CAPÍTULO 1

FORMULACIÓN DE PROBLEMAS LINEALES

Programación Lineal (PL) es un modelo de optimización de un problema de la vida real, en el cual una función objetivo es optimizada sujeta a un conjunto de restricciones. En este capítulo se discuten las técnicas empleadas para "transformar" un problema de la vida real en una formulación de programación lineal.

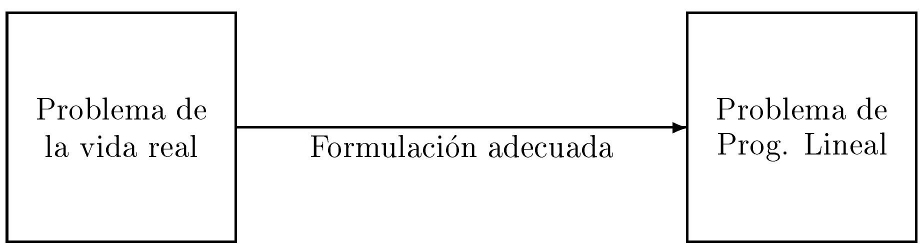


Figura 1.1: Formulación del problema de programación lineal

1.1 Modelamiento matemático

Generalmente, los problemas de la vida real pueden ser descritos a través de un modelo matemático usando los siguientes pasos:

Paso 1: Escoja adecuadamente las variables de decisión del problema:

x_i, x_{ij}, x_{ijk}, etc.

A cada variable de decisión está asociada una actividad.

Paso 2: Escriba la función objetivo y todas las restricciones del problema.

La aplicación de estos pasos se mostrará a través de varios ejemplos.

Ejemplo 1: El problema de los fertilizantes

Una empresa fabrica 2 tipos de fertilizantes, llamados fertilizantes A y B, 3 tipos de materia prima son empleados en la preparación de estos fertilizantes como se muestra a continuación:

Tabla 1.1: Modelamiento de un problema de la vida real

	Toneladas de materia prima necesarias para preparar 1 Ton. de		Cantidad máxima de materia prima disponible
Materia Prima	Fertilizantes tipo A	Fertlizantes tipo B	por mes (Ton.)
1	2	1	1500
2	1	1	1200
3	1	0	500
Lucro liquido por Ton. Fabricada	$ 15	$ 10	
	Cual debe ser la produción para maximizar el lucro ?		

Paso 1: Sean las variables de decisión:

$x_1 \Longrightarrow$ Las tonelas de fertilizante tipo A preparadas

$x_2 \Longrightarrow$ Las tonelas de fertilizante tipo B preparadas

Paso 2: Formular el modelo matemático:

$$PL = \begin{cases} max \;\; z(x) = 15x_1 + 10x_2 \\ \quad s.a. \\ \qquad 2x_1 + x_2 \leq 1500 \\ \qquad x_1 + x_2 \leq 1200 \\ \qquad x_1 \qquad \leq 500 \\ \qquad x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Paso 3. Resolver el modelo matemático formulado:

Observaciones: En la formulación de un PL son hechas, de manera implicita, las siguientes suposiciones (simplificaciones).

1. Aditividad: 2 toneladas de materia prima tipo 1 produce 1 tonelada de A y 1 tonelada del mismo produce 1 tonelada de B $\rightarrow 2x_1 + x_2$ toneladas de materia prima tipo 1 son necesarias para producir x_1 toneladas de fertilizantes tipo A y x_2 tonelas de fertilizantes tipo B. La suposición de aditividad implica también una función objetivo separable en las variables x_j.

   La aditividad implica que el consumo total es igual a la suma de los consumos parciales.

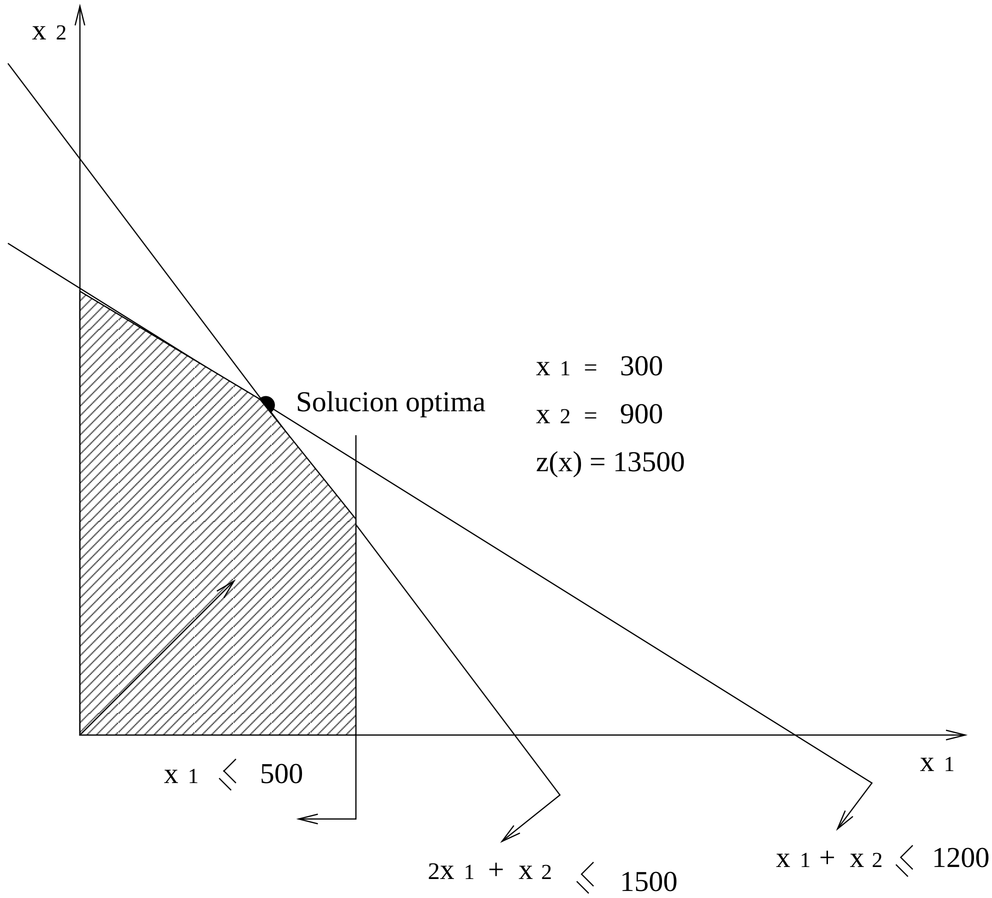


Figura 1.2: Representación gráfica del problema de los fertilizantes

2. Proporcionalidad: Si son necesarias 2 toneladas de materia prima tipo 1 para preparar 1 tonelada de fertilizante tipo A entonces, la proporcionalidad implica que son necesarias $2x_1$ toneladas de materia prima tipo 1 para preparar x_1 toneladas de fertilizante tipo A.

   Si \$15 es el lucro para una tonelada del fertilizante tipo A producido, entonces x_1 toneladas producidas conducen a un lucro de $15x_1$.

3. Restricciones de no negatividad: Las variables x_1, x_2, etc. son no negativas ya que ellas representan actividades de la vida real, entonces en el PL padronizado se tendrá que: $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$, etc.

4. Variación continua de las variables: Fue asumido que las varibles x_j pueden asumir todos los valores reales en su intervalo de variación.

   En la vida real muchas variables de decisión están restringidas a asumir valores enteros o discretos. Si las restricciones de continuidad de las variables es considerada, esto es, si las variables son restringidas para asumir solamente valores enteros, entonces esto conduce a otra disciplina denominada programación lineal entera (PLE).

Ejemplo 2: Preparación de combustible

Una refinería compra 4 tipos de petróleo, las mezcla y produce 3 tipos de combustibles. Los datos son los siguientes:

Tabla 1.2: Datos 1 para el ejemplo de la preparación de combustible

Tipo de petróleo	Octanaje	Barriles disponibles por día	Costo por barril (US $)
1	68	4000	31.02
2	86	5050	33.15
3	91	7100	36.35
4	99	4300	38.75

Tabla 1.3: Datos 2 para el ejemplo de la preparación de combustible

Tipo de combustible	Mínimo Octanaje	Precio de venta ($/barril)	Venta esperada
1	95	45.15	Máximo 10000 b/día
2	90	42.95	Cualquier cantidad
3	85	40.99	Mínimo 15000 b/día

La empresa puede vender el petróleo original no utilizado a US$38.95 por barril si su octanaje es mayor de 90 o a US$36.85 por barril si su octanaje es menor de 90. Como la empresa puede maximizar el lucro diario ?

Sean las variables:

x_{ij} = Barriles de petróleo tipo i empleados en la preparación del combustible tipo j por día. i=1,2,3,4 ; j=1,2,3.

y_i = Barriles de petróleo tipo i vendidos sin modificación.

Observación: Restricción de octanaje.

Para el combustible tipo 1 por el principio de proporcionalidad y aditividad se tiene:

$$(68x_{11} + 86x_{21} + 91x_{31} + 99x_{41})/(x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41}) \geq 95$$

$$\text{Entonces :}\ \ (68x_{11} + 86x_{21} + 91x_{31} + 99x_{41}) - 95(x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41}) \geq 0$$

Usando esa idea para los otros tipos de combustible se puede formular el modelo matemático.

Planteamiento del modelo matemático del problema del combustible:

$$\begin{aligned}
max \;\; z(x) = \;& 45.15(x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41})+42.95(x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42})+\\
& 40.99(x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}) \;\; + \;\; \text{(por venta de combustible)}\\
\\
& +y_1(36.85-31.02)+y_2(36.85-33.15)+y_3(38.95-36.35)+\\
& y_4(38.95-38.75) \;\; + \;\; \text{(por venta de residuos)}\\
\\
& -31.02(x_{11}+x_{12}+x_{13})-33.15(x_{21}+x_{22}+x_{23})-36.35(x_{31}+x_{32}+x_{33})-\\
& 38.75((x_{41}+x_{42}+x_{43}) \;\; \text{(por cómpra de petróleo)}\\
s.a. \;\;&\\
& 68x_{11}+86x_{21}+91x_{31}+99x_{41}-95(x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41})\geq 0\\
& 68x_{12}+86x_{22}+91x_{32}+99x_{42}-90(x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42})\geq 0\\
& 68x_{13}+86x_{23}+91x_{33}+99x_{43}-85(x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43})\geq 0\\
& \text{(exigencia de octanaje)}\\
\\
& x_{11}+x_{12}+x_{13}+y_1=4000\\
& x_{21}+x_{22}+x_{23}+y_2=5050\\
& x_{31}+x_{32}+x_{33}+y_3=7100\\
& x_{41}+x_{42}+x_{43}+y_4=4300\\
& \text{(Cantidad de petróleo a ser utilizada)}\\
\\
& x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}\leq 10000\\
& x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}\geq 15000\\
& \text{(Límites de producción)}\\
\\
& x_{ij},y_i\geq 0,\forall i,j
\end{aligned}$$

Reorganizando el sistema de ecuaciones planteado anteriormente se obtiene:

$$\begin{aligned}
max \;\; z(x) = \;& 14.13x_{11}+11.93x_{12}+9.97x_{13}+12.00x_{21}+9.80x_{22}+7.80x_{23}+8.80x_{31}+6.60x_{32}+\\
& 4.64x_{33}+6.40x_{41}+4.20x_{42}+2.24x_{43}+5.83y_1+3.70y_2+2.60y_3+0.20y_4\\
s.a. \;\;&\\
& 27x_{11}+9x_{21}+4x_{31}-4x_{41}\leq 0\\
& 22x_{12}+4x_{22}-x_{32}-9x_{42}\leq 0\\
& 17x_{13}-x_{23}-6x_{33}-14x_{43}\leq 0\\
& x_{11}+x_{12}+x_{13}+y_1=4000\\
& x_{21}+x_{22}+x_{23}+y_2=5050\\
& x_{31}+x_{32}+x_{33}+y_3=7100\\
& x_{41}+x_{42}+x_{43}+y_4=4300\\
& x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}\leq 10000\\
& x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}\geq 15000\\
& x_{ij},y_i\geq 0,\forall i,j
\end{aligned}$$

Solución obtenida (usando software de PL): z(x) = 140,074.88

Variables del problema:

$$x_{11} = 0, x_{12} = 0, x_{13} = 3457.41, y_1 = 542.6$$
$$x_{21} = 1509.97, x_{22} = 0, x_{23} = 3540.03, y_2 = 0$$
$$x_{31} = 0, x_{32} = 0, x_{33} = 7100, y_3 = 0$$
$$x_{41} = 3397.44, x_{42} = 0, x_{43} = 902.56, y_4 = 0$$

Cantidad de combustible producidos: v_j

$$v_1 = x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 4907.41$$
$$v_2 = x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 0$$
$$v_3 = x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 15000.00$$

Petróleo comprado: p_i

$$p_1 = x_{11} + x_{12} + x_{13} + y_1 = 4000$$
$$p_2 = x_{21} + x_{22} + x_{23} + y_2 = 5050$$
$$p_3 = x_{31} + x_{32} + x_{33} + y_3 = 7100$$
$$p_4 = x_{41} + x_{42} + x_{43} + y_4 = 4300$$

Petróleo vendido sin modificación:

$$y_1 = 542.6; y_2 = 0; y_3 = 0; y_4 = 0$$

Lucro: $z(x) = 140,074.88$

Ejemplo 3: El problema de la dieta

En este problema se tienen 2 tipos de granos y se desea obtener una dieta adecuada a un costo mínimo. Así la dieta entrega la cantidad de cada producto que debe ser consumida diariamente. Cada nutriente debe ser $\geq$ al requerimiento mínimo diario (RMD) en la dieta diaria. A continuación se muestran los datos para 3 tipos de nutrientes: Almidón, proteina y vitamina.

Tabla 1.4: Datos para el ejemplo de la dieta

	Unidades de nutriente/Kg de tipo de grano		RMD de unidades
Nutriente	Tipo 1	Tipo 2	de nutriente
Almidón	5	7	8
Proteina	4	2	15
Vitamina	2	1	3
Costo ($/Kg)	0.60	0.35	

Cómo debe prepararse la dieta más adecuada?

Sean las variables de decisión:

$x_1 \Longrightarrow$ cantidad de producto de tipo 1 utilizado

$x_2 \Longrightarrow$ cantidad de producto de tipo 2 utilizado

Planteamiento del modelo :

$$min \quad z(x) = 0.60x_1 + 0.35x_2$$

s.a.

$$5x_1 + 7x_2 \geq 8 \qquad \text{Almidón}$$

$$4x_1 + 2x_2 \geq 15 \qquad \text{Proteina}$$

$$2x_1 + x_2 \geq 3 \qquad \text{Vitamina}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Observación : El problema de la dieta no tiene mucho uso práctico en la alimentación de personas, sin embargo modelos más sofisticados son empleados en la determinación de la dieta más adecuada de animales.

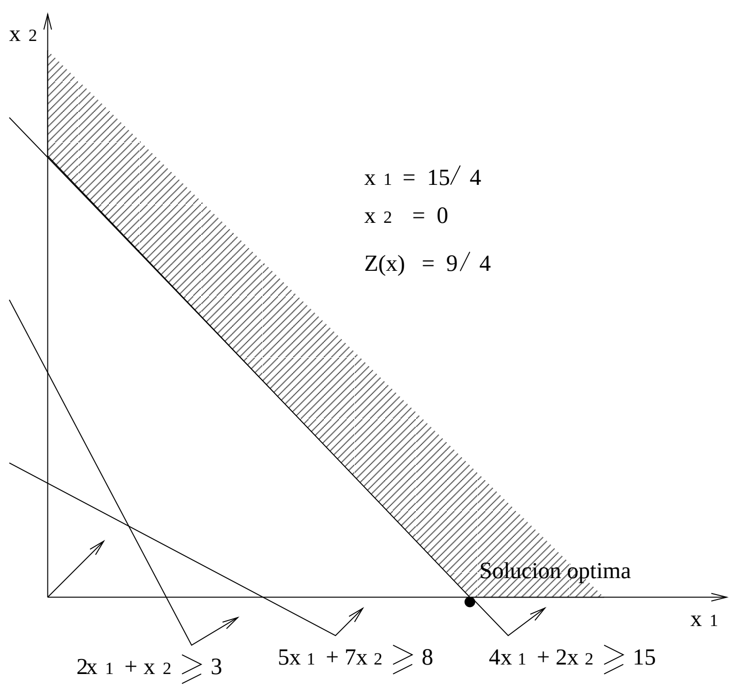


Figura 1.3: Representación gráfica del problema de la dieta

Ejemplo 4: El problema de transportes

En el problema de transportes se tienen un conjunto de nodos de origen (fábricas) donde existen productos que deben ser transportados a los nodos de destino (almacenes). Son especificadas la cantidad de producto disponible en cada centro de origen y la cantidad de productos requeridos por cada centro de destino, así como los costos de transporte de cada unidad del producto. El problema es determinar la cantidad de producto a ser transportado de cada centro de origen a cada centro de demanda con mínimo costo total.

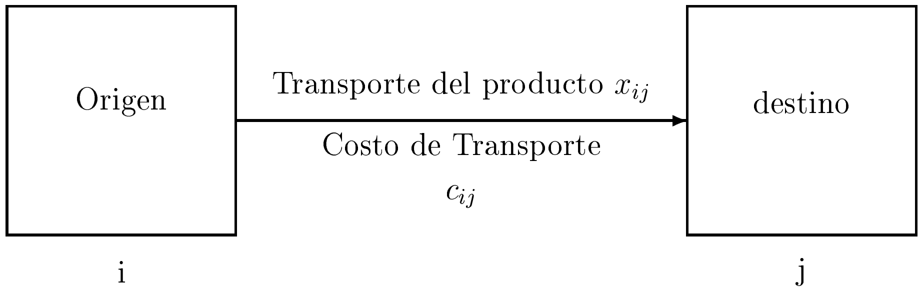


Figura 1.4: El problema de transportes

En el siguiente ejemplo los centros de origen son las minas 1 y 2, el producto es mineral ferroso y el destino 3 siderúrgicas de acero que requieren del mineral ferroso. Los datos son los siguientes:

Tabla 1.5: Datos para el ejemplo del transporte

	Costo unitario de transporte del mineral de la mina a la siderúrgica Centavos/tonelada			Cantidad de mineral disponible en la mina (toneladas)
Mina	Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3	
Mina 1	9	16	28	103
Mina 2	14	29	19	197
Toneladas de mineral necesarias en cada siderúrgica	71	133	96	

Variable de decisión: $x_{ij} \rightarrow$ cantidad de producto transportado del origen i al destino j.

Entonces se plantea el siguiente modelo matemático:

Planteamiento del modelo :

$$min \;\; z(x) = 9x_{11} + 16x_{12} + 28x_{13} + 14x_{21} + 29x_{22} + 19x_{23}$$

$$\begin{array}{lll}
s.a. & & Debe: \\
 & x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 103 & \text{Salir de la mina 1} \\
 & x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 197 & \text{Salir de la mina 2} \\
 & x_{11} + x_{21} \geq 71 & \text{Llegar a la siderurg. 1} \\
 & x_{12} + x_{22} \geq 133 & \text{Llegar a la siderurg. 2} \\
 & x_{13} + x_{23} \geq 96 & \text{Llegar a la siderurg. 3} \\
 & x_{ij} \geq 0 \quad \forall \quad i = 1,2; \quad j = 1,2,3 &
\end{array}$$

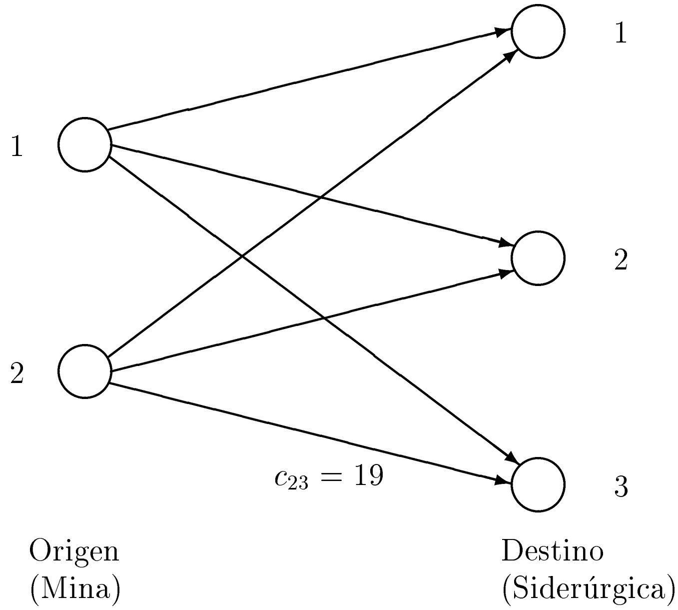


Figura 1.5: Figura del problema de transportes

Observación:

El problema de transporte tiene una estructura muy especial. Así el sistema anterior (PL) puede ser representado usando el siguiente arreglo matricial.

Tabla 1.6: Estructura del problema de transporte

	Siderúrgica (destino)			
	1	2	3	
Mina 1	x_{11} 9	x_{12} 16	x_{13} 28	≤ 103
Mina 2	x_{21} 14	x_{22} 29	x_{23} 19	≤ 197
	≥ 71	≥ 133	≥ 96	
	$x_{ij} \geq 0 \quad \forall \quad i, j$			Minimizar costo

Cada x_{ij} representa la cantidad transportada de i a j y en el mismo cuadro aparece el costo de transporte de una unidad de producto. Las restricciones de origen aparecen en la horizontal y las de destino en la vertical. La función objetivo es la suma de los productos de cada cuadro.

Cualquier PL que pueda ser representado en un arreglo de este tipo es llamado de problema de transportes.

Solución del problema anterior (usando un software):

$$x_{12} = 103 \qquad x_{21} = 71 \qquad x_{22} = 30 \qquad x_{23} = 96 \qquad \Longrightarrow z(x) = 5336$$

Propiedad importante de un problema de transportes : Si todos los parámetros que definen los recursos disponibles y los recursos necesarios de un problema de transportes son enteros positivos y el problema tiene por lo menos una solución factible, entonces ese problema de transportes tiene una solución óptima en que todos los x_{ij} son enteros. Entretanto, si el problema tiene soluciones óptimas alternativas la propiedad solamente garantiza que por lo menos una de esas soluciones es entera, así puede existir una solución óptima alternativa fraccionaria.

Ejemplo 5: El problema de designación (atribuir). (El acompanãmiento óptimo).

Considere un club de sociologos constituidos por 5 hombres y 5 mujeres donde cada uno de ellos conoce los otros muy bien. Se puede cuantificar la felicidad obtenida cuando el hombre i está junto con la mujer j durante el tiempo x_{ij}. Ese "grado de felicidad" es igual a $c_{ij}x_{ij}$ donde los c_{ij} son los siguientes:

Tabla 1.7: Datos de los c_{ij} para el problema del acompanãmiento óptimo

i \ j	1	2	3	4	5
1	78	-16	19	25	83
2	99	98	87	16	92
3	86	19	39	88	17
4	-20	99	88	79	65
5	67	98	90	48	60

Así los valores anteriores representan las tasas de felicidad para las diferentes parejas.

Determinar cuánto tiempo debe pasar cada hombre del club con cada mujer en la tentativa de maximizar "el grado de felicidad" de todos los socios del club. Para simplificar el modelo se supone que en el restante de tiempo disponible de los miembros del club la felicidad de todos ellos es igual.

Variable: $x_{ij} \rightarrow$ El hombre i y la mujer j pasan juntos una unidad de tiempo. x_{ij} representa la fracción de su tiempo libre que el hombre i y la mujer j pasan juntos,
i = 1,2,3,4,5; j = 1,2,3,4,5.

Las restricciones del problema son las varias experiencias de cada miembro en la utilización de su tiempo libre. Así por ejemplo, el hombre 1 ocupa varias fracciones de tiempo con cada una de las mujeres y la suma de esas fracciones debera ser igual a 1, esto es,
$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 1$.

Como cada socio del club conduce a una restricción, el problema de designación tiene 10 restricciones y la estructura mostrada en la tabla 1.8.

Tabla 1.8: Estructura de los datos del problema del acompanãmiento óptimo

mujer hombre	1	2	3	4	5	
1	x_{11} 78	x_{12} -16	x_{13} 19	x_{14} 25	x_{15} 83	$=$ 1
2	x_{21} 99	x_{22} 98	x_{23} 87	x_{24} 16	x_{25} 92	$=$ 1
3	x_{31} 86	x_{32} 19	x_{33} 39	x_{34} 88	x_{35} 17	$=$ 1
4	x_{41} -20	x_{42} 99	x_{43} 88	x_{44} 79	x_{45} 65	$=$ 1
5	x_{51} 67	x_{52} 98	x_{53} 90	x_{54} 48	x_{55} 60	$=$ 1
	$=$ 1	$=$ 1	$=$ 1	$=$ 1	$=$ 1	
	$x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, 2, 3, 4, 5; \;\; j = 1, 2, 3, 4, 5$					Maximizar objetivo

Entonces el problema de designación es un caso especial del problema de transportes donde el número de centros de origen es igual al número de centros de consumo y la disponibilidad de recursos es igual a 1. También todas las restricciones son de igualdad.

Es evidente que el valor de los x_{ij} están en el intervalo: $0 \leq x_{ij} \leq 1$ y de la propiedad del problema de transporte se puede concluir que en la solución óptima todos los x_{ij} son iguales a 0 ó a 1, o sea, todos los x_{ij} asumen valores enteros. Una solución óptima es:

$$x = (x_{ij}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

"Grado de felicidad": $z(x) = 459$.

Observación: El hombre 5 y la mujer 5 fueron "sacrificados". Ese problema de un club no puede ser generalizado a una sociedad ya que en ese caso no son válidas las suposiciones de proporcionalidad y aditividad, y la función objetivo no es adecuada.

Proporcionalidad $\rightarrow$ cuando aumenta el tiempo entonces el grado de felicidad disminuye.

Aditividad $\rightarrow$ grandes felicidades no pueden eliminar algunas infelicidades.

Función objetivo $\rightarrow$ cada persona decide en función de su propia felicidad y no pensando en la felicidad integral de la sociedad.

1.2 Solución de Problemas de Programación Lineal de 2 Variables: Método Gráfico

Cuando existen solamente 2 variables x_1 y x_2 entonces es posible resolver gráficamente el PL. Sea el problema:

$$\begin{aligned} min \;\; z(x) \;\; &= \;\; -x_1 - 3x_2 \\ s.a. \;\; & \\ & \;\; g_1(x) = x_1 + x_2 \leq 6 \\ & \;\; g_2(x) = -x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ & \;\; x_1, \; x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Se procede a representar las restricciones para determinar la región factible.

En las restricciones de desigualdad, la región factible se puede determinar fácilmente usando el concepto de gradiente o identificando un punto factible típico, generalmente el origen.

Sea $g_1(x)$ una restricción: $g_1(x) = x_1 + x_2 - 6 \leq 0$ entonces:

$$\nabla g_1(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Entonces, el vector $(1, 1)$ indica la dirección de máximo crecimiento de $g_1(x)$. Como $g_1 \leq 0$ entonces la región factible de esta restricción es en sentido contrario al gradiente como se muestra en la figura 1.6.

Igualmente se puede proceder con el objetivo. Se puede respresentar una función objetivo típica, generalmente aquella que pasa por el origen, y transportarla paralelamente en la dirección de disminución para el problema de minimización (o de aumento para el problema de maximización) de la función objetivo hasta encontrar el último punto factible.

