lille figur. Hvis du sidder i dit hvilesystem og ser en begivenhed ske klokken $t_a$ på stedet $x_a$, så kan du tegne en kurve i rumtiden, der viser hvilke andre punkter i rumtiden, der er samtidige med denne begivenhed

> Tegn den linie i rumtiden der viser samtidighed med en begivenhed til tiden $t_a$. Hint: det er ok at kigge på figur 9.2.

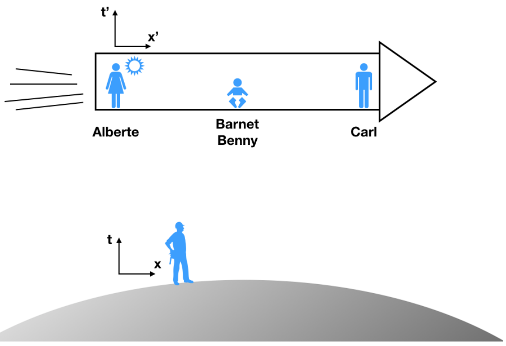
Men hvad sker der, hvis vi kigger på den samme begivenhed fra mit bevægede koordinatsystem? Vil samtidighedskurven stadig være en helt ret horizontal linie?

Lad os betragte 3 observatører i et bevæget rumskib. Carl sidder forrest i rumskibet, barnet Benny sidder lige i midten, og Alberte sidder helt nede i bagenden. De har brugt en masse tid og kræfter på at sikre at Benny virkelig sidder lige præcis i midten, og at alle deres ure er synkroniserede.

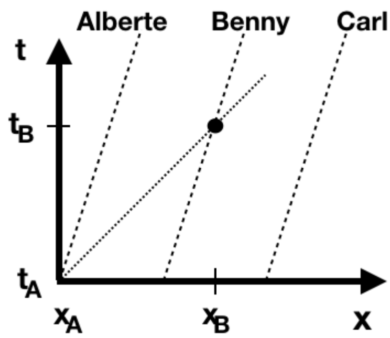
Når klokken præcis er $t' = 0$ i rumskibets koordinat system, så er Alberte tilfældigvis præcis i nulpunktet for Jordens koordinatsystem, og det tidspunkt bruger vi på Jorden til at synkronisere alle vores ure der til $t = 0$. Præcis klokken $t' = 0$ udsender Alberte et lys signal.

Vi er ude efter at forstå, hvad *samtidighed* på rumskibet vil sige. Efter et kort stykke tid ankommer lyssignalet fra Alberte hen til Benny. Og præcis på samme tid kommer et andet lyssignal til Benny fra den anden side, som Carl har udsendt. Benny fortæller at de 2 lyssignaler kom samtidig hen til ham. Og da Alberte og Carl er præcis lige langt væk fra Benny, så vil de konkludere, at de 2 lyssignaler må være udsendt samtidig. Lad os finde ud af, hvornår Carl udsendte lyssignalet. Vi ved jo godt at han udsendte det samtidig med Alberte set fra en passager på rumskibet, men hvornår udsendte han signalet set fra Jorden?

Når vi ser på figur 9.11, ser vi rumtiden set fra den stationære Jords hvilesystem. De 3 rejsende er lidt rumligt forskudt, men de rejser med samme hastighed (derfor er hældningerne af de 3 stiplede linier ens). Alberte udsendte lyssignalet (den prikkede linie) klokken $t_A = 0$, og vi kan se at signalet ankommer til Benny klokken $t_B$. Vi kan også se at Benny modtager




Figur 9.10: 3 observatører i et bevæget koordinatsystem. De 2 inertialsystemer er samfaldende, $x' = 0$ og $x = 0$, klokken $t' = 0$. Alberte udsender et lyssignal klokken $t' = 0$, som senere vil blive observeret midt i rumskibet af barnet Benny.



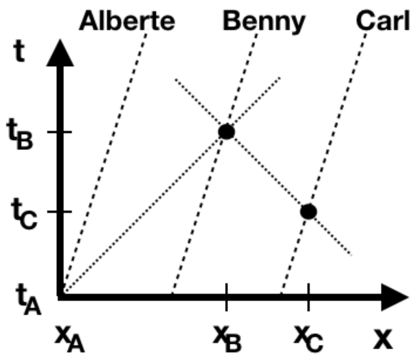

Figur 9.11: Rumtiden set fra Jordens hvile system. De 3 personer i rumskibet bevæger sig med samme hastighed, derfor har deres verdenslinier samme hældning. En foton bevæger sig langs den stiplede prikkede, med hældning 45 grader.

signalet på stedet $x_B$. Altså altsammen anskuet fra Jorden.

> Hvordan kan vi grafisk finde ud af, hvornår Carl udsendte et lyssignal, som præcis ankommer til Benny klokken $t_B$? Med andre ord, tegn en ekstra linie på figur 9.11 som viser en foton der kommer fra højre og går igennem punktet $(x_B, t_B)$. Hint: hvis en foton der bevæger sig mod højre har hældning 45 grader i rumtids diagrammet, og en foton der bevæger sig mod venstre har hældning $-45$ grader, så står de 2 fotoners verdenslinier vinkeltrette på hinanden i rumtids diagrammet.

Hvis vi kigger på rumtidsdiagrammet 9.12, så ser vi at begge lyssignaler rammer Benny klokken $t_B$ i punktet $x_B$. Diagrammet er jo tegnet i Jordens hvilesystem, og det viser altså, at de 2 punkter som Alberte, Benny og Carl kalder samtidige, nemlig punkterne $(t_A, x_A)$ og $(t_C, x_C)$, bestemt ikke ligger på en horiontal linie. Vi kan derfor forstå at begrebet samtidighed ændres når vi går fra et hvilesystem til et bevæget koordinatsystem.

Nu vi har forstået, hvordan samtidighedspunkter fremkommer i rumtidsdiagrammet, så




Figur 9.12: Et rumtids diagram set fra Jordens hvilesystem. De 3 rumskibsrejsende er forskudt i rummet, men de bevæger sig med samme hastighed. De 2 prikkede linier er fotoner der rammer Benny på præcis samme tidspunkt. Den ene er udsendt af Alberte i punktet $0, 0$, og den anden er udsendt af Carl i punktet $(x_C, t_C)$. Vi husker at set fra rumskibet så bliver disse 2 signaler udsendt præcist samtidig.

kan vi udlede, hvordan den tilsvarende kurve ser ud. Det vil sige, hvis folk i rumskibet siger at en række begivenheder er samtidige, hvordan ser den kurve så ud tegnet i Jordens hvilesystem? Lad os regne det hele i Jordens inertialsystem, hvor de 3 stiplede linier i figur 9.12 opfylder

$$x = vt\,, \quad \text{Alberte}\,, \tag{9.7}$$
$$x = vt + \alpha\,, \quad \text{Benny}\,, \tag{9.8}$$
$$x = vt + 2\alpha\,, \quad \text{Carl}\,. \tag{9.9}$$

Vi ved ikke hvor langt de 3 personer er fra hinanden i rumskibet, så den indbyrdes afstand kalder vi bare $\alpha$. Lyset bevæger sig langs de prikkede linier, med ligning $x = ct$. Hvis vi bruger relativistiske enheder kan vi skrive det som $x = t$. Pas på! Fra nu af bruger jeg ofte relativistiske enheder, så du skal engang imellem huske at putte faktorer af lysets hastighed ind. Punktet $(t_B, x_B)$ kan findes som skæring mellem linierne $x = t$ og ligning (9.8). Check på figur 9.12 at det er rigtigt.

Vis at dette giver

$$t_B = \frac{\alpha}{1-v} \quad \text{og} \quad x_B = \frac{\alpha}{1-v}\,. \tag{9.10}$$

Linien for den anden foton er lidt vanskeligere at finde. Vi ved, at den må stå vinkelret på den første foton, så den må have formen (overvej lige hvorfor det)

$$x + k = -t\,, \tag{9.11}$$

hvor $k$ er en konstant vi skal finde nu.

Brug at vi ved at punktet $(t_B, x_B)$ ligger på den anden fotons linie til at finde konstanten $k$ og dermed at vise at den anden fotons linie har formen

$$x + t = \frac{2\alpha}{1-v}\,. \tag{9.12}$$

Det er nu ligeud ad landevejen at finde hvor linierne (9.12) og (9.9) skærer hinanden (se på figur 9.12 hvorfor det er så interessant).

Vis at dette sker ved

$$t_C = \frac{2\alpha v}{1-v^2} \quad \text{og} \quad x_C = \frac{2\alpha}{1-v^2}\,. \tag{9.13}$$

Hvis rumskibet ligger stille, dvs $v = 0$, så er $t_C = 0$, hvilket vil sige at samtidighed på Jorden og i rumskibet er det sammen. Men for alle andre hastigheder så er samtidighedsbegrebet forskelligt.

Hvad er hældningen af samtidighedslinien, altså mellem origo og punktet $(x_C, t_C)$? Og mind dig selv om, hvad den fysiske betydning af den linie er.

Prøv at lave et nyt rumtidsdiagram i Jordens inertialsystem med 3 linier. Den ene er Albertes verdenslinie, en verdenslinie for fotoner udsendt i origo, og den sidste er samtidighedslinien for rumskibet (svaret kommer nedenfor, men prøv først selv at tegne det her i marginen).

De 3 linier vi taler om i boblen ovenfor er følgende

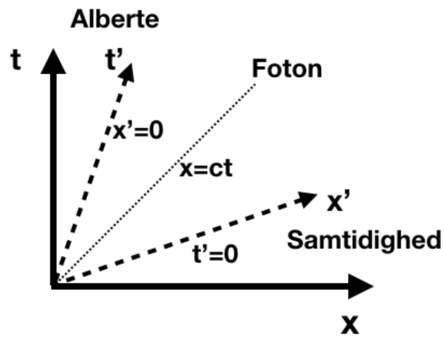
$$x = vt\,, \quad \text{Alberte}\,, \tag{9.14}$$
$$x = t\,, \quad \text{Foton}\,, \tag{9.15}$$
$$x = \frac{t}{v}\,, \quad \text{Samtidighed}\,. \tag{9.16}$$

Se engang den smukke symmetri, det er jo næsten til at få tårer i øjnene over.

Man kunne selvfølgelig vælge at genindføre lysets hastighed, $c$, i formlerne, og så ville de se sådan ud

$$x = vt\,, \quad \text{Alberte}\,, \tag{9.17}$$
$$x = ct\,, \quad \text{Foton}\,, \tag{9.18}$$
$$t = vx/c^2\,, \quad \text{Samtidighed}\,. \tag{9.19}$$

Tag lige et ekstra tilbageblik på ligningerne (9.15-9.16). Man kunne godt blive lidt bekymret, for det ser ud til at der er noget galt med enhederne. Men her husker vi på at ligning (9.16) kommer fra boblen ved ligning (9.13) hvor vi jo har brugt $c = 1$. Istedet når vi genindfører lysets hastighed i ligning 9.19 ser vi at alt er i skønneste orden.




Figur 9.13: Rumtids diagram i Jordens inertialsystem. De mærkede akser viser rumskibet som bevæger sig med den konstante hastighed $v$ til højre. $x' = 0$ er origo i det bevægede system, og $t' = 0$ er samtidighedslinien for det bevægede system.

Lad os igen kigge på linierne (9.14 – 9.16). Vi har plottet dem i figur 9.13, hvor Albertes linie repræsenterer et fast punkt i det bevægede reference system ($x' = 0$). Tilsvarende repræsenterer $t' = 0$ alle samtidige punkter i det bevægede koordinat system.

Vi ser, at denne figur er smukt symmetrisk. De 2 linier, Alberte og Samtidighed, har den samme vinkel med deres nærliggende akse. Og de har samme vinkel til fotonens verdenslinie.

Prøv at plotte disse 3 linier, eqs. (9.14 – 9.16) når det bevægede system bevæger sig med hastigheder der nærmer sig lysets. Vis også at når hastigheden går mod nul, så ser det bevægede inertialsystem ud som Jordens hvilesystem.

**Lidt filosofisk**

Hvis du kigger på rumtiden i dit hvilesystem, så ser du, at dit koordinat system og din samtidighedslinie er vinkelrette. Rum og tid fremstår virkelig uafhængige hinanden, så det giver god mening. Men hvis du kigger på det, jeg kalder mit koordinatsystem (jeg sidder i et bevæget rumskib) og det, jeg kalder min samtidighedslinie, så er de ikke vinkelrette på hinanden set fra dit hvilesystem. Rum og tid er blevet blandet sammen. Med Minkowski's berømte sætning: "Henceforth space by itself, and time by itself, are doomed to fade away into mere shadows, and only a kind of union of the two will preserve an independent reality."

