Kapitel 10

Relativistisk Dynamik

Vi udledte de ikke-relativistiske bevægelsesligninger ved at bruge $L = K - V$, så hvad sker der, når vi betragter hastigheder sammenlignelige med lysets? Nogle fysikere har argumenteret for, at man blot skal forsøge sig frem, indtil man finder den rigtige integrant, L, til at få en relativistisk virkning. Man kunne i stedet gøre som Einstein, der stort set sagde at Maxwell's ligninger er korrekte, og så arbejde derfra. Hvis man gætter på følgende Lagrange

$$S = -mc^2 \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt + \frac{1}{2}\left(\epsilon_0 E^2 - \frac{c^2 B^2}{\mu_0}\right) - q \int_{t_1}^{t_2} \left[\phi - \vec{v} \cdot \vec{A}\right] dt\,, \tag{10.1}$$

så viser det sig, at man kan udlede Maxwell's ligninger og Lorentz kraften, så det er altså den rigtige form. Men kan vi måske i stedet argumentere for nogle fundamentale principper, og derfra udlede at dette er den (eneste) rigtige form? [1]

Hvis du kigger på det første led i virkningen, så er integranten givet ved $-mc^2/\gamma$, og det er jo ikke umiddelbart det, vi normalt kalder kinetisk energi. Det sidste led indeholder partikel ladningen, q, så det har nok noget med elektriske partikler at gøre.

10.1 Et fundamentalt princip

Vi vil nu i stedet argumentere for, hvilke egenskaber den relativistiske Lagrange skal have. Vi ved at Euler-Lagrange ligningerne giver de fysiske bevægelses ligninger, og vi vil kræve at de er uafhængige af, hvilket inertialsystem de betragtes fra. F.eks beskriver Maxwells ligninger ladede partikler og fotoner, og vi kræver at fysikken er den samme, uanset inertialsystem. Specielt kommer lysets hastighed jo fra Maxwells ligninger, og vi kræver at lysets hastighed er den samme for alle observatører uanset hvilket inertialsystem de sidder i.

Det absolut letteste ville være, hvis vi kunne opbygge virkningen (som skal minimeres) af invariante størrelser. Du kunne måske være opfindsom og opbygge virkningen af andre ting, men det kommer vi ikke til at forsøge os med her. Vi har indtil nu kun stødt på en eneste invariant, nemlig egentiden (proper time), τ. Vi har naturligvis også at alle tal og konstanter er

[1] Jeg har ikke gjort et forsøg på at forklare, hvad de forskellige led ovenfor er, men jeg kan røbe at q er en ladning, E-feltet kommer fra $-\nabla\phi$ (det er præcis på samme måde som at tyngdefeltet kommer fra gradienten af tyngdepotentialet), $\vec{A}$ kommer til at give dig fotonen, og magnetfelter kommer fra $\nabla \times \vec{A}$, men alt dette er ikke vigtigt for os lige nu.

invariante, såsom $2, \pi, c, \cdots$. Massen m, altså den størrelse der bestemmer tyngdeaccelerationen mellem 2 objekter, må også være en invariant, for ellers ville gravitational vekselvirkning afhænge af observatøren. Vi skulle måske også forvente at den indre energi af et system er en invariant, for et systems tilstand bør ikke afhænge af en observatørs bevægelse. Men det må vi komme tilbage til lidt senere.

Virkningen er jo et integral fra start til slutpunkt, og hvert lille skridt har sin egen egentid, så hvis vi siger

$$S = \text{konstant} \sum \Delta\tau \,, \tag{10.2}$$

så er vi sikre på at den samlede virkning er invariant, dvs den giver det samme, uanset hvilket inertialsystem vi udregner den i. For infinitisimale skridt bliver dette til

$$S = \text{konstant} \int_{\text{start}}^{\text{slut}} d\tau \,. \tag{10.3}$$

For små skridt gælder $d\tau^2 = dt^2 - dx^2$, hvilket medfører

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{1-v^2} = \frac{1}{\gamma} \,, \tag{10.4}$$

så dermed har vi

$$S = \text{konstant} \int_{\text{start}}^{\text{slut}} \sqrt{1-v^2}\, dt \,. \tag{10.5}$$

Hvad er den ukendte konstant i virkningen? Der må gælde, at for lave hastigheder genfinder vi den normale ikke-relativistiske virkning, $L_{\text{non-rel}} = \frac{1}{2} mv^2$. Så hvis vi bruger en Taylor udvikling $\sqrt{1-v^2} \approx 1 - \frac{1}{2} v^2$, ser vi at

$$L = \text{konstant} \sqrt{1-v^2} \approx \text{konstant} \left(1 - \frac{1}{2} v^2\right) \,, \tag{10.6}$$

Det første led (som kommer fra 1-tallet ovenfor) har ingen effekt på bevægelsesligningerne. For at genfinde $L_{\text{non-rel}}$ må vi have konstant $= -$m. Hvis vi genindfører lysets hastighed (check selv enhederne) har vi derfor

$$S = -mc^2 \int_{\text{start}}^{\text{slut}} \frac{1}{\gamma}\, dt \,. \tag{10.7}$$

10.2 Relativistisk impuls

Vi ved, at impulsen findes fra den afledte af Lagrangen, eq. (5.19),

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \,. \tag{10.8}$$

Da vi nu har $L = -m/\gamma$ (se ligning (10.7) ser vi at

$$\begin{aligned} p &= m\gamma\dot{x} \\ &= \gamma m v \,. \end{aligned} \tag{10.9}$$

Plot mv og γmv som funktion af hastigheden.

Vis at du kan omskrive ligning (10.9) til

$$p = m\,\frac{dx}{d\tau}\,. \tag{10.10}$$

Prøv at fortolke hvad dette betyder, i forhold til den ikke relativistiske impuls $p = m\,dx/dt$.

Ifølge boxen ovenfor kunne vi måske have gættet den rigtige form for den relativistiske impuls ligning (10.7), men nu har vi altså i stedet udledt den fra den fundamentale antagelse om fysikkens invarians overfor valg af inertialsystem.

Check at grænsen $v \to 0$ for ligning (10.9) er korrekt.
Sammenlign hvad der sker når $v \to c$, for den relativistiske og ikke-relativistiske impuls.

10.3 Relativistisk energi

Vi ved at den totale energi kan findes ved, ligning (5.30)

$$E = \dot{x}\,\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L\,. \tag{10.11}$$

Hvis vi benytter $L = -m/\gamma$ ser vi at

$$\begin{aligned} E &= \gamma m\dot{x}^2 + \frac{m}{\gamma} \\ &= m\gamma\,. \end{aligned} \tag{10.12}$$

Og hvis vi genindfører lysets hastighed ser vi $E = \gamma mc^2$.

Hvad bliver den relativistiske energi når $v = 0$? I ikke-relativistisk mekanik er nulpunktet for energien ubestemt, men vi ser altså at nulpunktet for energien i relativistisk mekanik er helt fastlagt.
Brug Taylor udvikling til at vise

$$E = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \cdots\,. \tag{10.13}$$

Det andet led i ligning (10.13) er den normale kinetiske energi, og det første led er den energi der kommer fra at skabe partiklen. Det første led er uafhængigt af hastigheden, så det kan kaldes hvile-energien. Det giver rigtig god mening at kalde det for egen-energien (kan du se hvorfor?).

Det er vigtigt at huske, at ligning (10.13) er en Taylor udvikling. Det vil sige, at for store hastigheder skal der flere led til, og man kan *ikke* generelt sige at $E = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2$.

Energien og impulsen hænger sammen. F.eks kan vi betragte en masseløs partikel, og den har både energi og impuls, selvom dens masse er nul. Hvordan ser denne sammenhæng mon ud?