El concepto de gradiente también puede ser usado para determinar la dirección de la máxima disminución.

Sea $z(x) = -x_1 - 3x_2 = cx$, donde $c = (-1, -3)$ son los coeficientes de la función objetivo. Entonces:

$$\nabla z(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial z(x)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial z(x)}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix} = c$$

Entonces el vector $c = (-1, -3)$ indica el sentido en que $z(x)$ se incrementa más rápidamente. Como nuestro problema es de minimización entonces el sentido de minimización más pronunciado es dado por el vector $-c = (1, 3)$.

Ejemplo 6: Sea el PL:

$$\begin{aligned} min\ z(x) &= -x_1 - 3x_2 \\ s.a. & \\ & x_1 + x_2 \leq 6 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ & x_1,\ x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

La solución óptima de este problema, encontrado gráficamente, es presentado en la figura 1.6.

$$x_1 = \frac{4}{3} \qquad x_2 = \frac{14}{3} \qquad \Rightarrow \qquad z(x) = -\frac{46}{3}$$

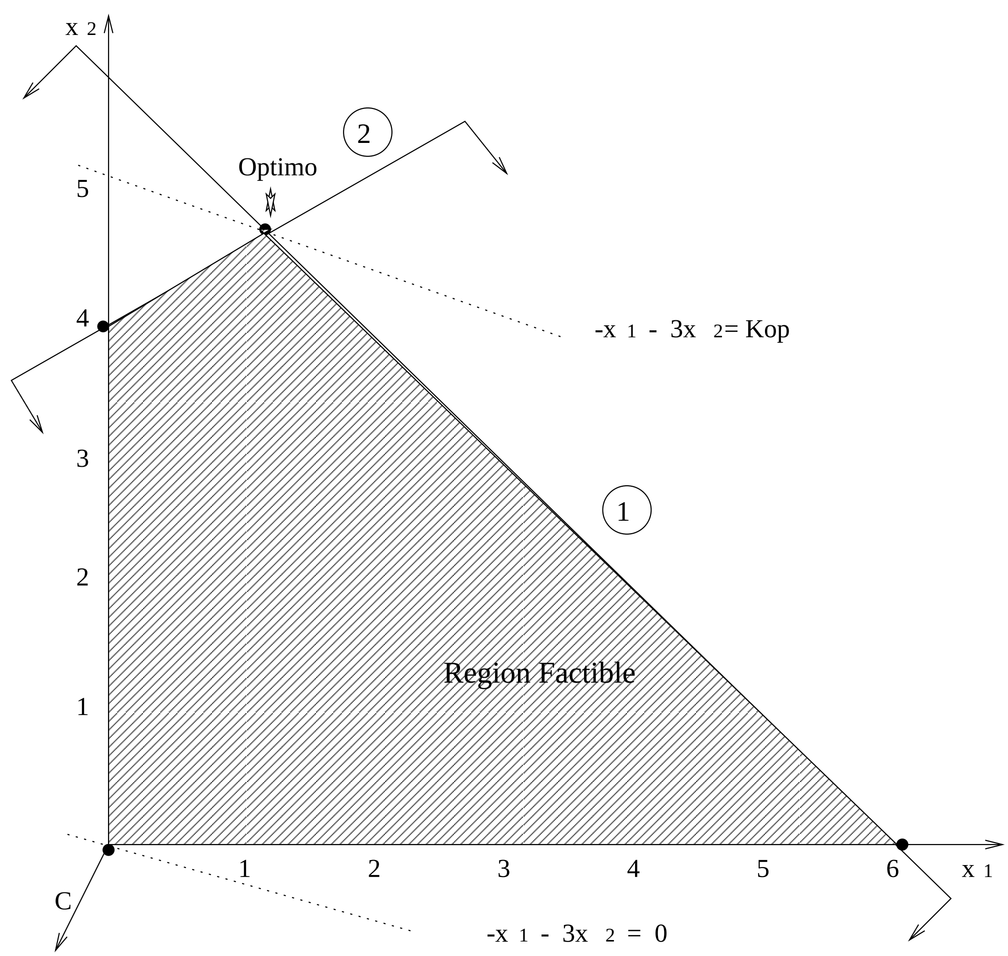


Figura 1.6: Método gráfico en la solución de un problema de programación lineal

Interpretación gráfica del óptimo:

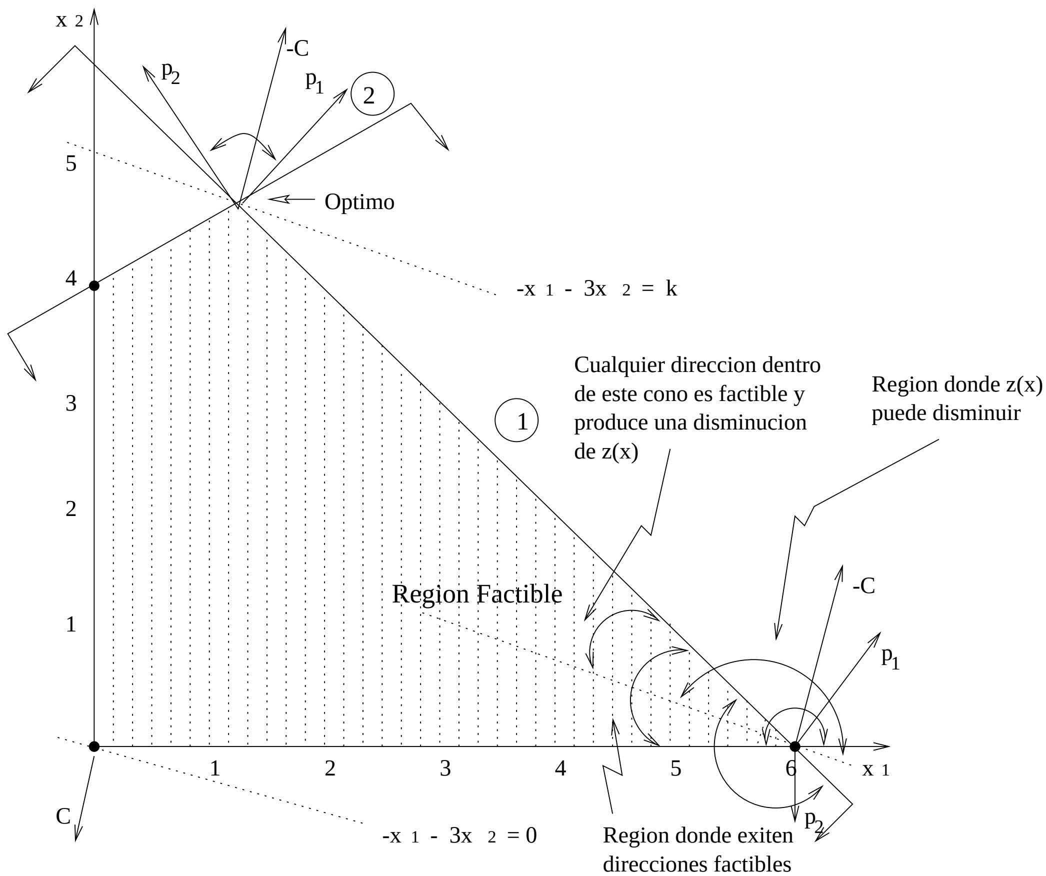


Figura 1.7: Direcciones de optimización

Una condición necesaria y suficiente para que un punto extremo x^* sea óptimo es que, en ese punto, x^*, el vector $-c$ forme parte del cono formado por las normales de las restricciones activas en ese punto.

La interpretación geométrica permite concluir que existe una dirección de optimización factible t si:

- La dirección t forma un ángulo menor o igual a 90^o con $-c$, esto significa que existe una dirección de mejoría. (problema de minimización).

- La dirección t forma un ángulo mayor o igual a 90^o con cada vector normal p, esto significa que existe una dirección factible.

El proceso de solución puede conducir a las siguientes conclusiones:

1. Solución factible: existe un vector $x^* = (x_1, x_2)$ que produce una función objetivo óptima $z(x^*)$. En este caso todavía puede suceder lo siguiente:

- Óptimo finito único: existe solamente un x^*.
- Óptimos finitos limitados: existen muchos x^* en un intervalo de variación de $x^1 \leq x^* \leq x^2$.
- Óptimos finitos ilimitados: existen muchos x^* en un intervalo ilimitado: $x^1 \leq x^*$.

2. Solución infactible: no existe ningún punto factible. Las restricciones son conflictantes.

3. Solución ilimitada: $z(x) \to -\infty$.

   La función objetivo puede disminuir (o crecer) indefinidamente.

1.3 Ejercicios resueltos:

1. Una corporación tiene \$ 30 millones disponibles para invertir en 3 subsidiarias. Para mantener cubierta su nómina de empleados debe invertir como mínimo \$ 3M, \$5 M y \$ 8M en cada subsidiaria respectivamente. La subsidiaria II no puede tener una inversión superior a \$ 17M. Cada subsidiaria puede ejecutar varios proyectos, cada uno caracterizado por un tope máximo y una tasa de retorno, dados en la siguiente tabla:

Subsidiaria	Proyecto	Tope Máximo	Tasa de Retorno
	1	\$ $6M$	8%
I	2	\$ $5M$	6%
	3	\$ $9M$	7%
	1	\$ $7M$	5%
II	2	\$ $10M$	8%
	3	\$ $4M$	9%
	1	\$ $6M$	10%
III	2	\$ $5M$	6%

Formule matemáticamente el problema.

Solución:

Definimos x_{ij} : inversión en la subsidiaria i proyecto j;

x_{11} : inversión en la subsidiaria 1 y proyecto 1
x_{12} : inversión en la subsidiaria 1 y proyecto 2
x_{13} : inversión en la subsidiaria 1 y proyecto 3
x_{21} : inversión en la subsidiaria 2 y proyecto 1
x_{22} : inversión en la subsidiaria 2 y proyecto 2
x_{23} : inversión en la subsidiaria 2 y proyecto 3
x_{31} : inversión en la subsidiaria 3 y proyecto 1
x_{32} : inversión en la subsidiaria 3 y proyecto 2

$$
\begin{aligned}
\text{Función objetivo}: \quad \text{Max} \ \ Z(x) = \ & 0.08x_{11} + 0.06x_{12} + 0.07x_{13} + \\
& 0.05x_{21} + 0.08x_{22} + 0.09x_{23} + \\
& 0.1x_{31} + 0.06x_{32} \\
s.a. \qquad & \\
& x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{31} + x_{32} \leq 30M \\
& x_{11} + x_{12} + x_{13} \geq 3M \\
& x_{21} + x_{22} + x_{23} \geq 5M \\
& x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 17M \\
& x_{31} + x_{32} \geq 8M \\
& x_{11} \leq 6M \\
& x_{12} \leq 5M \\
& x_{13} \leq 9M \\
& x_{21} \leq 7M \\
& x_{22} \leq 10M \\
& x_{23} \leq 4M \\
& x_{31} \leq 6M \\
& x_{32} \leq 3M \\
& x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}, \geq 0
\end{aligned}
$$

2. Una persona está obligada a hacer una dieta alimenticia que tenga diariamente las siguientes cantidades de vitamina A,B,C y D.

Vitamina	Cantidad Mínima
A	80 mg
B	70 mg
C	100 mg
D	60 mg

La dieta debe incluir leche, arroz y carne que contienen los siguientes miligramos de vitaminas por kilogramo de alimento:

$Vitamina$	$Leche\ (Kg)$	$Arroz\ (Kg)$	$Frijol\ (Kg)$	$Carne\ (Kg)$
A	10	5	9	10
B	8	7	6	6
C	15	3	4	7
D	20	2	3	8

Los costos unitarios ($/Kg) de estos alimentos son:

Leche - 1200, Arroz - 1000, Frijol - 1500, Carne - 8000.

Formular el PL correspondiente.

Solución:

Definimos las variables :

x_i Kilogramos de alimento i, i = 1,2,3,4
donde: 1-Leche,2-Arroz,3-Frijol,4-Carne

x_1 : Kilogramos de Leche
x_2 : Kilogramos de Arroz
x_3 : Kilogramos de Frijol
x_4 : Kilogramos de Carne

Dieta $= x_1 + x_2 + x_3 + x_4$

Función Objetivo : Min $Z(x) = 1200x_1 + 1000x_2 + 1500x_3 + 8000x_4$

$s.a.$

$$10x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 10x_4 \geq 80$$
$$8x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 6x_4 \geq 70$$
$$15x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 7x_4 \geq 100$$
$$20x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 8x_4 \geq 60$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

3. Un analista de sistemas planea producir tres tipos de productos usando 4 máquinas. Cualquier producto puede ser producido en cualquier máquina. Los costos unitarios de producción de cada unidad de producto en cada máquina se muestran en la tabla 1.9 y las horas requeridas para producir una unidad de producto en cada máquina en la tabla 1.10.

Tabla 1.9: costo

Producto	Máquina			
	1	2	3	4
1	4	4	5	7
2	6	7	5	6
3	12	10	8	11

Tabla 1.10: tiempo

Producto	Máquina			
	1	2	3	4
1	0.3	0.25	0.2	0.2
2	0.2	0.3	0.2	0.25
3	0.8	0.6	0.6	0.5

Formule el problema como un PL de tal forma que minimize los costos de producción, si se requieren como minimo 4000, 5000 y 3000 unidades de los productos y la disponibilidad de Horas-Máquina es de 1500, 1200, 1500 y 2000 respectivamente.

Solución:

Definimos x_{ij} las unidades de producto i producido en la máquina j

x_{11} : unidades de producto 1 producido en la máquina 1
x_{12} : unidades de producto 1 producido en la máquina 2
x_{13} : unidades de producto 1 producido en la máquina 3
x_{14} : unidades de producto 1 producido en la máquina 4
x_{21} : unidades de producto 2 producido en la máquina 1
x_{22} : unidades de producto 2 producido en la máquina 2
x_{23} : unidades de producto 2 producido en la máquina 3
x_{24} : unidades de producto 2 producido en la máquina 4
x_{31} : unidades de producto 3 producido en la máquina 1
x_{32} : unidades de producto 3 producido en la máquina 2
x_{33} : unidades de producto 3 producido en la máquina 3
x_{34} : unidades de producto 3 producido en la máquina 4

Función Objetivo : $\min\ Z(x) = 4x_{11} + 4x_{12} + 5x_{13} + 7x_{14} +$
$6x_{21} + 7x_{22} + 5x_{23} + 6x_{24} +$
$12x_{31} + 10x_{32} + 8x_{33} + 11x_{34}$

$s.a.$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \geq 4000$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \geq 5000$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \geq 3000$$
$$0.3x_{11} + 0.2x_{21} + 0.8x_{31} \leq 1500$$
$$0.25x_{12} + 0.3x_{22} + 0.6x_{32} \leq 1200$$
$$0.2x_{13} + 0.2x_{23} + 0.6x_{33} \leq 1500$$
$$0.2x_{14} + 0.25x_{24} + 0.5x_{34} \leq 2000$$
$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34}, \geq 0$$

4. Una empresa desea producir un compuesto preparado con la mezcla de dos productos químicos 1 y 2, mezclados en proporción 5:2 por peso. Los productos químicos son fabricados de tres formas diferentes usando 2 materias primas y un combustible. Los datos de producción se muestran en la tabla 1.11 Cuanto tiempo debe operar cada proceso para maximizar la cantidad total de compuesto producido ?

	Requerimiento por unidad de tiempo			Producción por unid. de tiempo	
	Mat. Prima 1	Mat. prima 2	Combust.	Quimico 1	Quimico 2
Proceso	(Unid.)	(Unid.)	(Unid.)	(Unid.)	(Unid.)
1	9	5	50	9	6
2	6	8	75	7	10
3	4	11	100	10	6
Cantidad Disponible	200	400	1850		

Tabla 1.11

Solución:

Definimos: t_i Unidades de tiempo que opera el proceso i
Con i = 1,2,3

Max $Z(t)$ $9t_1 + 7t_2 + 10t_3 + 6t_1 + 10t_2 + 6t_3$
$= 15t_1 + 17t_2 + 16t_3$

$s.a.$

$$9t_1 + 6t_2 + 4t_3 \leq 200$$
$$5t_1 + 8t_2 + 11t_3 \leq 400$$
$$50t_1 + 75t_2 + 100t_3 \leq 1850$$
$$(9t_1 + 7t_2 + 10t_3)/(6t_1 + 10t_2 + 6t_3) = 5/2$$
$$t_1, t_2, t_3 \geq 0$$

NOTA:

Cabe anotar que la solución va a ser infactible porque en los tres procesos el cociente de químico 1 a químico 2 producido, siempre es menor a 2.5. La solución podria ser factible si se elimina la restricción de proporcionalidad (restricción igualada a 5/2) y se maximiza únicamente la cantidad de químico 1 producida.

5. Resolver gráficamente los siguientes PLs:

a) $max.$ $30x_1 + 20x_2$

$s.a$

$$x_1 + x_2 \geq 1$$
$$x_1 - x_2 \geq -1$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 6$$
$$x_1 - 2x_2 \leq 1$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

b) $min.$ $2x_1 - x_2$

$s.a$

$$x_1 + x_2 \geq 10$$
$$-10x_1 + x_2 \leq 10$$
$$-4x_1 + x_2 \leq 20$$
$$x_1 + 4x_2 \geq 20$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

c) $min.$ $x_1 + 3x_2$

$s.a$

$$2x_1 + x_2 \leq 10$$
$$-x_1 + x_2 \leq 20$$
$$x_1 - 2x_2 \geq 10$$
$$x_1 + x_2 \leq 30$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

d) min $10x_1 + 3x_2$

$s.a$

$$x_1 + x_2 \leq 20$$
$$x_1 \leq 6$$
$$x_1 \geq 2$$
$$x_2 \geq 1$$
$$x_2 \leq 12$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

$$
\begin{aligned}
e) \quad & max \quad 2x_1 - 2x_2 \\
& s.a. \\
& \qquad -2x_1 + x_2 \leq 2 \\
& \qquad x_1 - x_2 \leq 1 \\
& \qquad x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Solución:

a)

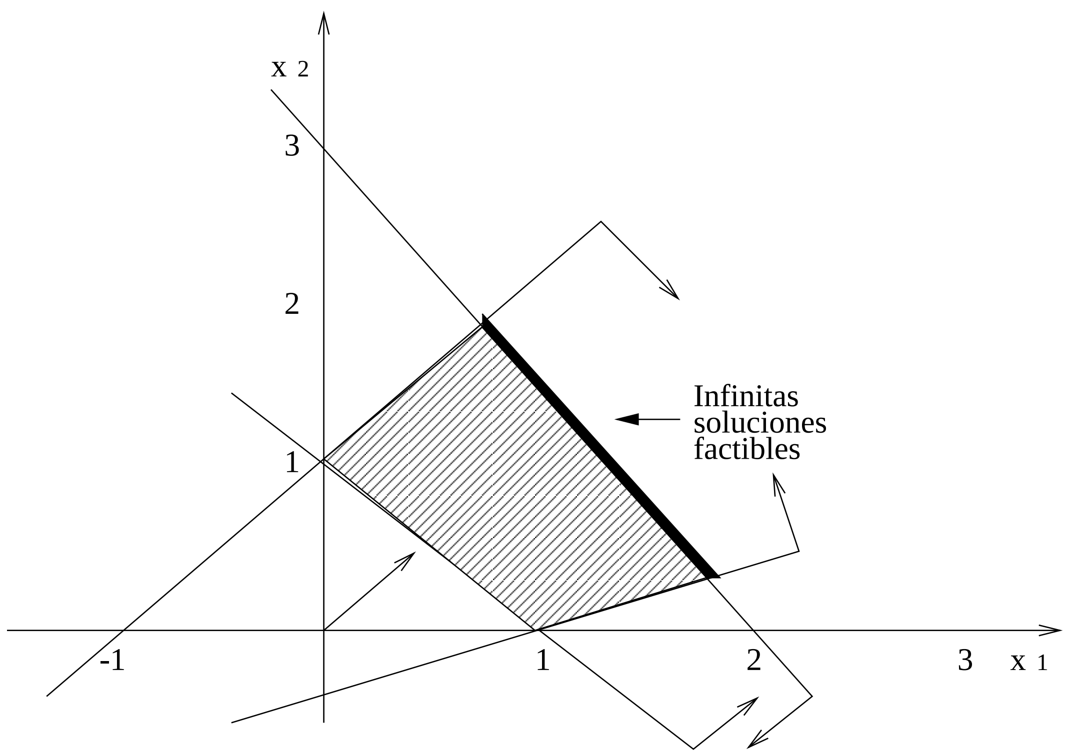


Figura 1.8: Solución gráfica del ejercicio (a)

El PL tiene infinitas soluciones factibles correspondientes a la sección de la línea recta: $3X_1 + 2X_2 = 6$ acotada por las rectas $X_1 - X_2 = -1$ y $X_1 - 2X_2 = 1$. Por lo tanto, la función objetivo es igual a 60 y son soluciones óptimas todos los puntos en el segmento de recta acotados por los puntos extremos (4/5,9/5) y (7/4,3/8).

b)

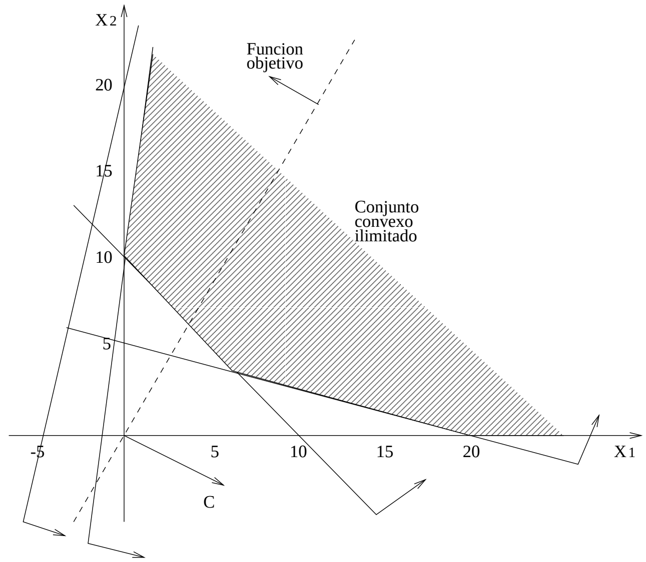


Figura 1.9: Solución gráfica del ejercicio (b)

En el caso (b), el conjunto convexo es ilimitado y no se puede determinar una solución óptima, ya que la función objetivo puede decrecer indefinidamente a medida que X_2 se aumenta. Por lo tanto, el problema es ilimitado.

c)

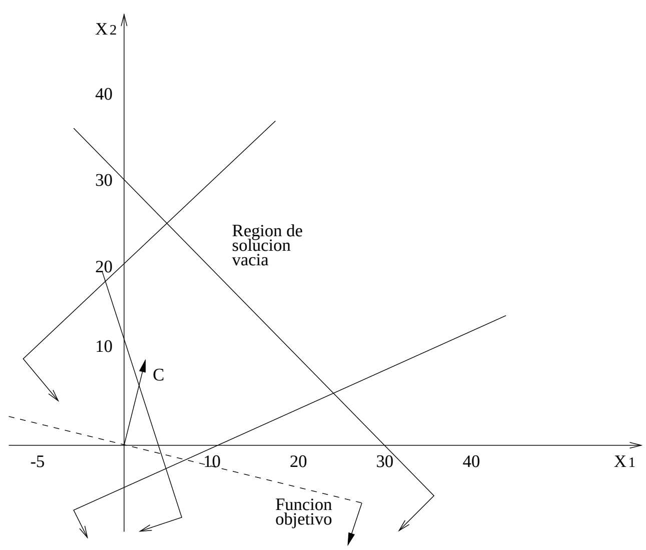


Figura 1.10: Solución gráfica del ejercicio (c)

En el caso (c), la región factible es vacia. por lo tanto, no existe solución factible y el problema es llamado infactible.

d)

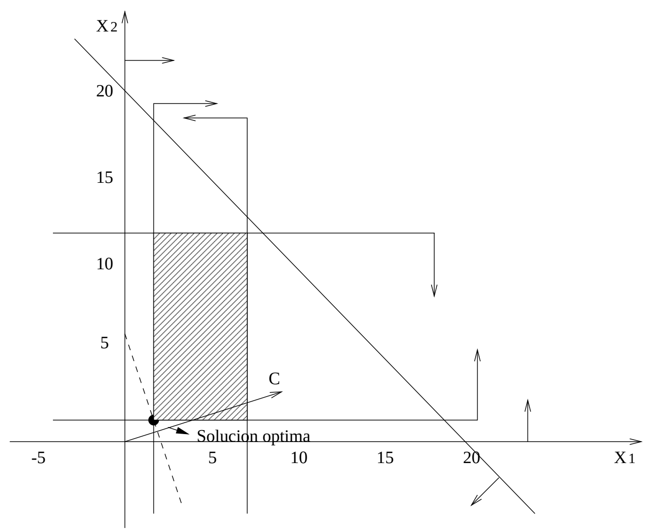


Figura 1.11: Solución gráfica del ejercicio (d)

En el caso (d), si existe una única solución óptima en $x_1 = 2$ y $x_2 = 1$ y la función objetivo es 23.

e)

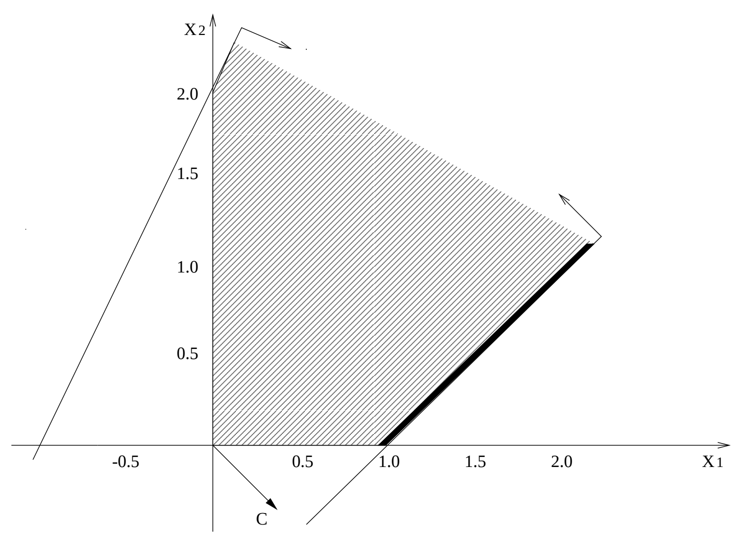


Figura 1.12: Solución gráfica del ejercicio (e)

En el caso (e), existen infinitos puntos óptimos sobre la linea $x_1 - x_2 = 1$, limitada por el punto extremo $x_1 = 1$ y $x_2 = 0$, e ilimitada hacia la parte superior. La función objetivo es 2. Así, son puntos óptimos del problema todos los puntos de la semirecta $x_1 - x_2 = 1$ a partit del punto (1,0).

CAPÍTULO 2

ALGEBRA LINEAL, ANALISIS CONVEXO Y CONJUNTOS POLIEDRALES

2.1 Revisión de Tópicos de Algebra Lineal

2.1.1 Vectores

Un vector es un arreglo de n números en fila o columna.