Det er værd lige at tage et minut og minde os selv om, hvad figur 9.13 viser. Figuren er tegnet i Jordens inertialsystem. Det vil sige, hvis du sidder i origo på Jorden, så har din verdenslinie formen $x = 0$. Det er præcist sammenfaldende med $t$-aksen. Din samtidighedslinie er en horizontal streg, og den har formen $t =$ konstant. Og hvis vi f.eks kigger på $t = 0$, så er din samtidighedslinie sammenfaldende med $x$-aksen. Samtidig indtegner vi de tilsvarende 2 linier for mit bevægede inertialsystem. De er givet ved mine koordinater $x' = 0$ og $t' = 0$. De beskriver altså mit origo og min opfattelse af samtidighed. Den sidste ting vi er interesserede i er fotoner. Set fra Jordens inertialsystem bevæger alle fotoner sig med lysets hastighed, hvilket er den prikkede linie beskrevet ved $x = ct$. Den fundamentale antagelse bag Einsteins hypotese er, at set fra rumskibets inertialsystem har fotoner stadig lysets hastighed, hvilket er beskrevet ved $x' = ct'$. Og disse 2 foton linier er samfaldende på figuren.

Figur 9.14: Hele denne smukke grafiske/matematiske beskrivelse vi benytter i disse noter var langt hen ad vejen udledt af Hermann Minkowski i 1908. Det vi kalder SpaceTime kaldes også ofte for Minkowski rummet.

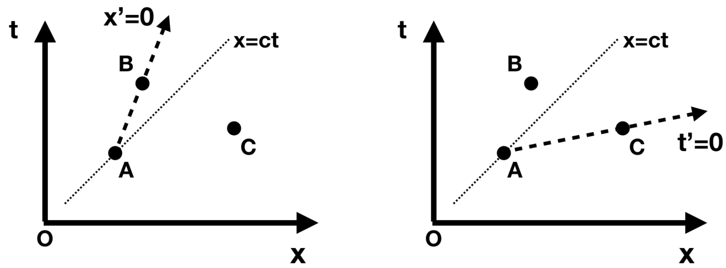
Jeg bevæger mig til højre med den konstante hastighed $v$ i forhold til dig. Figur 9.13 viser rumtids diagram set i Jordens inertialsystem. Tegn det tilsvarende diagram set i rumskibets inertialsystem.

### 9.4.1 Hvad skete først?

Vi griber nu fat i kausalitets princippet, som siger, at når begivenhed1 er skyld i begivenhed2, så ser alle observatører at begivenhed1 sker før begivenhed2. Når 2 begivenheder sker samme sted i rummet, så er det trivielt at finde rækkefølgen af begivenheder. Men hvad når 2 begivenheder sker forskellige steder i rummet?

Vi har set, at begrebet samtidighed (og dermed rækkefølge) afhænger af, hvilket inertialsystem vi observerer fra. Det kan ske at når 2 lyn slår ned, så siger du, at det ene lyn slår ned i punktet A, før det andet lyn slår ned i punktet B, mens jeg i mit bevægede inertialsystem siger, at lynet ved B slår først ned. Kan vi nogensinde blive enige om, hvilken begivenhed der kom først? Og et tilsvarende spørgsmål er, om det altid vil være muligt at finde et inertialsystem, hvor der er byttet rundt på rækkefølgen? Vi vil nu finde præcist hvad der skal være opfyldt for at alle observatører er enige om, at begivenhed1 kom før begivenhed2.

Forestil dig at vi har 2 vilkårlige begivenheder i rumtiden, A og B. Vi tegner rumtids diagrammet i dit inertialsystem. Vi kan altid slå en linie gennem disse 2 punkter, og vi kan altid finde hældningen af linien. Og der er kun 3 muligheder for hældning: den er større end, mindre end, eller lig med 45 grader i forhold til $x$-aksen.




Figur 9.15: Vi kan altid lave en ret linie mellem 2 vilkårlige punkter i rumtiden. Og liniens vinkel i forhold til $x$-aksen er enten større end, mindre end, eller lig med 45 grader.

Se på venstre panel i figur 9.15. Mellem punkterne A og B er linien stejlere end den prikkede linie med $x = ct$. Det vil derfor sige, at vi kan finde et inertialsystem, der bevæger sig med præcis den hastighed, der gør, at både begivenhed A og B ligger i samme punkt i rummet for en observatør i det bevægede rumskib. Sådanne begivenhedspar kalder man timelike, for der er mere tid imellem de 2 begivenheder end der er rum.

Omvendt, i højre panel i figur 9.15 ser vi, at linien mellem begivenheder A og C har en hældning, der ligger under den stiplede linie. Vi kan derfor finde et bevæget inertialsystem sådan, at den linie er rumskibets samtidighedslinie, hvilket vil sige at for observatøren i rumskibet sker begivenheder A og C samtidig. Sådanne begivenheder kalder man spacelike, for der er mere rum imellem dem end der er tid.

For nogle helt specielle begivenhedspar sker det, at linien der forbinder dem har hældningen 45 grader. Sådanne begivenhedspar kalder man light-like, for lyset har altid 45 grader i rumtids diagrammer.

> Tegn et rumtidsdiagram med et begivenhedspar A og C med en indbyrdes hældning på ca 20 grader. Det svarer lidt til højre panel i figur 9.15. Set fra Jordens hvilesystem, hvilken begivenhed kommer først, A eller C? Indtegn et nyt inertialsystem på samme figur, der bevæger sig så hurtigt, at dets samtidighedslinie har hældning 35 grader. Set i dette inertial system, hvilken begivenhed kommer først, A eller C?

Som du forstod fra ovenstående box, så kan vi aldrig blive enige om rækkefølgen af begivenheder (kausalitet) for spacelike begivenhedspar. Omvendt, for timelike begivenhedspar er vi altid enige om, hvilke begivenhed der kom først, for vi kan ikke lave et inertialsystem der har en samtidighedslinie med hældning større end 45 grader.

> For time-like begivenhedspar kan vi finde et inertialsystem, hvor de 2 begivenheder ligger i samme punkt i rummet. Kan man sige noget tilsvarende for space-like begivenhedspar?

### 9.4.2 Lysets hastighed og symmetri i rum-tiden

Hvis du sidder i dit hvilesystem og observerer lyset der bevæger sig, så ser du at det følger linien $x = t$ (vi bruger enheder hvor $c = 1$). I mit bevægede koordinat system bevæger lyset sig stadig med lysets hastighed ifølge alle observationer. Og det betyder derfor at $x' = t'$. Det lyder så simpelt, men vi gentager det lige, for vi får brug for det senere

$$\text{if} \quad x = t \quad \text{then} \quad x' = t' \,. \tag{9.20}$$

I ord betyder det, at lysets hastighed er lysets hastighed.

Du kan selv gange lysets hastighed ind i ovenstående, hvis du bedre kan lide det. Du kan også forestille dig alle mulige bevægede koordinatsystemer, og du ser at da de 2 linier $x' = 0$ og $t' = 0$ har samme vinkel til $x = t$, så for højere og højere hastigheder, bliver linien $x = t$ klemt inde imellem de 2 linier $x' = 0$ og $t' = 0$.

## 9.5 Lorentz tranformation

Når vi har 2 inertial systemer som bevæger sig i forhold til hinanden, så skal vi bruge nogle transformationsligninger til at komme fra en beskrivelse i det ene system til det andet. Disse kaldes Lorentz transformationer. Du kan udlede Lorentz transformationer på mange måder. Én er at spørge hvilke transformationer der holder Maxwells ligninger invariante. En anden er at spørge hvad de smukke symmetrier af rum-tid betyder for fortolkningen af begivenheder: En begivenhed kan enten beskrives ved et punkt i dit hvilesystem, eller den kan beskrives ved et punkt i mit bevægede system. Uanset hvad, så er det den samme begivenhed, og derfor må der være en måde at transformere det punkt i dit hvilesystem, $(t, x)$, til et punkt i mit bevægede system, $(t', x')$.

Tegn et rumtidsdiagram, og indtegn alle de linier (og deres ligninger) der er relevante for udledningen nedenfor.

Kig på den linie der beskriver origo i mit koordinatsystem. Vi kan enten beskrive den ved $x' = 0$ eller ved $x = vt$. Med andre ord gælder der, at når $x' = 0$ så er $x = vt$. Det skriver vi lige ud

$$\text{if} \quad x' = 0 \quad \text{then} \quad x - vt = 0 \,. \tag{9.21}$$

Vi vil kræve at transformationer i rum-tiden mellem koordinatsystemer er lineære. Det vil sige, hvis jeg skriver $x' = F(x, t)$, så skal $F(x, t)$ være liniær i både $x$ og $t$. Med Galilei transformationer var det hele fint, for da gælder

$$x' = x - vt \,, \tag{9.22}$$

men helt generelt kan højresiden ganges med en vilkårlig og ukendt funktion af hastigheden (for det ændrer ikke på at vi antager linearitet og homogenitet i rum og tid)

$$x' = (x - vt)\, \tilde{h}(v) \,. \tag{9.23}$$

Vi gentager lige os selv: ligning (9.23) fremkommer ved at sige at $x' = 0$ medfører at $x = vt$, samtidig med at vi kræver at transformationen er lineær i både rum og tid.

Denne transformation i ligning (9.23) kan ikke afhænge af om jeg tilfældigvis bevæger mig mod højre eller venste, så denne funktion kan ikke afhænge af fortegnet på hastigheden. Med andre ord, da der ikke er nogen foretrukken retning i rummet, så må der gælde

$$x' = (x - vt)\ h(v^2)\,. \tag{9.24}$$

Lad os nu på helt analog måde betragte min samtidigheds linie. Den kan enten beskrives ved $t' = 0$ eller ved $t = vx$. Der må derfor gælde (med samme argumentation som ovenfor) at

$$t' = (t - vx)\ k(v^2)\,, \tag{9.25}$$

hvor vi endnu ikke kender funktionen $k(v^2)$, og specielt ved vi ikke om den er anderledes end funktionen $h(v^2)$. Lad os finde ud af det. Til det formål bruger vi, at lysets hastighed er $c$ både set i dit og i mit inertialsystem. Det vil specielt sige, at for lys gælder eq. (9.20).

Hvis vi indsætter eq. (9.20) i ligning 9.24 får vi $t' = (t - vx)\ h(v^2)$, hvilket sammenlignet med ligning 9.25 betyder at $h(v^2) = k(v^2)$.

Det er værd lige at notere sig den ekstreme grad af symmetri i rum-tiden vi ser her, nemlig at ikke alene er vinklerne de samme mellem linierne $x' = 0$ og $x = 0$, og $t' = 0$ og $t = 0$, men også at transformationerne (hvor meget linierne bliver strukket) fra $t = 0$ til $t' = 0$ er identiske med transformationerne fra $x = 0$ til $x' = 0$.

Ok, tilbage til udledningen af Lorentz transformationer. Det sidste skridt er at bruge vores fysiske forståelse af sammenhæng mellem reference systemer. Vi har skrevet disse transformationer op, ligninger (9.24, 9.25) når vi bruger at jeg bevæger mig til den ene side med hastigheden $v$, men vi kunne have skrevet den op ved at sige at du istedet bevæger dig den anden vej med hastigheden $-v$.

Overbevis dig selv om, at det ville føre til følgende ligninger

$$x = (x' + vt')\ h(v^2)\,, \tag{9.26}$$
$$t = (t' + vx')\ h(v^2)\,, \tag{9.27}$$

hvor funktionen $h(v^2)$ er identisk med funktionen i ligningerne (9.24, 9.25)

Nu har vi 4 ligninger, nemlig (9.24,9.25,9.26,9.27).

Start med eq. (9.24) og indsæt ligningerne (9.26, 9.27), og vis at du dermed får

$$h = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}\,. \tag{9.28}$$

Nu har vi altså fundet den vigtige funktion af hastigheden, som vi har brug for i alle transformationer mellem inertialsystemer. Denne Lorentz-faktor kaldes normalt for $\gamma$ (gamma), så det gør vi også fra nu af, dvs $\gamma(v^2) = h(v^2)$. Ofte skrives den bare som funktion af $v$, nemlig $\gamma(v)$.

Plot $\gamma(v)$, både for positive og negative hastigheder.