> Brug $E = \gamma m$ og $p = \gamma m v$ til at vise at der helt generelt gælder
>
> $$E^2 = m^2 + p^2 \,. \tag{10.14}$$
>
> Brug enheder til at indsætte det rigtige antal c'er. Hvad bliver denne ligning for masseløse partikler?
> Det er helt iorden lige at stoppe op og kigge en ekstra gang på dette resultat. Vi har jo at $E = \gamma m$, så hvad betyder det, når $\gamma = \infty$ og $m = 0$? Du kan godt høre matematikerne skære tænder, ikke sandt? Ikke desto mindre er det et analytisk eksakt resultat at $p = E/c$ for fotoner og andre masseløse partikler, som altså har impuls selvom de har $m = 0$.

Vi ved at energien E afhænger af observatøren (eq. 10.12), og tilsvarende afhænger impulsen af observatøren. Det er ret imponerende, at vi kan lave en invariant ved at trække 2 ikke-invarianter fra hinanden

$$m^2 = E^2 - p^2 \,. \tag{10.15}$$

På tilsvarende måde så vi jo at egentiden, som er en invariant, kan skrives som forskellen mellem 2 ting der ikke selv er invariante (eq. (9.40)

$$\tau^2 = t^2 - x^2 \,. \tag{10.16}$$

Vi ser her hvordan sættet (t, x) hænger sammen på præcis samme måde som sættet (E, p). I sektion 10.6 nedenfor vil du se, at det kan formuleres smukt matematisk ved at de transformerer som en 4-vektor, men allerede nu skal du huske det sjove minus tegn vi fandt i ligning (9.39), som betyder at disse 4-vektorer ikke opfører sig helt som de normale vektorer vi er vant til.

10.3.1 Relativistisk partikel i et potential

Lad os som eksempel betragte en partikel der bevæger sig i et potential $U = -k/r$. I sfæriske koordinater skal vi nok skrive $\gamma = 1/\sqrt{1 - \dot{r}^2 - r^2\dot{\phi}^2}$. Vi gætter nu på at Lagrangen skal skrives som

$$L = -\frac{m}{\gamma} + \frac{k}{r} \,. \tag{10.17}$$

Vi kan nu direkte udregne at

$$p_\phi \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m\gamma r^2 \dot{\phi} \,. \tag{10.18}$$

Og da $\partial L/\partial \phi = 0$, så må dette være en konstant størrelse, dvs $dp_\phi/dt = 0$. Overvej lige hvilken fortolkning vi skal tillægge denne konstante størrelse.

Den anden afledte er

$$p_r \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\gamma \dot{r} \,, \tag{10.19}$$

og da vi har

$$\frac{\partial L}{\partial r} = \gamma m r \dot{\phi}^2 + \frac{U}{r}\,, \tag{10.20}$$

ser vi at

$$\frac{d\left(m\gamma\dot{r}\right)}{dt} = \gamma m r \dot{\phi}^2 + \frac{U}{r}\,. \tag{10.21}$$

Eftersom Lagrangen ikke indeholder en eksplicit tidsafhængighed, $\partial L/\partial t = 0$, ved vi at Hamiltonen er en konstant, $\dot{H} = 0$. Lad os udregne hvad Hamiltonen rent faktisk er i dette tilfælde. Vi har

$$H \equiv \sum \dot{q}p - L \tag{10.22}$$

$$= \gamma m \dot{r}^2 + \gamma m r^2 \dot{\phi}^2 - \left(-\frac{m}{\gamma} + \frac{k}{r}\right) \tag{10.23}$$

$$= \gamma m - \frac{k}{r}\,. \tag{10.24}$$

Det er altså den totale energi, ligesom $E+U$. Specielt når vi rækkeudvikler for små hastigheder ser vi at $H \approx mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 - k/r$.

10.3.2 Bevarelse af impuls og energi

I eksemplet med en in-elastisk kollision, hvor vi fandt hastigheden af den resulterende partikel i ligning 10.60, brugte vi argumentet om isoleret og lukket system til at finde konstant impuls og energi i reaktionen. Men var det ikke lidt for simpelt? Kan vi være sikre på at disse argumenter holder for partikler med relativistiske hastigheder?

Lad os se hvordan Lagrangen for et sådant system må se ud. For det første er Lagrangen additiv, så der må være et led for hver partikel

$$L_1 = \frac{-m_p c^2}{\gamma_p} \quad \text{og} \quad L_2 = \frac{-M_d c^2}{\gamma_d}\,. \tag{10.25}$$

Der må også være et led, der afhænger af afstanden mellem partiklerne, $U(x_p - x_d)$. Dette led kan være ekstremt kompliceret, men det eneste vi er interesserede i er, at det nødvendigvis kun kan afhænge af den relative indbyrdes afstand. Derfor må den samlede Lagrange være af formen:

$$L = -\frac{m_p c^2}{\gamma_p} - \frac{M_d c^2}{\gamma_d} - U(x_p - x_d)\,. \tag{10.26}$$

Og nu kan vi se, at denne Lagrange ikke har en eksplicit tidsafhængighed (energibevarelse), og tilsvarende er den invariant under en rumlig forskydning (impulsbevarelse).

10.3.3 Transformation mellem reference systemer

Når vi skal udregne reaktioner mellem partikler, så kan det være nyttigt at transformere fra det ene til det andet inertial-system. Og i de tilfælde skal man ofte benytte sig af hastigheds-additionsformlen

$$v'' = \frac{v + v'}{1 + \frac{vv'}{c^2}}\,, \tag{10.27}$$

hvor v f.eks. er hastigheden af rumskibet set fra Jorden, v' er hastigheden af bolden set fra rumskibet, og v'' er hastigheden af bolden set fra Jorden. Nedenfor kommer enkelte eksempler på en transformation mellem forskellige inertial-systemer.

10.3.4 To ens partikler med samme fart

Der er mange slags partikel eksperimenter, nogle har fixed-target, typisk bly eller andre tunge partikler der ligger stille i laboratoriet. Andre eksperimenter har 2 partikler begge med stor fart, som rammer sammen. Lad os betragte et eksempel på det sidste.

To protoner med masse m_p kommer imod hinanden med samme fart, v, set i laboratoriets inertial-system. Find proton1's energi set fra proton2's inertial-system.

Vi ved at energien kan skrives som $E_1 = \gamma_1 m_p$, hvor γ_1 kommer fra hastigheden af proton1 set fra proton2.

Fra hastigheds-additions-formlen har vi

$$v_1 = \frac{2v}{1 + v^2/c^2}\,, \tag{10.28}$$

og ved at regne lidt (gør det!) finder man

$$\gamma_1 = \frac{1 + \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,. \tag{10.29}$$

Hvis vi tager et eksempel hvor $v/c = 4/5$, så finder vi at $E_1 = \frac{41}{9}\, m_p c^2$. Dette kan sammenlignes med energien set fra laboratorie systemet, hvor hver partikel har energi $\frac{15}{9}\, m_p c^2$.

10.3.5 Center of Momentum

Vi har to partikler med masse m. Den ene ligger stille i laboratoriet, og den anden bevæger sig med fart v_i. Find farten, $v_{\rm cm}$, af det inertial-system der ligger stille i forhold til center-of-momentum, CoM.

Lad os kalde CoM for det mærkede inertial-system. Vi har brug for at opskrive partiklernes hastigheder set fra CoM. Den ene partikels hastighed er let, for den lå stille i laboratoriesystemet, så der må gælde $v'_1 = v_{\rm cm}$. Til den anden partikel skal vi bruge hastigheds-additionsformlen, $v'_2 = (v_i - v_{\rm cm})/(1 - v_i\, v_{\rm cm}/c^2)$.