Ejemplos:

$$a = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \end{bmatrix} \qquad\qquad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Vectores Especiales

Vector i-ésimo unitario: es un vector con todos sus elementos iguales a cero excepto en la posición i donde vale 1:

$$e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Combinación Lineal de Vectores en E^n

Un vector b es una **combinación lineal** de los vectores $a_1, a_2, \ldots, a_k$ en E^n si:

$$b = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j a_j \tag{2.1}$$

donde los λ_j son números reales. Si, adicionalmente, la siguiente relación es verdadera:

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1 \tag{2.2}$$

entonces el vector b es una **combinación afin** de los vectores $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

E^n es el llamado espacio euclidiano n-dimensional constituido por todos los vectores de dimensión n.

Independencia Lineal de Vectores

Un conjunto de vectores de dimensión n, $a_1, a_2, \ldots, a_k$ son llamados linealmente independientes (LI) si:

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j a_j = 0 \ \rightarrow \lambda_j = 0 \ \ \forall \ j = 1, 2, \ldots, k. \tag{2.3}$$

Ejemplo 1: Mostrar que los vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

son LI.

Si a_1 y a_2 son LI entonces tenemos que:

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \lambda_1 + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \lambda_2 = 0 \quad \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = \lambda_2 \\ 3\lambda_1 = 0 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{array} \right.$$

Así, como fue demostrado que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, entonces a_1 y a_2 son LI.

Un conjunto de vectores son **linealmente dependientes (LD)** cuando no son LI.

Ejemplo 2: Mostrar que los vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad a_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

son LD.

Intentamos probar que los vectores a_1, a_2 y a_3 son LI, entonces tenemos que:

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \lambda_1 + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \lambda_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \lambda_3 = 0$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{r} \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{r} \lambda_1 = \lambda_2 \\ 3\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{r} \lambda_1 = \lambda_2 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{r} \lambda_1 = \lambda_2 \\ \lambda_2 = -\lambda_3 \end{array} \right.$$

Así, una solución general del sistema anterior es el siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{r} \lambda_1 = \alpha \\ \lambda_2 = \alpha \\ \lambda_3 = -\alpha \end{array} \right.$$

para cualquier α real. Así, por ejemplo, para $\alpha = 1$ tenemos que $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ y $\lambda_3 = -1$, que son diferentes de cero, entonces concluimos que los vectores a_1, a_2 y a_3 no son LI, o sea, son LD.

Vectores que Generan el Espacio Euclidiano: Span E^n

Un conjunto de vectores $a_1, a_2, \ldots, a_k$ en E^n generan el espacio E^n si cualquier vector en E^n puede ser representado como una combinación lineal de los vectores $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Así, dado un vector $b \in E^n$ entonces existen escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ tal que:

$$b = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j a_j \tag{2.4}$$

Ejemplo 3: Mostrar que los vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

generan (span) el espacio E^2.

De (2.4) tenemos:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \lambda_1 + \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \lambda_2 + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \lambda_3 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} b_1 = \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 \\ b_2 = 3\lambda_2 + \lambda_3 \end{array} \right.$$

Hacemos $\lambda_3 = \alpha$ y tenemos que:

$$\lambda_1 = b_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 = b_1 + \frac{1}{3}[b_2 - \alpha] - 2\alpha = b_1 + \frac{1}{3}b_2 - \frac{7}{3}\alpha$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{3}[b_2 - \lambda_3] = \frac{1}{3}[b_2 - \alpha]$$

Así la solución general asume la siguiente forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = b_1 + \frac{1}{3}b_2 - \frac{7}{3}\alpha \\ \lambda_2 = \frac{1}{3}[b_2 - \alpha] \\ \lambda_3 = \alpha \end{array} \right.$$

Para cualquier α real. Dos soluciones particulares son, por ejemplo, las siguientes:

1. Cuando $\alpha = 0$:

$$\begin{cases} \lambda_1 = b_1 + \frac{1}{3}b_2 \\ \lambda_2 = \frac{1}{3}b_2 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

2. Cuando $\alpha = b_2$:

$$\begin{cases} \lambda_1 = b_1 - 2b_2 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = b_2 \end{cases}$$

Ejemplo 4: En el ejemplo anterior mostrar que el vector:

$$b = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

es generado por los vectores a_1, a_2 y a_3.

Existen muchas formas de realizar la representación solicitada, una para cada valor de α escogido. Así, por ejemplo, escogemos $\alpha = \frac{1}{7}b_2 = \frac{1}{7}(7) = 1$. Sustituyendo este valor en la solución general del ejemplo anterior tenemos que:

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2 + \frac{1}{3}(7) - \frac{7}{3}(1) = 2 \\ \lambda_2 = \frac{1}{3}[7 - 1] = 2 \\ \lambda_3 = 1 \end{cases}$$

Así, fue encontrada la siguiente representación:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

cuya representación gráfica está mostrada en la figura 2.1.

Vectores que Forman una Base en E^n

Un conjunto de vectores $a_1, a_2, \ldots, a_k$ forman una base de E^n si satisfacen las siguientes condiciones:

1. $a_1, a_2, \ldots, a_k$ generan E^n.

2. Si cualquiera de los vectores es removido entonces el conjunto restante de vectores no generan E^n.

Forma equivalente de definición:

El conjunto de vectores $a_1, a_2, \ldots, a_k$ forman una base de E^n si $k = n$ y si esos vectores son LI.

Propiedad:

Dado un vector $b \in E^n$, entonces una base de E^n, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ representa un vector b de manera única. La dimensión de la base es única, formado por n vectores en el espacio E^n mas el conjunto de vectores que forman una base no es única.

Ejemplo 5: Mostrar que los vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

que forman una base en E^2 representan de manera única el vector

$$b = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

De (2.4) tenemos que:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \lambda_1 + \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \lambda_2 \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \lambda_1 - \lambda_2 = 2 \\ 3\lambda_2 = 7 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \lambda_1 = \frac{13}{3} \\ \\ \lambda_2 = \frac{7}{3} \end{array} \right.$$

Por lo tanto, existe una única combinación posible de representar el vector b combinando los vectores a_1 y a_2. En la figura 2.2 es mostrada la representación gráfica.

Substitución de un Vector de una Base por Otro Vector

Suponer que los vectores $\{a_1, a_2, \ldots, a_j, \ldots, a_n\}$ forman una base en E^n. Cómo debemos proceder para substituir un vector de la base, por ejemplo a_j, por otro vector a de manera que el conjunto resultante continue siendo una base de E^n ?

Teorema:

Sean los vectores $\{a_1, a_2, \ldots, a_j, \ldots, a_n\}$ una base de E^n. Una condición **necesaria y suficiente** para que un vector a substituya el vector a_j y que el conjunto resultante continue siendo una base es que:

$$a = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \quad \text{y} \quad \lambda_j \neq 0 \tag{2.5}$$

Prueba: Suficiencia

Suponer que $\lambda_j \neq 0$, entonces debemos demostrar que el nuevo conjunto de vectores $\{a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}, a, a_{j+1}, \ldots, a_n\}$ es LI y por lo tanto forma una base.

Suponer que existe un μ y μ_i $(i \neq j)$ tal que:

$$\sum_{i \neq j} \mu_i a_i + \mu a = 0 \tag{2.6}$$

o sea, una combinación lineal del nuevo conjunto que puede ser LD o LI.

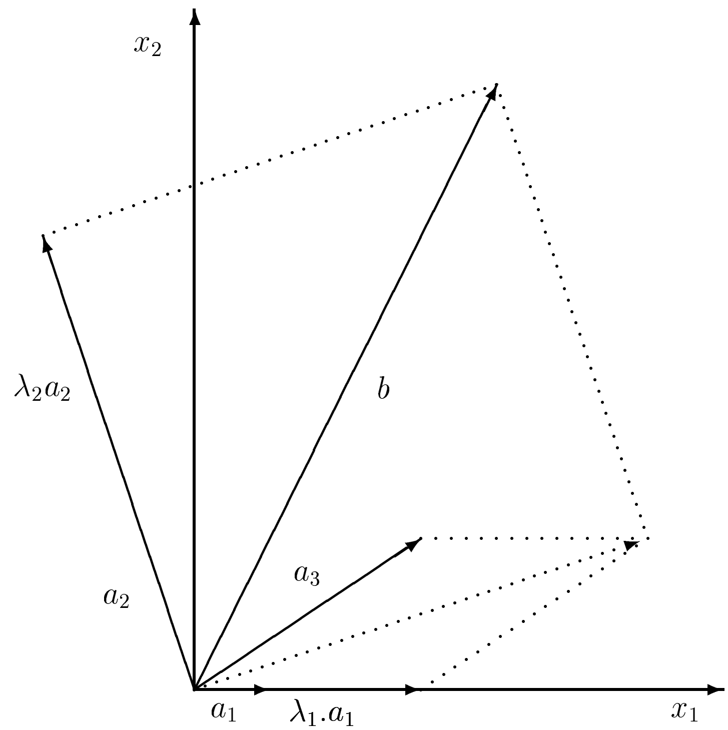


Figura 2.1: Los vectores a_1, a_2 y a_3 span b

Substituyendo (2.5) en (2.6):

$$\sum_{i \neq j} \mu_i a_i + \mu \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i = 0$$

$$\sum_{i \neq j} (\mu_i + \mu \lambda_i) a_i + \mu \lambda_j a_j = 0 \tag{2.7}$$

En (2.7) tenemos una combinación lineal de los vectores originales que son LI, entonces,

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{rr} \mu_i + \mu\lambda_i = 0 & \forall i \neq j \\ & \mu\lambda_j = 0 \end{array} \right. \tag{2.8}$$

De (2.8), y recordando la suposición inicial de que $\lambda_j \neq 0 \rightarrow \mu = 0$. Si $\mu = 0 \rightarrow \mu_i = 0 \ \ \forall i \neq j$. Por lo tanto, como $\mu = 0$ y $\mu_i = 0 \ \ \forall i \neq j$, podemos concluir que a y los a_i $(i \neq j)$ son LI y forman una base.

Prueba: Necesaria

Si $\lambda_j = 0$, entonces de (2.5) tenemos:

$$a - \sum_{i \neq j} \lambda_i a_i = 0 \Longrightarrow 1.a + \sum_{i \neq j} (-\lambda_i) a_i = 0 \tag{2.9}$$

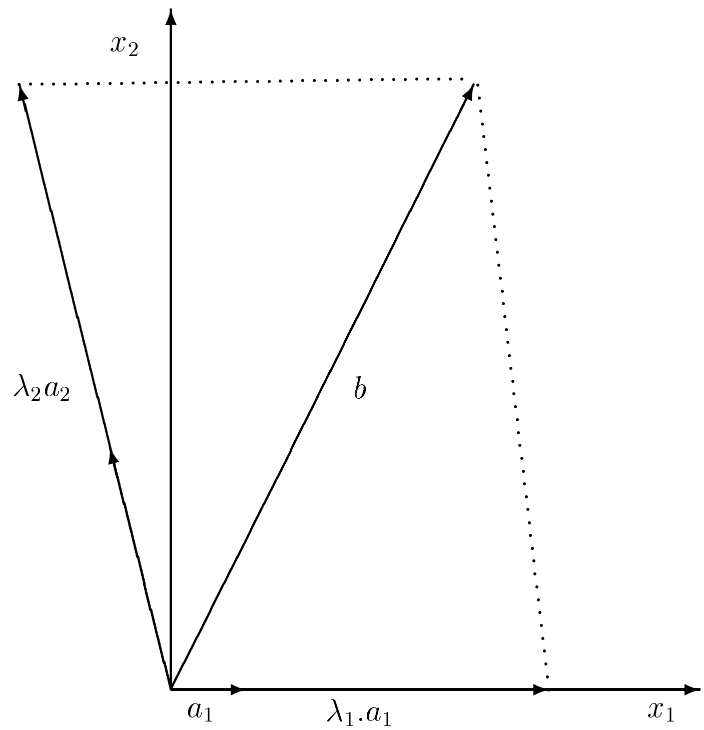


Figura 2.2: b es únicamente representado por los vectores a_1 y a_2

que indica que el vector a y los vectores a_i $(i \neq j)$ son LD porque no todos los coeficientes son iguales a cero (el coeficiente de a es 1, ver (2.9)).

2.2 Matrices

Una matriz es un arreglo rectangular de números. Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

Es frecuente representar una matriz a través de sus filas o columnas. Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} \rightarrow a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad a_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 8 \end{bmatrix} \qquad \text{por columnas}$$

$$A = \begin{bmatrix} a^1 & a^2 \end{bmatrix} \rightarrow a^1 = \begin{bmatrix} 1 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad a^2 = \begin{bmatrix} 6 & 8 \end{bmatrix} \qquad \text{por filas}$$

2.2.1 Solución de un Sistema Lineal de Ecuaciones Usando Operaciones Elementales de Matrices

En una matriz pueden ser realizadas operaciones elementales de filas o de columnas. Las operaciones elementales de **filas** son las siguientes:

1. La fila i y la fila j pueden ser intercambiadas.
2. La fila i puede se multiplicada por un escalar $k \neq 0$.
3. La fila i puede ser substituida por la fila i más k veces la fila j.

Sea el sistema $Ax = b$ de m ecuaciones y n variables donde A es una matriz $m \times n$, b es un vector de dimensión m y x es un vector de dimensión n.

Propiedad: $Ax = b \Longleftrightarrow A'x = b'$

En este caso (A', b') es encontrado a partir de (A, b) a través de un número finito de operaciones elementales de fila.

Método de Gauss-Jordan

Permite reducir la matriz A para una identidad $A' = I$. En este caso la solución del sistema es encontrada directamente de $x = b'$.

Ejemplo 6: Resolver, usando el método de Gauss-Jordan, el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 \\ x_2 + x_3 = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Realizando operaciones elementales de fila tenemos:

$$\left[\begin{array}{ccc} A & \vdots & b \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{rrrcr} 1 & 2 & 1 & \vdots & 10 \\ -1 & 2 & -1 & \vdots & 6 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 2 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{rrrcr} 1 & 2 & 1 & \vdots & 10 \\ 0 & 4 & 0 & \vdots & 16 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 2 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{rrrcr} 1 & 2 & 1 & \vdots & 10 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -2 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{rrrcr} 1 & 2 & 0 & \vdots & 12 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -2 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{rrrcr} 1 & 0 & 0 & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -2 \end{array}\right]$$

Entonces la solución del sistema es el siguiente:

$$A'x = b' \Rightarrow Ix = b' \Rightarrow x = b'$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = 4 \quad x_2 = 4 \quad x_3 = -2$$

Método de Eliminación de Gauss

Permite reducir la matriz A para una matriz A' que es triangular superior.

Ejemplo 7: Usar el método de Gauss para resolver el sistema del ejemplo anterior:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Realizando operaciones elementales de fila tenemos:

$$\begin{bmatrix} A & \vdots & b \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots & 10 \\ -1 & 2 & -1 & \vdots & 6 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots & 10 \\ 0 & 4 & 0 & \vdots & 16 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots & 10 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -2 \end{bmatrix}$$

Así la matriz A' es una matriz triangular superior y tenemos el siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

El sistema anterior puede resolverse fácilmente por substitución para atrás de la siguiente forma:

$$x_3 = -2 \qquad x_2 = 4$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \Rightarrow x_1 + 2(4) + (-2) = 10 \Rightarrow x_1 = 4$$

2.2.2 Inversa de una Matriz

Si A es una matriz cuadrada de dimensión $n \times n$ entonces su inversa A^{-1} debe satisfacer la siguiente relación:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

La inversa de una matriz puede ser encontrada por operaciones elementales de filas. Así tenemos:

$$\begin{bmatrix} A & \vdots & I \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{operaciones elementales de fila} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} I & \vdots & A^{-1} \end{bmatrix}$$

Si no es posible encontrar una matriz identidad usando la relación anterior entonces la matriz A no tiene inversa.

Propiedad:

Una matriz cuadrada A de dimensión $n \times n$ tiene inversa $\Longleftrightarrow$ sus filas (o equivalentemente sus columnas) son LI.

Ejemplo 8: Encontrar la inversa de la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Usando operaciones elementales de filas tenemos:

$$\begin{bmatrix} A & \vdots & I \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & \vdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & \vdots & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la inversa de la matriz es la siguiente:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

Observación: Observe la siguiente transformación:

$$\begin{bmatrix} A & \vdots & I \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} A^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & \vdots & I \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} A^{-1}A & \vdots & A^{-1}I \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} I & \vdots & A^{-1} \end{bmatrix}$$

2.2.3 Rank de una Matriz

El rank de una matriz A de dimensión $m \times n$ es igual al máximo número de filas (o equivalentemente columnas) LI en la matriz A. Así tenemos:

$$rank(A) \leq min(m, n)$$

Si $rank(A) = min(m, n)$ entonces la matriz A es de rank completo.

Propiedad:

Puede ser demostrado que si el rank de una matriz A es k, $rank(A) = k$, entonces la matriz A puede ser reducida de la siguiente forma:

$$A \quad \Longrightarrow \quad \begin{matrix} \text{operaciones} \\ \text{elementales} \\ \text{de matrices} \end{matrix} \quad \Longrightarrow \quad A' = \begin{bmatrix} I_k & \vdots & Q \\ 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

2.2.4 Análisis de un Sistema de Ecuaciones Lineales

Consideremos que deseamos resolver el sistema de ecuaciones lineales algebraicas:

$$Ax = b$$

donde A es una matriz $m \times n$ y b es un vector de dimensión m.

Pueden suceder los siguientes casos:

1) Si $rank[(A, b)] > rank[A]$ entonces b no puede ser representado como una combinación lineal de los vectores $a_1, a_2, \dots, a_n$ de A. Esto significaría que no es posible representar el vector b como una combinación lineal de los vectores columna de A, caracterizando un sistema **inconsistente**.

Ejemplo 9: Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas:

$$\left.\begin{array}{rl} x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 &= 10 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 6 \\ x_2 + x_3 \quad\quad &= 2 \\ -x_1 + 9x_2 + 2x_3 \quad\quad &= 29 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 9 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \\ 2 \\ 29 \end{bmatrix}$$

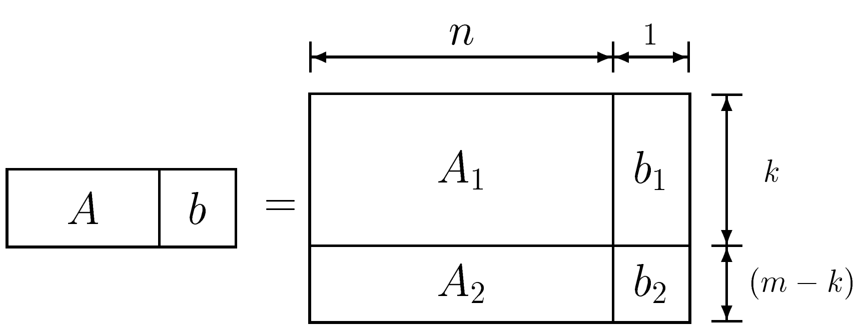
Para el sistema de ecuaciones mostrado anteriormente puede mostrarse que $rank[(A, b)] = 4 > rank[A] = 3$. Si $rank[(A, b)] > rank[A]$, como sucede en este ejemplo, significa que no es posible representar el vector b como una combinación lineal de los vectores columna de A, o sea, no existen valores de x_1, x_2, x_3 y x_4 que permitan que el siguiente sistema sea verdadero:

$$\begin{bmatrix} 10 \\ 6 \\ 2 \\ 29 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_4$$

En otras palabras, los 4 vectores columna no son LI y no pueden generar cualquier vector en E^4 y en particular el vector b indicado. En este caso decimos que el sistema de ecuaciones lineales es **inconsistente**.

2) Si $rank(A) = rank(A, b) = k$.

En este caso el sistema (A, b) puede ser ordenado de la siguiente manera:



donde A_1 es de dimensión $k \times n$ y b_1 de dimensión k. A_2 es de dimensión $(m-k) \times n$ y b_2 de dimensión $(m-k)$. En general, vamos suponer que:

$$rank(A_1) = rank(A_1, b_1) = k$$

Ejemplo 10: Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas:

$$\left.\begin{array}{r} x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 10 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 6 \\ x_2 + x_3 \qquad = 2 \\ -x_1 + 9x_2 + 2x_3 \qquad = 28 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 9 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \\ 2 \\ 28 \end{bmatrix}$$

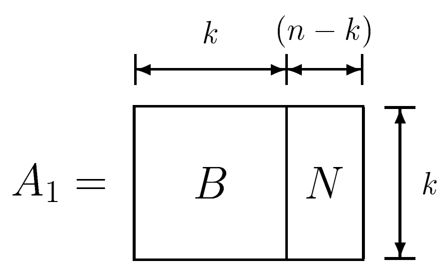
Para el sistema de ecuaciones mostrado anteriormente puede mostrarse que $rank[(A, b)] = rank[A] = 3 < min(m, n)$ y esto significa que los vectores columna de A no son LI.

Entonces podemos ordenar el sistema anterior de la siguiente manera:

$$\boxed{\text{A} \mid \text{b}} = \begin{array}{|rrrr|r|} \hline 1 & 2 & 1 & -2 & 10 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ \hline -1 & 9 & 2 & 0 & 28 \\ \hline \end{array}$$

En este caso, si el vector x resuelve el sistema $A_1 x = b_1$ entonces, automáticamente, resuelve también el sistema $A_2 x = b_2$, por lo tanto, estas ecuaciones $A_2 x = b_2$ son llamadas de **ecuaciones redundantes o dependientes** y pueden (y deben) ser eliminadas del proceso de solución.

Después de eliminar las ecuaciones redundantes tenemos el sistema reducido $A_1 x = b_1$ con $rank(A_1) = k$. Ahora es posible separar A_1 en dos partes de la siguiente forma:



donde B es una matriz cuadrada de dimensión $k \times k$ y $rank(B) = k$. B es llamada **matriz básica** porque sus columnas forman una base para E^k.

En el ejemplo analizado podemos hacer la siguiente separación para A_1:

$$A_1 = \begin{array}{|rrr|r|} \hline 1 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline \end{array} \Longrightarrow B = \begin{array}{|rrr|} \hline 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \text{ y } N = \begin{array}{|r|} \hline -2 \\ 1 \\ 0 \\ \hline \end{array}$$

donde B es la matriz básica y N es conocida como **matriz no básica.**

También podemos hacer la siguiente separación de las variables x:

$$x = \begin{array}{|c|} \hline x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ \hline x_{k+1} \\ \vdots \\ x_n \\ \hline \end{array} \Rightarrow x_B = \begin{array}{|c|} \hline x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ \hline \end{array} \quad \text{y} \quad x_N = \begin{array}{|c|} \hline x_{k+1} \\ \vdots \\ x_n \\ \hline \end{array}$$

Así podemos hacer la siguiente transformación:

$$A_1 x = b_1 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc} B & \vdots & N \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} x_B \\ x_N \end{array} \right] = b_1 \Rightarrow Bx_B + Nx_N = b_1$$

Como B es de rank completo entonces tiene inversa B^{-1} y podemos modificar la relación anterior:

$$B^{-1}Bx_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b_1$$

$$x_B = B^{-1}b_1 - B^{-1}Nx_N \tag{2.10}$$

Para el ejemplo que estamos analizando tenemos que:

$$B^{-1} = \left[\begin{array}{rrr} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 \end{array} \right]$$

y substituyendo en (2.10) tenemos:

$$\left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{rrr} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 10 \\ 6 \\ 2 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{rrr} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{r} -2 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right] [x_4]$$

$$\left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{r} 4 \\ 4 \\ -2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{r} \frac{7}{4} \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{array} \right] [x_4] \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 4 + \frac{7}{4}\lambda \\ x_2 = 4 + \frac{1}{4}\lambda \\ x_3 = -2 - \frac{1}{4}\lambda \\ x_4 = \lambda \end{array} \right.$$

donde λ es un número real.
El caso que está siendo analizado permite dos posibilidades:

a) Cuando $k = n$: En este caso N es vacío y el sistema tiene una solución única determinado por:

$$x_B = B^{-1} b_1$$

b) Cuando $k < n$: En este caso podemos dar valores arbitrarios a los elementos de x_N y, una vez escogidos esos valores, se puede encontrar una solución para los elementos de x_B usando el siguiente sistema:

$$x_B = B^{-1} b_1 - B^{-1} N x_N$$

En este caso el sistema acepta infinitas soluciones y **este tipo de problemas es lo que interesa en PL.**

Importante: Si especificamos valores arbitrarios para los elementos de x_N entonces encontramos una solución única para los elementos de x_B porque B tiene inversa. Sin embargo, un tipo de solución **particularmente especial** es aquella encontrada dando valores iguales a cero a todos los elementos de x_N.

$$x_N = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

En este caso la solución del sistema resultante es

$$x_B = B^{-1} b_1$$

y es conocida como **solución básica** del sistema $A_1 x = b_1$.

Resumiendo: Al resolver un sistema de ecuaciones algebraicas lineales puede suceder una de las siguientes alternativas:

1. Si $rank(A, b) > rank(A) \Longrightarrow Ax = b$ es inconsistente y no existe solución.
2. Si $rank(A, b) = rank(A) = k = n \Longrightarrow Ax = b$ tiene una única solución.
3. Si $rank(A, b) = rank(A) = k < n \Longrightarrow Ax = b$ tiene infinitas soluciones.

Importante: Todas estas características pueden ser observadas implementando la eliminación de Gauss de la siguiente forma:

$$Ax = b \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{l} \text{eliminación de Gauss} \\ \text{con operaciones} \\ \text{elementales de fila} \end{array} \quad \Longrightarrow \quad A^{'} x = b^{'}$$

que lleva a un sistema de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} I_k & \vdots & Q \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} b_1' \\ \cdots \\ b_2' \end{bmatrix}$$

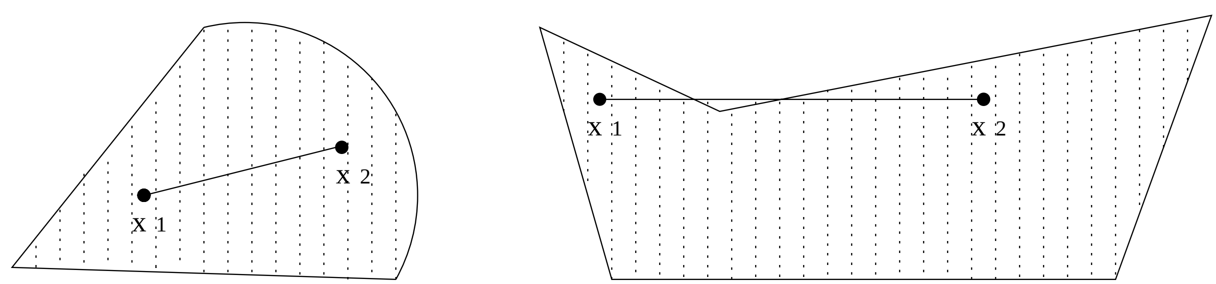
Así aparecen los siguientes casos:

1. Si $rank(A) = k < m$ y $b_2' \neq 0$ entonces el sistema es inconsistente.
2. Si $rank(A) = k$ y $k = n \leq m$ y $b_2' = 0$ entonces el sistema tiene una única solución.
3. Si $rank(A) = k$, $k < n$ y $b_2' = 0$ (cuando $k < m$) entonces el sistema tiene infinitas soluciones.

2.3 Conjuntos Convexos y Funciones Convexas

2.3.1 Conjunto Convexo

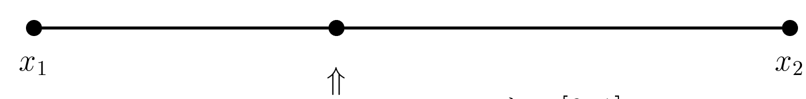
Un conjunto X en E^n es llamado de conjunto convexo si dados dos puntos x_1 y x_2 entonces el punto genérico $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in X$ para cada $\lambda \in [0,1]$. La figura 2.3 muestra un conjunto convexo y otro conjunto no convexo.