Til fremtidig reference samler vi lige koordinat transformationerne her. Til venstre med enheder $c = 1$, og til højre hvor vi genindfører lysets hastighed, $c$,

$$t' = \gamma\,(t - vx) \quad , \quad t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) , \tag{9.29}$$

$$x' = \gamma\,(x - vt) \quad , \quad x' = \gamma\,(x - vt) , \tag{9.30}$$

$$t = \gamma\,(t' + vx') \quad , \quad t = \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right) , \tag{9.31}$$

$$x = \gamma\,(x' + vt') \quad , \quad x = \gamma\,(x' + vt') , \tag{9.32}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} \quad , \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} . \tag{9.33}$$

Der gælder samtidig at $y' = y$ og $z' = z$, for forestil dig at jeg bevæger mig langs $x$-aksen forbi dig i en arms længde langs $z$-aksen. Hvis vi begge har strakt arm, så kan vi hurtigt blive enige om, hvorvidt den ene eller den anden rammer hinanden med den udstrakte arm. $y$ og $z$ aksen kan derfor ikke have transformationer (ligesom $x$ har), som ville afhænge af, hvilket inertialsystem vi ville lave udregningen i.

Vi har ovenfor fundet de transformationsligninger der skal bruges, når vi vil beskrive en event fra en bevæget koordinatsystem. Se igen kort på udligningen ovenfor: Den er eksakt. Der er ingen rækkeudvikling eller forsimplende antagelser undervejs. Så medmindre der er noget galt i vores antagelser (samme lyshastighed, lineær sammenhæng), så er der ikke mere at komme efter, og der vil aldrig komme korrektioner til disse Lorentz transformationer [1].

## 9.5.1 Lorentz transformationer igen

Ovenstående udledning af Lorentz transformationerne er uden tvivl den smukkeste der findes. Men alle personer er forskellige, og nogle foretrækker måske en mere direkte/geometrisk udledning. Vi vil derfor følge en mere klassisk lærerbogs udledning af Lorentz transformationerne i dette afsnit.

Vi betragter 2 inertialsystemer, nemlig S hvor vi står i ro, og et andet system $S'$ der bevæger sig med farten $v$ ud ad den positive $x-$akse, og deres origines er samfaldende klokken $t = t' = 0$. Det faktum at $y' = y$ og $z' = z$ blev forklaret i sidste afsnit.

Den mest generelle transformation af en event mellem disse koordinatsystemer er af formen

$$x' = Ax + Bt \tag{9.34}$$

$$y' = y \tag{9.35}$$

$$t' = Cx + Dt\,, \tag{9.36}$$

Hvis vi havde inkluderet ikke-lineære led i ovenstående, så ville man kunne måske finde acceleration set fra det ene koordinat system, men konstant hastighed set fra et andet.

[1] At sige at noget ikke kan lade sig gøre er som at vifte en rød klud foran hovedet på en fysiker. Du kunne vælge at generalisere udledning ovenfor, f.eks ved $x' = (x - vt)^{g(v^2)} h(v^2)$. Sålænge at $g(v^2)$ opfylder de korrekte grænsebetingelser, e.g. $g(v^2) = 1 + \epsilon v^2$ (og vi passer på med enheder), så er det ligeud af landevejen at udlede at vi derved finder $\gamma = 1/\sqrt{(1 + \epsilon v^2)(1 - v^2)}$. Der er lavet imponerende mange eksperimenter for på den måde at sætter experimentelle begrænsninger på værdien af $\epsilon$.

Ved at betragte forskellige situationer vil vi nu udlede de 4 konstanter $A, .., D$ ovenfor.

**1.** Hvad er koordinaterne for S? Set fra S er det (naturligvis) givet ved $(x = 0, t = t)$. Set fra S' er det $(x' = -vt', t' = t')$. Hvis vi sætter dette ind i ligningerne (9.34) og (9.36) så får man $B = -vD$ (check at det er korrekt).

**2.** Hvad er koordinaterne for S'? Set fra S' er det $(x' = 0, t' = t')$. Set fra S er det $(x = vt, t = t)$. Sætter man dette ind i ligningen (9.34) giver det: $B = -vA$.

Vi kan lige lave en lille mellemregning med de 2 resultater ovenfra, og vi ser at $A = D$.

**3.** Hvis vi udsender et lyssignal langs x-aksen fra origo klokken $t = 0$ (som også betyder at $t' = 0$ ved lysudsendelsen), så kan dette lyssignal senere observeres langs x-aksen ved de følgende koordinater. Set fra S, $(x = ct, t = t)$. Set fra S', $(x' = ct', t' = t')$. Dette er fordi lys altid udbreder sig med lysets hastighed, uanset hvilket koordinatsystem det observeres fra. Vi kan nu kombinere (gør det) ligningerne (9.34) og (9.36) til at se at $ct' = ctA + Bt$ og $t' = ctC + Dt$. Sammenholdt med resultatet fra før ser vi at $C = -\frac{v}{c^2}A$.

**4.** Hvis vi udsender et lyssignal langs y-aksen fra origo klokken $t = 0$ (som også betyder at $t' = 0$ ved lysudsendelsen), så kan dette lyssignal senere observeres ved de følgende koordinater. Set fra S, $(x = 0, y = ct, t = t)$. Set fra S', $(x = -vt', y' = \sqrt{(ct)^2 - (-vt')^2}, t' = t')$. Vi kan indsætte i ligningerne (9.34) og (9.35) og ser at $D = 1/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, dvs $D = \gamma$.

Du skal nu tage vores resultater fra disse små udregninger og finde transformationerne (9.34-9.36). Check at vi faktisk har præcis det samme resultat som i ligningerne (9.29) og (9.30).

## 9.6 Længde kontraktion

Hvad vil det egentlig sige at måle en afstand mellem 2 punkter? Hvis vi måler en pind, der ligger stille, så er det oplagt; men hvis vi måler en pind, der bevæger sig, så er det vigtigt at vi måler positionen af de 2 endepunkter til samme tidspunkt.

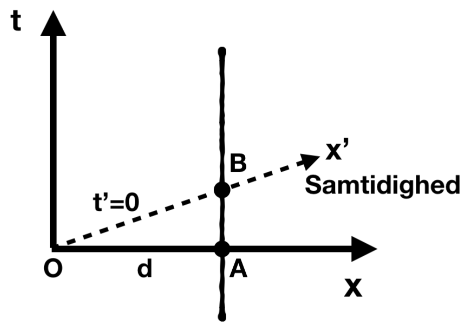
> Lad os sige at du vil måle længden af en pind, der bevæger sig. Hvad ville du finde, hvis du måler pindens endepunkter til forskellige tidspunkter?

Vi har jo set at begrebet samtidighed afhænger af observatørens bevægelse. Lad os sige, at jeg bevæger mig, mens du står stille. Vi kan derfor forvente, at hvis du og jeg begge skal måle længden af den samme pind, så taler vi faktisk om 2 forskellige ting. Du taler om afstanden mellem 2 punkter langs din samtidighedskurve, mens jeg taler om nogle andre punkter i rum-tiden, nemlig langs min samtidighedskurve. Lad os nu blive konkrete.

Lad os indtegne en pind med længde $d$, som ligger stille i Jordens hvilesystem i figur 9.16. Længden er målt i pindens eget hvilesystem, så $d$ kaldes pindens egen-længde.

> Gør det klart for dig selv hvilken af de 2 linier, $x$ og $x'$ der er samtidighedslinie i Jordens hvilesystem, og hvilken er i det bevægede inertialsystem.

I Jordens hvilesystem ligger pindens endepunkter altid i origo og i A. F.eks klokken $t = 0$ kan vi måle afstanden mellem $O$ og $A$ til at være $d$. Pindens endepunkter har 2 verdenslinier, som er vertikale linier.




Figur 9.16: En pind med længde $d$ set Jorden hvilesystem. Pindens endepunkter er i $O$ og i $A$. Set i det bevægede inertialsystem ligger pindens endepunkter i $O$ og i punktet $B$. For at finde pindens længde skal vi altså måle afstanden mellem $O$ og $A$ (i Jordens hvilesystem), eller afstanden mellem $O$ og $B$ (i det bevægede system). Vi kan måske forvente at den bevægede observatør finder en anden længde end $d$, da de 2 rumtidspunkter $A$ og $B$ er forskellige.

Jeg vil nu måle din pind, men jeg sidder i et bevæget inertialsystem. Jeg skal derfor passe på, for min samtidighedslinie er ikke den samme som din. Pindens endepunkter er i punkterne $O$ og $B$ på min samtidighedslinie. Når jeg vil finde pindens længde skal jeg bare finde $O$ og $B$'s koordinater langs min $x'$ linie. $O$ ligger i nul-punktet, så den koordinat er triviel.

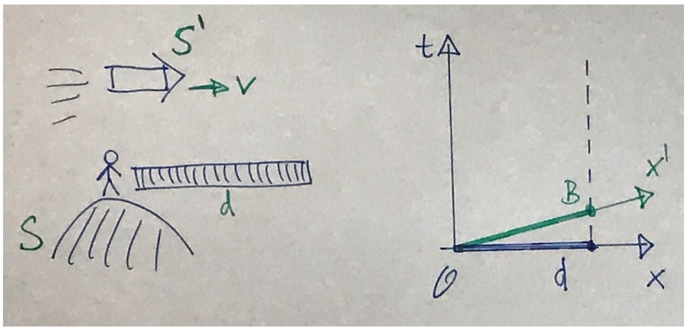
Punktet $B$ er i skæringen mellem pindens verdenslinie (altså pindens højre endepunkt, som ligger vinkelret på $x$-aksen) og min samtidighedeslinie, $t' = 0$. Vi husker formlen for min samtidighedslinie i det bevægede system, nemlig $t = vx$, se ligning (9.19). Vi kan nu indsætte dette i transformationsligningen (9.30) sammen med pindens verdenslinie $x = d$, og vi finder

$$x' = \gamma\,(x - vt) = \gamma\left(d - v^2 d\right) = \frac{d}{\gamma}\,. \tag{9.37}$$

Det vil altså sige, at den bevægede observatør måler en kortere pind. Pindens største længde er derfor dens egen-længde.

### 9.6.1 Kogebog for opgaver

Nogle opgaver er lettest at løse (og man får det bedste intuitive overblik) ved at bruge rumtidsdiagrammer. Vi giver derfor her en kort "opskrift" på, hvordan man gør. Som konkret eksempel bruger vi den længde-forkortelse vi lige har udledt ovenfor.




Figur 9.17: 1: Lav en tegning (venstre). 2: tegn et tydeligt rumtidsdiagram (højre). 3. Hvad skal findes? (indtegn tydeligt $OB$, højre).

1. Lav en tegning. Se på figur 9.17 hvor tydeligt man kan se de to reference systemer. Det er klart at $d$ er målt i jordens inertialsystem.
2. Lav et rumtidsdiagram. På figur 9.17 ser man verdenslinier for pindens endepunkter.
3. Hvad skal findes? Indtegn det helt klart i rumtidsdiagrammet. På figur 9.17 ses at pindens længde set i rumskibets inertial system er givet ved afstanden mellem origo og $B$, nemlig ud ad $x'$ aksen.
4. Vælg den rigtige LT. I vores tilfælde er vi ude efter at finde noget med $x'$, så vi vælger den LT der hedder: $x' = \gamma\,(x - vt)$. Derefter regne regne...
5. Fortolk! Vi fandt at $d' = d/\gamma$. Det vil sige, at pinden ser kortere ud, set fra rumskibet. Det giver god mening, for vi ved at pinden altid bliver længde-forkortet (bortset fra i pinden hvilesystem, hvor den har egen-længden).

### 9.6.2 Egenlængde

Kig igen på figur 9.16. Hvilken af linierne $OA$ og $OB$ ser længst ud? Men vi udregnede faktisk lige at stykket $OB$ er kortere end $OA$. Say what?

Tænk på en helt normal retvinklet trekant, som til venstre i figur 9.18. Læg nøje mærke til at der er forskellige ting op ad aksen på de 2 paneler i figuren! Hvis vi har et normal rum med $x$ og $y$, så gælder der, at summen af de 2 "korte" siders kvadrater giver den "langes" kvadrat. Til venstre på figur 9.18 betyder det

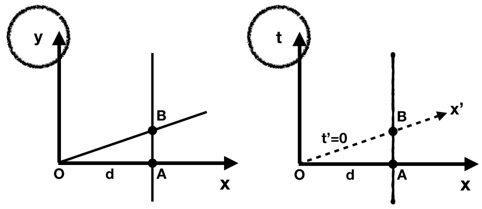
$$|OB|^2 = |OA|^2 + |AB|^2\,, \tag{9.38}$$

hvor notationen nok er oplagt.

Lad os nu prøve at se, hvilke regneregler der gælder i rumtiden, hvor $t$ er op ad aksen, som i højre panel i figur 9.18.