Da det er CoM har vi $p'_1 = p'_2$, hvor $p'_1 = \gamma'_1\, m\, v'_1$ og tilsvarende for partikel 2. Af symmetrigrunde må der også gælde at $\gamma'_1 = \gamma'_2$. Vi har derfor $v'_1 = v'_2$, hvilket kan skrives som

$$v_{\rm cm} = \frac{v_i - v_{\rm cm}}{1 - \frac{v_i\, v_{\rm cm}}{c^2}}\,, \tag{10.30}$$

hvilket er en kvadratisk ligning som løses med (check at det er korrekt!)

$$\frac{v_{\rm cm}}{c} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - v_i^2/c^2}}{v_i/c}\,. \tag{10.31}$$

I den ikke-relativistiske grænse ville vi forvente $v_{\rm cm} = v_i/2$, så vi ser at vi skal bruge det negative fortegn

$$\frac{v_{\rm cm}}{c} = \frac{1 - \sqrt{1 - v_i^2/c^2}}{v_i/c}\,. \tag{10.32}$$

10.4 Hvordan man regner på reaktioner

Når du har partikler der vekselvirker (f.eks kolliderer, henfalder eller annihileres) så er de praktiske redskaber rimeligt ligetil. Før vi udviklede speciel relativitetsteori brugte vi oftest impuls og energi-konstanthed i reaktioner, og det viser sig, at det stort set er præcist det samme, der skal til nu. Nogle gange kan selve udregningerne dog blive lidt lange. Vi vil nu præsentere hvilke skridt der oftest er de letteste at bruge.

1. Det første skridt er at vælge et inertial system. Langt de fleste gange er det mere eller mindre oplagt, hvilket inertialsystem der nok er smartest at bruge. Det er typisk "laboratorie-systemet" eller "Center-of-Momentum" (CoM) systemet, der gør udregningerne simplest.

2. Nu skal du sikre, at du har med et lukket og isoleret system at gøre, så du kan bruge konstanthed af energi og impuls, $\Delta E = 0$ og $\Delta p = 0$. Du skal nu (oftest) stille og roligt opskrive både energi og impuls for alle involverede partikler, hvor du passer på hvilket inertialsystem du står i.

Hvis du ikke har et isoleret og lukket system, så inkluderer man typisk nogle flere partikler, indtil det samlede system er lukket og isoleret.

3. Ofte er det en fordel at benytte den fantastiske sammenhæng at

$$E^2 - p^2 = m^2 \,. \tag{10.33}$$

Denne formel betyder for fotoner at $E = p$ (når vi bruger enheder med $c = 1$).

Det er værd at knytte enkelte ekstra kommentarer til denne fantastiske sammenhæng. Den gælder for en partikel, uanset i hvilket inertialsystem partiklen betragtes fra (i hvile eller i bevægelse). Hvis du har en samling af partikler, så gælder der at $E^2_{\text{total}} - p^2_{\text{total}} = E'^2_{\text{total}} - p'^2_{\text{total}}$ for 2 forskellige reference systemer, men denne differens giver kvadratet på den totale energi i partiklernes hvilesystem, hvilket reduceres til partikelmassen for en enkelt partikel.

4. Hvis du er ude efter at finde en hastighed, så kan man med fordel benytte at $E = \gamma m$ og $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$ medfører at

$$\vec{v} = \frac{\vec{p}}{E} \,. \tag{10.34}$$

10.4.1 Enkelte overvejelser

Inden vi går igang med konkrete gennemregnede eksempler, så er det værd at overveje sammenhængen mellem isolerede og lukkede systemer. Før vi arbejdede med relativitetsteori fandt vi, at man sagtens kan forestille sig et lukket system som ikke er isoleret. Og tilsvarende fandt vi eksempler på at et isoleret system ikke behøver være lukket. Men hvad sker der nu, når vi regner relativistisk? Hvis du har en konstant størrelse, så skal dens konstanthed være uafhængig af hvilket inertialsystem du betragter den fra. Det vil f.eks sige, at hvis du har en reaktion med konstant impuls, så vil du finde impulskonstanthed uanset om du betragter reaktionen fra Jorden eller fra en rumskib. Det kan du se ved at Lorentz transformationerne er lineære, hvilket vil sige at vi kan skrive en LT for $\Delta E = E_f - E_f$. Dette medfører blandt andet at vi får to LT der hedder

$$\Delta E = \gamma \left(\Delta E' + v \Delta p' \right) \,, \tag{10.35}$$

$$\Delta p = \gamma \left(\Delta p' + v \Delta E' \right) \,, \tag{10.36}$$

så hvis du har et inertial system hvor energi og impuls er konstante størrelser, $\Delta E' = 0$ og $\Delta p' = 0$, så gælder det for alle inertial systemer. For det andet, så ser du at hvis du har et lukket system, hvor $\Delta E = 0$ og $\Delta E' = 0$, så tvinger ligning (10.35) dig til $\Delta p' = 0$, hvilket vil sige at systemet også er isoleret. Det samme argument giver at et isoleret system også er lukket. Det vil med andre ord sige, at når vi præciserer at "vi har et isoleret *og* lukket system", så gentager vi faktisk os selv.

10.4.2 Spontant partikel henfald

Vi betragter en reaktion, hvor en tung partikel med masse M spontant henfalder til 2 partikler med masser m_1 og m_2. Find energien af hver af disse 2 resulterende partikler.

1. Vi vælger et inertial-system hvor den første partikel er i hvile.

2. Systemet påvirkes ikke af andre partikler, så det er både lukket og isoleret. Vi kan nu starte med at opskrive energi-konstantheds ligningen, som siger

$$E_i = M = E_f = E_1 + E_2\,. \tag{10.37}$$

Tilsvarende kan vi opskrive en ligning for impuls-konstanthed

$$\vec{p}_i = 0 = \vec{p}_f = \vec{p}_1 + \vec{p}_2\,. \tag{10.38}$$

Det betyder altså at de 2 resulterende partikler ryger hver sin vej, og størrelsen af deres impulser er ens, $p_1 = p_2 = p$.

3. Nu bruger vi den fantastiske sammenhæng (10.33) for hver af de resulterende partikler

$$E_1^2 - m_1^2 = p^2 \tag{10.39}$$

$$E_2^2 - m_2^2 = p^2\,, \tag{10.40}$$

hvor vi har brugt at deres impulser er ens. Vi har derfor

$$E_1^2 - m_1^2 = E_2^2 - m_2^2\,. \tag{10.41}$$

Vi har hermed 2 ligninger med 2 ubekendte (den anden ligning var $M = E_1 + E_2$) som kan løses og giver

$$E_1 = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M}\,, \quad E_2 = \frac{M^2 + m_2^2 - m_1^2}{2M}\,. \tag{10.42}$$

Hvis du er ude efter at finde impulsen, så kan du nu bruge $E_1^2 - m_1^2 = p^2$.

Du kan også checke (gør det!), at hvis $M = m_1 + m_2$ så bliver $E_1 = m_1$ og dermed bliver $p = 0$.

Nu er vi faktisk færdige med denne opgave, men vi vil alligevel løse det en gang til, men på en anden måde.

Istedet for at bruge den fantastiske sammenhæng (10.33) på hver af de resulterende partikler, så vil vi bruge formlen på hele systemet. Det vil sige vi vil udregne $M^2 = E_f^2 - p_f^2$. Bemærk at vi her har lov til at bruge M^2 fra start-situationen og $E_f^2 - p_f^2$ fra slut-situationen. Hvis vi indsætter $p_f = p_1 + p_2$ og $E_f = E_1 + E_2$ får vi

$$M^2 = m_1^2 + 2p_1^2 + E_1 E_2 + m_2^2\,. \tag{10.43}$$

Du bliver nok nødt til at lave nogle mellemregninger her i margen, for at opdage at vi f.eks har brugt $\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 = p_1^2$. Højresiden kan nu omskrives til $-m_1^2 + m_2^2 + 2E_1 M$, hvor vi har brugt $E_f = E_1 + E_2$ og $p_1^2 = E_1^2 - m_1^2$. Denne sidste formel kan nu omskrives til

$$E_1 = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M}\,. \tag{10.44}$$

Ok, nu spørger du nok hvad formålet lige var med denne ekstra udregning? Pointen er, at der er mange veje til det rigtige resultat. Nogle gange er man heldig og man finder en (relativ) let måde at finde en løsning på, og nogle gange er man lidt mindre heldig, og man bliver nødt til at regne i længere tid. Men fortvivl ikke. Sålænge du bare holder dig til reglerne (energi- og impuls-konstanthed, og den fantastiske sammenhæng) så skal det nok lykkes til sidst!