(a) Conjunto convexo (b) Conjunto no convexo

Figura 2.3: Conjuntos convexo y no convexo

Interpretación geométrica:



$$x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \quad \lambda \in [0,1]$$

Para cada $\lambda \in [0,1]$ es generado un punto en el segmento que une los puntos x_1 y x_2. Así, todo punto en el segmento que une x_1 y x_2 es llamado de una combinación convexa de x_1 y x_2.

Ejemplo 11: Ejemplos de conjuntos convexos:

- $\{x : Ax = b\}$ donde A es una matriz $m \times n$ y b es un vector de dimensión m.
- $\{x : Ax = b; \;\; x \geq 0\}$ donde A es una matriz $m \times n$ y b es un vector de dimensión m.
- $\{x : Ax \leq b; \;\; x \geq 0\}$ donde A es una matriz $m \times n$ y b es un vector de dimensión m.

Prueba: Probamos que el primer ejemplo es un conjunto convexo.

$$X = \{x : Ax = b\}$$

Sean x_1 y x_2 dos puntos que pertenecen al conjunto X. Entonces debemos probar que X es un conjunto convexo, o sea, probaremos que todo punto.

$x^{'} = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in X$.
Si $x_1 \in X \rightarrow Ax_1 = b$
Si $x_2 \in X \rightarrow Ax_2 = b$

Multiplicando la primera relación por λ y la segunda por $(1 - \lambda)$ y sumando las relaciones encontradas tenemos:

$$\lambda Ax_1 = \lambda b$$

$$(1 - \lambda)Ax_2 = (1 - \lambda)b$$

$$\lambda Ax_1 + (1 - \lambda)Ax_2 = \lambda b + (1 - \lambda)b$$

$$A[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] = b$$

$$Ax^{'} = b$$

y por lo tanto $x^{'} = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in X$

Puntos Extremos de un Conjunto Convexo

Un punto x perteneciente a un conjunto X es llamado punto extremo si ese punto no puede ser representado como una combinación estricta y convexa de 2 puntos distintos de X.

Si $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$ con $\lambda \in [0, 1]$ y $x_1, x_2 \in X \Longrightarrow x = x_1 = x_2$ entonces x es un punto extremo.

En la figura 2.4, x_1 es un punto extremo y, x_2 y x_3 no son puntos extremos.

Tipos Especiales de Conjuntos Convexos: Hiperplano - Semiespacio - Rayo

Hiperplano:

Un hiperplano H en el espacio E^n es un conjunto convexo de la forma:

$$H = \{x : px = k\}$$

donde p es un vector diferente de cero y k es un escalar. La figura 2.5 muesta un hiperplano.

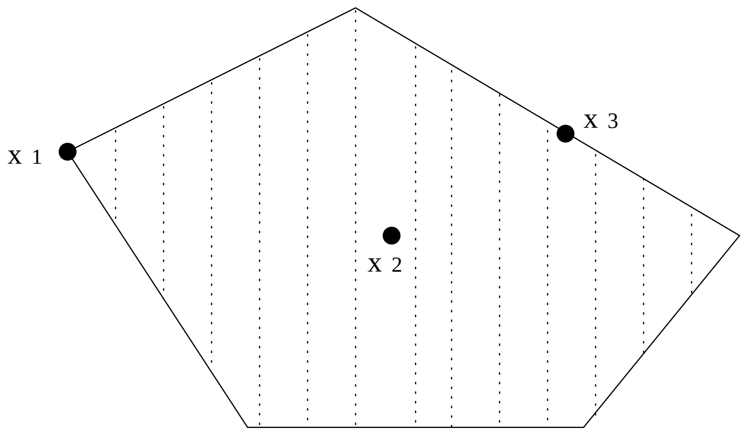


Figura 2.4: Punto extremo de un conjunto convexo

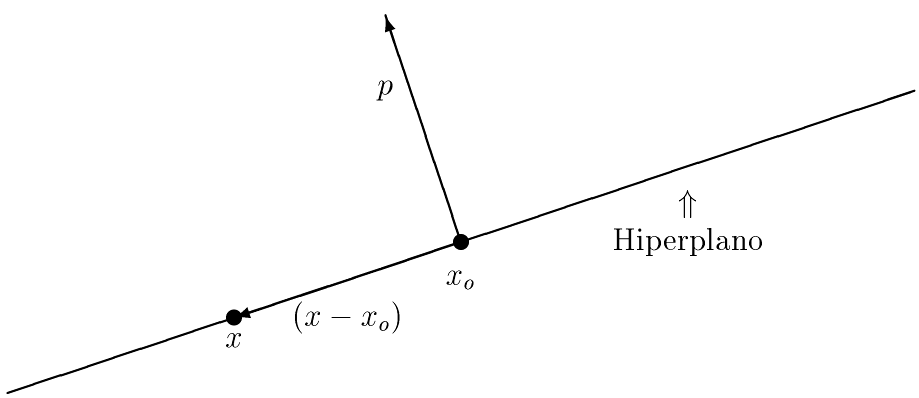


Figura 2.5: Hiperplano

Otra forma de representar la ecuación de un hiperplano es la siguiente: Sea $x_o \in H$ entonces:

$$px_o = k$$

$$px = k$$

y de las 2 relaciones anteriores se obtiene fácilmente una forma alternativa de la ecuación de un hiperplano:

$$p(x - x_o) = 0$$

Observación: Hiperplano $\Longrightarrow$ {recta,plano, ...}.

Semiespacio:

Un semiespacio es una colección de puntos de la forma:

$$H^+ = \{x : px \geq k\}$$

o también

$$H^- = \{x : px \leq k\}$$

La unión de estos semiespacios representa el espacio completo E^n. Así, un hiperplano separa el espacio E^n en 2 regiones o semiespacios como es mostrado en la figura 2.6. Un semiespacio es un conjunto convexo.

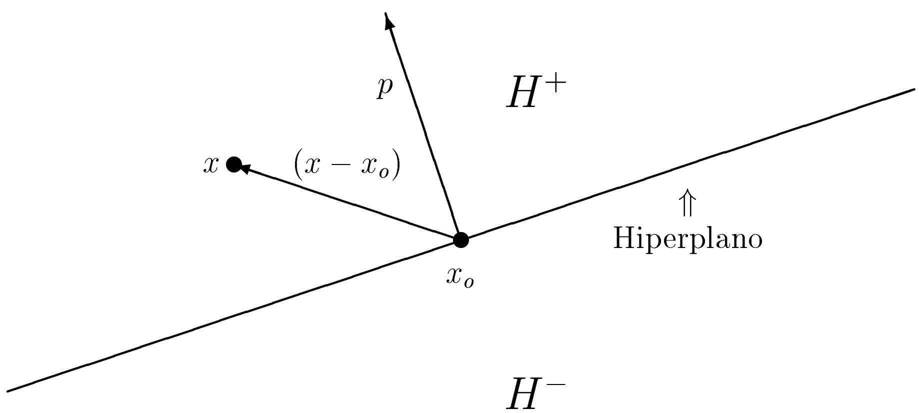


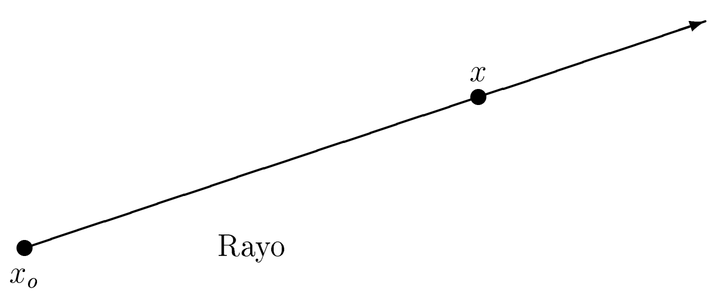
Figura 2.6: Subespacios

Rayo:

Rayo es un conjunto de puntos con la siguiente propiedad:

$$R = \{x : x_o + \lambda d; \quad \lambda \geq 0\}$$

donde d es un vector diferente de cero y x_o es el llamado vértice del rayo. Un rayo también es un conjunto convexo y la prueba se realiza en la forma de un teorema.



Teorema: Un rayo es un conjunto convexo.

Prueba: Probaremos de que el rayo:

$$R = \{x : x_o + \lambda d; \quad \lambda \geq 0\}$$

es un conjunto convexo.

Sean x_1 y $x_2 \in R$, entonces debemos probar de que el punto genérico:

$$x^{'} = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in R; \;\; \lambda \in [0,1]$$

Si $x_1 \in R \Longrightarrow x_1 = x_o + \lambda_1 d \quad \lambda_1 \geq 0$
Si $x_2 \in R \Longrightarrow x_2 = x_o + \lambda_2 d \quad \lambda_2 \geq 0$

Multiplicando la primera relación por λ y la segunda por $(1-\lambda)$ tenemos:

$$\lambda x_1 = \lambda x_o + \lambda\lambda_1 d$$

$$(1-\lambda)x_2 = (1-\lambda)x_o + (1-\lambda)\lambda_2 d$$

Sumando las 2 relaciones anteriores tenemos:

$$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 = x_o + [\lambda\lambda_1 + (1-\lambda)\lambda_2]d$$

con $\lambda_1 \geq 0 \quad \lambda_2 \geq 0$ y $\lambda \in [0,1]$. Haciendo las siguientes substituciones:

$$x^{'} = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$$

$$\lambda^{'} = [\lambda\lambda_1 + (1-\lambda)\lambda_2]$$

se puede verificar facilmente que $\lambda^{'} \geq 0$ porque $(1-\lambda) \geq 0$; $\lambda_1 \geq 0$ y $\lambda_2 \geq 0$. Por lo tanto fue demostrado que el punto genérico:

$$x^{'} = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 = x_o + \lambda^{'} d; \;\; \lambda^{'} \geq 0 \in R$$

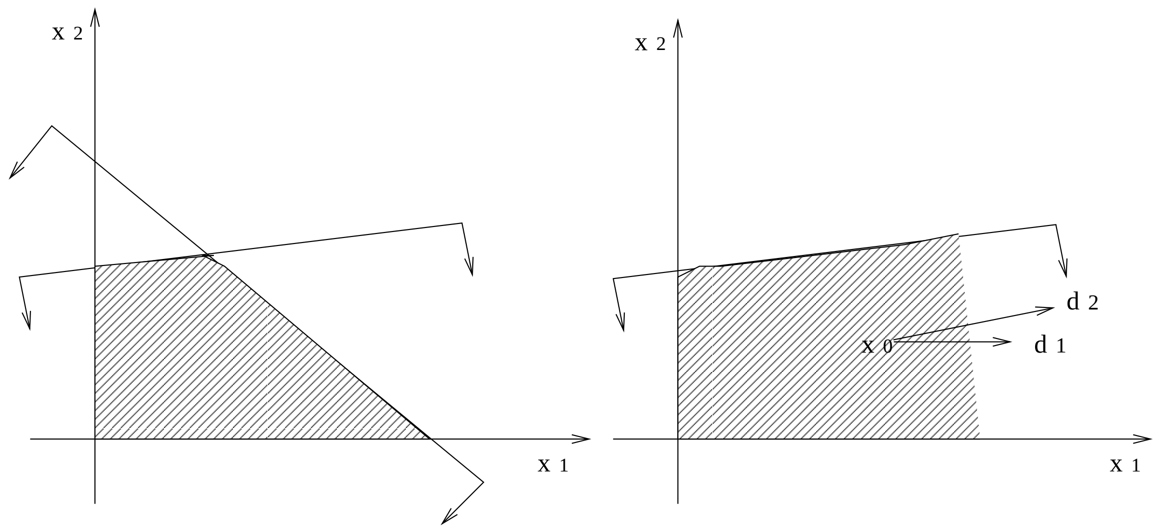
que es equivalente a que R es un conjunto convexo.

Direcciones de un Conjunto Convexo

Dado un conjunto convexo, un vector $d \neq 0$ es llamado de **dirección** de ese conjunto convexo si para cada punto x_o de ese conjunto el rayo:

$$R = \{x : \;\; x = x_o + \lambda d; \;\; \lambda \geq 0\}$$

también pertenece al conjunto convexo. Existen rayos en conjuntos convexos ilimitados y, por lo tanto, en esos conjuntos existen direcciones. La figura 2.7 muestra conjuntos convexos limitado e ilimitado.



(a) Conjunto convexo limitado (b) Conjunto convexo ilimitado

Figura 2.7: Conjuntos convexos

Ejemplo 12: Identificar las direcciones del siguiente conjunto convexo no vacío:

$$X = \{x : \quad Ax \leq b; \quad x \geq 0\}$$

Suponer que d es una dirección de X y, por lo tanto, se cumple que cualquier punto $x^{'}$ con la siguiente propiedad:

$$x^{'} = x_o + \lambda d; \quad \lambda \geq 0$$

con $d \neq 0$ y $x_o \in X$ debe ser un punto de X, o sea, $x^{'} = x_o + \lambda d \in X$.

Si $x^{'} \in X \Longrightarrow Ax^{'} \leq b \quad$ y $\quad x^{'} \geq 0$

Entonces tenemos que:

$$A(x_o + \lambda d) \leq b \Longrightarrow Ax_o + \lambda Ad \leq b \tag{2.11}$$

$$x_o + \lambda d \geq 0 \tag{2.12}$$

Como $x_o \in X$ entonces $Ax_o \leq b$ y de (2.11) tenemos que;

$$\lambda Ad \leq 0 \Longrightarrow Ad \leq 0$$

porque $\lambda \geq 0$. También de (2.12), llevando en cuenta que $x_o \geq 0$, tenemos:

$$\lambda d \geq 0 \Longrightarrow d \geq 0$$

Por lo tanto, el vector d es una dirección de $X \Longleftrightarrow$

$$d \neq 0; \quad d \geq 0 \ \text{ y } \ Ad \leq 0$$

Ejemplo 13: Identificar las direcciones del siguiente conjunto convexo no vacío:

$$X = \{x : \quad Ax = b; \quad x \geq 0\}$$

Suponer que d es una dirección de X y, por lo tanto, se cumple que cualquier punto $x^{'}$ con la siguiente propiedad:

$$x^{'} = x_o + \lambda d; \quad \lambda \geq 0$$

con $d \neq 0$ y $x_o \in X$ debe ser un punto de X, o sea, $x^{'} = x_o + \lambda d \in X$.

Si $x^{'} \in X \Longrightarrow Ax^{'} = b \quad \text{y} \quad x^{'} \geq 0$

Entonces tenemos que:

$$A(x_o + \lambda d) = b \Longrightarrow Ax_o + \lambda Ad = b \tag{2.13}$$

$$x_o + \lambda d \geq 0 \tag{2.14}$$

Como $x_o \in X$ entonces $Ax_o = b$ y de (2.13) tenemos que;

$$\lambda Ad = 0 \Longrightarrow Ad = 0$$

porque $\lambda \geq 0$. También de (2.14), llevando en cuenta que $x_o \geq 0$, tenemos:

$$\lambda d \geq 0 \Longrightarrow d \geq 0$$

Por lo tanto, el vector d es una dirección de $X \Longleftrightarrow$

$$d \neq 0; \quad d \geq 0 \;\; \text{y} \;\; Ad = 0$$

Ejemplo 14: Encontrar las direcciones del siguiente conjunto convexo no vacío:

$$X = \left\{ (x_1, x_2) : \begin{array}{r} x_1 - 2x_2 \geq -6 \\ x_1 - x_2 \geq -2 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 1 \end{array} \right\}$$

El sistema anterior es equivalente al siguiente sistema:

$$X = \left\{ (x_1, x_2) : \begin{array}{r} -x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ -x_1 + x_2 \leq 2 \\ -x_2 \leq -1 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{array} \right\}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad\qquad d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

Las condiciones que deben satisfacer el vector d son las siguientes:

$$d \neq 0; \quad d \geq 0 \;\text{ y }\; Ad \leq 0$$

Así tenemos:

$$Ad \leq 0 \quad \Longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \leq 0 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} -d_1 + 2d_2 \leq 0 \\ -d_1 + d_2 \leq 0 \\ -d_2 \leq 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} d_2 \leq \frac{1}{2} d_1 \\ d_2 \leq d_1 \\ d_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

$$d \geq 0 \quad \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} d_1 \geq 0 \\ d_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

Por lo tanto, una dirección d de X es todo vector que cumple con las siguientes condiciones:

$$\left\{ d = (d_1, d_2) : \quad d \neq 0, \quad \begin{array}{l} d_1 \geq 0 \\ d_2 \geq 0 \end{array}, \quad \text{y } \; d_2 \leq \frac{1}{2} d_1 \right\}$$

La figura 2.8 muestra el conjunto de direcciones de X. Después veremos que existen direcciones especiales llamadas **direcciones extremas**. Así, por ejemplo, en la figura puede identificarse, intuitivamente, las siguientes direcciones extremas:

$$d_a = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad\qquad d_b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

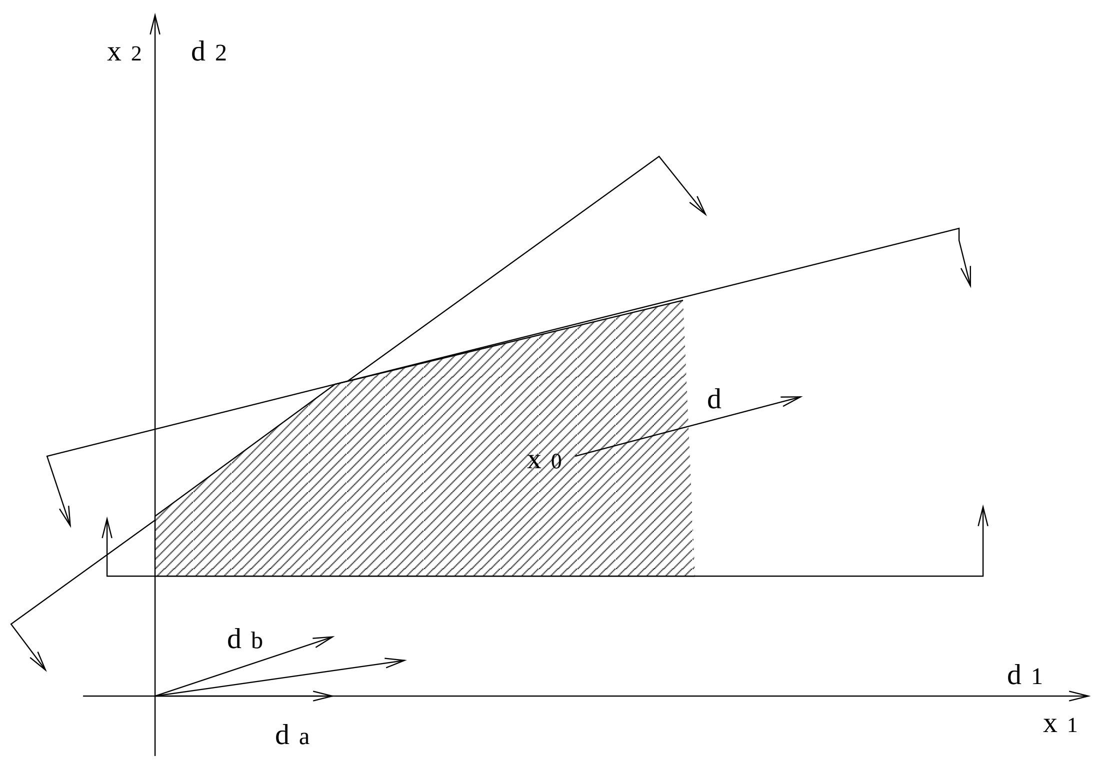


Figura 2.8: Direcciones del conjunto D

2.3.2 Funciones Convexas y Cóncavas

Una función $f(x)$ del vector $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ es **convexa** si es verdadera la siguiente relación para 2 vectores x_1 y x_2 genéricos:

$$f[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \ \ \forall \lambda \in [0,1] \tag{2.15}$$

Interpretación: La combinación de dos soluciones con funciones $f(x_1)$ y $f(x_2)$ da lugar a una nueva solución (conserva la factibilidad) cuya función $f(x^{'})$ es menor o igual a la combinación de las funciones $f(x_1)$ y $f(x_2)$.

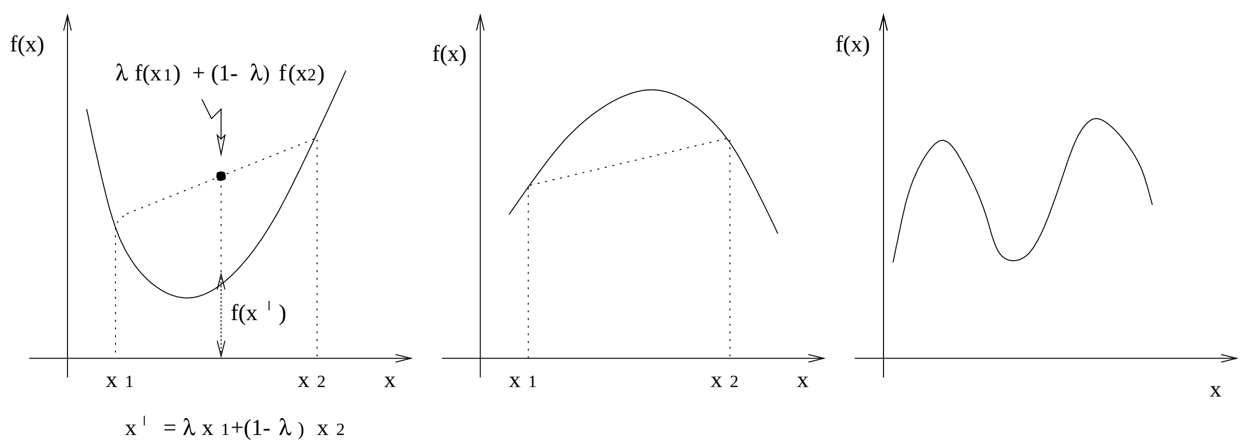
En procesos de optimización esta cualidad favorece la obtención de nuevas soluciones que mejoran las existentes.

Cuando la función $f(x)$ es función de una única variable, puede ser demostrado que $\lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$ corresponde a los puntos de una cuerda que une $f(x_1)$ y $f(x_2)$. Así, en una función convexa, la cuerda tiene una altura mayor o igual al de $f(x)$ (está siempre encima de $f(x)$).

Una función $f(x)$ es cóncava $\Longleftrightarrow -f(x)$ es convexa. En este caso tenemos que:

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \ \ \forall \lambda \in [0,1] \tag{2.16}$$

para dos puntos x_1 y x_2 genéricos. La figura 2.9 muestran funciones convexa y cóncava.



(a) Convexa (b) Cóncava (c) No Convexa - no cóncava

Figura 2.9: Tipos de funciones

Existen varias maneras para demostrar si una función $f(x)$ es convexa tales como:

1. Usando la definición presentada en (2.15). Escoger 2 vectores (puntos) genéricos, x_1 y x_2, y demostrar que (2.15) es verdadera.
2. Demostrando que el epígrafo de $f(x)$ es un conjunto convexo.
3. Demostrando que el Hessiano de $f(x)$, $H(x)$ es semidefinida positiva.

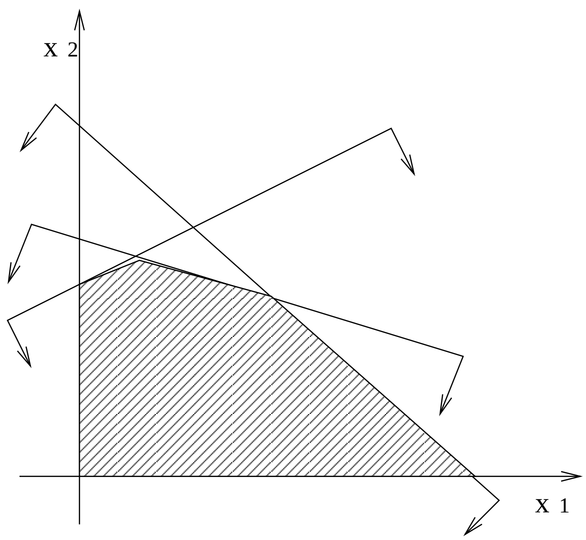
Observación: En PL todas las funciones usadas son lineales. Una función lineal, tal como $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 30$, es convexa y cóncava al mismo tiempo.

2.4 Conjuntos Poliedrales

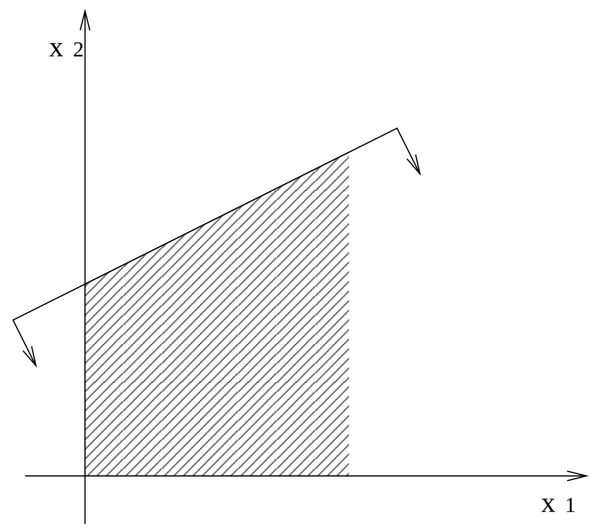
Un conjunto poliedral es la intersección de un número finito de semiespacios. Si el conjunto poliedral es limitado entonces ese conjunto poliedral especial es llamado de politope. Un conjunto poliedral es un caso especial de conjunto convexo. Un conjunto poliedral puede ser definido de la siguiente forma:

$$X = \{x : Ax \leq b\}$$

porque cada fila (restricción) del sistema anterior representa un semiespacio. La figura 2.10 muestra conjuntos poliedrales típicos.



(a) Conjunto poliedral limitado politope



(b) Conjunto poliedral ilimitado

Figura 2.10: Tipos de conjuntos poliedrales

Observación: Como cada igualdad puede ser representado por dos desigualdades, entonces un conjunto poliedral puede ser representado por un número finito de ecuaciones y/o desigualdades lineales.

2.4.1 Puntos Extremos, Fases, Direcciones y Direcciones Extremas de Conjuntos Poliedrales: Aspectos Geométricos

Sea el conjunto poliedral:

$$X = \{x : Ax \leq b; \ \ x \geq 0\}$$

Puntos Extremos

La idea aquí es discutir una interpretación equivalente de punto extremo.