Vis at punktet B i højre panel på figur 9.18 ligger ved punktet $t = vd$ op ad $t$-aksen. Hint: punktet B ligger i skæring mellem hvilke 2 linier?

Hvis vi kigger på kvadratet på sidernes længder, ser vi, at de 2 "korte" giver $|OA|^2 = d^2$ og $|AB|^2 = v^2d^2$. Det er lidt sjovt, for vi har jo lige udregnet (ligning (9.37) ovenfor), at




Figur 9.18: 2 retvinklede trekanter. I figuren til venstre har vi $y$ op ad aksen, hvorimod i figuren til højre har vi $t$ op ad aksen. Figuren til venstre er en normal trekant i rummet, men figuren til højre er i rumtiden.

kvadratet på den lange side er $(1 - v^2)d^2$. Vi har derfor (med samme notation som ovenfor) at

$$|OB|^2 = |OA|^2 - |AB|^2 \,, \tag{9.39}$$

hvor du skal lægge mærke til det nye minus tegn. Der kom altså et minus tegn i forbindelse med tids-aksen.

Man kan for et helt vilkårligt punkt i rumtiden definere $s^2$ ved

$$s^2 = x^2 - t^2 \,, \tag{9.40}$$

hvor $s$ kaldes egenlængde (*proper distance* på engelsk). Det er altså punkter $(x, t)$, målt i et givet inertialsystem. Det viser sig, at denne størrelse er en invariant. Det vil sige, at den har samme værdi, uanset hvilket inertial system vi udregner den i. Det er dejligt betryggende, at der findes sådanne invarianter, nu da vi ser at begreber som længde og tid (ser vi om lidt) hver for sig afhænger af observatørens bevægelse. Senere i kurset vil vi bruge at invariante størrelser er specielt vigtige, for vi vil gerne udvikle nogle fysiske teorier der er ens i forskellige reference systemer. Så hver gang du finder en invariant størrelse, så skriv dig det bag øret.

Du kan lige checke helt eksplicit at egenlængden virkelig er en invariant i vores tilfælde for punkt $B$. I Jordens hvilesystem finder vi

$$s^2 = x^2 - t^2 = d^2 - (vd)^2 = (1 - v^2)\, d^2 \,. \tag{9.41}$$

Nu skal du bare finde $s^2$ i det bevægede system og sammenligne med resultatet herover.

Find $s^2$ i det bevægede system. Er $s^2$ invariant for dette punkt $B$?

Den fysiske fortolkning af egenlængden er, at det er den afstand vi ville måle hvis vi sætter os i systemet hvilesystem. Da egenlængden er defineret udfra $s^2 = x^2 - t^2$, så kan vi se at 2 forskellige punkter i rumtiden faktisk kan have 0 (nul) egenlængde imellem sig. Sådanne 2 punkter ligger langs en fotons verdenslinie. Det vil dermed sige at egenlængden langs en fotons verdenslinie er nul. Det kan hurtigt blive interessant at overveje hvad det betyder for en fotons opfattelse af afstand.

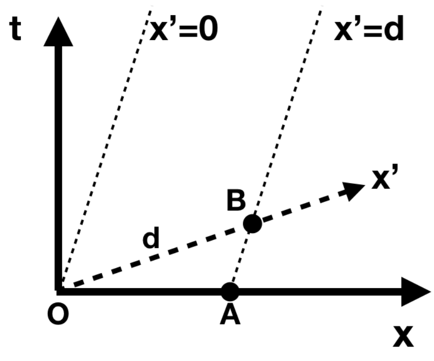
**Lidt filosofisk**

Egenlængden er en invariant, som kan defineres for alle space-like events. Det betyder at for enhver space-like begivenhed kan vi udregne egenlængden $s = \sqrt{x^2 - t^2}$ uanset hvilket inertialsystem vi har målt $x$ og $t$ i. Tilsvarende definerer man størrelsen $\tau^2 \equiv -s^2$. For enhver time-like event betyder det, at vi kan finde egentiden fra $\tau = \sqrt{t^2 - x^2}$. Til gengæld kan man ikke finde en reel egenlængde for en timelike event, og tilsvarende ingen reel egentid for en spacelike begivenhed.
Da $s^2$ er en invariant, så er $\tau^2$ også en invariant. De er jo identiske, bortset fra et fortegn. Dette fortegn giver noget forvirring i forskellige bøger. Flere forfattere vælger kun at definere egentid. Og nogle forfattere vælger at definere egentid med det omvendte fortegn. Når du engang kommer til generel relativitetsteori betyder det, at der på side 1 bliver defineret hvor minus tegnet er, foran tiden eller foran rummet. Det er vigtigt at vælge et fortegn, og så holde konsekvent fat i det, og mange forskere har lavet fejl, når de er kommet til at blande delresultater opnået med forskellige fortegn. Så til den tid, vælg et fortegn, og vær konsekvent.
Heldigvis er fysikken ligeglad med hvad folk skriver. Til dette kursus skal du bare huske at der er en størrelse der hedder egentid, og den er invariant.

### 9.6.3 En pind i rumskibet

Hvad sker der, hvis jeg tager pinden med ombord i rumskibet? Jeg vil klart måle at pinden har længden $d$, men hvad vil du måle i dit hvilesystem på Jorden?

Lad os indtegne en pind med længde $d$, som ligger stille i det bevægede rumskibs inertialsystem i figur 9.19. Denne figur er tegnet i Jordens hvilesystem, så mit koordinatsystem bevæger sig med konstant hastighed til højre.




Figur 9.19: Rumtids diagram set fra Jordens hvilesystem. Pinden med længde $d$ ligger i mit bevægede koordinatsystem, og vi ser pindens 2 endepunkters verdenslinier som stiplede linier.

Pinden følger rumskibet, så pindens verdenslinier ligger langs $x' = 0$ og $x' = d$. Lad os måle pindens længde i Jordens hvilesystem til klokken $t = 0$, for da ligger Origo i nul. Vi skal derfor blot finde $A$'s position langs $x$ aksen.

> Inden jeg giver svaret, så prøv at nedskrive hvilke 2 linier der krydser hinanden i punktet A. Muligvis har du ligefrem mod på at bruge Lorentz transformationerne i ligninger (9.24 – 9.27) til at prøve at finde hvor langt $A$ ligger ude ad $x$ aksen.

Vi måler pindens endepunkter til tiden $t = 0$ i Jordens hvilesystem. Det vil sige, vi skal finde punktet $A$. Det punkt ligger i skæringen mellem de 2 linier $x' = d$ og $t = 0$.

Hvis vi indsætter $t = 0$ i koordinat transformationen

$$t' = \gamma (t - vx) , \tag{9.42}$$

får vi $t' = -\gamma vx$. Hvis vi indsætter dette og $x' = d$ i koordinat transformationen

$$x = \gamma (x' + vt') \tag{9.43}$$

så kan vi flytte lidt rundt (gør det) og finder til sidst

$$x = \frac{d}{\gamma} . \tag{9.44}$$

Vi ser altså at den pind som er $d$ lang i rumskibet, ser ud til at være kortere når den bliver målt fra Jordens hvilesystem.

Se engang på resultatet lige efter ligning (9.37), hvor vi også fandt, at den største pindlængde er pindens egen-længde.

### 9.6.4 En pind i en lade

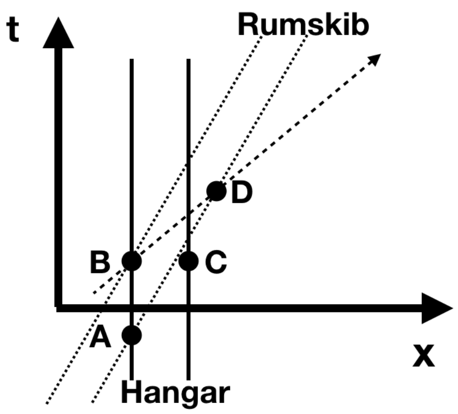
Et klassisk eksempel på hvor vanskeligt det kan være at forholde sig til længde sammentrækning hedder "pole in a barn", hvilket betyder pind i en lade. I vores udlægning vil vi naturligvis tale om det som et rumskib der skal parkeres i en hangar. Spørgsmålet er om et rumskib (the shuttle orbiter) med længde 37 m kan parkeres i en hangar, som var beregnet til en F35, og derfor kun er 30 m lang. Du sidder i Jordens inertial system, så du kan udregne, at hvis jeg flyver ind i hangaren med $1.86 \times 10^6$ m/sek, så er rumskibet kun 29 meter set fra Jordens inertialsystem, og det giver jo rigeligt plads.

Kan vi se dette resultat visuelt? Man kan jo ikke lave en relativitets teori opgave uden at tegne et rumtids diagram, så se figur 9.20. Her er hangaren indtegnet som 2 lodrette fuldtoptrukne linier. Rumskibets for- og bag-ende er de 2 prikkede linier. Rumskibets forende kommer ind i hangaren ved punkt $A$, og bagenden kommer ind ved punkt $B$. Ved at se på stykket mellem punkt B og C (som jo er hangarens fulde længde, nemlig 30 m), ser vi at rumskibet er kortere end hangaren.

Så du er overbevist, rumskibet kan sagtens være i hangaren. Du siger "go for it!".

Men hvad siger jeg, når jeg sidder i det bevægede rumskib: har jeg lyst til at udføre den lettere kontrollerede parkering? Jeg forventer, at jeg vil se en længde sammentrækning af hangaren, så jeg er ikke umiddelbart overbevist.

Problemet er, at hvis vi spørger, hvordan det ser ud fra rumskibets synsvinkel, så skal vi måle hangaren og rumskibets længder samtidig. Lad os se hvordan det ser ud i rumtidsdiagrammet. Langs min samtidighedslinie (den stiplede linie) ser vi, at når rumskibets bagende




Figur 9.20: Et rumskib og en hangar set i Jordens inertialsystem. Hangaren er de 2 fulde lodrette streger. Selvom tiden går, så har hangaren samme længde da den er i hvile i Jordens hvilesystem. Rumskibet er de 2 prikkede linier, hvor den prikkede linie længst til højre er rumskibets forende. Når tiden går, så flyver rumskibet til højre i rumtids-diagrammet. Check at rumskibets forende kommer ind i hangaren ved punkt $A$, og at bagenden kommer ind i hangaren ved punkt B. Tegn selv et lille rumskib i diagrammet, og illustrer hvordan den bevæger sig.

kommer ind i hangaren, så er forenden (ved punkt $D$) allerede langt udenfor hangaren. Jeg siger nej tak, for på trods af at jeg er god til at parkere, så mener jeg ikke at hangaren er lang nok.

Vi kan altså ikke blive enige. Du siger at rumskibet godt kan være i hangaren, og jeg siger at den ikke kan. Fysik er en eksperimentel videnskab, så lad os blive enige om at udføre forsøget. Vi flyver derfor rumskibet ind i hangaren, og sørger for at vi lukker de 2 store porte præcis samtidig. What could go wrong?

> Vi skal altså bare blive enige om, hvad vi mener med, at portene skal lukke samtidig. Kan vi blive enige om det? Med andre ord, er vores samtidighedslinier identiske? På nuværende tidspunkt skulle du gerne stoppe brat op når nogen siger ordet “samtidig”. For det giver ingen mening med mindre man specificerer samtidig i hvilket inertial system.

## 9.7 Tidsudvidelse

Vi ved at der en fantastisk symmetri i rum-tiden, så vi behøver næsten ikke regne på tidsudvidelse, nu da vi har regnet på længde sammentrækning.

> Tegn et rumtids diagram og brug dets symmetrier til at overveje, hvordan et givet tidsinterval ser ud i det bevægede inertialsystem i forhold til hvilesystemet. Svaret kommer nedenfor, men tag en kop te eller kaffe og prøv selv først.

Tegn et nyt rumtidsdiagram, og indtegn alle de linier der er relevante for udledningen nedenfor.

Lad os udregne tidsudvidelsen. Du måler et tidsinterval, $t_1$, i dit hvilesystem. Det vil sige, klokken $t = 0$ starter vi begge vores stopure, og klokken $t = t_1$ måler du hvor lang tid der er gået. Langs $t$ aksen er der altså gået tiden $t_1$. Jeg vil måle i mit bevægede inertialsystem hvad tiden er, så jeg har brug for min samtidighedslinie, som går igennem punktet $t = t_1$. Den linie har formen $t = t_1 + vx$. Længden ud ad $t'$ aksen kan nu findes som skæringen mellem linierne $x' = 0$ og $t = t_1 + vx$. Ved at indsætte i Lorentz transformationen $t' = \gamma(t - vx)$ ser man umiddelbart at $t' = \gamma t_1$. Det vil sige at tidsintervallet i det bevægede system $t'$ altså er længere (svarende til at der går længere tid mellem taktslag på en metronom) end tidsintervallet i hvilesystemet $t_1$. Det betyder så at tiden går langsommere i det bevægede inertialsystem. Dette er konsistent med at egentiden (som er den korteste) måles i hvilesystemet.