10.4.3 Henfald med en vinkel

Forestil dig en partikel med mass M og energi E der bevæger sig langs x-aksen. Partiklen henfalder til to identiske partikler med masse m. Lad os sige at den ene helfalder vinkelret på den oprindelige partikels hastighed set i Lab, og den anden med en vinkel θ i forhold til x-aksen. Find energierne af de resulterende partikler. Se derefter om dette henfald kan ske med alle mulige vinkler.

Inden vi går igang, så overvej kort om du tror at dette henfald kan ske med alle mulige vinkler? Du kan nok overbevise dig selv om, at hvis både impuls og energi skal være konstante, så er der en sammenhæng mellem masser, energier, og vinklen.

1. Vi kender information i Lab, så det vælger vi som inertial system.

2. Systemet er isoleret og lukket, så vi kan bruge konstant impuls og energi i henfaldet. Energierne konstanthed kan skrives som

$$E = E_1 + E_2\,. \tag{10.45}$$

De 2 resulterende partiklers impulser kan vi skrive som $\vec{p}_1 = (0, p_1, 0)$ og $\vec{p}_2 = (0, p_2 \cos\theta, -p2_{\sin}\theta, 0)$.

Impulskonstanthed giver derfor følgende 2 ligninger fra x og y akserne

$$p = p_2 \cos\theta \tag{10.46}$$
$$0 = p_1 - p_2 \sin\theta\,. \tag{10.47}$$

Vi kan nu se, at vi kan skrive E_2 som $E_2^2 = p_2^2 + m^2 = p^2(1 + \tan^2\theta + m^2 = p^2 + p_1^2 + m^2 = p^2 + E_1^2$.

Hvis vi omskriver (og kvadrarer) energi-konstanthedsligningen (gør det!) ser vi at $(E - E_1)^2 = E_2^2$fører til

$$E_1 = \frac{E^2 - p^2}{2E} = \frac{M^2}{2E}\,. \tag{10.48}$$

Tilsvarende kan du vise at

$$E_2 = \frac{E^2 + p^2}{2E} = \frac{2E^2 - M^2}{2E}\,. \tag{10.49}$$

Du bør nu selv checke at $E = E_1 + E_2$ som tegn på at vi har regnet rigtigt.

Selve vinklen kan vi finde fra $p_1 = p_2 \sin\theta$, hvilket betyder

$$\sin\theta = \sqrt{\frac{E_1^2 - m^2}{E_2^2 - m^2}}\,. \tag{10.50}$$

Prøv selv at undersøge grænser, f.eks når du bruger $E = \gamma M$ kan du tage grænsen ved $\gamma \approx 1$, eller når γ bliver stor.

10.4.4 Elastisk sammenstød

Forestil dig to identiske partiker med masse M. Den ene ligger stille i laboratoriet, og den anden bevæger sig med stor fart v og energi E langs x-aksen imod partiklen i ro. De 2 partikler kolliderer elastisk (det er derfor de samme partikler der kommer ud efter kollisionen) og får begge en vinkel θ i forhold til x-aksen set i Lab. Find denne resulterende vinkel.

1. Vi har al information i Lab, og vi ønsker at finde vinklen set i Lab, så vi vælger dette som vores inertial system.

2. Systemet er isoleret og lukket, så der gælder både impuls- og energi-konstanthed i reaktionen.

Vi kan opskrive energi-konstanthed ved

$$E + m = E_1 + E_2\,. \tag{10.51}$$

Impulskonstanthed giver en ligning både langs x- og y-aksen

$$p = p_1 \cos\theta + p_2 \cos\theta \tag{10.52}$$
$$0 = p_1 \sin\theta - p_2 \sin\theta\,. \tag{10.53}$$

Da vinklerne er antaget at være ens, ser vi fra y-impuls ligningen at $p_1 = p_2$, og dermed er $E_1 = E_2$. Vi vil herefter referere til disse som p_f og E_f.

Energi ligningen giver $E_f = (E + M)/2$ og x-impuls ligningen giver $p_f \cos\theta = p/2$.

For hver af de resulterende partikler gælder jo den fantastiske sammenhæng

$$E_f^2 - p_f^2 = M^2\,, \tag{10.54}$$

så ved at sætte ind og reducere (gør det!) finder du

$$\cos^2\theta = \frac{E + M}{E + 3M}\,. \tag{10.55}$$

Vi kan nu undersøge forskellige grænser, e.g. den relativistiske grænse hvor $E \gg m$, hvilket giver $\cos\theta \approx 1$, hvilket altså vil sige at de 2 partikler fortsætter næsten ligefrem.

I den anden ekstreme grænse hvor $E \approx m$ ser du at $\cos^2\theta \approx 1/2$. Det er altså $\theta = 45$ grader, hvilket vil sige at de to partikler har 90 grader imellem sig. Hvis du har spillet billard, så kendte du godt dette resultat.

10.4.5 Uelastisk sammenstød mellem proton og bly

Forestil dig 2 partikler (en hurtig proton, m_p, og en detektor partikel af bly, M_d) der laver et uelastisk sammenstød. Vi starter med at vælge et inertial-system, hvor den tunge detektor-partikel ligger i ro, $v_d = 0$. Vi kan nu skrive impuls før og efter, når vi kalder den sluttelige partikel M_s:

$$p_{init} = \gamma_p m_p v_p \,, \tag{10.56}$$

$$p_{final} = \gamma_s M_s v_s \,. \tag{10.57}$$

Overvej lige, om vi kan sige at $M_s = m_p + M_d$, og hvorfor ikke? (Hint: det kan vi ikke).

Vi kan også skrive energien før og efter:

$$E_{init} = \gamma_p m_p c^2 + M_d c^2 \,, \tag{10.58}$$

$$E_{final} = \gamma_s M_s c^2 \,. \tag{10.59}$$

Hvis vi betragter et isoleret system, så er der impulsbevarelse, $p_{init} = p_{final}$, og hvis vi samtidig betragter et lukket system, så er der energibevarelse, $E_{init} = E_{final}$. Vi kan nu bruge disse 2 ligninger til at isolere sluthastigheden v_s (gør det!) og vi finder

$$v_s = \frac{\gamma_p m_p v_p}{\gamma_p m_p + M_d} \,. \tag{10.60}$$

Du kunne også vælge at isolere M_s, og så finder du $\gamma_s M_s = \gamma_p m_p + M_d$, hvilket altså viser at der *ikke* gælder generelt at $M_s = m_p + M_d$.

Hvis $M_d \gg \gamma_p m_p$ så har vi at $\gamma_s \approx 0$. Det vil altså sige at protonen kommer flyvende med energi $\gamma_p m_p$ som stort set alt sammen bliver konverteret til masse. Det er klart da hastigheden af den resulterende partikel går som $v_s \sim m_p/M_d$, og da den kinetiske energi er $\sim M_s v_s^2$ så ser vi at den kinetiske energi er forsvindende lille når $M_d \gg \gamma_p m_p$. En ikke-relativistisk analogi er, når en flue rammer forruden på en bil, så bliver den kinetiske energi konverteret til termisk energi (som ændrer massen) men stort set intet går til at ændre den kinetiske energi af bilen.