Observación importante: Sea $\overline{x} \in X$ y suponer que la restricción $\alpha x \leq \beta$ está activa en $\overline{x}$, entonces $\alpha\overline{x} = \beta$. Suponer también que podemos escribir:

$\overline{x} = \lambda x^{'} + (1-\lambda)x^{''}$ donde $0 < \lambda < 1$ y $x^{'}$ e $x^{''} \in X$. Entonces es verdadera la relación $\alpha x^{'} = \beta$ y $\alpha x^{''} = \beta$, o sea, $\alpha x \leq \beta$ está activo en $x^{'}$ y $x^{''}$ como se muestra en la figura 2.11. También este hecho puede ser verificado de la siguiente forma:

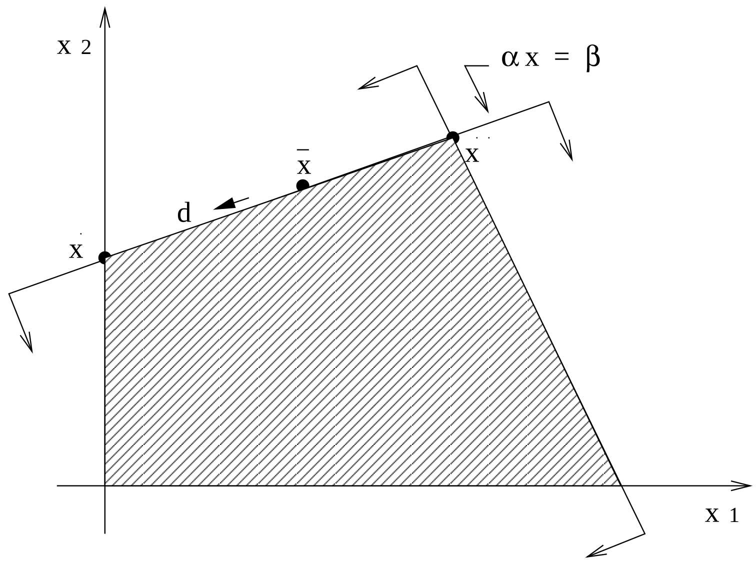


Figura 2.11: Representación de puntos extremos

$$\alpha\overline{x} = \beta$$

$$\alpha[\lambda x^{'} + (1-\lambda)x^{''}] = \beta \longrightarrow \lambda(\alpha x^{'}) + (1-\lambda)(\alpha x^{''}) = \beta$$

que solamente puede ser verdadera si $\alpha x^{'} = \beta$ y $\alpha x^{''} = \beta$.

Definición Equivalente de Punto Extremo:

Sean los $(m+n)$ hiperplanos definidos por los semiespacios de X, llamados de hiperplanos de definición de X. Si la matriz A correspondiente es de rank completo entonces esos hiperplanos son LI. Entonces un punto $\overline{x}$ es un punto extremo si $\overline{x}$ pertenece (está en la intersección) a n hiperplanos de definición de X.

Si más de n hiperplanos pasan por $\overline{x}$ entonces el punto extremo es llamado de **degenerado**. Los hiperplanos en exceso a n indica el orden de degeneración del punto extremo.

Teorema: $\overline{x}$ pertenece a n hiperplanos $\Longleftrightarrow$ $\overline{x}$ no puede ser escrito como una combinación convexa de dos puntos de X (o sea, si $\overline{x}$ es un punto extremo).

Prueba:

- $\Longrightarrow$ $\overline{x}$ pertenece a n hiperplanos LI de definición de X (entonces probaremos que $\overline{x}$ es un punto extremo).

  Si $\overline{x} \in X$ pertenece a n hiperplanos LI de definición de X entonces $\overline{x} = \lambda x^{'} + (1-\lambda)x^{''}$ (ver observación importante), donde $0 < \lambda < 1$ y $x^{'}$ y $x^{''} \in X$. Entonces, de la observación importante, concluimos que $x^{'}$ y $x^{''}$ también pertenecen a esos n hiperplanos. Mas la solución de esas n ecuaciones de hiperplanos es única, entonces $x^{'} = x^{''}$ que justamente caracteriza un punto extremo.

- $\Longleftarrow$ Prueba por el absurdo:

  Suponer que el número máximo de hiperplanos LI activos en $\overline{x} \in X$ es $r < n$ (probaremos que la intersección de esos hiperplanos no es un punto extremo).

  Las restricciones (hiperplanos) activas pueden ser representados por $G\overline{x} = g$ en que G es una matriz de dimensión $r \times n$ y, de igual manera, sea $d \neq 0$ una solución de $Gd = 0$. Ese d existe porque $n > r$ y es posible escoger valores adecuados para algunos elementos de d (en realidad $Gd = 0$ es un sistema con infinitas soluciones). Entonces existe un $\epsilon > 0$ tal que $x^{'} = (\overline{x} + \epsilon d)$ y $x^{''} = (\overline{x} - \epsilon d)$ que pertenecen a X porque $Gx^{'} = g$ y $Gx^{''} = g$, porque:

$$Gx^{'} = G(\overline{x} + \epsilon d) = G\overline{x} + \epsilon G d = G\overline{x} + \epsilon(0) = g$$

$$Gx^{''} = G(\overline{x} - \epsilon d) = G\overline{x} - \epsilon G d = G\overline{x} - \epsilon(0) = g$$

  y, adicionalmente, las restricciones de X que no estaban activas en $\overline{x}$ permanecen factibles para un $\epsilon > 0$ suficientemente pequeños. Así podemos escoger, por ejemplo, un $\overline{x} = 0.5x^{'} + 0.5x^{''}$ y $x^{'}, \ x^{''} \in X$ que muestra claramente que $\overline{x}$ no es un punto extremo, porque fue representado por una combinación convexa de $x^{'}$ y $x^{''}$.

Fases, Aristas y Puntos Extremos Adyacentes

Fase Propia de X: Es un conjunto de puntos de X que pertenecen a un conjunto no vacío de hiperplanos activos.

Sea $r(F)$ el número máximo de hiperplanos LI activos en **todos los puntos de la face** F, entonces se define la **dimensión de F** de la siguiente forma:

$$dim(F) = n - r(F)$$

En otras palabras, cada hiperplano activo LI produce la pérdida de un grado de libertad.

Consecuencias:

1. Un punto extremo es una face propia de dimensión cero porque tiene n hiperplanos activos LI.

2. Una arista es una face propia de dimensión 1 porque tiene $(n-1)$ hiperplanos activos LI. Así, una arista es una face propia de un grado de libertad porque tiene solamente $(n-1)$ hiperplanos activos LI (un hiperplano menos que un punto extremo). Por lo tanto, una arista es un conjunto de puntos que tienen $(n-1)$ hiperplanos activos LI, o sea, todos los puntos de una arista tienen la siguiente característica: en todos los puntos de una arista existen $(n-1)$ hiperplanos activos LI.

3. $dim(X) = n - r(X) = n - 0 = n \Longrightarrow$ dimensión completa porque en este caso tenemos el conjunto completo X y debe existir por lo menos un punto en el cual ningún hiperplano está activo (un punto interior del conjunto poliedral). Así, el conjunto X y el conjunto vacío son llamados de **faces impropias** de X.

4. La face propia de mayor dimensión, o sea,

$$dim(F) = dim(X) - 1$$

   es llamado de **faceta de X**.

5. Puntos extremos adyacentes:

   Dos puntos extremos de X son llamados de adyacentes si el segmento de recta que los une es una arista. Así, los puntos extremos adyacentes tienen $(n-1)$ hiperplanos activos LI comunes.

La figura 2.12 muestra las diferentes faces propias de X.

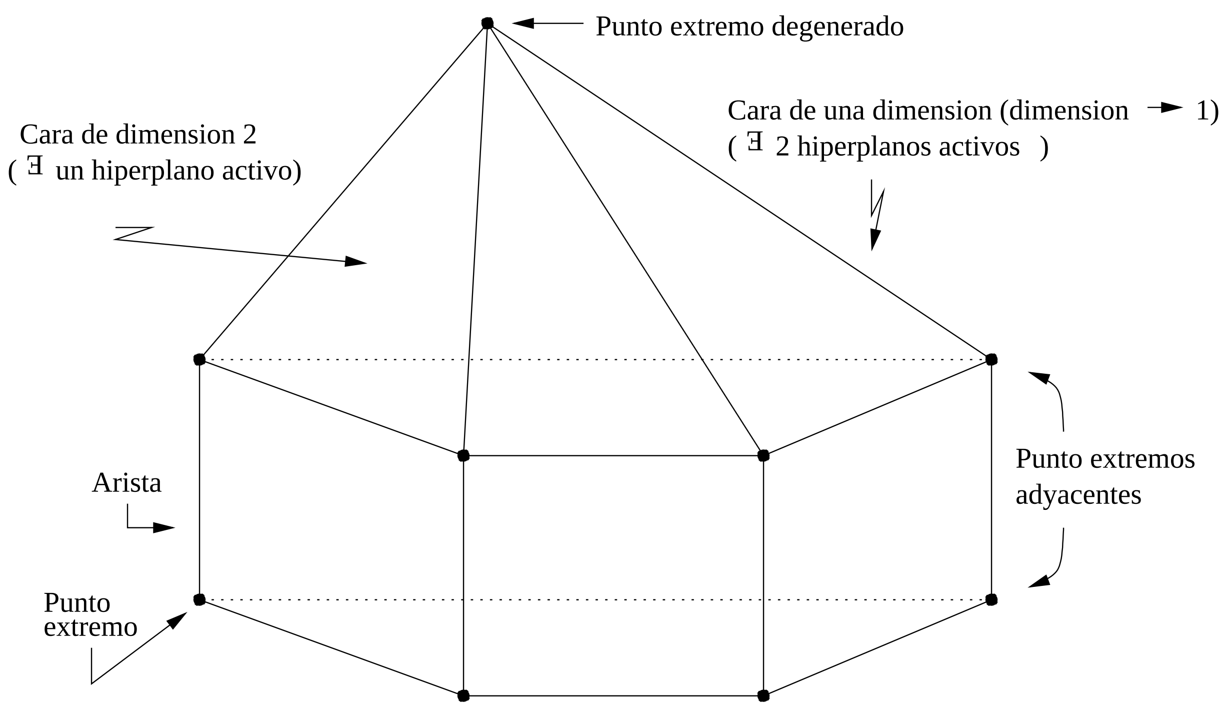


Figura 2.12: Caras propias de X

Direcciones Extremas de un Conjunto Poliedral:

Las direcciones de un conjunto poliedral X

$$X = \{x : \quad Ax \leq b; \quad x \geq 0\}$$

son dadas por los vectores que satisfacen la relación:

$$D = \{d : \quad Ad \leq 0; \quad d \geq 0; \quad d \neq 0\}$$

Geométricamente, este conjunto puede ser encontrado simplemente trasladando todos los hiperplanos, que definen X, paralelamente a si mismos hasta llegar al origen. Recuerde la semejanza

$$Ax \leq b \Longleftrightarrow Ad \leq 0$$

Para evitar duplicación en representar direcciones se puede normalizar los vectores d usando la siguiente norma:

$$|d_1| + |d_2| + \ldots + |d_n| = 1$$

mas como todos los elementos de $d \geq 0$ entonces la norma se resume a:

$$d_1 + d_2 + \ldots + d_n = 1$$

Así, el conjunto de vectores que son direcciones de X asumen la siguiente forma:

$$D = \{d : \quad Ad \leq 0; \quad d \geq 0; \quad d \neq 0; \quad d_1 + d_2 + \ldots + d_n = 1\}$$

y lógicamente:

$$d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

Propiedad importante: Los puntos extremos de D son direcciones extremas de X.

Ejemplo 15: Encontrar el conjunto D y las direcciones extremas de X en el siguiente problema:

$$X = (x_1, x_2) : \left\{ \begin{array}{r} -x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ -x_1 + x_2 \leq 2 \\ -x_2 \leq -1 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{array} \right\}$$

El conjunto D tiene la siguiente forma:

$$D = \{d: \quad Ad \leq 0; \quad d \geq 0; \quad d \neq 0; \quad d_1 + d_2 + \ldots + d_n = 1\}$$

Así tenemos:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{r} -d_1 + 2d_2 \leq 0 \\ -d_1 + d_2 \leq 0 \\ -d_2 \leq 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} d_2 \leq \frac{1}{2} d_1 \\ d_2 \leq d_1 \\ d_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d_1 \geq 0 \\ d_2 \geq 0 \\ d_1 + d_2 = 1 \end{array} \right.$$

Reuniendo y simplificando las relaciones anteriores tenemos:

$$D = \left\{ (d_1, d_2): \begin{array}{r} d_2 \leq \frac{1}{2} d_1 \\ d_1 + d_2 = 1 \\ d_1 \geq 0 \\ d_2 \geq 0 \end{array} \right\}$$

La figura 2.13 muestra gráficamente las direcciones de D.

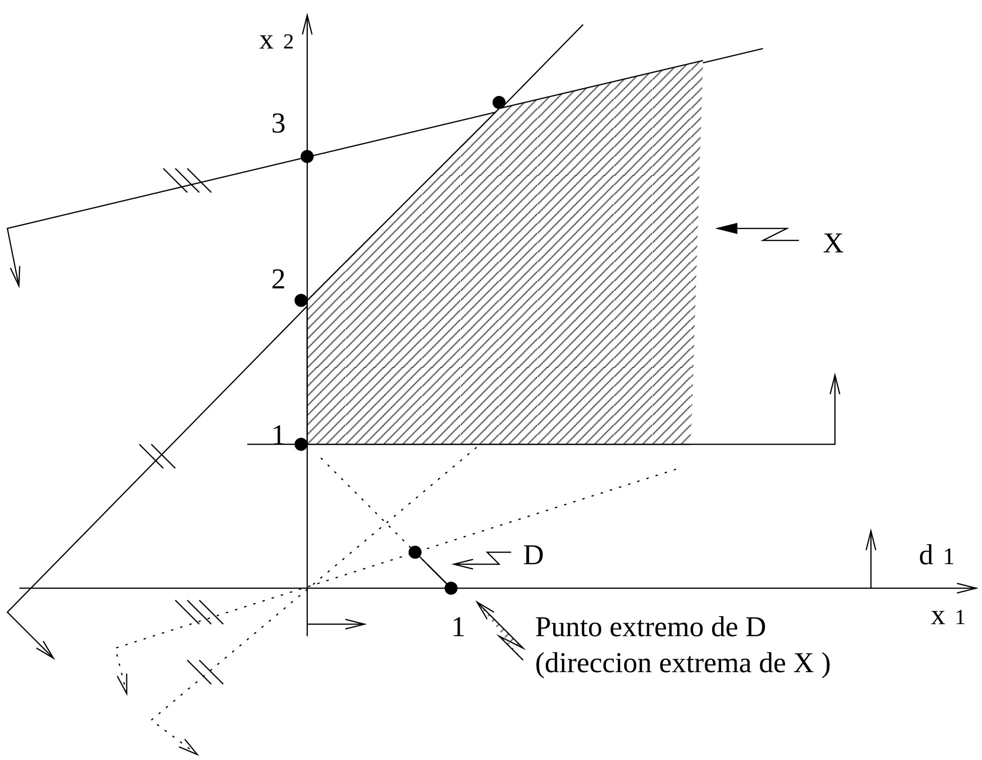


Figura 2.13: Direcciones de D

En la figura 2.13 puede verificarse que existen 2 puntos extremos en D y, por la propiedad importante mencionada anteriormente, existen 2 direcciones extremas en X. Así, las direcciones extremas de X (puntos extremos de D) son los siguientes:

$$d_a = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad\qquad d_b = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

2.4.2 Representación de Conjuntos Poliedrales

En esta parte se discute una propiedad muy importante que estipula que un conjunto poliedral puede ser **completamente representado** en función de sus puntos extremos y sus direcciones extremas. Inicialmente son analizados los casos especiales y después el caso general.

Caso Específico: Conjunto Poliedral Limitado - Politope

Propiedad: Cualquier punto x de un conjunto poliedral limitado puede ser representado por una **combinación convexa** de sus puntos extremos. Esta representación convexa no es única. Esta propiedad es ilustrada en la figura 2.14.

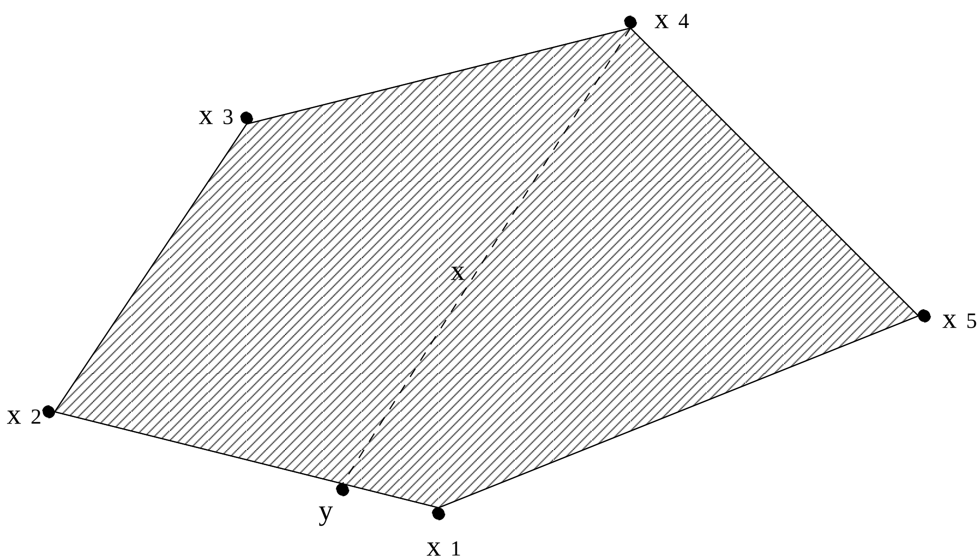


Figura 2.14: Representación de un conjunto poliedral limitado

Representamos el punto genérico x por una combinación convexa de los puntos extremos x_1, x_2, x_3, x_4 y x_5 (no necesariamente por todos ellos).

Representamos primero x como una combinación convexa de los puntos y y x_4:

$$x = \lambda y + (1-\lambda)x_4 \qquad\qquad \lambda \in [0,1]$$

mas

$$y = \mu x_1 + (1-\mu)x_2 \qquad\qquad \mu \in [0,1]$$

Substituyendo y en la primera relación tenemos:

$$x = \lambda[\mu x_1 + (1-\mu)x_2] + (1-\lambda)x_4, \quad \text{con} \qquad \mu \in [0,1], \;\; \lambda \in [0,1]$$

$$x = \lambda\mu x_1 + \lambda(1-\mu)x_2 + (1-\lambda)x_4$$

$$x = (\lambda\mu)x_1 + (\lambda(1-\mu))x_2 + (1-\lambda)x_4 \quad \text{con} \qquad \mu \in [0,1], \;\; \lambda \in [0,1]$$

que es una combinación convexa porque
$(\lambda\mu) \in [0,1]$, $\lambda(1-\mu) \in [0,1]$, $(1-\lambda) \in [0,1]$ y además:

$$\lambda\mu + \lambda(1-\mu) + (1-\lambda) = \lambda\mu + \lambda - \lambda\mu + 1 - \lambda = 1$$

que caracteriza una combinación convexa.

Caso Específico: Conjunto Poliedral Ilimitado

Propiedad: Cualquier punto x de un conjunto poliedral ilimitado puede ser representado por una **combinación convexa** de sus puntos extremos más una **combinación lineal no negativa** de sus direcciones extremas. La figura 2.15 muestra la representación gráfica de este caso a través de un ejemplo.

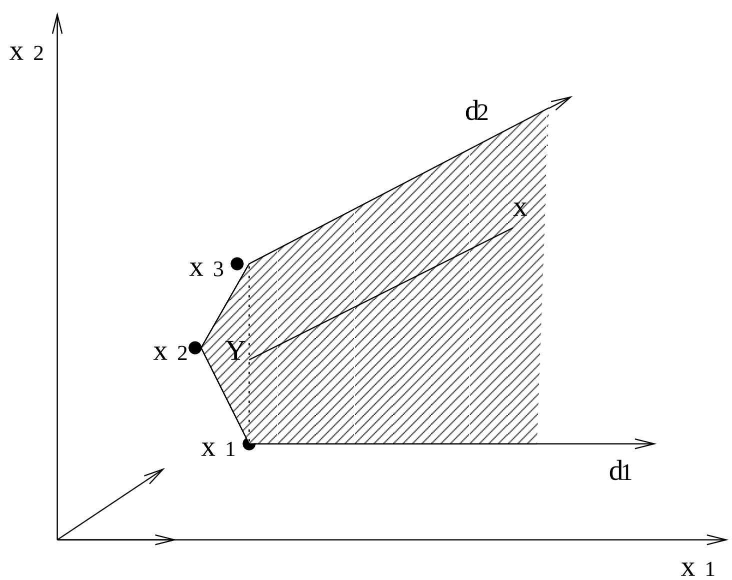


Figura 2.15: Representación de un conjunto poliedral ilimitado

En la figura 2.15 existen 3 puntos extremos (x_1, x_2, x_3) y 2 direcciones extremas (d_1, d_2). El punto x puede ser representado simplemente por una dirección paralela a d_2 y un y que es una combinación convexa de los puntos extremos de x_1 y x_3. Así tenemos:

$$x = y + \mu d_2 = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_3 + \mu d_2$$

donde $\lambda \in [0,1]$ y $\mu > 0$.

Esta representación de x no es única. Se puede obtener una otra representación, por ejemplo, así:

$$x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_3 + \mu_1 d_1 + \mu_2 d_2 \qquad \lambda \in [0,1], \;\; \mu_1 > 0 \;\; \text{y} \;\; \mu_2 > 0$$

Caso General: Teorema de la Representación

Sea $X = \{x : Ax \leq b, \;\; x \geq 0\}$ un conjunto poliedral no vacío. Entonces, en este caso, el conjunto de puntos extremos definido como $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ es no vacío y finito. Además, el conjunto de direcciones extremas es vacío $\Longleftrightarrow$ X es limitado. Si X no es limitado, entonces el conjunto de direcciones extremas $\{d_1, d_2, \ldots, d_l\}$ es no vacío y finito. Entonces, $\overline{x} \in X \Longleftrightarrow \overline{x}$ puede ser representado como una combinación convexa de los puntos extremos $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ y más una combinación lineal no negativa de las direcciones extremas $\{d_1, d_2, \ldots, d_l\}$, o sea,

$$\begin{cases} \overline{x} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j + \sum_{j=1}^{l} \mu_j d_j \\ \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1 \\ \lambda_j \geq 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, k \\ \mu_j \geq 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, l \end{cases} \tag{2.17}$$

Prueba: Ver figura 2.16

$\overline{x} = \delta_1 x_1 + \delta_2 x_2 + \delta_3 x_3 + \delta_8 x_8$
$\overline{x} = \delta_1 x_1 + \delta_2 x_2 + (\delta_3 + \delta_8) x_3 + \delta_8 \theta_8 d_1$
donde: $\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_8 = 1$
$\delta_i \geq 0, \theta_8 \geq 0$

Sean:

$$S_p \quad \text{el conjunto de puntos extremos} \Longrightarrow S_p = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$$

$$S_d \quad \text{el conjunto de direcciones extremas} \Longrightarrow S_d = \{d_1, d_2, \ldots, d_l\}$$

1) **El número de puntos extremos es finito y no vacío:**

Primero demostramos que el número de puntos extremos es finito y no vacío: $1 \leq k < \infty$ con k siendo el número de puntos extremos (número de elementos de S_p) $\Longrightarrow |S_p| = k$.

a) Probamos que existe por lo menos un punto extremo: $1 \leq k \Longrightarrow k \geq 1$. Sea $\overline{x} \in X$.

Si $\overline{x} \in S_p$ entonces existe por lo menos un punto extremo, el propio $\overline{x}$, entonces $k \geq 1$.

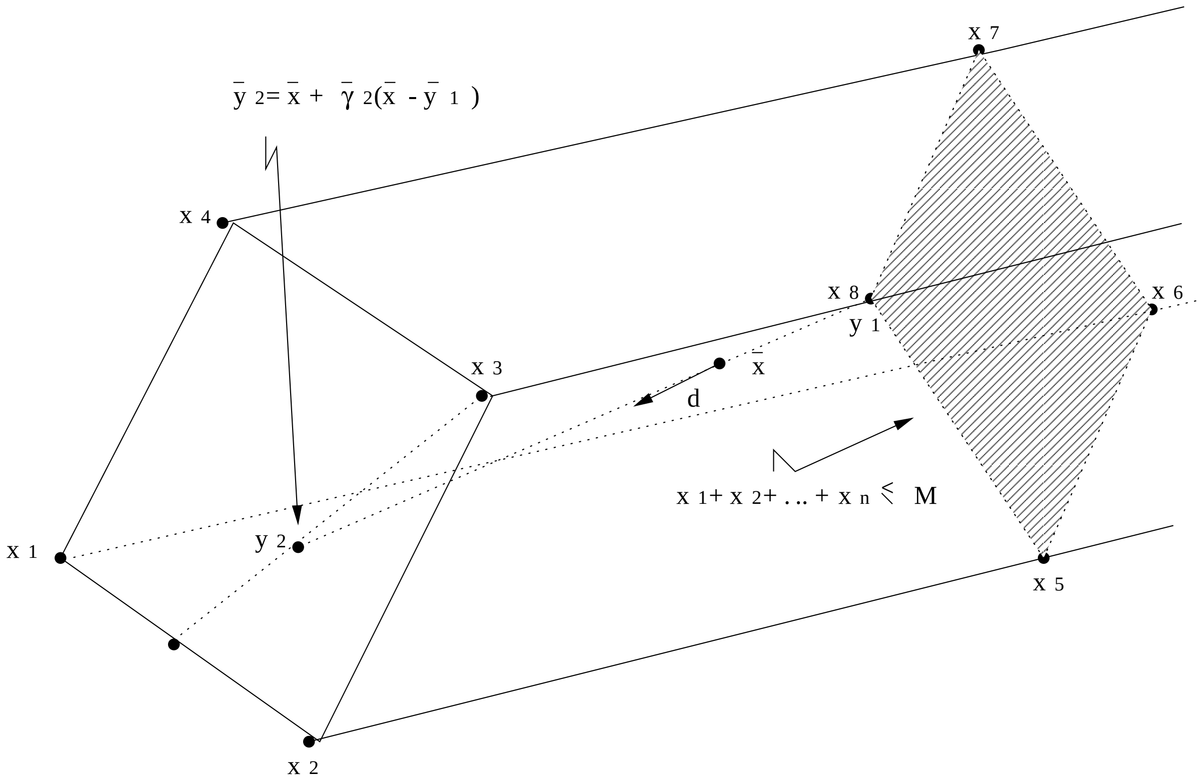


Figura 2.16: Caso general de representación

Ahora suponer que $\overline{x} \notin S_p$.

Sea r el número máximo de hiperplanos activos LI en $\overline{x}$ y sea: $\overline{x} = \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2$ donde $0 < \lambda < 1$ y $y_1, y_2 \in X$ con $y_1 \neq y_2$.

Observe que $0 \leq r < n$ (0 para el caso en que ningún hiperplano está activo en $\overline{x}$ (punto interior) y $r < n$ ya que $r = n$ significaría de que $\overline{x}$ es un punto extremo).

Sea $d = y_2 - y_1 \neq 0$ y entonces es posible deducir que:

$$\begin{cases} y_1 = \overline{x} - (1-\lambda)d \\ y_2 = \overline{x} + \lambda d \end{cases} \tag{2.18}$$

Demostración de (2.18):

$$\begin{aligned}
&\overline{x} = \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 \\
&\overline{x} = \lambda y_1 - y_1 + y_1 + (1-\lambda)y_2 = -(1-\lambda)y_1 + (1-\lambda)y_2 + y_1 \\
&\overline{x} = (y_2 - y_1)(1-\lambda) + y_1 \Longrightarrow y_1 = \overline{x} - (1-\lambda)d
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\overline{x} = \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 = \lambda y_1 - \lambda y_2 + y_2 \\
&\overline{x} = -\lambda(y_2 - y_1) + y_2 = -\lambda d + y_2 \Longrightarrow y_2 = \overline{x} + \lambda d
\end{aligned}$$

donde en ambos casos fue usada la relación: $d = y_2 - y_1$.