Tegn et nyt rumtidsdiagram, og indtegn alle de linier der er relevante for udledningen nedenfor.

Lad os nu udregne tidsudvidelsen set fra det bevægede system. Jeg sidder i rumskibet og måler et tidsinterval, $t'_1$ (dette er egentiden i systemet). Det vil sige, klokken $t = 0$ starter vi begge vores stopure, og klokken $t' = t'_1$ måler jeg, hvor lang tid der er gået ud ad $t'$ aksen. Din samtidigheds linie er den horizontale $t =$ konstant. Du kan nu se hvor langt ude ad $t$ aksen du er kommet. Denne højde svarer til skæringen mellem $t' = t'_1$ og $x' = 0$. Du kan nu bruge Lorentz transformationen $t = \gamma(t' + vx')$ til at se at $t = \gamma t'_1$. Det vil sige at tidsintervallet $t$ er større end $t'_1$, og dermed at set fra et hvilesystem ser uret i det bevægede system ud til at gå langsomt. Igen er dette konsistent med at egentiden (nu målt i rumskibet som bevæger sig) er den korteste.

### 9.7.1 Fire udregninger

Vi har kigget på rumtiden, som er en kombination af rum og tid. Ovenfor har vi lavet 4 udregninger: vi har set på en *længde* både fra Jorden og fra rumskibet, og vi har set på et *tidsinterval*, både fra Jorden og rumskibet. Så er der faktisk ikke flere muligheder. Nu skal vi bare bruge det til noget praktisk.

## 9.8 Problemløsnings strategier

Når du løser opgaver, så er der forskellige strategier. Vi vil først tale om, hvordan mange opgaver lettest kan løses, og det omfatter som regel følgende 3 skridt:

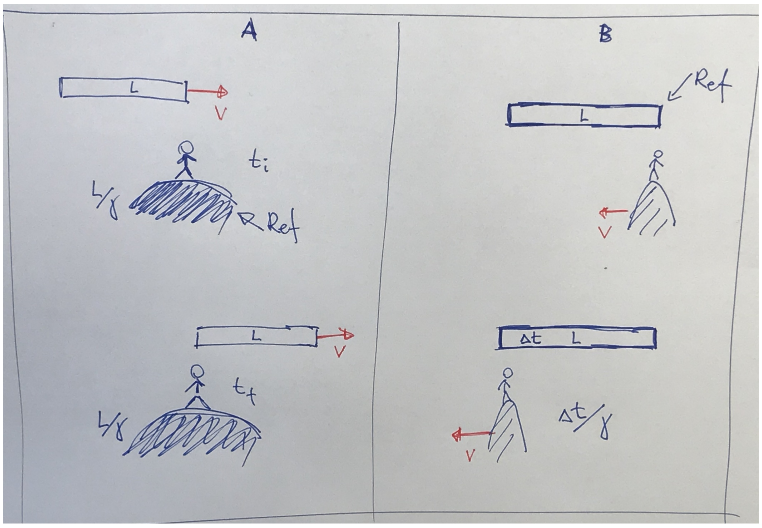
1. Vælg et reference system - og bliv i det.
2. Lav en illlustration.
3. Brug de 3 fundamentale effekter: BuF, længdeforkortelse og tidsudvidelse.

Lad os sige at opgaven er følgende: der ligger en pind med egenlængde $L$ i et rumskib. Rumskibet flyver forbi Jorden med en stor fart, $v$. Find den tid en observatør på Jorden måler, at det tager pinden at flyve forbi Jorden, målt på et ur på Jorden.

1. Opgaven går altså ud på at finde tiden set af en observatør på Jorden, så vi vælger Jorden som reference system.

2. Din illustration skal nu klart vise at Jorden ligger stille. Jeg ville nok tegne 2 små tegninger, en hvor forenden af pinden kommer forbi Jorden (den ville jeg kalde $t_i = 0$), og en hvor pindens bagende kommer forbi Jorden (den ville jeg nok kalde $t_f$). Se et eksempel på en sådan illustration til venstre i figur 9.21. Fik jeg sagt, at på min tegning ligger Jorden stille?!

3. Set fra Jorden er pinden længdeforkortet, så den relevante afstand er $L/\gamma$. Rumskibet flyver med fart $v$, så tiden set fra Jorden er $(L/\gamma)/v$. Observatøren står jo i samme system som uret, så vi er færdige, og svaret er $L/(\gamma v)$.




Figur 9.21: En pind flyver forbi Jorden. Find den tid det tager. Vi skal finde den tid man måler på Jorden, men det kan udregnes enten ved at vælge Jorden som inertial system (A, til venstre), eller rumskibet som inertial system (B, til højre).

Hvad nu hvis opgaven havde været: Find den tid en observatør i *rumskibet* måler, at det tager pinden at flyve forbi Jorden, målt på et ur på Jorden.

1. Opgaven handler om en observatør i rumskibet, så vi vælger rumskibet som reference system.

2. Din illustration viser at rumskibet ligger stille, og at Jorden flyver forbi med stor fart. Du laver nok 2 små tegninger, en hvor Jorden er ved pindens forende, og en hvor Jorden er ved pindens bagende. Se et eksempel på en sådan illustration til højre i figur 9.21. Det er tydeligt fra illustrationen at rumskibet ligger stille!

3. Set fra rumskibet går der $L/v$, da pinden er $L$ lang, og Jorden flyver med farten $v$. Urene på Jorden har tidsforlængede intervaller, så der går kun $(L/v)/\gamma$ på Jordens ur. Svaret er altså $L/(\gamma v)$.

Bemærk, vi fandt det samme svar 2 gange ovenfor, men udregningerne var meget forskellige: i det ene tilfælde var der en $\gamma$-faktor fordi pinden var længdeforkortet, og i det andet fordi tiden var forlænget. En klassisk fejl i denne slags opgaver er, hvis man springer frem og tilbage mellem reference systemer, så husk altid, at når du har valgt et reference system, så bliv i det!

### 9.8.1 Hvornår skal jeg bruge BuF?

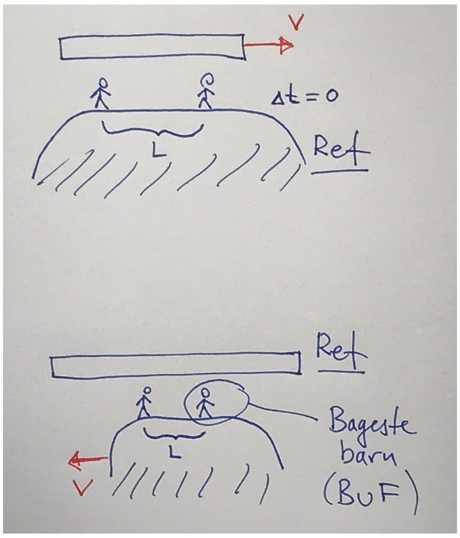
Ovenfor fik vi slet ikke brugt BuF. Det sker meget ofte i opgaver, at når ordet *"samtidig"* indgår, så skal vi bruge BuF. Et eksempel kunne være at 2 børn står med hver deres paint-gun og de skyder *samtidig* en klat maling på et rumskib, der flyver forbi.

Lad os sige at de 2 børn står stille på Jorden med afstanden $L$ imellem sig. Et rumskib flyver forbi med stor fart, $v$. De 2 børn skyder malingen afsted samtidig.

1. Lad os finde afstanden mellem malingsklatterne på rumskibet, udregnet i børnenes reference system.

2. Din tegning viser at børnene står stille, og at rumskibet flyver forbi. Man ser tydeligt på din tegning at rumskibet er længdeforkortet (det ses jo fra børnenes reference system). Se et eksempel på en sådan tegning øverst på figur 9.22.

3. Der er ingen tvivl om at afstanden mellem de 2 klatter maling må være $L$, for det er jo afstanden mellem børnene. Set fra børnenes synsvinkel er rumskibet længdeforkortet, så afstanden mellem klatterne på rumskibet må være $\gamma\, L$.




Figur 9.22: To børn skyder samtidig noget maling på et rumskib, der flyver forbi. Øverst udregner vi afstanden set fra Jorden som inertial system, og nederst udregner vi set fra rumskibet som inertial system.

Lad os forestille os at rumskibet efterfølgende stopper op, og lander ved siden af børnene. Nu skulle vi gerne se, at det også gælder i rumskibets reference system, at afstanden imellem de 2 klatter er $\gamma L$. Men hvordan kan det være, for i rumskibets reference system stod de 2 børn jo kun med afstanden $L/\gamma$ fra hinanden da de afskød malingsklatterne?

> Svaret kommer nedenfor, men prøv først om du selv kan udregne svaret set fra rumskibets reference system.

1. Vi er altså ude efter at finde afstanden mellem de 2 malingsklatter på rumskibet, set fra rumskibets referencesystem. Vi vælger derfor rumskibet som reference system - og bliver i det.

2. Vores illustration viser at rumskibet står stille. Du tegner nok de 2 børn så vi kan se, at de bevæger sig med en stor fart den ene vej. Det er tydeligt fra din tegning at afstanden mellem børnene er længde forkortet. Du gør det klart fra tegningen, hvilket af børnene der er "bagest". Se et eksempel på en sådan tegning nederst på figur 9.22.

3. Du ved at BuF, så det "bageste" barn skyder sin klat maling afsted før det forreste barn skyder. Vi regner jo alt set i rumskibets reference system. Det tidsinterval mellem de 2 skud svarer til $Lv/c^2$ i børnene reference system, men fra rumskibets synsvinkel er der tidsforlængelse, så tiden der går set fra rumskibet er $\gamma(Lv/c^2)$ (tænk lige dette igennem, det er ikke helt trivielt). Du ved også at børnene kun står med afstanden $L/\gamma$ imellem sig set fra rumskibet.

Den afstand rumskibet ser imellem malingsklatterne er derfor en sum af 2 afstande: for det første afstanden imellem børnene, $L/\gamma$, og dertil den afstand det forreste barn når at flytte sig mellem de 2 klatter bliver skudt af, nemlig $v\,\gamma(Lv/c^2)$. Check nu selv at denne udregning er korrekt

$$\frac{L}{\gamma} + \frac{\gamma L v^2}{c^2} = \gamma L\,. \tag{9.45}$$

Vi ser altså at afstanden mellem de 2 malingsklatter på rumskibet er $\gamma L$, og det er uanset om vi har lavet udregningen i det ene eller det andet reference system.

Ofte vil selve udregningerne være meget lettere i det ene end det andet reference system. Med erfaring kan du selv se, hvilket reference system der nok er det smarteste at bruge. Men fortvivl ikke, svaret er altid det samme!

## 9.9 Opgaver til rumtid

### 9.9.1 BuF - Bageste Ur Foran

Når du forstår samtidighed (og mangel på samtidighed) for bevægede systemer, så har du stort set fat i det allevigtigste med hensyn til speciel relativitetsteori. Vi vil derfor arbejde lidt mere med dette begreb i denne opgave.

Baggrund. Hvis du fordeler 10.000 ure rundt omkring i et rumskib, og sørger for at de alle er synkroniserede, så betyder det, at du kan se hvornår en vilkårlig event sker hvor som helst i rumskibet (til synkronoseringen kunne du f.eks lægge alle urene tæt ved hinanden og indstille dem ens, og så føre dem langsomt ud til de steder de skal ligge i rumskibet). Når du aflæser urene skal du altid korrigere for at nogle ure ligger længere væk (for det tager signalet tid at nå hen til dig), men nu antager vi at du altid korrigerer for det. Lad os være meget konkrete med hvad det betyder. Du betragter 2 personer, hvor den ene står tæt på dig, og den anden står langt væk. Du vælger 2 forskellige ure som er tæt på de 2 personer. Hvis de 2 personer klapper, så kan du aflæse det tidspunkt hvor de hver især klappede. Her skal du tage højde for at lyset fra urene kommer hen til dig på forskellige tidspunkter. Men du kan altså korrigere for forskellene i afstande, og på den måde se hvem der klapper først. Når vi f.eks siger "*du ser om de klapper samtidig*", så mener vi altså ikke hvornår lyssignalet kommer hen til dig, men vi mener at du, efter at have korrigeret for de forskellige afstande, kan finde ud af hvem der rent faktisk klappede først. Alle personer i rumskibet er derfor enige om hvem der klapper først.