10.5 Eksempler med fotoner

10.5.1 Henfaldende Dark Matter partikel

Du har en Dark Matter partikel med masse m, der henfalder til 2 fotoner. Find energien af hver af disse fotoner.

1. Vi vælger det inertial system, hvor DM partiklen ligger stille. Så har vi $E_i = m$ og $\vec{p}_i = 0$.

2. Vi kan se bort fra alle andre vekselvirkninger, så systemet er isoleret og lukket. Fra impulskonstanthed ser vi at

$$\vec{p}_i = \vec{p}_f = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \,, \tag{10.61}$$

hvor indekser angiver de 2 fotoner. Da $\vec{p}_i = 0$ ser vi, at de 2 fotoner bliver udsendt hver deres vej, og at der specielt gælder at $p_1 = p_2 \equiv p$. Da det er fotoner gælder derfor e.g. at $E_1 = p_1$.

Energi-konstanthed giver at

$$E_i = E_f = 2p\,, \tag{10.62}$$

og dermed har vi svaret at

$$p = \frac{mc}{2}\,, \tag{10.63}$$

hvor vi har genindført lyshastigheden for at få enhederne til at passe.

Overvej hvad det betyder, at alle fotoner bevæger sig lige hurtigt (med farten c), men at de samtidig kan have forskellige impulser.

10.5.2 To fotoner der kolliderer

Vi har 2 fotoner med den samme energi, E, der kollliderer med en vinkel θ set i laboratorie systemet. Disse bliver til en partikel med masse M. Find denne masse, og se hvordan den afhænger af vinklen mellem fotonerne.

1. Vi kender fotonernes energi og vinkel i laboratorie-systemet, så det vælger vi som inertialsystem. I slut-tilstanden vil partiklen have energi E_M og bevæge sig med en hastighed v_M.

2. Vi kan se bort fra alle andre vekselvirkninger, så systemet er isoleret og lukket. Vi kan derfor bruge konstanthed af impuls og energi.

Foton-1 har energi $E_1 = E$. Hvis vi lægger vores x-akse den vej foton-1 bevæger sig, så kan vi skrive dens impuls som $\vec{p}_1 = (p_1, 0, 0)$.

Tilsvarende for foton-2 kan vi skrive, $\vec{p}_2 = (p_2 \cos\theta, p_2 \sin\theta, 0)$, hvor vi har lagt dens bevægelse i (x, y) planet. Da det er fotoner med ens energi gælder der $E_1 = E_2 = p_1 = p_2 = p$.

Da der er energi-konstanthed har vi

$$E_M = 2E\,. \tag{10.64}$$

Da vi har impuls-konstanthed har vi

$$p_M = (E + E\cos\theta, E\sin\theta)\;. \tag{10.65}$$

3. Nu bruger vi den fantastiske sammenhæng (10.33) på slut-partiklen

$$M^2 = E_M^2 - p_M^2\,. \tag{10.66}$$

Hvis du sætter ind på højresiden og regner lidt (gør det!), så finder du at

$$M = E\,\sqrt{2\,(1-\cos\theta)}\,. \tag{10.67}$$

Det vil altså sige, at hvis de 2 partikler kommer head-on (med vinklen $\theta = 180$ grader imellem sig), så vil slut-partiklen have massen $M = 2E$. Dette svarer jo præcist til eksemplet med en henfaldende Dark Matter partikel i sektion 10.5.1. Hvis derimod vinkel mellem fotonerne er nul grader, så er massen af slut-partklen nul, $M = 0$. Det betyder altså, at den resulterende partikel er en foton med den dobbelte energi.

Det er muligt at du i senere kurser vil høre om, at fotonen har (en indre egenskab der hedder) spin 1. Til den tid kan du overveje om det er muligt for 2 fotonen at blive til en foton.

10.5.3 Par-produktion

I høj-energi reaktioner ser man ofte, at der i begyndelses-tilstanden er en foton, og at der i slut-tilstanden er et elektron-positron par. Vi vil derfor undersøge hvilken slags reaktioner, der kan udvikle sig på den måde.

En foton kan naturligvis ikke henfalde til en elektron alene, for i en sådan reaktion er der ikke ladnings-konstanthed. Men lad os i første omgang stille det mere generelle spørgsmål

Kan en foton henfalde til 1 massiv partikel?

1. Vi stiller os i laboratorie systemet.

2. Der er kun 1 foton, så det er et isoleret og lukket system.

Fotonens energi er E_i, og impulsen er p_i. Konstanthed af energi og impuls betyder derfor at den resulterende partikel må have $E_f = E_i$, og $p_f = p_i$.

3. Vi bruger nu den fantastiske sammenhæng (10.33) på partiklen i slut-tilstanden

$$m^2 = E_f^2 - p_f^2 \,. \tag{10.68}$$

Når du sætter ind og bruger at for fotoner gælder der $E_i = p_i$, ser du at det betyder

$$m = 0 \,. \tag{10.69}$$

Vi må derfor konkludere, at en foton *ikke* kan henfalde til en massiv partikel.

Kan en foton henfalde til 2 massive partikler?

Vi kunne forestille os at slut-tilstanden består af en elektron og en positron, for på den måde er ladning en konstant størrelse. Men spørgsmålet er, om denne reaktion kan lade sig gøre, hvis der ikke er andre partikler i nærheden? Vi vil nu vise at svaret er *nej*!

1. Vi vælger igen laboratorie systemet.

2. Der er ikke andre partikler, så vi har et lukket og isoleret system.

Fotonen har igen E_i og p_i. Og slut-tilstandens energi kan derfor skrives som

$$E_i = E_f = \gamma_1 m_1 + \gamma_2 m_2 \,, \tag{10.70}$$

hvor γ_1 er den ukendte gamma-faktor for elektronen, og tilsvarende γ_2 er for positronen. Vi benytter nu at elektronen og positronen har samme masse, $m_1 = m_2 = m_e$.

Impuls-konstanthed fører tilsvarende til

$$\vec{p}_i = \vec{p}_f = \gamma_1 m_e \vec{v}_1 + \gamma_2 m_e \vec{v}_2 \,. \tag{10.71}$$

Vi kender ikke størrelsen af de 2 hastigheder v_1 og v_2, men vi ved at de begge må være mindre end lysets hastighed, da elektronen og positronen begge har masse $m_e = 511\,\text{keV}$.

Vi ved, at fotonen opfylder $E_i = p_i$, men eftersom der altid må gælde

$$\gamma_1 + \gamma_2 > |\gamma_1 \vec{v}_1 + \gamma_2 \vec{v}_2| \,, \tag{10.72}$$

så ser vi altså, at man ikke kan have *både* energi *og* impuls-konstanthed i denne reaktion.

Vi konkluderer derfor, at en foton ikke kan henfalde til et elektron-positron par, *hvis der ikke er andre partikler involveret.* Spørgsmålet er derfor, om en foton kan henfalde, hvis der er en ekstra partikel tilstede til at fjerne noget af impulsen?

Hvad hvis der er en ekstra partikel involveret?

Vi antager nu, at der en partikel med masse M, som ligger stille i laboratorie-systemet. En foton med energi E kommer ind og rammer denne partikel. Slut-tilstanden indeholder stadig den massive partikel, men også et elektron-positron par. Vi vil nu vise, at denne ekstra partikel er inkluderet for at tage lidt af impulsen og energien, sådan at reaktionen rent faktisk kan ske.

1. Vi vælger igen laboratorie-systemet, hvor partiklen med masse M ligger stille.

2. For at gøre udregningen let, så lad os antage at elektron-positron parret skabes i ro. Vi antager også, at den ekstra partikel er meget massiv i forhold til elektronen. Da fotonen nok har energi lige omkring 2 elektron-masser, så vil det altså betyde at $E_{\text{foton}} \ll M$.