Ahora consideramos desplazamientos de $\overline{x}$ en las direcciones (y sentidos) de d y $-d$. Ambos desplazamientos son posibles y de tamaño finito sin salir de X porque $X \subseteq \{x : x \geq 0\}$, o sea, en el peor caso, el tamaño del paso es limitado por los hiperplanos definidos por $x \geq 0$. Así, sin pérdida de generalidad, sea

$$\overline{\gamma} = max\{\gamma : \overline{x} - \gamma d \in X\} < \infty$$

y calculamos $\overline{y}_1 = \overline{x} - \overline{\gamma} d$. Ahora podemos afirmar que el número máximo de hiperplanos activos LI en $\overline{y}_1$ es $\overline{r} \geq r + 1$ porque todos los hiperplanos activos en $\overline{x}$ continuan activos en $\overline{y}_1$ (porque $\overline{x}$ es una combinación convexa estricta de $\overline{y}_1$ y y_2 y, además, por lo menos un hiperplano LI está activo en $\overline{y}_1$, o sea, aquel hiperplano que bloquea el avance de γ en la dirección $-d$ para calcular $\overline{\gamma}$.

Si $\overline{r} = n \Longrightarrow \overline{y}_1 \in S_p$ y, por lo tanto, es un punto extremo $\Longrightarrow k \geq 1$.

Si $\overline{r} < n$ entonces substituir $\overline{x}$ por $\overline{y}_1$ y repetir el processo hasta que $\overline{r} = n$ que debe suceder en un número finito de pasos porque $\overline{r}$ aumenta en cada paso por lo menos en una unidad y porque n es finito.

b) Probamos que $k < \infty$:

Como existen $(n + m)$ hiperplanos caracterizando X y un punto extremo es definido por n hiperplanos activos entonces el **número máximo** de puntos extremos es calculado por la relación:

$$\begin{pmatrix} m+n \\ n \end{pmatrix} = \frac{(m+n)!}{n!m!} < \infty$$

2) Ahora demostramos que si X es no limitado entonces el conjunto de direcciones extremas es no vacío y finito, o sea, $1 \leq l < \infty$.

Si X es limitado entonces, por definición, el conjunto de direcciones extremas (o mejor todavía, el conjunto de direcciones) de X es vacío:

$$D = \phi$$

Si X es no limitado entonces $D \neq \phi \Longrightarrow 1 \leq l$

Observemos que D es de la misma forma que X y que los **puntos extremos de** D son también las **direcciones extremas de** X y como el número de puntos extremos de D es finito (misma estructura de X) entonces el número de direcciones extremas de X también debe ser finito, entonces

$$l < \infty \Longrightarrow 1 \leq l < \infty$$

3) Ahora demostramos que si $\overline{x} \in X$ entonces $\overline{x}$ puede ser escrita en la forma presentada en (2.17).

Definimos un nuevo conjunto:

$$\overline{X} = X \cap \{x : \ | \, x \leq M\}$$

donde M es un número suficientemente grande tal que $x_j < M$ para cada $j = 1, \ldots, k$ (para cada punto extremo) y $\overline{x} < M$.

Note que $\overline{X}$ es limitado y los puntos extremos de X son también puntos extremos de $\overline{X}$.

Sea $\overline{S}_p = \{x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_{k+u}\}$ los puntos extremos de $\overline{X}$ donde $0 \leq u < \infty$.

a) Primero mostraremos que $\overline{x}$ puede ser escrito como una combinación convexa de los puntos extremos de $\overline{X}$, o sea, por puntos de $\overline{S}_p$

Si $\overline{x} \in S_p \Longrightarrow \overline{x}$ es un punto extremo de $\overline{X}$

Si $\overline{x} \notin S_p$ entonces representamos los hiperplanos activos de X en $\overline{x}$ de la siguiente forma:

$$Gx = g \tag{2.19}$$

En este caso $rank(G) \leq (n-1)$ porque en caso contrario $\overline{x}$ seria un punto extremo de $\overline{X}$.

Encontrar una solución para el sistema $Gd = 0, \ d \neq 0$ y calcular

$$\overline{\gamma}_1 = max\{\gamma : \ \ \overline{x} + \gamma d \in \overline{X}\}$$

En este caso d es una dirección que tiene los mismos hiperplanos activos que $\overline{x}$. Note que $0 < \overline{\gamma}_1 < \infty$ porque $\overline{X}$ es limitado.

Sea $\overline{y}_1 = \overline{x} + \overline{\gamma}_1 d$. Así, en $\overline{y}_1 \in \overline{X}$ tenemos por lo menos un hiperplano activo LI adicional de $\overline{X}$ en relación a $\overline{x}$.

Si este nuevo hiperplano activo en $\overline{y}_1$ junto con $Gx = g$ produce un sistema de $rank = n$ entonces $\overline{y}_1$ es un punto extremo de $\overline{X}$. En caso contrario, si el rank todavía no es n, entonces repetir el paso para la determinación de $\overline{y}_1$, en el peor caso, durante $[n - rank(G)]$ veces, hasta encontrar un vértice (punto extremo) de $\overline{X}$, identificado como un nuevo punto $\overline{y}_1 \in \overline{X}$, de $rank = n$, satisfaciendo el sistema $G\overline{y}_1 = g$.

Ahora definimos un $\overline{\gamma}_2$:

$$\overline{\gamma}_2 = max\{\gamma : \ \ \overline{x} + \gamma(\overline{x} - \overline{y}_1) \in X\} \tag{2.20}$$

que produciría un:

$$\overline{y}_2 = \overline{x} + \overline{\gamma}_2(\overline{x} - \overline{y}_1) \tag{2.21}$$

Observe que $\overline{\gamma}_2 < \infty$ porque X es limitado y $\overline{\gamma}_2$ es el máximo permitido.

$\overline{\gamma}_2 > 0$ porque $G(\overline{x} + \gamma(\overline{x} - \overline{y}_1)) = g$ para $\gamma > 0$ fue resuelto encontrándose un $\overline{\gamma}_2$ que fue limitado por alguna restricción que no estaba activa en $\overline{x}$. Así, la nueva solución $G\overline{y}_2 = g$ tiene por lo menos un hiperplano activo LI adicional en $\overline{y}_2$ en relación a $\overline{x}$.

Resumiendo, $\overline{y}_1$ es un punto extremo de $\overline{X}$ y $\overline{y}_2$ tiene por lo menos un hiperplano LI adicional a $\overline{x}$. Además, $\overline{x}$ es una combinación convexa de $\overline{y}_1$ y $\overline{y}_2$,

$$\overline{x} = \delta\overline{y}_1 + (1-\delta)\overline{y}_2 \qquad 0 < \delta = \frac{\overline{\gamma}_2}{1+\overline{\gamma}_2} < 1 \tag{2.22}$$

que puede ser fácilmente verificado usando (2.21). Así, $\overline{x}$ fue representado como una combinación convexa de 2 puntos $\overline{y}_1$ y $\overline{y}_2$ siendo $\overline{y}_1$ un punto extremo $\Longrightarrow \overline{y}_1 \in \overline{S}_p$. Puede, todavía suceder 2 casos:

- Si $\overline{y}_2 \in \overline{S}_p$ entonces conseguimos representar $\overline{x}$ como una combinación convexa de 2 puntos extremos $\overline{y}_1$ y $\overline{y}_2$.
- Si $\overline{y}_2 \notin \overline{S}_p$:

  Entonces $\overline{y}_2$ puede ser representado como una combinación convexa estricta de $\overline{y}_3$ y $\overline{y}_4$, [repitiendo el método para calcular $\overline{y}_1$ y $\overline{y}_2$], donde uno de esos puntos es un punto extremo de $\overline{X}$, $\overline{y}_3 \in \overline{S}_p$ y el otro, $\overline{y}_4$ tiene por lo menos un hiperplano LI adicional en relación a $\overline{y}_2$.

  En esta parte del trabajo, $\overline{y}_4$ tiene 2 hiperplanos LI adicionales en relación a $\overline{x}$. Continuando este proceso, en cada paso substituyendo un punto por otros 2 puntos, donde uno de ellos es un punto extremo y el otro tiene un hiperplano activo adicional, entonces en un número determinado de pasos este segundo punto tendrá n hiperplanos activos y, por lo tanto, identificando un punto extremo.

  Usando como máximo $[n - rank(G) + 1]$ puntos extremos de $\overline{X}$ (vértices de $\overline{S}_p$) terminamos el proceso de representación. La representación encontrada es la siguiente:

$$\overline{x} = \sum_{j=1}^{k+u} \delta_j x_j \quad \text{donde} \quad \sum_{j=1}^{k+u} \delta_j = 1 \quad \text{y} \quad \delta_j \geq 0 \tag{2.23}$$

b) Ahora completamos la demostración eliminando el efecto de la restricción $x \leq M$ adicionado, o sea, ahora veremos que (2.23) es verdadero para X.

   Si $\delta_j = 0$ para $j > k$ entonces (2.23) es equivalente a (2.17) $\Longrightarrow X$ es limitado.

   En caso contrario consideremos algún punto extremo de (2.23), x_v con $v > k$ y $\delta_v > 0$. Observe que x_v es un nuevo punto extremo generado por la restricción $x \leq M$, o sea, $x = M$ es uno de los n hiperplanos LI que identifica x_v como punto extremo de $\overline{X}$. Los otros $(n-1)$ hiperplanos activos pertenecen al conjunto original X y identifican una arista de X. Consecuentemente, existe un punto extremo $x_{i(v)}$ de X, $1 \leq i(v) \leq k$ que es punto extremo adyacente de x_v en $\overline{X}$ a través de esa arista. Además, $(x_v - x_{i(v)})$ es una dirección de X porque no existe otro hiperplano de X que pare la evolución en esta dirección a partir de $x_{i(v)}$. Adicionalmente, sea $\overline{d} = \frac{1}{\theta_v}(x_v - x_{i(v)})$ donde $\theta_v = 1(x_v - x_{i(v)}) > 0$. Observe que $\overline{d} \in D$. Adicionalmente, $(n-1)$ hiperplanos LI de X que están activos en la caracterización de x_v también están activos en el sistema $Ad \leq 0$, $\ d \geq 0$ en la caracterización (definición) de $\overline{d}$. También, esos $(n-1)$ hiperplanos activos que caracterizan x_v junto con el hiperplano $1d = 1$ producen el conjunto de n hiperplanos activos LI de D en $\overline{d}$. Por lo tanto, la dirección $\overline{d}$ es un punto extremo de D y lo llamaremos $d_{j(v)}$ que por su vez es una dirección extrema de X. Consecuentemente, tenemos que $x_v = x_{i(v)} + \theta_v d_{j(v)}$. Substituyendo esta relación en (2.23) tenemos:

$$\overline{x} = \sum_{j=1}^{k} \delta_j x_j + \sum_{v=k+1}^{k+u} \delta_v x_{i(v)} + \sum_{v=k+1}^{k+u} \delta_v \theta_v d_{j(v)} \tag{2.24}$$

que tiene la forma de (2.17).

4) Finalmente demostraremos que se $\overline{x}$ puede ser escrito en la forma presentada en (2.17) $\Longrightarrow \overline{x} \in X$

Debemos demostrar que si $\overline{x}$ puede ser escrito como en (2.17) entonces $\overline{x}$ cumple con las siguientes relaciones:

$$\overline{x} \in X \Longrightarrow \{\overline{x} : A\overline{x} \leq b; \quad \text{y} \quad \overline{x} \geq 0\}$$

Si $\overline{x}$ cumple con (2.17) entonces tenemos:

$$\begin{cases} \overline{x} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j + \sum_{j=1}^{l} \mu_j d_j \\ \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1 \\ \lambda_j \geq 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, k \\ \mu_j \geq 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, l \end{cases} \tag{2.25}$$

Sabemos que los x_j son puntos extremos de X y, por lo tanto, satisfacen:

$$\begin{aligned} &Ax_j \leq b \\ &x_j \geq 0; \qquad j = 1, \ldots, k \end{aligned} \tag{2.26}$$

Sabemos que los d_j son direcciones extremas de X (o también equivalentemente puntos extremos de D) y, por lo tanto, satisfacen:

$$\begin{aligned} &Ad_j \leq 0 \\ &d_j \geq 0 \\ &d_j \neq 0; \qquad j = 1, \ldots, l \end{aligned} \tag{2.27}$$

a) Probamos que $\overline{x} \geq 0$:

$\overline{x} \geq 0$ es verdadero porque analizando (2.25) (o (2.17)) podemos verificar que:

$$\lambda_j \geq 0; \quad x_j \geq 0; \quad \mu_j \geq 0; \quad \text{y} \quad d_j \geq 0; \quad \Longrightarrow \overline{x} \geq 0$$

b) Probamos que $A\overline{x} \leq b$:

Multiplicando $\overline{x}$ en (2.25) por A por la izquierda tenemos:

$$A\overline{x} = A \left\{ \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j + \sum_{j=1}^{l} \mu_j d_j \right\}$$

$$A\overline{x} = \lambda_1 Ax_1 + \lambda_2 Ax_2 + \ldots + \lambda_k Ax_k + \mu_1 Ad_1 + \mu_2 Ad_2 + \ldots + \mu_l Ad_l \tag{2.28}$$

mas en la relación anterior tenemos que:

$$\mu_1 Ad_1 + \mu_2 Ad_2 + \ldots + \mu_l Ad_l \leq 0$$

porque $\mu_j \geq 0$ y cada $Ad_j \leq 0; \quad j = 1, \ldots, l$ (ver (2.27)). Entonces en (2.28) tenemos:

$$A\overline{x} \leq \lambda_1 Ax_1 + \lambda_2 Ax_2 + \ldots + \lambda_k Ax_k \tag{2.29}$$

mas en (2.29) cada x_j es punto extremo de X y, por lo tanto, $x_j \in X$ y para cada x_j es verdadera la siguiente relación:

$$Ax_j \leq b \Longrightarrow \lambda_j Ax_j \leq \lambda_j b, \quad j = 1, \ldots, k \tag{2.30}$$

De (2.29) y (2.30)tenemos:

$$A\overline{x} \leq \lambda_1 Ax_1 + \lambda_2 Ax_2 + \ldots + \lambda_k Ax_k \leq \lambda_1 b + \lambda_2 b + \ldots + \lambda_k b$$

$$A\overline{x} \leq \lambda_1 b + \lambda_2 b + \ldots + \lambda_k b$$

$$A\overline{x} \leq b(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k)$$

$$A\overline{x} \leq b \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = b(1)$$

$$A\overline{x} \leq b$$

$$\Longrightarrow \overline{x} \in X$$

Corolario:

Cualquier $\overline{x} \in X$ puede ser representado como en la ecuación (2.17) usando como máximo

$$min\{(n+1), (k+l)\}$$

variables positivas λ_j y μ_j.

Prueba:

Dado un $\overline{x} \in X$, el teorema para el caso general afirma que existe una solución para el sistema (2.17). Sea r el rank de la matriz de coeficientes asociadas con las restricciones de igualdad en (2.17) (observe que en (2.17) existen $(n+1)$ restricciones de igualdad, $(k+l)$ restricciones de desigualdad y $(k+l)$ variables). Por lo tanto:

$$r = min\{(n+1), (k+l)\} \tag{2.31}$$

Adicionalmente observemos que el conjunto (λ, μ) que satisface (2.17) forma un conjunto poliedral en E^{k+l} y, por el teorema del caso general, existe un punto extremo. Como ese punto extremo debe ser caracterizado por $(k+l)$ hiperplanos activos LI y las restricciones de igualdad suministran r hiperplanos activos LI, entonces están faltando por lo menos $\{(k+l)-r\}$ hiperplanos adicionales lo que significa que en esos hiperplanos las variables λ_j y μ_j son iguales a cero (recuerde que si $\lambda_j \geq 0$ está activo entonces $\lambda_j = 0$). Así, en la caracterización del punto extremo $\overline{x}$ de (2.17), por lo menos $(k+l)-r$ de las variables λ_j y μ_j deben ser iguales a cero. Por lo tanto, el número máximo de variables λ_j y μ_j que pueden ser positivos es igual a:

$$\{(k+l) - [(k+l) - r]\} = r$$

Como $r = min\{(n+1), (k+l)\}$ entonces el corolario está probado.

Observaciones:

1. Si X es un conjunto convexo limitado entonces $l = 0$ y de (2.31) tenemos:

   $$r = min\{(n+1), k\}$$

   que indica que un punto $\overline{x} \in X$ puede ser representado por no más de que $min\{(n+1), k\}$ de sus puntos extremos.

   Ejemplo 16:

   Si estamos en E^2 y existen 5 puntos extremos en X entonces cualquier punto $\overline{x} \in X$, si X es limitado, puede ser representado por no más de que $min\{3, 5\} = 3$ de sus puntos extremos.

2. Si X es un conjunto convexo ilimitado entonces un $\overline{x} \in X$ puede ser representado por no más de que $(n+1)$ puntos extremos y n direcciones extremas. En E^n pueden existir más de n direcciones extremas mas para representar un $\overline{x}$ serian necesarios apenas n de ellos.

El teorema general de la representación es el aspecto teórico más importante que justifica el funcionamiento del algoritmo simplex (analizado en detalle en el próximo capítulo) para resolver problemas de PL. Sin embargo, los pasos usados para probar el teorema también pueden ser usados para encontrar un punto extremo a partir de un punto interior conocido.

2.4.3 Estrategia para Encontrar un Punto Extremo a Partir de un Punto Interior

A partir de un punto interior $x \in X$ se puede encontrar un punto extremo de X usando el siguiente algoritmo:

1. Sea $\overline{x}$ el punto interior de X. Adicionar al conjunto X la restricción $\sum x_j \leq M$ donde M es un número bastante grande para evitar problemas con conjuntos ilimitados. Así, el nuevo conjunto es llamado de $\overline{X}$.

2. Verificar el número de hiperplanos activos en el punto $\overline{x} \in X$:

   (a) Si ningún hiperplano está activo entonces escoger una dirección arbitraria:

   $$d = [d_1, d_2, \ldots, d_n]$$

   (b) Si existen hiperplanos activos entonces encontrar la dirección d usando:

   $$Gd = 0$$

   donde G es una submatriz de la matriz A constituida por los hiperplanos activos (son las filas de A correspondientes a los hiperplanos activos).

3. Encontrar el parámetro:

   $$\overline{\gamma}_1 = max\{\gamma_1 : \overline{x} + \gamma_1 d \in \overline{X}; \;\; \gamma_1 > 0\}$$

   Si todos los $\gamma_1 \leq 0$ entonces encontrar $\overline{\gamma}_1$ de la siguiente forma:

   $$\overline{\gamma}_1 = max\{\gamma_1 : \overline{x} - \gamma_1 d \in \overline{X}; \;\; \gamma_1 > 0\}$$

4. El punto $\overline{x}' = \overline{x} + \overline{\gamma}_1 d$ (o $\overline{x}' = \overline{x} - \overline{\gamma}_1 d$ con la segunda posibilidad) tiene un hiperplano activo adicional en relación a $\overline{x}$.

5. Hacer $\overline{x} = \overline{x}'$ y repetir los pasos 2, 3 y 4 hasta que el punto $\overline{x}$ tenga n hiperplanos activos (sin llevar en cuenta $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leq M$), o sea, sin llevar en cuenta el subespacio artificial adicionado.

Ejemplo 17: En el siguiente conjunto convexo:

$$X = \{(x_1, x_2) : \begin{array}{r} -3x_1 + x_2 \leq -2 \\ -x_1 + x_2 \leq 2 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ -x_2 \leq -2 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0\} \end{array}$$

Usamos el algoritmo, paso a paso, para encontrar un punto extremo de X a partir del punto inicial:

$$\overline{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

1. El conjunto $\overline{X}$ es el siguiente:

$$X = \{(x_1, x_2) : \begin{array}{c} x \in X \\ x_1 + x_2 \leq M\} \end{array}$$

2. El punto $\overline{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ es un punto interior de $\overline{X}$ porque no existe ningún hiperplano activo. Así escogemos una dirección arbitraria:

$$d = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

3. Cálculo de $\overline{\gamma}_1$:

   El nuevo punto buscado tiene la siguiente forma:

$$\overline{x} + \gamma_1 d = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \gamma_1 = \begin{bmatrix} 4 - \gamma_1 \\ 3 + 2\gamma_1 \end{bmatrix}$$

   Substituyendo en las 7 restricciones tenemos:

$$\begin{array}{llcll} Restr.1 & -3(4-\gamma_1) + (3+2\gamma_1) = -2 & \Longrightarrow & \gamma_1 = \frac{7}{5} & \\ Restr.2 & -(4-\gamma_1) + (3+2\gamma_1) = 2 & \Longrightarrow & \gamma_1 = 1 & \\ Restr.3 & -(4-\gamma_1) + 2(3+2\gamma_1) = 8 & \Longrightarrow & \gamma_1 = \frac{6}{5} & \\ Restr.4 & -(3+2\gamma_1) = -2 & \Longrightarrow & \gamma_1 = -\frac{1}{2} & \text{no vale} \\ Restr.5 & (4-\gamma_1) = 0 & \Longrightarrow & \gamma_1 = 4 & \\ Restr.6 & (3+2\gamma_1) = 0 & \Longrightarrow & \gamma_1 = -\frac{3}{2} & \text{no vale} \\ Restr.7 & (4-\gamma_1) + (3+2\gamma_1) = M & \Longrightarrow & \gamma_1 = M - 7 & \text{muy grande} \end{array}$$

   Así, el máximo γ_1 permitido es: $\overline{\gamma}_1 = 1$

4. El punto:

$$\overline{x}' = \overline{x} + \overline{\gamma}_1 d = \begin{bmatrix} 4 - \overline{\gamma}_1 \\ 3 + 2\overline{\gamma}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

   tiene un hiperplano activo (el hiperplano de la 2a. restricción).

5. El punto:

$$\overline{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

tiene un hiperplano activo.

2. Cálculo de la dirección:

$$Gd = 0 \Longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = 0 \Longrightarrow -d_1 + d_2 = 0$$

$$d_1 = d_2 \Longrightarrow d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{cualquier} \quad d_1$$

3. Cálculo de $\overline{\gamma}_1$:

El nuevo punto procurado tiene la siguiente forma:

$$\overline{x} + \gamma_1 d = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \gamma_1 = \begin{bmatrix} 3+\gamma_1 \\ 5+\gamma_1 \end{bmatrix}$$

Substituyendo en las 7 restricciones tenemos:

$$\begin{array}{llcll}
Restr.1 & -3(3+\gamma_1) + (5+\gamma_1) = -2 & \Longrightarrow & \gamma_1 = -1 & \\
Restr.2 & -(3+\gamma_1) + (5+\gamma_1) = 2 & \Longrightarrow & \gamma_1 = 0 & \text{está activa} \\
Restr.3 & -(3+\gamma_1) + 2(5+\gamma_1) = 8 & \Longrightarrow & \gamma_1 = 1 & \\
Restr.4 & -(5+\gamma_1) = -2 & \Longrightarrow & \gamma_1 = -3 & \text{no vale} \\
Restr.5 & (3+\gamma_1) = 0 & \Longrightarrow & \gamma_1 = -3 & \text{no vale} \\
Restr.6 & (5+\gamma_1) = 0 & \Longrightarrow & \gamma_1 = -5 & \text{no vale} \\
Restr.7 & (3+\gamma_1) + (5+\gamma_1) = M & \Longrightarrow & \gamma_1 = \frac{M}{2} - 4 & \text{muy grande}
\end{array}$$

Así, el máximo γ_1 permitido es: $\overline{\gamma}_1 = 1$

4. El punto:

$$\overline{x}^{'} = \overline{x} + \overline{\gamma}_1 d = \begin{bmatrix} 3+\overline{\gamma}_1 \\ 5+\overline{\gamma}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

5. El punto:

$$\overline{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

tiene 2 hiperplanos activos (los hiperplanos correspondientes a la 2a y 5a restricción) y representa un punto extremo de X.