Specielt, hvis jeg står udenfor rumskibet mens det holder stille, så ser jeg at alle urene er synkroniserede. Det vil sige, hvis der er 200 mennesker i rumskibet der er enige om at klappe når deres ure læser klokken 15.12:08, så vil jeg se at de klapper samtidig.

Men ... hvis jeg står udenfor rumskibet, mens det flyver forbi mig, så ser jeg derimod at urene *ikke* er synkroniserede. Lad os finde ud af hvor stor denne effekt er. Vi vil også finde ud af hvilke ure der går foran hvilke andre ure.

Der er kun 1 opgave nedenfor. Først stilles opgaven ved en bullet. Hvis du ikke umiddelbart kan løse den, så læs et hint og prøv igen. Prøv med dig selv at se, hvor få hints du har brug for at læse. Jeg skriver flere hints, som du kan bruge stille og roligt for at komme igang.

**Opgaven**. Du har et rumskib der er $L$ langt. Du har synkroniseret alle urene på rumskibet, og specielt har du et ur i forenden $ur_1$ og et i bagenden $ur_2$ som er synkroniserede. Du udsender et kort lyssignal præcis fra midten af rumskibet, som bevæger sig både til forenden og til bagenden. De 2 ure rammes præcis samtidig, og du bekræfter dermed at de faktisk er synkroniserede. Vi skal ikke bruge dette lyssignal mere i denne opgave.

Jeg står udenfor rumskibet, som bevæger sig forbi mig med den konstante fart $v$. Jeg aflæser nu de 2 ure samtidigt, set fra mit stationære koordinatsystem. De 2 ure viser ikke det samme tidspunkt, faktisk er det ene ur foran det andet.

• Hvilket ur er foran det andet, og hvor stor er forskellen?

Hint 1. En måde jeg kan aflæse urene samtidig kan f.eks være ved at der udsendes et lyssignal et sted i rumskibet (ikke i midten) som set fra mit koordinatsystem rammer de 2 ure præcis samtidig. Du kan f.eks forestille dig at urene stopper præcis på det klokkeslet de bliver ramt af en foton. På den måde kan du i ro og mag aflæse hvad de står på.

Hint 2. Set fra mit hvilesystem er den relative hastighed mellem et lyssignal og rumskibet henholdsvis $v+c$ og $v-c$. Det vil sige, at set fra mit hvilesystem så vil rumskibets bagenden og lyset nærme sig hinanden med farten $v+c$.

Hint 3. Jeg betragter et lille stykke af rumskibet, $\Delta L = Lv/(2c)$. Jeg udsender et kort lyssignal lidt fra rumskibets midte, nemlig ved punktet $L/2+\Delta L$. Vis at set fra mit hvilesystem vil lyssignalet ramme forende og bagende præcis samtidig.

Hint 4. Hvis lyssignalet er udsendt fra et punkt som ikke ligger præcis i rumskibets midten, men i $L/2+\Delta L$, hvornår vil det lyssignal så ramme de 2 ure, set fra rumskibets koordinatsystem? Hvilket ur bliver ramt først? Hvad er forskellen i tid, som de 2 ure viser, når de bliver ramt?

Hint 5. Det forreste ur bliver ramt først (set i rumskibets koordinatsystem) fordi lyset blev udsendt tættere på forenden. Og det bageste ur blev ramt tiden $Lv/c^2$ senere. Når jeg står ved siden af rumskibet ser jeg altså at disse 2 ure blev ramt samtidig, men jeg aflæser alligevel at urene står forskellig. Jeg vil derfor sige at urene ikke er synkroniserede.

Hint 6. En huske regel er, at det Bageste Ur er Foran, BuF. For hvis det havde været omvendt, havde det heddet Forreste Ur er Foran, FUF, og det lyder dumt. Desuden, så betyder det italienske ord "BuFfo" at noget er sjovt, og speciel relativitetsteori er vildt sjovt :-)

Afslutning. Det er vigtigt at huske at dette resultat ikke har noget som helst at gøre med hvor langt tid signalet tager om at komme hen til mig. Det har heller ikke noget at gøre med hvilket ur kommer først forbi mig. Urene tikker afsted med præcis samme frekvens. Jeg ser altså bare at det bageste ur er foran det forreste. Hvis rumskibet holder stille, så ser jeg at urene er perfekt synkroniserede. Den længde der indgår ovenfor, $L$, er rumskibets længde målt i rumskibets hvilesystem. Du vil senere se at den længde man måler fra Jordens inertialsystem er kortere, men det betyder intet for hele argumentet ovenfor.

Bonus kommentar. Da vi nedskrev de relative hastigheder ovenfor så vi at de er $c+v$ og $c-v$. Det er et springende punkt, for her har vi benyttet at fotoner altid bevæger sig med lysets hastighed. Hvis du istedet havde regnet på at der blev udsendt 2 geværkugler med hastigheden $v_g$ set i rumskibets hvilesystem, så ville du finde at deres hastigheder set fra Jordens inertialsystem var $v_g - v$ og $v_g + v$. Og dermed ville du finde at de relative hastigheder af geværkuglerne og rumskibets ender er $v_g$ og $v_g$. Det ville føre til at kuglerne rammer rumskibest ender samtidig hvis de bliver udsendt præcis i midten af rumskibet.

### 9.9.2 Forbliver urene synkorniserede?

Jeg har synkroniseret 2 ure i forenden og bagenden af et rumskib. Rumskibet har egenlængde $L$. Min veninde Alberte synkroniserer sit ur mens hun står ved rumskibets bagende, og så går hun med raske skridt op til forenden af rumskibet. Hun går med den konstante fart $u$. Vis at der ca står

$$\frac{L}{u} - \frac{Lu}{2c^2} \tag{9.46}$$

på hendes ur, når hun når forenden. Forklar hvorfor dette beviser at man rent faktisk kan synkronisere urene ved at fordele dem helt langsomt rundt omkring i rumskibet.

### 9.9.3 BuF set fra rumtiden

Jeg har synkroniseret 2 ure i forenden og bagenden af et rumskib. Du står på Jorden og ser mig flyve forbi. Tegn et rumtids diagram og indtegn min samtidighedslinie, og angiv positionen af de 2 ure på denne samtidighedslinie. Disse 2 ure flyver forbi dig, og du aflæser dem samtidig (langs din samtidighedslinie). Hvilket ur er foran?

Lav nu et rumtidsdiagram set fra Rumskibet. Her bevæger Jorden sig til venste. Indtegn Jordens samtidighedslinie, som er $t' = -vx'/c^2$. Brug at rumskibets bagende ligger ved $x' = -L$ og forenden ved $x' = 0$, til at vise at BuF formlen findes ved skæringen mellem $x' = -L$ og samtidighedslinien.

### 9.9.4 Nogle events

Et rumskib S' flyver med den konstante fart $v/c = 0.8$ langs x-aksen i forhold til Jorden S.

**a**. En event ses i S ved koordinaterne $(t = 0\text{sec}, x = 5\text{m})$. Find den tilsvarende event set fra S'.

**b**. Tilsvarende for $(t = 1\text{sec}, x = 5\text{m})$.

**c**. Tilsvarende for $(t = 2\text{sec}, x = \frac{3}{4}\,10^9\text{m})$.

### 9.9.5 Den relative hastighed

En event sker ved $x = 9 \times 10^8$ m set fra S. Og ved $t' = 1$ sek og $x' = 3 \times 10^8$ m set fra S'. Find den relative hastighed af de 2 koordinatsystemer.

### 9.9.6 Samtidighed

Lad os betragte 2 events i rumtidsdiagrammet. Event-1 sker ved punktet $(x, t) = (0, 0)$ og Event-2 sker ved $(x, t) = (3, 1)$. Der findes et bevæget inertial system, hvor de 2 events sker samtidig. Find hastigheden for det inertialsystem ved at tegne de 2 events ind i rumtidsdiagrammet.

### 9.9.7 En pind fløj forbi

Benny står stille på Jorden. En pind med egenlængde $L$ flyver forbi med den konstante fart $v$. Du skal nu vise at den tid **Benny** måler på sit ur er $\Delta t_B = L/(\gamma v)$, men du skal vise det på 2 forskellige måder.

a) Stil dig i Bennys inertial system, og find tiden, det tager pinden at flyve forbi.

b) Stil dig i pindens inertial system, og find tiden, det tager Jorden at flyve forbi.
Forklar hvordan man fortolker dette resultat.

### 9.9.8 En pind fløj forbi, igen

Benny står stille på Jorden. En pind med egenlængde $L$ flyver forbi med den konstante fart $v$. Du skal nu vise at den tid **pinden** måler på sit ur er $\Delta t_p = L/v$, men du skal vise det på 2 forskellige måder.

a) Stil dig i pindens inertial system og find tiden, det tager Jorden at flyve forbi (det er nemt).

b) Stil dig i Bennys inertial system og find tiden, det tager pinden at flyve forbi (det er den svære. Hint: husk BuF).
Forklar hvordan man fortolker dette resultat.

### 9.9.9 Lorentz transformationerne

Vi vil i denne opgave gentage en udledning af Lorentz transformationerne. Vi har jo allerede udledt enkelte transformations regler (tidsforlængelse, længdeforkortelse osv), og her bruger vi dem samtidigt for at se den fulde form af Lorentz transformationerne. Man udleder oftest Lorentz transformationerne direkte, eller ved at kigge på Minkowski rummet, som vi gør i noterne. Men her benytter vi altså at det hårde arbejde allerede er lavet, så vi mangler bare at høste frugten.

Vi betragter derfor 2 inertial systemer, S i ro, og S' der bevæger sig med den konstante fart $v$ langs $x$-aksen. Vi kigger på 2 rumtidspunkter (begivenheder) og ønsker at beskrive forskellen imellem disse punkter. Hermed mener vi at vi både vil have $\Delta t'$ og $\Delta x'$ i det bevægede system. Vi ønsker at kunne transformere disse størrelser til det stationære inertialsystem, altså til $\Delta t$ og $\Delta x$. Vi ønsker altså at finde de 4 funktioner af $v$, til følgende transformationer, der er lineære og homogene i $x$ og $t$

$$\Delta x = A(v)\,\Delta x' + B(v)\,\Delta t' \tag{9.47}$$

$$\Delta t = C(v)\,\Delta t' + D(v)\,\Delta x'\,. \tag{9.48}$$

• Vis at hvis vi var ude efter de normale Galilei transformationer, så ville løsningen være: $A = C = 1$, $B = v$ og $D = 0$.

• Vi har set på længdekontraktion. Når vi måler afstanden i $S'$, så måler vi endepunkterne samtidig, dvs $\Delta t' = 0$, så har vi fundet[2] sammenhængen $\Delta x' = \Delta x/\gamma$. Vis at du fra ligning 9.47 hermed får $A = \gamma$.

• Ved at kigge på transformation mellem de 2 inertialsystemer (altså ved at se på ligningen for det ene nulpunkt beskrevet fra de 2 systemer), ser vi, at når vi måler på 2 ens steder i S, dvs $\Delta x = 0$, så gælder[3] $\Delta x' = -v\Delta t'$. Vis at du herfra får at $B = \gamma v$.

[2]Check at fortegn og mærker er sat korrekt!

[3]Check at fortegn og mærker er sat korrekt!

• Vi har også set på tidsforlængelse, og hvis du måler et tidsinterval samme sted i S' systemet, dvs $\Delta x' = 0$, så fandt vi at[4] $\Delta t' = \Delta t/\gamma$. Vis at du med dette og ligning 9.48 får at $C = \gamma$.

• Sluttelig, vi fandt at det bageste ur er foran (BuF), hvilket vil sige at fra S systemet måler du 2 punkter samtidig, dvs $\Delta t = 0$, så gælder[5] $\Delta t' = -v\Delta x'/c^2$. Brug nu dette til at vise at $D = \gamma v/c^2$.

• Nedskriv de samlede Lorentz transformationer.

• Omskriv Lorentz transformationer så du kan finde S' koordinater fra S koordinater. Du skulle gerne se at smuk symmetri, hvor den eneste forskel er, at alle led med $v$ har ændret fortegn.

• Vis at for $v \to 0$ får du de normale Galilei transformationer. Bonus spørgsmål: gælder det uafhængigt af størrelsen af $\Delta x$?

### 9.9.10 En rotation?

Hvis vi indfører vektoren $(x, t)$, vis at

$$\begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma v \\ \gamma v & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ t' \end{bmatrix} \tag{9.49}$$

Synes du dette ligner en rotation?