Impuls-konstanthed giver at

$$p_{\text{foton}} = M v_M \,, \tag{10.73}$$

hvor v_M er den resulterende hastighed af den ekstra partikel.

Vi kan nu skrive energi-konstanthed ved

$$E_{\text{foton}} + M = 2m_e + \gamma_M M \,, \tag{10.74}$$

hvor γ_M kommer fra den massive partikels slut-hastighed.

Da vi har antaget at den ekstra partikel er meget massiv, så får den kun en ikke-relativistisk hastighed, så vi kan bruge at $\gamma - 1 \approx \frac{1}{2} M v_M^2$. Hvis vi samtidig bruger ligning (10.73) omskrevet til $v_M = E_{\text{foton}}/M$ i ligning (10.74) så ser vi

$$E_{\text{foton}} = 2m_e + \frac{E_{\text{foton}}^2}{2M} \,. \tag{10.75}$$

Eftersom vi har antaget at $M \gg E$ så betyder dette at

$$E_{\text{foton}} \approx 2m_e \,. \tag{10.76}$$

Vi ser altså at *både* energi og *impuls* er konstante størrelser. Det er altså en mulig reaktion, hvor det eneste denne ekstra partikel gør er, at fjerne en impuls der tilsvarer dens slut-hastighed $v_M \approx 2m_e/M$ og den tilsvarende energi.

10.5.4 Hvordan skabes en muon?

Hvis vi lægger en pion i ro, så henfalder den til en muon og en neutrino. Pionen har inerti $m_\pi = 139.6\,\text{MeV/c}^2$, muonen har inerti $m_\mu = 105.7\,\text{MeV/c}^2$, og da neutrinoens inerti er meget lille, kan vi til denne regning antage at den er inerti-løs.

1. Pionen ligger stille i laboratoriet, så det vælger vi som inertial system.

2. Da systemet er isoleret og lukket har vi $\Delta p = 0$ og $\Delta E = 0$. Før henfaldet har vi $E_i = E_\pi = m_\pi$ og $p_i = p_\pi = 0$. Efter henfaldet har vi $E_f = \gamma m_\mu + E_\nu$ og $p_f = \gamma m_\mu v_\mu - p_\nu$. Da neutrinoen er antaget inerti-løs har vi $E_\nu = p_\nu$.

Fra impuls-konstantheden ser vi straks at

$$p_\nu = \gamma\, m_\mu\, v_\mu \,. \tag{10.77}$$

Hvis vi vil vide hvad mounens fart er, så kan vi finde det på flere måder, afhængigt af hvad vi ved. Lad os først antage at vi har målt muonens impuls, p_μ. Så kan vi benytte at $p_\mu = \gamma\, m_\mu\, v_\mu$. Her er også en hastighed inde i γ-faktoren, så vi finder at (gør det!)

$$\frac{v_\mu}{c} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{m_\mu^2 c^2}{p_\mu^2}}} \,. \tag{10.78}$$

Hvis vi istedet vil udregne impulsen, så skal vi arbejde lidt mere for det. Vi starter fra konstanthed af impuls, som gav os $p_\nu = \gamma m_\mu v_\nu$.

Hvis vi nu betragter konstantheden af energi, så kan det skrives som

$$m_\pi = \gamma\, m_\mu\, + \gamma\, m_\mu\, v_\mu \,, \tag{10.79}$$

hvilket efter en lille udregning fører til

$$v_\mu = \frac{\kappa - 1}{1 + \kappa} \,, \tag{10.80}$$

hvor $\kappa = (m_\mu/m_\pi)^2$. Du kan nu bruge ovenstående til at se at $p_\mu = 29.8\,\mathrm{MeV/c}^2$.

Nu har du altså skabt en muon som ryger igennem laboratoriet med $v/c = 0.27$. I muonens hvilesystem har den en middel henfaldstid på $\tau_\mu = 2.2 \cdot 10^{-6}\,$s. Hvis du vil vide hvor langt den bevæger sig i laboratoriet, så skal du for det første bruge tidsforlængelse, $\tau_{\mathrm{lab}} = \gamma\, \tau_\mu$. Du kan nu også bruge $v_\mu = p_\mu/(\gamma m_\mu)$ til at finde afstanden

$$\Delta x = v_\mu\, \tau_{\mathrm{lab}} = \frac{p_\mu\, \tau_\mu}{m_\mu} \approx 187\,\mathrm{m} \,. \tag{10.81}$$

10.6 4-vektorer

I de sidste par kapitler har vi udledt hele den specielle relativitetsteori uden brug af 4-vektorer, men i senere kurser (som elektrodynamik, kvantefysik, partikelfysik osv) bruges 4-vektorer i udbredt grad, så det er værd at bruge lidt energi på at introducere dem allerede nu [2].

Du ved hvordan længden af en normal vektor er invariant under rotation. Hermed mener vi, at en vektor i det 3-dimensionale rum, $\vec{r} = (x, y, z)$ har længde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, og det gælder også, hvis vi vælger et andet koordinatsystem, som er roteret i forhold til det første, i.e. $r = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$. Du kunne faktisk *definere* at en 3-vektor er et objekt som transformerer som (x, y, z) under en rotation i det normale 3-dimensionale rum.

Vi vil nu definere en 4-vektor til at være et objekt der transformerer som $(t, \vec{x})$ under en Lorentz transformation. Du må jo gerne tænke på LT som en slags rotation i det 4-dimensionale Minkowski rum. Det vil sige, hvis vi kalder en vilkårlig 4-dimensionel vektor $a = (a_0, a_1, a_2, a_3)$, og ser at den transformerer som

$$a_0' = \gamma\,(a_0 - v a_1)\ , \tag{10.82}$$
$$a_1' = \gamma\,(a_1 - v a_0)\ , \tag{10.83}$$
$$a_2' = a_2\,, \tag{10.84}$$
$$a_3' = a_3\,, \tag{10.85}$$

[2] Denne sektion er helt ny (december 2021) og der er aldrig blevet læst korrektur, så husk at fortælle om de fejl og mangler du finder

så er det en 4-vektor.

Du har nok lagt mærke til at 0-elementet her er fra “tids”-delen [3]. De 3 sidste komponenter er den rumlige del, og vi kræver også at de transformerer som en normal 3-dimensional vektor. Her har vi brugt en LT langs x-aksen, men du kan tilsvarende tillade transformationer langs y og z-akserne.

10.6.1 Energi-impuls 4-vektoren

Det er klart, at hvis du ganger en invariant på din 4-vektor, så transformerer den stadig som $(t, \vec{x})$, og er dermed stadig en 4-vektor. Du kunne f.eks gange med 2, π, m, τ eller andre invariante størrelser.

Da LT er lineære, så vil summen af to 4-vektorer stadig være en 4-vektor. F.eks hvis du tager differensen mellem to 4-vektorer, (dt, dx, dy, dz), og dividerer med invarianten $d\tau$, så ser vi at hastigheds vektoren

$$v = \left(\frac{dt}{d\tau}, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau} \right) , \tag{10.86}$$

også er en 4-vektor. Du kan se at dette kan skrives som

$$v = (\gamma, \gamma\vec{v}) \tag{10.87}$$

hvor $\vec{v}$ er den normale 3 dimensionale hastighed, $\vec{v} = d\vec{r}/dt$, og vi har brugt $dt = \gamma d\tau$.

Man kan også gange den invariante masse på, og få en ny 4-vektor

$$P = (\gamma m, \gamma m\vec{v}) = (E, \vec{p}) \ . \tag{10.88}$$

Denne kaldes normalt energi-impuls 4-vektoren. Hvis vi vælger at udskrive denne i partiklens hvile-system, så ser vi $P = (m, 0, 0, 0)$.