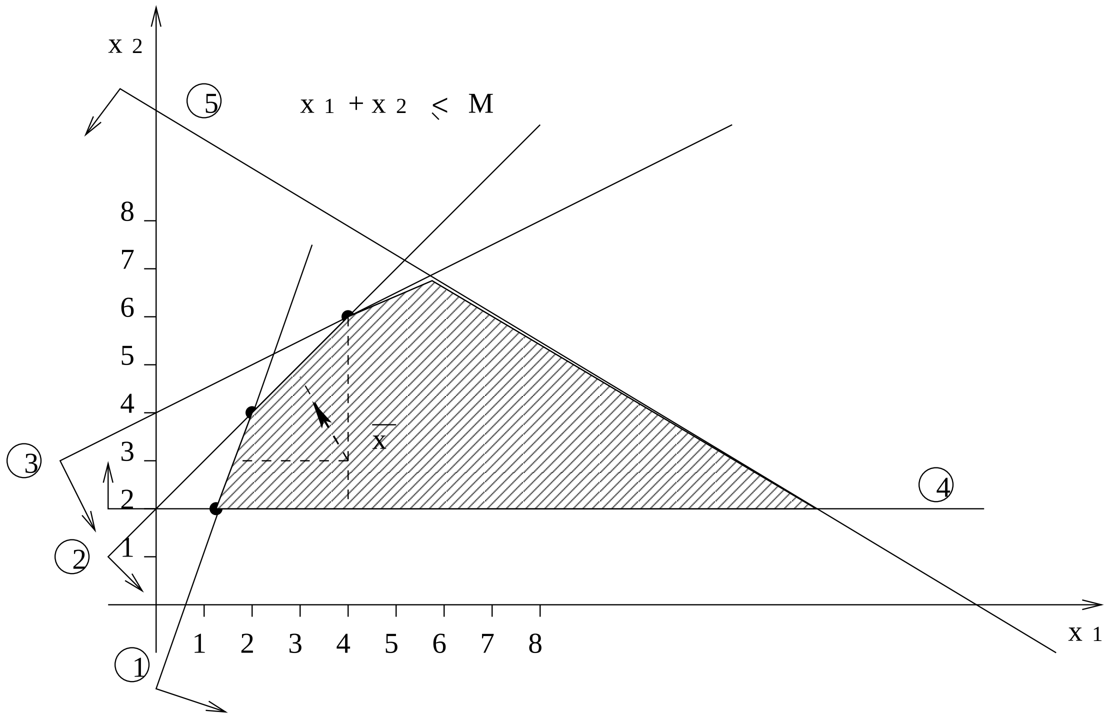


Figura 2.17: Encontrando un punto extremo

La figura 2.17 muestra una representación gráfica del ejemplo.
El lector está invitado a resolver nuevamente el ejemplo con las siguientes condiciones:

1. Partiendo del punto $(4, 3)$ mas escogiendo una dirección inicial de $(0, 1)$.
2. Partiendo del punto $(6, 5)$.

2.5 Ejercicios resueltos:

1. Esboce las regiones factibles del conjunto $X : Ax \leq b$ donde A y b son dados en la parte inferior. La región es vacía? Es ilimitada?

   a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

   b)

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \\ 5 \end{bmatrix}$$

   c)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 4 \\ -12 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Soluciones

a)

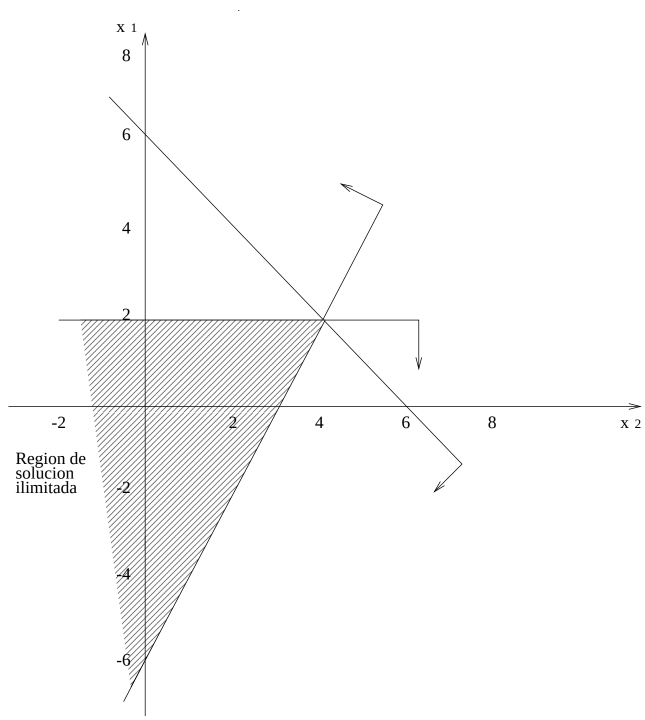


Figura 2.18: Solución gráfica del ejercicio (a)

b)

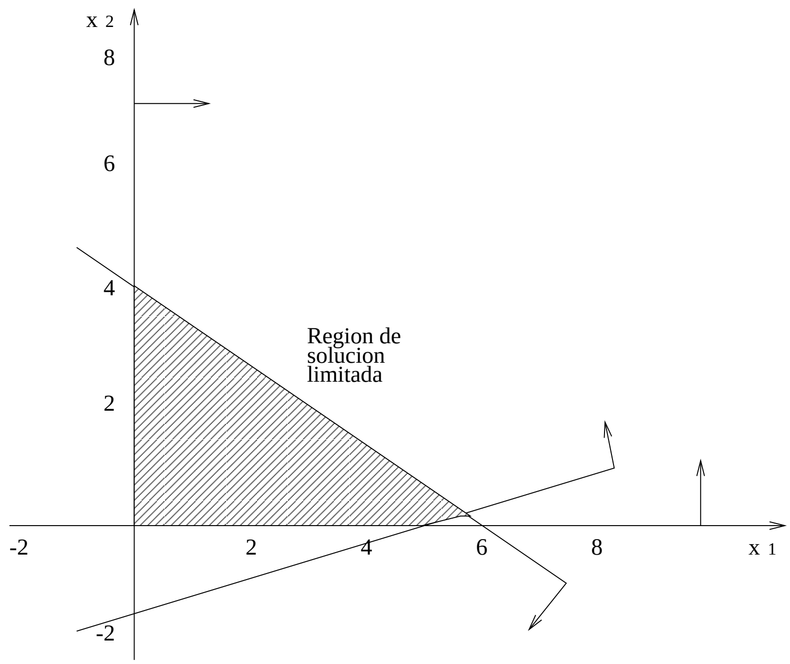


Figura 2.19: Solución gráfica del ejercicio (b)

c)

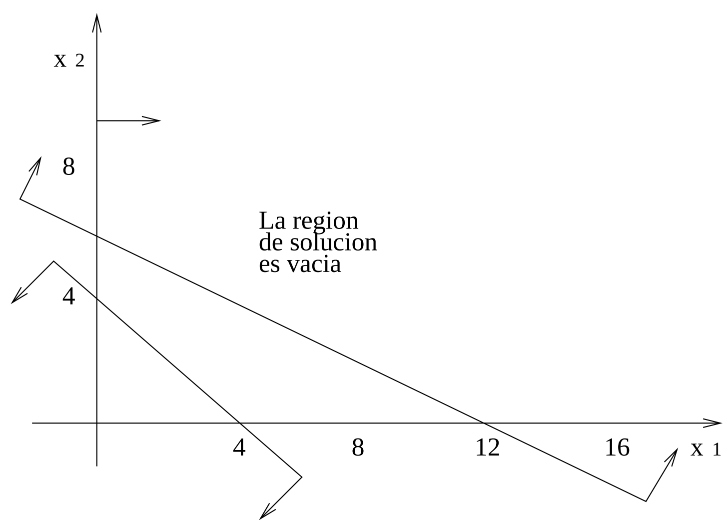


Figura 2.20: Solución gráfica del ejercicio (c)

2. Es posible resolver el siguiente problema usando técnicas de PL ? Explique

$$\begin{array}{ll} Max & f(x) = -x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ s.a. & \\ & x_1 + x_2 + x_3 \leq 15 \\ & |-2x_1 + 3x_3| \geq 12 \\ & x_1 - x_2 + x_3 \geq 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

Solución:

Se puede hacer la siguiente transcripción de variables:

$|y| = y^+ + y^-$ y $y = y^+ - y^-$ con $y^+ \geq 0$ y $y^- \geq 0$.

Definimos $|y| = y^+ + y^-$; $y = -2x_1 + 3x_3$

Transformamos el problema a:

$$\begin{array}{ll} Max & f(x) = -x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ s.a. & \\ & x_1 + x_2 + x_3 \leq 15 \\ & y^+ + y^- \geq 12 \\ & y^+ - y^- = -2x_1 + 3x_3 \\ & x_1 - x_2 + x_3 \geq 2 \\ & x_1, x_2, x_3, y^+, y^- \geq 0 \end{array}$$

Cambiamos la expresión valor absoluto por la suma de dos cantidades extrictamente positivas denominadas y^+ y y^- de tal forma que si Y = 8 entonces $y^+ = 8$ y $y^- = 0$ y si y = -3 entonces $y^+ = 0$ y $y^- = 3$. Usando esta metodología, el PL puede ser resuelto.

3. Cuales de los siguientes conjuntos son convexos ?

   a) $(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \geq 1$

   b) $(x_1, x_2, x_3) : x_1 + 2x_2 \leq 1 : x_1 - x_3 \leq 2$

   c) $(x_1, x_2) : x_1 = 1; |x_2| \leq 4$

Solución:

a): $\{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \geq 1\}$

$x_1^2 + x_2^2 \geq 1$ representa todos los puntos externos a un círculo de radio 1 con centro en el origen. ver figura 2.21. Se puede observar que si se toman dos puntos en la región solución **(a y b)**, la combinación lineal convexa de ellos puede producir un punto en la región infactible **(c)** siempre que uno de los puntos factibles se encuentre en la zona de "sombra" del cono formado por las tangentes al círculo unitario que parten del otro punto factible. En la figura se toma como referencia el punto **a** y se trazan tangentes al círculo desde dicho punto. El punto **b** se encuentra en la zona de "sombra" del cono generado desde **a**.

Para demostrar que el conjunto mencionado no es convexo, usaremos el método del contraejemplo, según el cual se debe demostrar que existe un λ entre 0 y 1, y un par de puntos **a y b** que permita obtener un punto infactible como resultado de su combinación lineal convexa.

Para esto tomaremos un punto arbitrario que pertenezca a la región factible que denominaremos **a** y como punto **b** se tomará el opuesto simétrico de **a**, por tanto:

$$\begin{bmatrix} x_1^b \\ x_2^b \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} x_1^a \\ x_2^a \end{bmatrix}$$

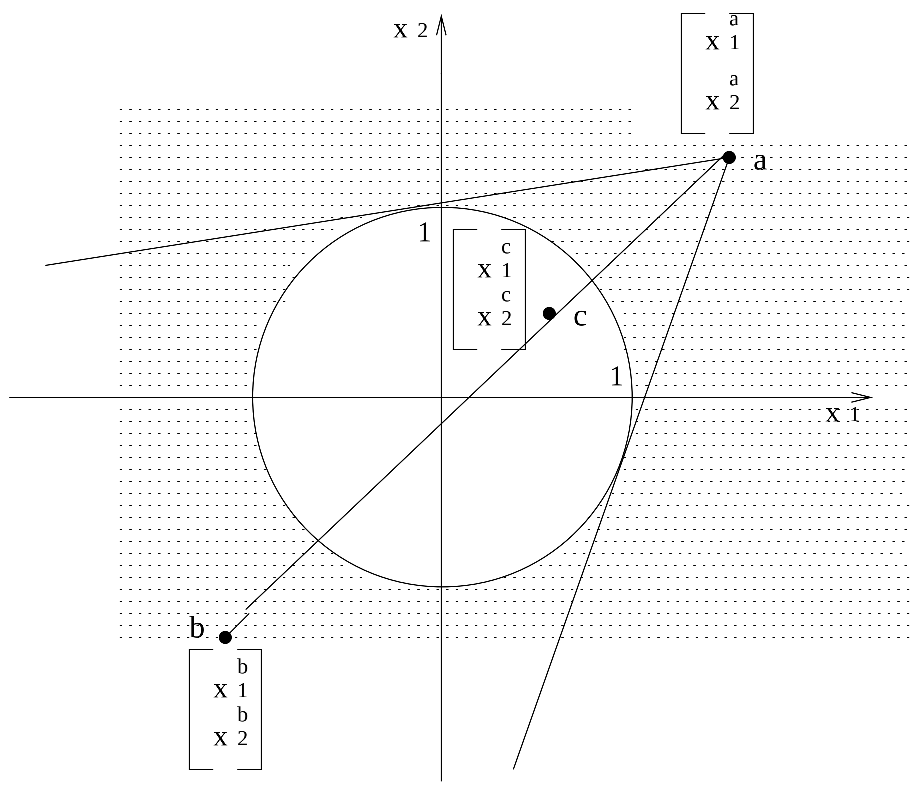


Figura 2.21: Solución gráfica del ejercicio

Con: $(x_1^a)^2 + (x_2^a)^2 \geq 1$; $(x_1^b)^2 + x_2^b)^2 \geq 1$ (1)

De la combinación lineal convexa de **a** y **b** obtenemos **c**:

$(x_1^c) = \lambda(x_1^a) + (1-\lambda)(x_1^b)$ $(x_2^c) = \lambda(x_2^a) + (1-\lambda)(x_2^b)$ (2)

Pero $(x_1^b) = -(x_1^a)$ y $(x_2^b) = -(x_2^a)$, reemplazando estas relaciones en (2) se tiene:

$(x_1^c) = (2\lambda - 1)(x_1^a)$

$(x_2^c) = (2\lambda - 1)(x_2^a)$

En la relación anterior se observa que si $\lambda = 0.5$, el punto **c** resulta en el origen (0,0) el cual no pertenece a la región factible. Por tanto el conjunto **no es convexo**.

Existen otros valores de λ que permiten encontrar nuevos puntos que son infactibles.

b) Es convexo el conjunto $\{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + 2x_2 \leq 1; x_1 - x_3 \leq 2\}$ **?**

Tomamos dos puntos **a** y **b** en la región factible y comprobamos si su combinación lineal convexa es otro punto **c** de la región factible para todo $0 \leq \lambda \leq 1$.

Asumimos los puntos **a** y **b** como:

$$a \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1^a \\ x_2^a \\ x_3^a \end{bmatrix} \qquad b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1^b \\ x_2^b \\ x_3^b \end{bmatrix}$$

Para que los puntos **a** y **b** se encuentren en la región factible deben cumplir las restricciones:

$$x_1^a + 2x_2^a \leq 1 \; ; x_1^a - x_3^a \leq 2 \; ; x_1^b + 2x_2^b \leq 1 \; ; x_1^b - x_3^b \leq 2 \qquad (1)$$

La combinación lineal convexa de los puntos **a** y **b** está dada por:

$$\begin{bmatrix} x_1^c \\ x_2^c \\ x_3^c \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1^a \\ x_2^a \\ x_3^a \end{bmatrix} + (1-\lambda) \begin{bmatrix} x_1^b \\ x_2^b \\ x_3^b \end{bmatrix} \qquad (2)$$

Es convexo si para todo $0 \leq \lambda \leq 1$ se cumple que:

$$x_1^c + 2x_2^c \leq 1 \; ; x_1^c - x_3^c \leq 2$$

<u>caso 1</u>: $x_1^c + 2x_2^c \leq 1$?

Reemplazando los términos de la primera y segunda fila de (2) en la desigualdad que se desea verificar y reorganizando tenemos:

$\lambda(x_1^a + 2x_2^a) + (1-\lambda)(x_1^b + 2x_2^b) \leq 1$?

Los paréntesis que multiplican a λ y a $(1-\lambda)$ cumplen con ser menores o iguales a 1 (ecuaciones 1), por lo tanto, si reemplazamos dichos paréntesis por su máximo valor tendremos el caso más crítico:

$$\lambda(1) + (1-\lambda)(1) \leq 1?$$

Si cumple para este caso crítico, cumple para todos los demás:

$$\lambda + 1 - \lambda \leq 1?$$

$$1 \leq 1 \text{ si cumple!!}$$

Por lo tanto, la combinación lineal convexa de los puntos **a** y **b** permite obtener un tercer punto **c** que cumple la primera restricción.

caso 2: $x_1^c - x_3^c \leq 2$?

Reemplazando los términos de la primera y tercera fila de (2) en la desigualdad que se desea verificar y reorganizando tenemos:

$\lambda(x_1^a - x_3 x^a) + (1-\lambda)(x_1^b - x_3^b) \leq 1?$

Los paréntesis que multiplican a λ y a $(1-\lambda)$ cumplen con ser menores o iguales a 2 (ecuaciones 1), por lo tanto, si reemplazamos dichos paréntesis por su máximo valor tendremos el caso más crítico:

$\lambda(2) + (1-\lambda)(2) \leq 2?$

Si cumple para este caso crítico, cumple para todos los demás:

$$2\lambda + 2 - 2\lambda \leq 2?$$

$$2 \leq 2 \text{ si cumple !!}$$

Por lo tanto, la combinación lineal convexa de los puntos **a** y **b** permite obtener un tercer punto **c** que cumple la segunda restricción.

Conclusión: **El conjunto Convexo.**

Observación: Este conjunto puede se probado tomando encuenta que el ejemplo es un caso especial de $Ax \leq b$.

c) El siguiente conjunto es convexo ? $\{(x_1, x_2) : x_1 = 1; |x_2| \leq 4\}$

Asumimos dos puntos que pertenezcan a la región solución, por tanto deben cumplir las restricciones:

$$x_1^a = 1 \; ; x_1^b = 1 \; ; |x_2^a| \leq 4 \; |x_2^b|; \; \leq 4$$

De la combinación lineal convexa de **a** y **b** tenemos **c**:

$(x_1^c) = \lambda(x_1^a) + (1-\lambda)(x_1^b) = \lambda(1) + ((1-\lambda)(1) = 1$

$(x_2^c) = \lambda(x_2^a) + (1-\lambda)(x_2^b)$

Es conjunto convexo si el nuevo punto **c** cumple las restricciones:

$x_1^c = 1 \; ; |x_2^c| \leq 4$

La primera restricción es satisfecha.

Para chequear si cumple la segunda restricción analizaremos 3 casos:

<u>Caso 1</u>: $0 \leq x_2^a \leq 4$ y $0 \leq x_2^b \leq 4$ (positivos)

$$|x_2^c| = |\lambda(x_2^a) + (1-\lambda)(x_2^b)| = \lambda(x_2^a) + (1-\lambda)(x_2^b) \leq 4 \ ?$$

Reemplazando los valores máximos positivos que pueden asumir las coordenadas: x_2^a y x_2^b de los puntos **a** y **b** tenemos:

$|x_2^c| = |\lambda(4) + (1-\lambda)(4) \leq 4 \ ?$

$|x_2^c| = 4\lambda + 4 - 4\lambda = 4 \leq 4$ si cumple !!

Puesto que cumple con el mayor valor, cumple para los valores positivos inferiores a 4.

<u>Caso 2</u>: $-4 \leq x_2^a \leq 0$ y $-4 \leq x_2^b \leq 0$ (negativos)

$|x_2^c| = |\lambda(x_2^a) + (1-\lambda)(x_2^b)| = -\lambda(x_2^a) - (1-\lambda)(x_2^b) \leq 4 \ ?$

Reemplazando los valores máximos negativos que pueden asumir las coordenadas:

x_2^a y x_2^b de los puntos **a** y **b** tenemos:

$|x_2^c| = -\lambda(-4) - (1-\lambda)(-4) \leq 4 \ ?$

$|x_2^c| = 4\lambda + 4 - 4\lambda = 4 \leq 4$ Si cumple !!

Puesto que cumple con el valor negativo de mayor magnitud, cumple para los valores negativos de magnitud menor a 4.

<u>Caso 3</u>: $-4 \leq x_2^a \leq 0$ y $0 \leq x_2^b \leq 4$ (**a** negativo y **b** positivo).

$|x_2^c| = |\lambda(x_2^a) + (1-\lambda)(x_2^b)| = -\lambda(x_2^a) + (1-\lambda)(x_2^b) \leq 4 \ ?$

Reemplazando los valores de **a** y de **b** que hacen máxima la expresión anterior: ($x_2^a = -4$ y $x_2^b = 4$) tenemos:

$|x_2^c| = -\lambda(-4) + (1-\lambda)(4) \leq 4 \ ??$

$|x_2^c| = 4\lambda + 4 - 4\lambda = 4 \leq 4$ Si cumple !

Puesto que cumple con los valores extremos cumple para los demás.

<u>Caso 4:</u> $0 \leq x_2^a \leq 4$ y $-4 \leq x_2^b \leq 0$ (**a** positivo y **b** negativo).

$|x_2^c| = |\lambda(x_2^a) + (1-\lambda)(x_2^b)| = \lambda(x_2^a) - (1-\lambda)(x_2^b) \leq 4$?

Reemplazando los valores de **a** y de **b** que hacen máxima la expresión anterior: ($x_2^a = 4$ y $x_2^b = -4$) tenemos:

$|x_2^c| = \lambda(4) - (1-\lambda)(-4) \leq 4$?
$|x_2^c| = 4\lambda + 4 - 4\lambda = 4 \leq 4$ Si cumple !

Puesto que cumple con los valores extremos cumple para los demás.

En este caso también vale la observación anterior considerando que:

$|x_2| \leq 4 \;\Rightarrow\; -4 \leq x_2 \leq 4 \;\Rightarrow\; x_2 \leq 4$ y $-x_2 \leq 4$. El lector esta invitado a realizar la representación gráfica de los ejemplos (b) y (c).

4. Porque el siguiente conjunto tiene direcciones?. Encontrar todas las direcciones extremas.

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &= 4 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &\leq 6 \\ x_3 &\geq 1 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Transformamos el sistema anterior solamente con restricciones de igualdad y desigualdad.

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &= 4 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &\leq 6 \\ -x_3 &\leq -1 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Definimos el conjunto D : $a^k d \leq 0$ para restricciones de desigualdad y $a^k d =$ d para restricciones de igualdad y chequeamos si d ≥ 0 y d$\neq 0$

$$\begin{aligned} -d_1 + d_2 &= 0 \\ d_1 - 2d_2 + d_3 &\leq 0 \\ -d_3 &\leq 0 \\ d_1, d_2, d_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

de aquí se deduce que el conjunto D es:

$$\begin{aligned} d_1 &= d_2 \\ d_3 &\leq d_1 \\ d_1, d_2, d_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

y agregamos: $d_1 + d_2 + d_3 = 1$

si definimos $d_1 = \lambda$, entonces $d_2 = \lambda$ y $d_3 \leq \lambda$ con $d_1, d_2, d_3 \geq 0$ y $d_1 + d_2 + d_3 = 1$

de aquí se deduce que existen dos soluciones:

$$d_a = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad d_b = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

5. Encontrar todos los puntos extremos y las direcciones del siguiente conjunto poliedral:

$$X = \{ \ (x_1, x_2, x_3, x_4) : \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 1 \\ -2x_1 - x_3 + 2x_4 \leq 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \ \}$$

Representar x = (1,1,1,2) como una combinación convexa de los puntos extremos de X más una combinación no negativa de las direcciones extremas de X.

Inicialmente encontramos los puntos extremos de X, para esto, se elaboran todas las posibles combinaciones para los 6 hiperplanos existentes, que tengan 4 hiperplanos activos:

Hiperplanos:

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 - 2x_3 &\leq 1 \quad (1) \\ -2x_1 - x_3 + 2x_4 &\leq 2 \quad (2) \\ x_1 &\geq 0 \quad (3) \\ x_2 &\geq 0 \quad (4) \\ x_3 &\geq 0 \quad (5) \\ x_4 &\geq 0 \quad (6) \end{aligned}$$

Después de realizadas las 15 combinaciones posibles, se obtuvieron los siguientes resultados:

Resumen de soluciones:

	x_1	x_2	x_3	x_4	Hiperplanos activos	
1	0	0	$-1/2$	$3/4$	(1), (2), (3), (4)	No vale-negativa
2	0	1	0	1	(1), (2), (3), (5)	Vale
3	0	-3	-2	0	(1), (2), (3), (6)	No vale
4	-1	0	0	0	(1), (4), (5), (6)	No vale
5	0	0	$-1/2$	0	(1), (3), (4), (6)	No vale
6	0	0	0	1	(2), (3), (4), (5)	Vale
7	0	0	-2	0	(2), (3), (4), (6)	No vale
8	0	0	0	0	(3), (4), (5), (6)	Vale

Para determinar las direcciones extremas, definimos ahora un nuevo conjunto D como Ad$\leq$ 0:

$$
\begin{aligned}
-d_1 + d_2 - 2d_3 &\leq 0 \\
-2d_1 - d_3 + 2d_4 &\leq 0 \\
d_1, d_2, d_3, d_4 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Ahora encontramos las direcciones extremas de X, que son los puntos extremos de D. Para esto, se elaboran todas las posibles combinaciones para los 6 hiperplanos existentes, que tengan 3 hiperplanos activos.

Hiperplanos:

$$
\begin{aligned}
d_1 + d_2 + d_3 + d_4 &= 1 \\
-d_1 + d_2 - 2d_3 &\leq 0 && (1) \\
-2d_1 - d_3 + 2d_4 &\leq 0 && (2) \\
d_1 &\leq 0 && (3) \\
d_2 &\geq 0 && (4) \\
d_3 &\geq 0 && (5) \\
d_4 &\geq 0 && (6)
\end{aligned}
$$

Después de realizadas las combinaciones posibles, se obtuvieron los siguientes resultados:

Resumen de soluciones validas normalizadas

	d_1	d_2	d_3	d_4	Hiperplanos activos
1	1/3	1/3	0	1/3	(1), (2), (5)
2	0	4/7	2/7	1/7	(1), (2), (3)
3	1/2	1/2	0	0	(1), (5), (6)
4	0	2/3	1/3	0	(1,), (3), (6)
5	0	0	2/3	1/3	(2), (3), (4)
6	1/2	0	0	1/2	(2), (4), (5)

Cualquier punto x del Conjunto X puede expresarse como una combinación lineal convexa de los puntos extremos mas una combinación lineal no negativa de las direcciones extremas.

$$
\overline{X} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu_1 \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 0 \\ 1/3 \end{bmatrix} + \mu_2 \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{4}{7} \\ \frac{2}{7} \\ \frac{1}{7} \end{bmatrix} +
$$

$$
+\mu_3 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu_4 \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix} + \mu_5 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} + \mu_6 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}
$$

El punto X = (1,1,1,2) se puede representar como una combinación lineal convexa de los puntos extremos mas una combinación lineal no negativa de las direcciones extremas así:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{3}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{4}{7} \\ \frac{2}{7} \\ \frac{1}{7} \end{bmatrix} +$$

$$+1 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{3}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

CAPITULO 3

EL MÉTODO SIMPLEX

3.1 Puntos Extremos y Optimalidad

Realmente, si un PL tiene solución óptima entonces un punto extremo de ese PL es una solución óptima ?. Cuándo existe solución óptima (limitada) para un PL ? Esas son las preguntas más importantes que intentaremos responder en esta sección.

Teorema 1: Existencia de solución óptima finita.

Si la región factible de un PL es no vacío, entonces existe una solución óptima finita para el PL $\Leftrightarrow cd_j \geq 0$ para $j = 1, 2, .., l$, donde $d_1, d_2, ..., d_l$ son las direcciones extremas de la región factible. En caso contrario, esto es, si existe un $cd_j < 0$ entonces la solución óptima del PL es ilimitada.

Teorema 2: Muestra que un punto extremo es solución óptima de un PL.

Si existe solución óptima para un PL entonces un punto extremo del PL es una solución óptima del PL.

Observación: Este teorema no dice que un punto extremo es solución única del PL, dice que si un PL tiene solución óptima entonces con seguridad un punto extremo es una solución óptima del PL. Así, existe también la posibilidad de que exista un óptimo que no es punto extremo.

Sea el siguiente PL:

$$\begin{aligned} min \;\; cx \\ s.a. \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\left.\begin{aligned} Ax = b \\ x \geq 0 \end{aligned}\right\} \Leftarrow S$$

Sean $\quad x_1, x_2, ..., x_k$ puntos extremos de S.

$d_1, d_2, ..., d_l$ direcciones extremas de S.

Entonces, desde que cualquier punto $x \in S$ puede ser representado en función de los puntos extremos y direcciones extremas de S, entonces cualquier x puede ser escrito así:

$$x \in S \Rightarrow \begin{cases} x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j + \sum_{j=1}^{l} \mu_j d_j \\ \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1 \\ \lambda_j \geq 0 \qquad j = 1, 2, ..., k \\ \mu_j \geq 0 \qquad j = 1, 2, ..., l \end{cases} \tag{3.2}$$

Entonces el PL en (3.1) puede ser transformado en otro PL equivalente y más simple de resolver y en función de las variables λ_j y μ_j. Así, tenemos el siguiente PL:

$$\begin{array}{ll} min & cx \\ s.a. & \\ & \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1 \\ & \lambda_j \geq 0 \quad j = 1, 2, ..., k \\ & \mu_j \geq 0 \quad j = 1, 2, ..., l \end{array}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} min & \sum_{j=1}^{k} (cx_j)\lambda_j + \sum_{j=1}^{l} (cd_j)\mu_j \\ s.a. & \\ & \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1 \\ & \lambda_j \geq 0 \qquad j = 1, 2, ..., k \\ & \mu_j \geq 0 \qquad j = 1, 2, ..., l \end{cases} \tag{3.3}$$

En este problema (cx_j) y (cd_j) son parámetros, cuyos valores son conocidos para un PL particular, y las variables o incógnitas de (3.3) son los λ_j y μ_j. En (3.3) las restricciones son muy triviales.

Observaciones: En (3.3) se tiene:

1. Si algún parámetro del tipo $cd_j < 0$, entonces el mínimo de (3.3) es ilimitado $\Rightarrow -\infty$. Como $\mu_j \geq 0$, entonces si algún $cd_j < 0$ el correspondiente μ_j puede ser arbitrariamente grande.

   Conclusión:
   Para que (3.3) tenga solución óptima finita $\Rightarrow$ todos los $cd_j \geq 0 \quad j = 1, 2, ..., l$. y los correspondientes μ_j son hechos iguales a cero en el proceso de minimización.

Ese raciocinio es una forma de probar el Teorema 1.

2. Suponer que todos los $cd_j \geq 0 \rightarrow$ óptimo finito.

   En este caso la solución óptima de (3.3) es bastante sencilla de determinar. Se hace $\mu_j = 0$ para todos los $cd_j \geq 0$.

   Como $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1$ entonces el óptimo sucede asignando el **valor máximo** de $\lambda_j = 1$ para aquel λ_j que tiene el menor coeficiente (cx_j), ya que cualquier distribución diferente de los λ_j produce un valor no óptimo.

$$\text{óptimo} \Rightarrow \begin{cases} \mu_j = 0 \quad \forall \quad cd_j \geq 0 \\ \lambda_p = 1 \quad \text{para aquel } (cx_j) \text{ menor} \\ \lambda_j = 0 \quad \forall \quad j \neq p \end{cases}$$

   $\lambda_p = 1$ identifica el punto extremo x_p correspondiente a una solución óptima. Ese raciocinio es una forma de probar el Teorema 2.