Bonus overvejelse: Hvis dine nyeste venner hedder hyperbolske funktioner, så kan du overveje hvad der sker hvis du indfører en vinkel $\theta_r$ sådan at $v = tanh(\theta_r)$ og $\gamma v = sinh(\theta_r)$. Dermed kommer rotationsmatricen ovenfor virkelig til at ligne en rotation, blot med cosh og sinh istedet for de normale cos og sin funktioner.

### 9.9.11 En tangens-theta

Tegn et rumtidsdiagram (for 2 inertialsystemer S og S') med 5 linier, nemlig $x = 0$, $t = 0$, $x' = 0$, $t' = 0$ og $x = t$. Forklar hvad hver linie symboliserer. Indtegn punktet ved $(x', t') = (0, 1)$. Brug Lorentz transformationer til at vise at dette punkt ligger ved $(x, t) = (\gamma v, \gamma)$. Brug dette til at vise at vinklen mellem $x = 0$ og $x' = 0$ linierne er

$$\tan\theta_t = v\,. \tag{9.50}$$

Bonus: foreslå en metode til at udregne vinklen mellem $t = 0$ og $t' = 0$ linierne. Vis at det giver samme resultat.

[4] Check at fortegn og mærker er sat korrekt!
[5] Check at fortegn og mærker er sat korrekt!

### 9.9.12 En ny orientering af en pind

En pind ligger i et rumskib, som bevæger sig i forhold til Jorden med den konstante fart $v$ langs x-aksen. I rumskibet har pinden længden $d'$, og den ligger med en vinkel $\theta'$ i forhold til $x'$-aksen.

Hvor lang er pinden set fra Jorden, og hvilken vinkel har den i forhold til $x$-aksen?

Hvad sker der med vinklen (og længden) når $v \to c$?

### 9.9.13 En ny orientering af en lysstråle

En lysstråle udsendes med vinklen $\theta'$ fra $x'$-aksen i et rumskib. Rumskibet bevæger sig med den konstante fart $v$ langs $x$-aksen i forhold til Jorden.

Hvilken vinkel bevæger lyset sig i, i forhold til $x$-aksen, set fra Jorden?

Betragt de 2 specielle tilfælde hvor lyset, set fra rumskibet, udsendes med 45 grader imod **a)** rumskibets forende, eller **b)** rumskibets bagende. Set fra Jordens synsvinkel, udsendes lyset mere bagud eller forud i forhold til rumskibet, hvis vi kigger på tilfældet $v/c = 0.8$?

### 9.9.14 Kollimation af en halv lyssphere

I rumskibet har vi en lyskilde der stråler fuldstændigt isotropt i alle retninger. Lad os betragte den halvdel af denne lyssphere der stråler isotropt "fremad" imod rumskibets forende.

Vi står på Jorden og opdager at denne halve lys-sphere er ekstremt kollimeret i en tynd fremadrettet kegle. Vi ser at al lyset falder indenfor 0.01 radian (hvilket er under 1 grad).

Find hastigheden af rumskibet.

Bemærk at denne effekt er supervigtig, f.eks for relativistiske elektroner der bliver accelererede og udsender synkrotronstråling.

### 9.9.15 Overhaling

Vi har 3 observatører. Observatør A står stille i Jordens inertialsystem. Observatør B bevæger sig til højre med farten $v_B = c/4$ i forhold til ObsA. Observatør C kommer lidt bagefter, og bevæger sig til højre med farten $v_C = c/3$ i forhold til ObsA. ObsB har et rumskib der er $2L/\sqrt{15}$ langt (målt i hans hvilesystem), og ObsC har et rumskib der er $3L/\sqrt{2}$ langt (målt i hendes hvilesystem).

- Find hvor lange de 2 rumskibe er, set fra ObsA's synsvinkel.
- Lav en brugbar illustration til at forstå hvordan vi kan udregne hvor lang tid det tager rumskib C at overhale rumskib B. Overhalingen starter når C's forende er ved B's bagende, og slutter når C's bagende forlader B's forende.
- Stå i ObsA's inertial system. Find hvor lang tid det tager rumskib C at overhale rumskib B.

### 9.9.16 Hvor meget strækkes $x'$-aksen

Vi ved at egentidens kvadrat, $\tau^2$, er en invariant. Vi vil bruge det til at se hvor meget $x' = 0$ linien er strukket i forhold til $x = 0$ linien. Tag en tilfældig værdi for $\tau^2$, lad os sige 1. Det vil sige, der gælder at

$$c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 = 1\,. \tag{9.51}$$

Tegn et rumtidsdiagram, og inkluder kurven for egentidens kvadrat, og linierne for $x' = 0$ og $x = 0$. Find skæringerne mellem disse linier, og brug dem til at vise at $x' = 0$ linien er strukket

$$\sqrt{\frac{1+v^2}{1-v^2}} \tag{9.52}$$

i forhold til $x = 0$ linien. Bonus. Foreslå hvordan man ville kunne vise at den samme udstrækning sker for $t' = 0$ linien i forhold til $t = 0$ linien.

### 9.9.17 To boosts

Hvis du laver en LT (Lorentz transformation) fra system 1 til 2 med fart $v_1$, efterfulgt at en LT fra system 2 til 3 med fart $v_2$, kan det så beskrives ved en LT fra system 1 til 3? Hvis ja, hvad er den tilsvarende hastighed? Hint, du får en hastighed i retning af $v_3 = (v_1 + v_2)/(1 + v_1 v_2)$.

### 9.9.18 Lægge hastigheder sammen

Vi vil nu udlede additions formlen for 2 hastigheder, blot ved at kigge på rumtiden. Vi betragter en partikel der bevæger sig med hastigheden $v_1$ i forhold til inertial systemet S'. Samtidig bevæger S' sig med hastigheden $v_2$ i forhold til inertial systemet S. Tegn et rumtids diagram med linierne $x = 0$, $t = 0$, $x' = 0$, $t' = 0$ og $x = t$. Tegn også verdenslinien for partiklen. Lad os sige at den ligger et sted imellem $x' = 0$ og $x = t$. Forklar i ord om det betyder at partiklen bevæger sig hurtigere eller langsommere end S' i forhold til S.

Vælg et vilkårligt punkt, $P$, på partiklens rumtidslinie. Lav et parallelogram med linierne $x' = 0$, $t' = 0$, som går igennem Origo, punktet P, og de 2 liniekrydsninger A og B. Forklar hvorfor 2 af disse streger må have formen

$$x = v_2 t + x_0 \quad \text{og} \quad t = v_2 x + t_0\,. \tag{9.53}$$

Vis at krydsningspunkterne A og B må kunne skrives som

$$\begin{aligned} x_A &= \frac{t_0 v_2}{1 - v_2^2} \quad \text{og} \quad t_A = \frac{t_0}{1 - v_2^2}\,, \\ x_B &= \frac{x_0}{1 - v_2^2} \quad \text{og} \quad t_B = \frac{v_2 x_0}{1 - v_2^2}\,. \end{aligned}$$

Forklar at eftersom disse punkter A og B svarer til punktet P's koordinater i S', så må der gælde $x_0 = v_1 t_0$.

Brug nu ovenstående, og at punktet P ligger ved $P = OA + OB$ til at vise ved direkte indsættelse at partiklens hastighed set fra S er givet ved

$$u = \frac{v_2 + v_1}{1 + v_1 v_2}\,. \tag{9.54}$$

### 9.9.19 To rumskibe

En observatør på Jorden ser 2 rumskibe der hver har farten $v = 0.8$, men den ene til højre og den anden til venstre. Find den fart som det ene rumskib observerer at den anden har.

Hvis hver fart istedet er $v = 0.99$ kan du lave en Taylor udvikling. Find nu den relative fart.

### 9.9.20 Lys igennem vand

Når vi lyser igennem et medium som vand, så ser vi fra laboratoriet at lyset bevæger sig langsommere, nemlig $u = c/n$, hvor $n \approx 1.3$.

Vi lader nu vandet løbe med farten $v$ langs den positive $x-$akse, og samtidig lyser vi i vandet langs den positive $x-$akse. Hvor hurtigt observerer vi nu at lyset bevæger sig? Vis at svaret kan Taylor udvikles til

$$u = \frac{c}{n} + v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) , \tag{9.55}$$

hvilket kan fortolkes som om lyset "trækkes" med af vandet, dog ikke helt med farten $v$. Denne effekt blev først observeret af Fizeau i 1851.

### 9.9.21 En hurtig gåtur i et rumskib

Alberte går med den konstante fart $u$ igennem et rumskib. Benny står stille på Jorden. Rumskibet flyver forbi Benny med den konstante fart $v$. Benny ser derfor at Alberte bevæger sig med farten $w = (u + v)/(1 + uv/c^2)$. Bevis at man kan skrive

$$\gamma_w = \gamma_u \gamma_v \left(1 + \frac{uv}{c^2}\right) . \tag{9.56}$$

### 9.9.22 Efter en gåtur i et rumskib

Alberte har synkroniseret alle urene i et rumskib, der har egenlængde $L$. Nu går Alberte med raske skridt igennem rumskibet. Hun fastholder hårdnakket at hendes ur er synkroniseret med det bageste ur da hun starter, og at det også er synkroniseret med det forreste ur efter gåturen.

Benny står stille på Jorden og observerer at rumskibet flyver forbi med stor fart $v$. På grund af BuF vil Benny se at det bageste ur er $Lv/c^2$ foran det forreste ur.

Vis at set fra Bennys synsvinkel, så er den tid der går på Albertes ur givet ved

$$t_B = \frac{L\left(1 + \frac{uv}{c^2}\right)}{u\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} . \tag{9.57}$$

Forklar hvorfor forskellen på det forreste ur og Albertes ur er givet ved

$$\Delta t = \frac{L\left(1 + \frac{uv}{c^2}\right)}{u\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left[\frac{1}{\gamma_v} - \frac{1}{\gamma_w}\right] . \tag{9.58}$$

Vis at dette kan rækkeudvikles under antagelsen $u \ll v$ til

$$\Delta t = \frac{Lv}{c^2} \tag{9.59}$$

Fortolk hvad det vil sige.

### 9.9.23 Poul gik en tur

En observatør $A$ står i hvile på Jorden. Han ser et rumskib der flyver forbi med farten $v_1$. Vi er ude efter at finde denne fart. En anden observatør, Poul Hjorth, går fra rumskibets bagende til rumskibets forende. Poul fortæller at rumskibet har egenlængde $L$, og at han går med den konstante fart $v_2$. Observatør $A$ måler hvor lang tid gåturen varer set i observatør $A$s hvilesystem, $t_A$.

Ud fra de givne informationer er det nu muligt at finde en ligning der kun inkluderer kendte størrelser og $v_1$. Find denne ligning (hint gives nedenfor, hvis det er nødvendigt).

Det er derfor (i princippet) muligt for observatør $A$ at finde rumskibets fart $v_1$.

Nu stiller vi præcis det samme spørgsmål, men vi skal lave hele regningen klassisk. Er det nu muligt at finde rumskibets fart? Prøv også at sammenligne med grænsetilfældet af det relativistiske tilfælde, hvor $c \to \infty$. Giv din fortolkning på hvad der foregår.

Hint: forklar hvorfor dette kan besvares med skæringen mellem linierne $x = u\,t$ og $t = -L/(\gamma_1\, v_1) + x/v_1$, hvor $u$ kan findes ved at lægge de 2 relativistiske hastigheder $v_1$ og $v_2$ sammen.

### 9.9.24 Trillinge ikke-paradoks

Vi betragter et inertialsystem B', der bevæger sig til højre med farten $v$ i forhold til et inertialsystem A. Præcis når B' passerer A synkroniseres deres ure, dvs, de sætter tiden til nul, $t = 0$ og $t' = 0$. Et andet inertialsystem, C", bevæger til mod venstre med farten $v$ i forhold til A. Dette inertial system starter langt ude til højre og passerer B' når uret i B' viser 2 år. Præcis når B' og C" passerer hinanden, indstiller C" sit ur til at vise 2 år. Efter et stykke tid passerer C" det inertialsystem der er i ro, A, og de sammenligner tiden på deres ure.

Lav en illustration af denne opstilling. Tegn det tilsvarende rumtidsdiagram set fra As synsvinkel. Brug rumtidsdiagrammet til at vise at $t_C = t_A/\gamma$.

Tegn nu det tilsvarende rumtidsdiagram set fra enten B eller C synsvinkel (du vælger). Brug nu dette rumtidsdiagram til igen at vise at $t_C = t_A/\gamma$.