Specielt, da $(E, \vec{p})$ er en 4-vektor, så vil det sige at den transformerer som

$$E' = \gamma (E - vp_x) \tag{10.89}$$

$$p'_x = \gamma (p_x - vE) \ . \tag{10.90}$$

10.6.2 Længden af en 4-vektor

Længden af en 4-vektor er en invariant. Her skal vi huske det sjove minus-tegn der altid kommer frem, og nogle eksempler er

$$\tau^2 = t^2 - x^2 \, , \tag{10.91}$$

og

$$m^2 = E^2 - p^2 \, . \tag{10.92}$$

Prøv selv at finde længden af hastigheds 4-vektoren, for at se at den faktisk er en invariant (hint: du finder at længden er 1, eller hvis du indfører lysets hastighed, så er den c. Og det er da bestemt noget vi ved er en invariant!).

[3] Der er også folk der bruger en notation, hvor man kalder tidsdelen a_4.

Der gælder faktisk helt generelt, at det indre produkt mellem to 4-vektorer er invariant. Det vil sige

$$a \cdot b = a_0 b_0 - \vec{a} \cdot \vec{b}\,, \tag{10.93}$$

er en invariant. Du kan vise dette ved at skrive a' og b' direkte fra transformations reglerne, og derved udlede at $a \cdot b = a' \cdot b'$. Dette er ekstremt nyttigt i udregninger, f.eks når du skal udregne vekselvirkninger og andre reaktioner i partikelfysik.

10.6.3 Accelerations 4-vektor

Man kan igen tage differencen mellem to hastigheds 4-vektorer og dividere med den invariante $d\tau$, hvilket betyder at man kan differentiere med hensyn til τ og igen få en 4-vektor

$$A = \left(\frac{d\gamma}{d\tau}, \frac{d(\gamma \vec{v})}{d\tau} \right)\,. \tag{10.94}$$

Ved at bruge $dt = \gamma d\tau$ kan du let vise at

$$A = \left(\gamma^4 v\dot{v}, \gamma^4 v\dot{v}\vec{v} + \gamma^2 \frac{d\vec{v}}{dt} \right)\,, \tag{10.95}$$

hvor vi har brugt $v = |\vec{v}|$ og $\dot{v}$ betyder differentiation med hensyn til t.

Tilsvarende kan man finde en kraft 4-vektor ved

$$F = \left(\frac{dE}{d\tau}, \frac{d\vec{p}}{d\tau} \right)\,. \tag{10.96}$$

Og du kan vise at når m er en konstant gælder

$$F = m\left(\gamma^4 v\dot{v}, \gamma 4 v\dot{v}\vec{v} + \gamma^2 \frac{d\vec{v}}{dt} \right)\,. \tag{10.97}$$

Det betyder at vi har en $F = mA$ formel, og dette er altså noget der gælder i 4-dimensionelt rum, når m er en konstant.

10.6.4 Fysiske love

Lad os afslutte med helt generelle overvejelser over, hvad vi kan kræve af en fysisk lov. Det må være et minimumskrav, at den er korrekt i et eller andet reference system (vi vil ikke spilde tid på ligninger, der ikke har noget med Naturen at gøre). Og derudover skal den gerne også være korrekt, når vi transformerer til et andet reference system.

Hvis vi har en fysisk lov, der er skrevet op i 4-vektorer, så kan den skrives ved

$$a = b\,, \tag{10.98}$$

hvor både a og b er 4-vektorer. Det er meget ofte en eller anden form for differential ligning. Hvis vi laver en transformation til et andet reference system (en Lorentz transformation) så får vi en transformeret lov

$$a' = b'\,. \tag{10.99}$$

Det er klart, at formen på denne lov er uændret. Det er jo præcist et af postulaterne bag speciel relativitetsteori, nemlig at alle reference rammer er ækvivalente, hvilket vil sige at fysikken love er ens i alle reference systemer.

Du kunne også bygge dine fysiske love op af andre elementer, f.eks hvis du har en skalar ligning, $d = e$, hvor både d og e er skalare størrelser, så ville denne ligning også være uændret under en LT. Et eksempel på en skalar kan være produktet af to 4-vektorer, $P \cdot P = m^2$. Du kunne også opbygge mere komplicerede objekter (tensorer) som kan bygges op som en slags produkter af 4-vektorer. Eksemper på dette er elektromagnetisme og generel relativitetsteori.

Alt dette betyder, at hvis du opfinder en ny fysisk lov, så gør du klogt i at skrive den op i objekter skabt af 4-vektorer: det kan være skalarer, 4-vektorer, tensorer,... Og så skal den naturligvis også være i overensstemmelse med observationer i det reference system du har valgt at teste den i.

10.7 Opgaver til relativistisk mindstevirkning

10.7.1 Impuls set fra 2 observatører

En partikel med masse 1 kg ligger stille på Jorden. Et rumskib flyver forbi med fart $v = 0.9$c, og i rumskibet ligger en partikel med masse 0.5 kg.

Hvilke impulser måler 2 observatører (henholdsvis på Jorden og i rumskibet) for de 2 partikler?

10.7.2 To kolliderende asteroider

To asteroider A og B laver en total in-elastisk kollision i rummet. A har hastighed 0.7c i forhold til en observatør og masse 100 kg, og B har hastighed -0.9c i forhold til observatøren og masse 47.5 kg. Hvad er CM hastigheden af systemet efter kollisionen i forhold til observatøren?

10.7.3 Proton og elektron der kolliderer

Vi betragter en proton der bevæger sig mod højre med $v_p = 10^{-3}c$ i forhold til laboratoriet. Den kolliderer med en elektron der bevæger sig mod venstre med fart v_e. Efter den totalt in-elastiske kollision ligger den resulterende partikel stille i laboratoriet. Protonens masse er 1836 gange elektronens masse.

Find elektronens fart før kollisionen, udtrykt ved c.

Hvis nu du ikke havde kendt til SR (og dermed kunne bruge den klassiske formel for impulskonstanthed), hvilken fart skulle elektronen så have haft? Fortolk kort dette resultat.

10.7.4 To-proton kollision

En proton (masse 938.3MeV/c^2) i ro i laboratoriet rammes af en hurtig proton med total energi E_p. Den resulterende reaktion skaber blandt andet en neutron (masse 939.6MeV/c^2) og en positivt ladet pion (masse 139.6MeV/c^2)

$$p + p \rightarrow p + n + \pi^+ \tag{10.100}$$

Find den mindst mulige energi (grænseværdien) for at denne reaktion kan finde sted.

Hint: Du ved at $E^2 - p^2$ er en invariant, så det kan du udregne enten i Lab eller i CM.

Bonus: check i ovenstående reaktion at der er konstant ladning, baryontal og leptontal. Overvej om der mon er nogen fundamental fysisk forståelse i denne kommentar.

10.7.5 En fotons impuls

En typisk foton fra Solen har energi omkring 2.7×10^{-19} J (og bølgelængde omkring 700 nm). Fotonen er jo masseløs, men den har alligevel en impuls, hvilket kan ses fra ligning (10.14). Hvor stor er denne impuls for 1 foton fra Solen.

Du bliver måske ramt af omkring 10^{21} fotoner fra Solen hvert sekund. Estimér om den tilsvarende impuls blæser dig omkuld.

Bonus spørgsmål. Hvis du laver et solspejl på 14×14 m^2, og fastgør spejlet på en satelit med masse 315 kg der opsendes fra Jorden, hvor stor en fart kan du så opnå iløbet af en måned?

10.7.6 Positronium henfald

Et positronium i ro (masse 1.022MeV/c^2) består af en elektron og en positron der er bundet til hinanden. Disse er observeret til at henfalde til 2 fotoner med en henfaldstid omkring $0.12ns$.

$$e^- + e^+ \to \gamma + \gamma \,. \tag{10.101}$$

Find energien af hver af disse fotoner. Find også impulsen af hver af disse fotoner.

