

LinAllys 2021: Ugeopgave 11 til aflevering i uge 14.

11.1

Lad $A \subseteq \mathbb{R}^2$ være mængden

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 \leq 1, x \geq 0\},$$

og lad $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ være funktionen givet ved $f(x, y) = xy^2 - x^2$. Skitsér mængden A . Giv en begrundelse for, at f har en størsteværdi og en mindsteværdi i A . Bestem disse værdier og angiv, i hvilke punkter af A disse værdier antages.

11.2

Lad $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{M}_{n,n}$ være delmængden bestående af matricer A som opfylder $\det(A) = 1$ og hvor alle indgange i A er hele tal. (For eksempel er matricen fra pointopgave 10.2 i $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$.)

- (a) Vis at hvis $A, B \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$, så er $AB \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$.
- (b) Vis at hvis $A \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$, så er A invertibel og $A^{-1} \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$.

11.3

- (a) Find en normalvektor til planen gennem de tre punkter $(1, -2, 1)$, $(2, 1, 3)$ og $(0, 1, 5)$, og find en ligning for denne plan.
- (b) Find en ligning for planen givet ved parameterfremstillingen $(x, y, z) = r(5, 1, 7) + s(-3, 2, 2) + (1, 0, -4)$ hvor $r, s \in \mathbb{R}$. Afgør om denne plan udgør et underrum af \mathbb{R}^3 .
- (c) Lad $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ være defineret som $T(x, y, z) = (y, z, x)$. Vis at

$$T(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = T(\mathbf{v}) \times T(\mathbf{w})$$

Gælder det samme hvis vi i stedet definerer $T(x, y, z) = (y, x, z)$?

Vink: skriv ud i koordinater ved at bruge $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{bmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{bmatrix}$.