### 9.9.25 Et tog i en tunnel, 18F7

Et tog bevæger sig i stor fart imod en tunnel. Tunnelens egenlængde er $W = 40m$, og togets egenlængde er $L = 50m$. En observatør, ObsA, står stille ved tunnelen og kontrollerer 2 kameraer, et ved tunnelens indgang, og et ved tunnelens udgang. ObsA har sikret sig at disse 2 kameraer er synkroniserede, og de tager altid billeder samtidig. Billederne bliver taget med blitz, så en passager på toget vil også kunne se, når et billede bliver taget. Præcis når togets forende er ved tunnelens udgang tager ObsA 2 billeder, og de viser, at toget lige præcis har samme længde som tunnelen.

**A1**. Find togets fart.

Ombord på toget er 2 passagerer, som har synkroniseret deres ure. Det er observatør Obs$B_f$ ved togets forende, og observatør Obs$B_b$ ved togets bagende.

**A2**. Hvor lang ser de at tunnelen er? Tror de at toget kan passe ind i tunnelen? Forklar meget kort hvorfor/hvorfor ikke.

De 2 tog-observatører kigger ud ad togets vinduer, og observerer præcis hvornår billederne bliver taget (de kan se blitzen).

**A3**. Hvad konkluderer de 2 tog-observatører om, hvornår billederne blev taget: hvilket billede blev taget først, eller blev de taget samtidig? Hvis der er forskel i tid, hvor mange sekunder er forskellen så?

Præcis når Obs$B_f$ ser blitzen, så udsender han et lyssignal til Obs$B_b$. Præcis når det lyssignal rammer Obs$B_b$ kigger hun ud af vinduet ved togets bagende.

**A4**. Hvad ser hun: at togets bagende stadig er uden for tunnelen, lige ved tunnelsens indgang, eller allerede inde i tunnelen? Bevis det, og lav en klar illustration til din udledning.

### 9.9.26 Egentid, 18F7

Vi betragter en observatør, ObsA, i hvile på Jorden. ObsB er i hvile i et rumskib, der flyver forbi Jorden med stor konstant fart. De 2 observatører synkroniserer deres ure præcis da rumskibet flyver forbi Jorden, dvs $t = 0$ og $t' = 0$ når $x = 0$ og $x' = 0$. Efter et stykke tid aflæser ObsB sit ur, og hun ser, at hun har koordinater $(x', ct') = (0, 3m)$.

**B1**. Find de tilsvarende koordinater set fra ObsA på Jorden, $(x, t)$.

**B2**. Check at egentidens kvadrat, $\tau^2 = c^2t^2 - x^2$, rent faktisk er en invariant for dette punkt i rumtiden.

**B3**. Rumskibet bevæger sig med $v = \sqrt{0.8}\,c$ (hvilket ca er lig med 0.9c). Tegn et rumtidsdiagram set fra Jordens inertial system. Indtegn også rumskibets samtidighedslinie og rumskibets centrum. Indtegn en fotons verdenslinie set fra rumskibet.

Vi vil nu kigge på hvor meget aksen $x' = 0$ i dette tilfælde er strakt ud i forhold til aksen $x = 0$. Det gør vi ved samtidig at kigge på 2 linier, nemlig $x' = 0$ og den linie der findes ved $9 = c^2t^2 - x^2$. Skæringen mellem disse 2 linier kalder vi C.

**B4**. Udregn hvor langt der er fra Origo til C på rumtidsdiagrammet (altså den geometriske længde). Hvad er den fysiske fortolkning af dette tal?

Nedenfor har vi skrevet Lorentz transformationerne. Til venstre med enheder $c = 1$, og til højre hvor vi genindfører lysets hastighed, $c$,

$$t' = \gamma(t - vx) \quad , \quad t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) , \tag{9.60}$$

$$x' = \gamma(x - vt) \quad , \quad x' = \gamma(x - vt) , \tag{9.61}$$

$$t = \gamma(t' + vx') \quad , \quad t = \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right) , \tag{9.62}$$

$$x = \gamma(x' + vt') \quad , \quad x = \gamma(x' + vt') , \tag{9.63}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} \quad , \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} . \tag{9.64}$$

### 9.9.27 Piloter med ure, 18F17C

Rumskib-A har egenlængde 50 m, og er parkeret i ro på Jorden. Et andet identisk rumskib-B flyver forbi med den store fart $v = 3/5\,c$ målt i Jordens hvilesystem.

**C1.** Set fra pilot-A i rumskib-A, hvor lang tid tager det hele rumskib-B at flyve forbi pilot-A?

**C2.** Set fra pilot-B i rumskib-B, hvor lang tid tager det?

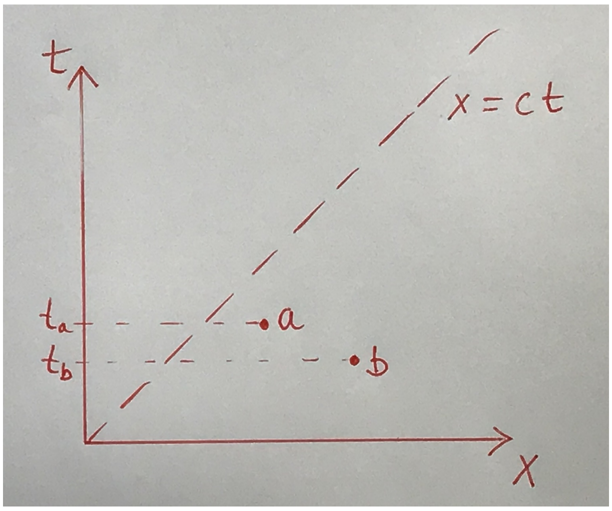
**C3.** Ombord på rumskib-B er der placeret 2 identiske ure. Det ene er i forenden og det andet i bagenden af rumskibet. Pilot-B fortæller at disse ure er perfekt synkroniserede set fra hans bevægede system. Pilot-A aflæser de 2 ure samtidig, og ser at de viser noget forskelligt. Hvilket ur er foran, og hvor meget er det foran?

### 9.9.28 Kausalitet, 19F14A

Vi betragter 2 events **a** og **b** i rum-tidsdiagrammet på figur 1. Det viser at i vores inertialsystem kommer event **b** før event **a**.

($i$) Findes der et inertialsystem hvor event **a** kommer før event **b**? Forklar kort med ord hvorfor/hvorfor ikke.

($ii$) Tegn et rumtidsdiagram der illustrerer din forklaring.




Figur 9.23:

### 9.9.29 Egenlængde af pind, 19F14B

Vi tager en pind med egenlængde $L$ ombord på et rumskib. Rumskibet flyver med konstant fart $v$ i forhold til en observatør på Jorden.

$a$). Lav et rum-tidsdiagram i Jordens hvilesystem, der tydeligt viser pindens egenlængde i rumskibet. Dette rumtidsdiagram skal også tydeligt vise pindens længde set fra Jordens inertialsystem, $l$.

$b$) Forklar hvorfor det er fysisk relevant at finde skæringen mellem ligningerne

$$x = l + vt \tag{9.65}$$
$$t = vx/c^2 \,. \tag{9.66}$$

$c$) Brug Lorentz transformationerne i denne konkrete opsætning til at bevise at vi fra Jorden ser en længdeforkortet pind, $l = L/\gamma$.

### 9.9.30 Togets egenlængde, 19F15

Et tog bevæger sig i stor fart imod en tunnel. Tunnelens egenlængde er $W = 80m$, og togets egenlængde er $L = 100m$. En observatør, ObsA, står stille ved tunnelen og kontrollerer 2 kameraer, et ved tunnelens indgang, og et ved tunnelens udgang. ObsA har sikret sig at disse 2 kameraer altid tager billeder samtidig. Præcis når togets forende er ved tunnelens udgang tager ObsA billeder, og de viser, at toget lige præcis har samme længde som tunnelen.

**A1**. Find togets fart.

Hvis du ikke har fundet togets fart, så kan du blot udtrykke dine svar nedenfor med $v$.

Ombord på toget er 2 passagerer, som har synkroniseret deres ure. Det er observatør Obs$B_f$ ved togets forende, og observatør Obs$B_b$ ved togets bagende.

**A2**. Hvor lang ser de at tunnelen er? Tror de at toget kan passe ind i tunnelen? Forklar meget kort hvorfor/hvorfor ikke. Lav evt. en illustration der hjælper din forklaring.

De 2 tog-observatører kigger ud ad togets vinduer, og observerer præcis hvornår billederne bliver taget.

**A3**. Hvad konkluderer de 2 tog-observatører om, hvornår billederne blev taget: hvilket billede blev taget først, eller blev de taget samtidig? Hvis der er forskel i tid, hvor mange sekunder er forskellen så i deres system?

### 9.9.31 Foton i et rumskib, 19F16

Jeg sidder i et rumskib **R** med egenlængde $L$. Alle ure i rumskibet er synkroniserede, og til tiden $t'_R = 0$ udsendes en foton i rumskibets bagende. Fotonen bevæger sig forlæns og rammer rumskibets forende klokken $t'_R = L/c$.

Du stiller dig i ro på Jorden, **J**, og observerer rumskibet der flyver forbi med den kontante fart $v$. Det bageste ur i rumskibet synkroniseres med et ur i ro på Jorden ved tiden $t_J = t'_R = 0$.

Du skal nu udregne alt set fra dit koordinatsystem i ro på Jorden. Forklar altid kort (få linier) hvor de forskellige faktorer af $\gamma$ og lignende kommer fra.

**Opg 1**. Find Jordens rumtids-koordinater til den event hvor det forreste ur modtager fotonen? Vis at den tid der går fra fotonen bliver udsendt til den rammer rumskibets forende, på rumskibets ur giver $L/c$.

**Opg 2**. Hvis vi istedet betragter en foton der blev udsendt i rumskibets forende til tiden $t'_R = 0$, så ville den i rumskibets inertialsystem ramme bagenden til tiden $t'_R = L/c$.

Find Jordens rumtids-koordinater til den event hvor det bageste ur modtager fotonen? Vis at den tid der går fra fotonen bliver udsendt til den rammer rumskibets bagende, på rumskibets ur igen giver $L/c$.

### 9.9.32 To rumskibe og en Jord, 19F17

Tre personer har hver en pind med samme egenlængde $L$. Benny bliver stående i ro på Jorden, Alberte flyver afsted til højre med konstant fart $v_A/c = 4/5$ i forhold til Benny. Karl flyver afsted til venstre med konstant fart $v_K/c = 3/5$ i forhold til Benny. De nulstiller alle tre deres ure da både Alberte og Karl tilfældigvis flyver forbi Jorden til samme tidspunkt.

**(1)** Alberte har lagt sin pind vinkelret på bevægelsesretningen. Hvor lang ser Benny at pinden er?

**(2)** Da der er gået 5 sekunder på Bennys ur, ser han på Albertes ur. Hvad viser Albertes ur da?

**(3)** Præcis på samme tidspunkt observerer Benny den pind som Karl har taget med i sit rumskib. Pinden ligger langs rumskibets bevægelses retning. Hvor lang ser Benny at pinden er?

**(4)** Benny fortæller at hastighedsforskellen på Alberte og Karls rumskibe er $v_A + v_K = 7c/5$ i Bennys eget inertialsystem. Har han ret i det?

Den næste opgave kan med fordel løses ved blot at bruge din intuition.

**(5)** Alberte ser at Karl bevæger sig afsted med stor fart. Hun gætter på at den fart kan beskrives ved

$$v_{AK} = \frac{v_A \pm v_K}{1 \pm v_A v_K/c^2}, \tag{9.67}$$

hvor **alle farterne i dette udtryk er positive tal.** Alberte kan dog ikke huske om de to $\pm$ tegn er plus eller minus.

(i) Argumentér for om det er plus eller minus i tælleren ved at kigge på små hastigheder.

(ii) Argumentér for om det er plus eller minus i nævneren ved at kigge på store hastigheder.

(iii) Estimér hvor stor $v_{AK}$ er i det konkrete tilfælde (gør det klart om $v_{AK}$ er et tal der er større eller mindre end $c$, og om det er et tal der er større eller mindre end f.eks $v_K$).

**(6)** Når Bennys ur viser $t_1$ spiser han en kage. Alberte vil spise en kage på præcis samme tidspunkt, set i hendes inertialsystem. Forklar hvorfor dette tidspunkt kan findes ved skæringen mellem de 2 linier $t = x/v_A$ og $t = t_1 + v_A x/c^2$. Find dette tidspunkt set fra Bennys koordinatsystem.

**(7)** Karl vil også spise en kage på præcis det samme tidspunkt set fra hans koordinatsystem. Tegn et rumtidsdiagram der viser hvornår Karl og Benny spiser kage, set i Bennys inertialsystem.

**(8)** Find den tidsforskel som Benny måler mellem det tidspunkt Alberte og Karl spiser deres kager, set i Bennys inertialsystem.

# Special Relativitetsteori index