10.7.7 Henfald af en steril neutrino

En spændende mørkt stof kandidat kaldes en steril neutrino. En steril neutrino i ro med masse 10keV/c^2 henfalder spontant til 2 fotoner med en henfaldstid på 10^{25} sek

Find den resulterende energi af hver af disse 2 fotoner.

Bonus spørgsmål 1. Et røntgenteleskop kan (let) observere fotoner i energiområdet 1 keV til 10 keV. Hvis en galaksehob med masse $10^{15} M_\odot$ hovedsagligt består af sådanne sterile neutrinoer, estimér hvor mange ikke-termiske fotoner en sådan galaksehob udsender hvert sekund.

Bonus spørgsmål 2. Hvis disse sterile neutrinoer bevæger sig omkring i galaksehoben med en hastighedsdispersion omkring $1000km/s$, estimér hvor bred henfaldslinien er (altså hvor stor energi-spredning der er på de henfaldne fotoner).

10.7.8 Uran henfald

Uran-238 henfalder til thorium og helium. Disse partiklers masser er $m_U = 238.05078826\,u$, $m_{Th} = 234.043601\,u$ og $m_{He} = 4.002602\,u$, hvor vi bruger enheden $u = 1.66054 \times 10^{-27}$ kg.

Find den energi der frigives, når 1 kg Uran henfalder.

Sammenlign dette med 46 MJ der frigives ved afbrænding af 1 kg benzin.

10.7.9 Produktion af W-bosoner

En elektron og positron (hver med masse 511keV/c^2) bevæger sig med samme fart set fra CM laboratoriesystemet, og annihileres i en in-elastisk reaktion. Derved skabes 2 W-bosoner (hver med masse 80.4GeV/c^2)

$$e^- + e^+ \to W^- + W^+ \,. \tag{10.102}$$

Find den mindste fart elektronerne må have haft.

10.7.10 Transformationsligninger mellem impuls og energi

Vi vil nu udlede Lorentz transformationer (LT) for impuls og energi. Vi starter med den invariante størrelse

$$\tau^2 = t^2 - x^2 \,. \tag{10.103}$$

Hvis vi betragter en partikel, der i et kort tidsinterval Δt bevæger sig med farten u langs x-aksen, så bevæger den sig $\Delta x = u\,\Delta t$. Vis at forskellen $\Delta\tau^2 = \tau^2_{final} - \tau^2_{initial}$ kan skrives som $\Delta\tau^2 = \Delta t^2/\gamma_u^2$.

Hvis vi vælger at betragte denne lille rejse fra et andet inertial system, så gælder de normale LT, nemlig

$$\Delta x' = \gamma\,(\Delta x - v\,\Delta t) \tag{10.104}$$

$$\Delta t' = \gamma\,(\Delta t - v\,\Delta x)\ . \tag{10.105}$$

Samtidig ved vi at både m og $\Delta t/\gamma_u$ er invarianter, så derfor må en vilkårlig kombination af dem også være invarianter. Lad os specifikt kigge på

$$k = \frac{\gamma_u m}{\Delta t} = \frac{\gamma_u m}{\Delta t'} = k'\ . \tag{10.106}$$

Vis at $k\Delta x = p_x$, og tilsvarende at $k\Delta t = E$ (og tilsvarende for de mærkede størrelser).

Vi kan nu gange ligningerne 10.104 og 10.105 med k' på venstresiden, og k på højresiden. Skriv dette ud.

Brug alt dette til at vise, at der gælder

$$p' = \gamma\,(p - v\,E) \tag{10.107}$$

$$E' = \gamma\,(E - v\,p)\ . \tag{10.108}$$

Indsæt det rette antal c'er i disse transformationsligninger.

Check sluttelig dit result ved at se om $E^2 - c^2p^2$ rent faktisk er en invariant.

Bonus: Opskriv en transformationsmatrix for denne transformation. Sammenlign med den tilsvarende transformationsmatrix for sættet (x, t).

10.7.11 Doppler forskydning

Du modtager en foton med energi E. Den er blevet udsendt fra et rumskib, der bevæger sig væk fra dig med fart v. Find fotonens energi set fra rumskibets inertialsystem. Er denne energi større eller mindre end den observerede energi?

Hvad hvis rumskibet istedet bevægede sig hen imod dig?

10.7.12 Partikel i et potential

Vi har en partikel med masse m, der bevæger sig i et potentiale $U = -k/r$. Vi gætter på at en god Lagrange er givet ved

$$L = -m\sqrt{1 - \dot{r}^2 - r^2\dot{\phi}^2} - U\ , \tag{10.109}$$

hvor r, ϕ er polære koordinater.

Hvilke impulser er konstante?

Find bevægelsesligningerne.

Check Hamiltonen i grænsen $v \ll c$.

Hint: hvis nogle af udregningerne er lidt vanskelige, så kig i noterne, hvor nogle af detaljerne fra denne udregning er beskrevet.

10.7.13 En relativistisk fjeder

To studerende har en fjeder med en partikel med masse m for enden, der bevæger sig meget hurtigt frem og tilbage. De kan ikke blive enige om hvilken Lagrange de skal bruge til at beskrive bevægelsen. Den ene studerende foreslår

$$L_1 = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}kx^2\right) , \tag{10.110}$$

og den anden studerende foreslår

$$L_2 = -\frac{1}{\gamma}\left(mc^2\right) - \frac{1}{2}kx^2 \, . \tag{10.111}$$

Forklar kort hvilken af de studerende, der nok har ret, og hvorfor. Hvis ingen af dem har ret, så forklart kort hvorfor. Vær blandt andet opmærksom på antallet af γ'er og fortegn.

Bemærkning: du overvejer måske i hvilket inertialsystem x skal måles ovenfor. Du kan ikke sætte dig i den oscillerede partikels sted, for det er er accelereret inertialsystem. Derimod er x veldefineret i laboratoriet.

10.7.14 Et eksperiment med stillestående target

En proton med masse m_p har ekstremt høj, kendt fart set fra laboratoriet referencesystem, v_p. Den kolliderer med en tung detektorpartikel med masse M_d, der er i ro i laboratoriet. Disse 2 partikler har et in-elastisk sammenstød og fortsætter derefter som en sammensat partikel med masse M_s.

Spgs a. Forklar kort hvorfor du kan bruge impuls- og energi-bevarelse til at regne på denne reaktion.

Spgs b. Nedskriv analytiske udtryk for den samlede impuls og energi før og efter sammenstødet (forklar præcist hvilket inertialsystem du betragter ligningerne i).

Spgs c. Udled et analytisk udtryk for hastigheden af den sammensatte partikel set fra laboratiet.

10.7.15 En henfaldende Higgs partikel

Der er blevet skabt en Higgs partikel med masse $M_H = 125\mathrm{GeV/c}^2$. Denne partikel har en levetid på $\tau_H = 1.56 \times 10^{-22}$ sec i partiklens eget inertialsystem. Higgs partiklen er blevet skabt med energien 400GeV i laboratories inertialsystem.

Spgs a. Find Higgs partiklens hastighed og levetid set i laboratoriet.

Til opgaven nedenfor er det muligt, at du har brug for at kende de transformationsligninger mellem impuls og energi, som du udledte tidligere, nemlig

$$p' = \gamma\left(p - \beta\,\frac{v\,E}{c^2}\right) \tag{10.112}$$

$$E' = \gamma\,(E - v\,p) \tag{10.113}$$

Spgs b. Higgs partiklen henfalder nu til 2 fotoner. Den ene foton henfalder pæcist samme retning som den oprindelige Higgs partikel bevægede sig (fremad), og den anden henfalder den anden vej (bagud). Find energien af hver af disse 2 fotoner set i laboratoriet.