3. Qué ocurre si más de un coeficiente (cx_j) tiene el menor valor ?

   Si, por ejemplo, existen 2 coeficientes con el menor valor, entonces en este caso existen dos $\lambda_p = 1$ identificando 2 puntos extremos como soluciones óptimas.

   Aquí realmente existen múltiples soluciones óptimas. Si existen soluciones óptimas entonces el conjunto de soluciones óptimas es dado por el conjunto de combinaciones convexas de **tales puntos extremos**, más una combinación lineal no negativa de las direcciones extremas que satisfacen $cd_j = 0$. Este hecho está relacionado con la observación realizada al teorema 2.

Ejemplo 1: Sea el PL mostrado también en la figura 3.1:

$$\begin{aligned} min \quad & cx \\ s.a. \quad & \\ & -x_1 + x_2 \leq 2 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Este problema será analizado para 4 diferentes tipos de funciones objetivo tales como:

1. Caso 1: $min \;\; x_1 - 3x_2; \qquad c = [1, -3]$
2. Caso 2: $min \;\; 4x_1 - x_2; \qquad c = [4, -1]$
3. Caso 3: $min \;\; x_1 - x_2; \qquad c = [1, -1]$
4. Caso 4: $min \;\; x_1 - 2x_2; \qquad c = [1, -2]$

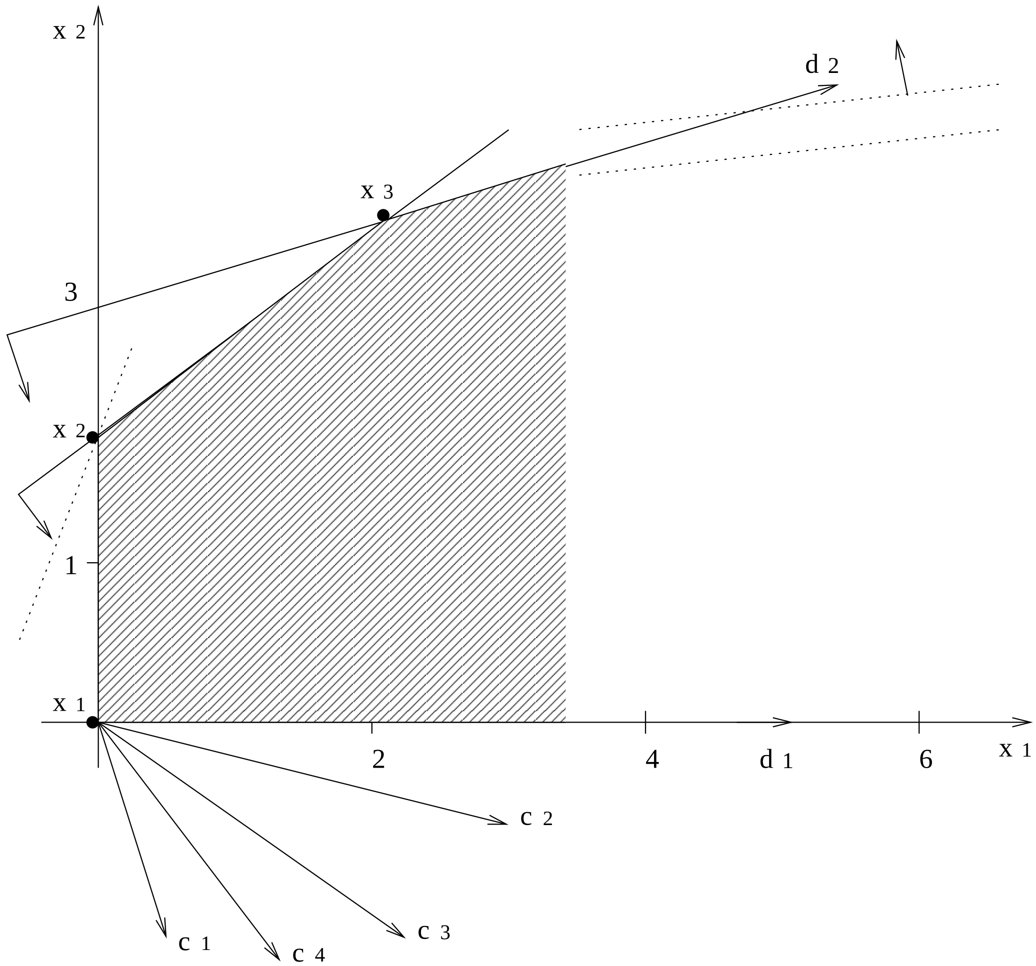


Figura 3.1: Representación gráfica del PL

Como los puntos extremos y las direcciones extremas no dependen de la función objetivo (dependen solamente de las restricciones), entonces los siguientes puntos extremos y direcciones extremas son comunes para todos los casos:

$$x_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad x_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \Leftarrow \text{Puntos extremos.}$$

$$d_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad d_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftarrow \text{Direcciones extremas.}$$

Por lo tanto, cualquier punto factible del problema puede representarse de la siguiente forma:

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \mu_1 d_1 + \mu_2 d_2$$

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \lambda_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \lambda_2 + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \lambda_3 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mu_1 + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \mu_2$$

1. **Caso 1:** <u>Muestra una solución ilimitada</u>

$$cx_1 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad cx_2 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = -6 \quad cx_3 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = -10$$

$$cd_1 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \qquad cd_2 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = -1$$

Observación: Como $cd_2 = -1 < 0$ entonces el PL **es ilimitado !**

Así, el PL equivalente del problema anterior es el siguiente:

$$\begin{cases} \min & 0\lambda_1 - 6\lambda_2 - 10\lambda 3 + \mu_1 - \mu_2 \\ s.a. & \\ & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2 \geq 0 \end{cases}$$

La solución óptima es $-\infty$ ya que el valor de μ_2 puede crecer libremente conduciendo la función objetivo $\Longrightarrow -\infty$.

2. **Caso 2:** <u>Presenta una solución única</u>

$$cx_1 = \begin{bmatrix} 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad cx_2 = \begin{bmatrix} 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = -2 \quad cx_3 = \begin{bmatrix} 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = 4$$

$$cd_1 = \begin{bmatrix} 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 4 \qquad cd_2 = \begin{bmatrix} 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 7$$

Entonces se tiene el siguiente PL equivalente:

$$\begin{cases} min & 0\lambda_1 - 2\lambda_2 + 4\lambda 3 + 4\mu_1 + 7\mu_2 \\ s.a. & \\ & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2 \geq 0 \end{cases}$$

El óptimo trivial exige que :

$$\mu_1 = \mu_2 = 0 \ , \ \lambda_1 = \lambda_3 = 0 \Longrightarrow \lambda_2 = 1$$

Solución óptima:

$-2\lambda_2 \Longrightarrow -2$, que corresponde al punto extremo x_2.

$$cx_2 = \begin{bmatrix} 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = -2 \Longleftarrow \text{Solución óptima;} \quad \text{Punto óptimo: } x^* = x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

3. **Caso 3:** Presenta un conjunto de soluciones óptimas entre 2 puntos extremos óptimos

$$cx_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad cx_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = -2 \quad cx_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = -2$$

$$cd_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \qquad cd_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 1$$

Entonces se tiene el siguiente PL equivalente:

$$\begin{cases} min & 0\lambda_1 - 2\lambda_2 - 2\lambda 3 + \mu_1 + \mu_2 \\ s.a. & \\ & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2 \geq 0 \end{cases}$$

La solución óptima exige que: $\mu_1 = \mu_2 = \lambda_1 = 0$ y que:

$$\left\{ \lambda_2 = 1 \Longrightarrow x_2 \text{ es el punto extremo óptimo} \right.$$

también puede suceder lo siguiente:

$$\left\{ \lambda_3 = 1 \Longrightarrow x_3 \text{ es otro punto extremo óptimo} \right.$$

o mejor todavía podemos generalizar la forma matemática de la solución óptima:

$$\begin{cases} \lambda_2 = \delta \\ \lambda_3 = (1-\delta) \Longrightarrow x = \delta x_2 + (1-\delta)x_3 \\ \delta \in [0,1] \ \text{ representa el conjunto de soluciones óptimas} \end{cases}$$

Verificación:

$cx = c[\delta x_2 + (1-\delta)x_3] = \delta cx_2 + (1-\delta)cx_3 = -2\delta - 2(1-\delta)$

$cx = -2\delta - 2 + 2\delta = -2 \Longrightarrow cx = -2 \Longleftarrow$ solución óptima.

4. **Caso 4:** Presenta soluciones óptimas alternativas definidas por un punto extremo y un rayo extremo

$$cx_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad cx_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = -4 \quad cx_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = -6$$

$$cd_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \qquad cd_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

Entonces se tiene el siguiente PL equivalente:

$$\begin{cases} min & 0\lambda_1 - 4\lambda_2 - 6\lambda 3 + \mu_1 + 0\mu_2 \\ s.a. & \\ & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2 \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \text{óptimo:} -6$$

Solución óptima trivial: $\mu_1 = \mu_2 = 0, \;\; \lambda_1 = \lambda_2 = 0$

$$\left\{ \; \lambda_3 = 1 \text{ que identifica el punto } x_3 \text{ como punto extremo óptimo} \; \right\}$$

Sin embargo, como puede observarse en el gráfico, cualquier punto definido por el punto extremo x_3 y el rayo extremo d_2 también es un punto óptimo del PL. Tal como puede ser observado en el siguiente procedimiento:

$$x^{'} = x_3 + \theta_\nu d_2 \qquad\qquad \theta_\nu \geq 0$$

$$cx^{'} = cx_3 + \theta_\nu cd_2 = -6 + 0\theta_\nu = -6 \Longrightarrow cx^{'} = -6 \Longrightarrow x^{'} \text{es solución óptima del PL}$$

Observación: $x^{'}$ es óptimo solamente porque $cd_2 = 0$, en caso contrario no podria corresponder a una solución óptima.

Así, un punto $x^{'}$ es óptimo alternativo si ese punto puede ser representado como una combinación convexa de los puntos extremos, más una combinación lineal no negativa de las direcciones extremas d_j que satisfacen $cd_j = 0$.

3.2 Soluciones Básicas Factibles y su Equivalente con Puntos Extremos

Solución básica factible, es aquella que corresponde a un punto extremo.

Teorema 3: La correspondencia entre puntos extremos y soluciones básicas factibles.

El conjunto de puntos extremos es equivalente al conjunto de soluciones básicas factibles (SBF) desde que la región factible sea no vacía.

Definición de SBF:

Sea el sistema:

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \tag{3.4}$$

donde la matriz A tiene dimensión $m \times n$, el vector b es de dimensión m y $rank(A, b) = rank(A) = m$

Entonces es posible hacer el siguiente arreglo:

$$x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} \qquad A = \boxed{\mathrm{B} \mid \mathrm{N}}$$

donde $B_{m\times m}$ tiene inversa y $N_{m\times(n-m)}$ es la matriz no básica.

En estas condiciones:

$$\begin{bmatrix} B & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = b \Longrightarrow Bx_B + Nx_N = b$$

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \tag{3.5}$$

- Una solución básica para el sistema (3.4) es aquella obtenida haciendo $x_N = 0$ en (3.5) y resolviendo el sistema resultante empleando:

$$x_B = B^{-1}b$$

- Una solución de (3.4) es llamada de solución básica factible, si después de seleccionar un $x_N = 0$ en (3.5) el sistema resultante produce la siguiente solución:

$$x_B = B^{-1}b \geq 0 \tag{3.6}$$

Así en el sistema anterior son definidos los siguientes conceptos:

B $\Longrightarrow$ Llamada matriz básica o base

N $\Longrightarrow$ Llamada de matriz no básica

$x_B \Longrightarrow$ Vector de variables básicas

$x_N \Longrightarrow$ Vector de variables no básicas

$x_B > 0 \Longrightarrow$ SBF no degenerada. Si algún componente de x_B es igual a cero, entonces es una SBF degenerada.

A continuación mostramos una forma algebraica de determinar SBF de un PL, o sea, una forma de determinar los puntos extremos de un PL.

Ejemplo 2: Sea el siguiente PL:

$$\begin{array}{l} min \;\; cx \\ s.a. \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} -x_1 + x_2 \leq 2 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow S$$

Encontrar las SBF de **S**.

Para que S asuma la forma $\{Ax = b; \quad x \geq 0\}$ efectuamos la siguiente transformación equivalente:

$$S \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = 6 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \\ x_4 \geq 0 \end{array}\right.$$

En el sistema anterior, las 2 primeras ecuaciones corresponden a hiperplanos y las 4 siguientes a subespacios.

Sistema $Ax = b$?

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} \Longrightarrow \text{rank(A,b)} = \text{rank(A)} = \text{m} = 2$$

Existen 4 vectores columna en A y solamente 2 vectores forman una base B.

Entonces el número de candidatos a la base puede ser obtenido de:

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4.3.2!}{2!2!} = 6$$

Así, existe un máximo de 6 candidatos para entrar a la base y algunos de estos candidatos conducen a SBF.

Observación: Inversa de una matriz de 2x2:

$$\text{Si} \quad \text{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Longrightarrow \text{B} = A^{-1} = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \left(\frac{1}{\triangle} \right)$$

$$\triangle = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Candidatas a SBF:

1.

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Entonces se obtiene:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \geq 0 \quad \text{y} \quad x_N = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \text{(es SBF)}$$

2.

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Entonces se obtiene:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -4 \end{bmatrix} < 0 \quad \text{y} \quad x_N = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \text{(no es SBF)}$$

3.

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Entonces se obtiene:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} \ngeq 0 \quad \text{y} \quad x_N = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \text{(no es SBF)}$$

4.

$$x_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Entonces se obtiene:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \ngeq 0 \quad \text{y} \quad x_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \text{(no es SBF)}$$

5.

$$x_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Entonces se obtiene:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad \text{y} \quad x_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \text{(es SBF)}$$

6.

$$x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Entonces se obtiene:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} \geq 0 \quad \text{y} \quad x_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \text{(es SBF)}$$

Observación: De 6 candidatas existen 3 SBF.

En E^4 las soluciones básicas factibles son las siguientes:

$$x_1' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} \qquad x_2' = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad x_3' = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Que proyectadas en E^2 producen los puntos:

$$x_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad x_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Que corresponden a los puntos extremos mostrados en la figura 3.1.

Observación: La estrategia mostrada en este ejemplo es la forma más adecuada para encontrar los puntos extremos de un conjunto convexo, así como para determinar las direcciones extremas, recordando que una SBF es equivalente a un punto extremos y que los puntos extremos de D son direcciones extremas de X (o S).

Forma alternativa de verificar soluciones básicas y soluciones básicas factibles.

En este caso mostramos una estrategia geométrica para encontrar los puntos extremos de un PL, o sea también es una forma de determinar las SBF de un PL.

Usamos la figura 3.2 para analizar esta forma alternativa:

A cada restricción está asociada una variable (aquella variable que asume el valor de cero cuando la restricción está activa y llamada variable de holgura). Así por ejemplo:

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_3 = 2 &\Longleftarrow x_3 \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = 6 &\Longleftarrow x_4 \\ x_1 \geq 0 &\Longleftarrow x_1 \\ x_2 \geq 0 &\Longleftarrow x_2 \end{aligned}$$

Gráficamente, las soluciones básicas corresponden a la intersección de 2 hiperplanos del gráfico y las líneas (hiperplanos) que se intersectan corresponden a las variables no básicas. En el gráfico, se pueden verificar las 6 soluciones básicas y una vez determinada la región factible, se pueden verificar las 3 soluciones básicas factibles (SBF).

Ejemplo 3: Presencia de SBF degenerada: Ver figura 3.3.

Considere el siguiente conjunto poliedral S.

$$\begin{aligned} &-x_1 + x_2 \leq 2 \\ &-x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ &x_2 \leq 4 \\ &x_1 \geq 0 \\ &x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

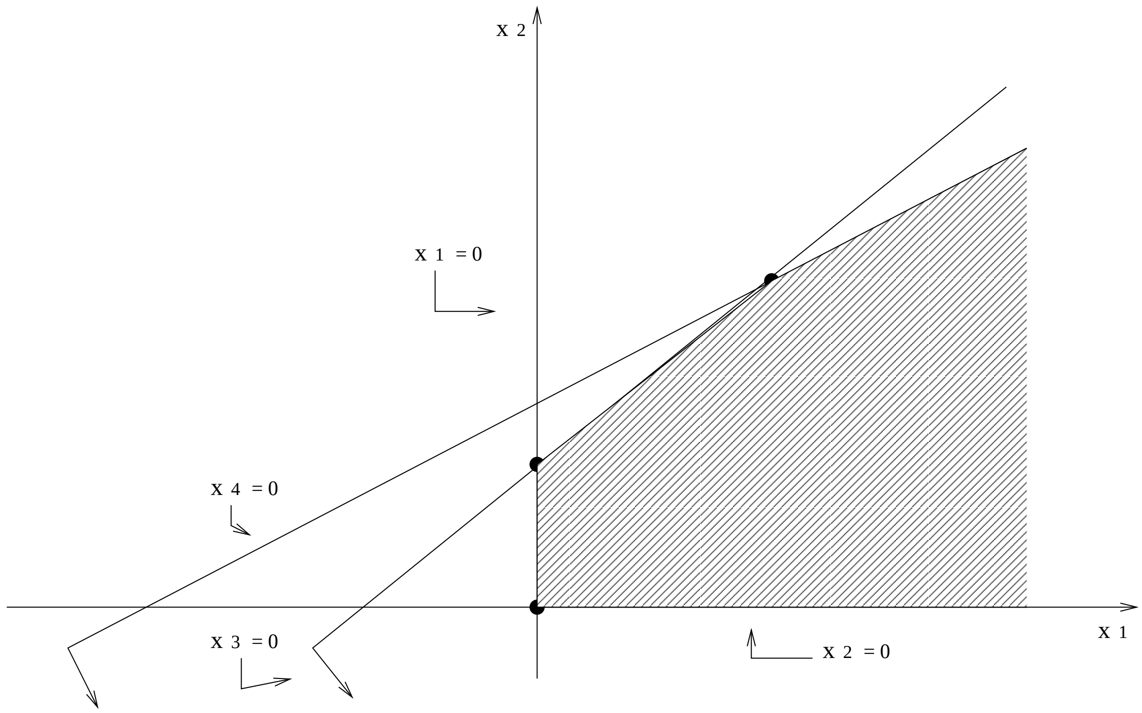


Figura 3.2: Análisis alternativo de SBF y SB (soluciones básicas)

Introduciendo variables de holgura se obtiene:

$$S \Longrightarrow \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = 6 \\ x_2 + x_5 = 4 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

El punto extremo A es un punto extremo degenerado o equivalentemente una solución básica factible degenerada, ya que para una base que identifica esa SBF, existe una variable básica con valor igual a cero.

Mostremos que existen 3 matrices básicas (base B) identificando el mismo punto extremo o SBF y también que la SBF es degenerada.

Variables básicas y no básicas: $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5$.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

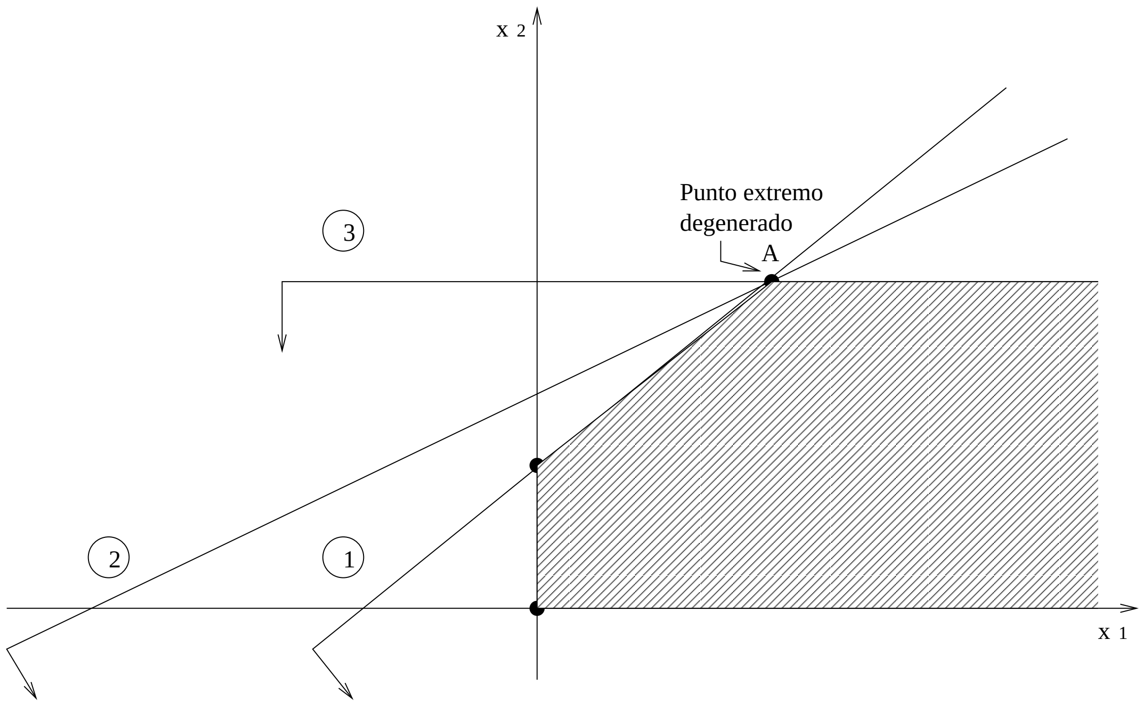


Figura 3.3: Presencia de SBF degenerada

1. **Caso 1:** Con $x_1,\ x_2$ y x_3 en la base:

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad x_N = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La anterior corresponde a una SBF degenerada ya que la variable básica $x_3 = 0$

2. **Caso 2:** Con $x_1,\ x_2$ y x_4 en la base:

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad x_N = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La anterior corresponde a una SBF degenerada ya que la variable básica $x_4 = 0$

3. **Caso 3:** Con x_1, x_2 y x_5 en la base:

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad x_N = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La anterior corresponde a una SBF degenerada ya que la variable básica $x_5 = 0$

<u>**Conclusión**</u>: Las 3 bases que fueron seleccionadas conducen al mismo punto extremo o a la misma SBF:

$$x = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Que corresponde a una SBF degenerada, ya que existe una variable básica con valor igual a cero.

Prueba del Teorema 3: Correspondencia entre puntos extremos y SBF.

" Un punto de S es una solución básica factible (SBF) ⇔ este es un punto extremo".

Sea el PL:

$$\begin{array}{ll} min & cx \\ s.a. & \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} Ax = b \\ x \geq 0 \end{array} \right\} \Longleftarrow \mathbf{S} \qquad rank(A) = m$$

Prueba:$\Longrightarrow$ Sea x un punto extremo de **S** entonces x es una SBF de **S**.

Si x es punto extremo, entonces ∃ n hiperplanos activos en x. Como Ax = b aporta m hiperplanos activos LI, entonces del conjunto $x \geq 0$ (que corresponde a n subespacios), una parte correspondiente a (n-m) hiperplanos debe estar activo en x para que existan los n hiperplanos activos que caracterizan x como punto extremo. Llamemos a esos (n-m) = p hiperplanos activos como $x_N = 0$, lo que implica que el sistema { Ax = b ; $x_N = 0$ } tiene solución única y es igual a x. Ahora sea N las columnas de las variables en x_N y B las columnas restantes de A asociadas a las otras variables llamadas x_B. Como Ax = b puede ser escrito en la forma { Bx_B + Nx_N =b } y con $x_N = 0$ se tendrá una solución igual a x, entonces B es invertible y además de eso:

$$x_B = B^{-1}b \geq 0 \quad \text{ya que} \quad x \geq 0 \in \mathbf{S}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} \geq 0 \quad \text{ya que es factible [es punto extremo de } \mathbf{S}]$$

Por tanto, como

$$\left\{x_N = 0 \quad y \quad x_B = B^{-1}b \geq 0\right\} \Rightarrow \overline{x} \text{ es una SBF de } \mathbf{S}$$

Prueba: $\Longleftarrow$ Si x es SBF de **S** ⇒ x es un punto extremo.

Por la definición de SBF:

$$\left\{x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} B & N \end{bmatrix} \Rightarrow x_B = B^{-1}b \geq 0 \quad y \quad x_N = 0\right\}$$

Sin embargo, esto implica que en x existen n hiperplanos activos [Ax = b y $x_N = 0$] LI siempre y cuando exista B^{-1}. Por lo tanto, si n hiperplanos LI estan activos en x, entonces x es un punto extremo.

Observaciones:

1. A cada punto extremo está asociada una SBF y viceversa
2. Pueden existir varias bases, (B), representando un mismo punto extremo o SBF. En este caso existe una SBF degenerada donde más de n hiperplanos están activos en x. El número adicional de hiperplanos activos indica el grado de degeneración de x.
3. Si existe más de una base representando un punto extremo, entonces ese punto extremo es degenerado; lo contrario no siempre es verdadero, o sea, si un punto extremo es degenerado, **no necesariamente** existe más de una base representando ese punto extremo.

Ejemplo 4: El siguiente ejemplo ilustra la tercera observación.

$$S \Longrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Intentemos resolver el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_3 = \delta \\ x_1 + x_2 = 1 - \delta \\ -x_1 + x_2 = 1 - \delta \end{array}\right\} \Rightarrow \text{se obtiene:} \left\{\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 - \delta \\ x_3 = \delta \end{array}\right.$$

Ahora se regresa al problema original:

El punto $\mathrm{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (encontrado con $\delta = 0$) es un punto extremo degenerado o SBF degenerada.

En este punto, están activos 4 hiperplanos [$x_1 = 0$, $x_3 = 0$, además de las dos igualdades]. Sin embargo, esa SBF tiene una única base.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad de \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{no es posible encontrar otra base.}$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad y \quad x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{tienen la misma base.}$$

Además, x_2 y x_3 no pueden conformar una base ya que sus columnas son LD.

Este es un caso típico donde una SBF (o punto extremo) degenerado tiene una única base.

Este hecho ocurrio porque la solución del sistema Ax = b exige que $x_1 = 0$ y no existe más rank completo con las columnas restantes. Si este no fuese el caso, entonces un punto extremo degenerado tendria más de una base.

Teorema 4: Existencia de SBF

$$\text{Sea el sistema:} \qquad \left.\begin{array}{l} Ax = b \\ x \geq b \end{array}\right\} \Longleftarrow \mathbf{S}$$

Si **S** es no vacío, entonces existe por lo menos una SBF.

Prueba ? Usando la prueba del teorema general de la representación del capítulo anterior en que fue mostrado que el conjunto S tiene por lo menos un punto extremo, entonces se concluye de forma trivial que S no puede ser vacío.

Si **S** es no vacío entonces tiene por lo menos un punto extremo y como a cada punto extremo está asociada una SBF entonces **S** tiene por lo menos una SBF.

Importante:

1. Un punto extremo es una solución óptima de un PL si ese óptimo existe.
2. Los puntos extremos corresponden algebraicamente a las SBF.
3. Las soluciones básicas factibles (SBF) [o los puntos extremos] son finitos y limitados por:

$$\binom{n}{m} = \frac{\text{n!}}{\text{m!(n-m)!}}$$

Es una buena idea intentar determinar la solución óptima de un PL enumerando (listando) todas las (SBF) del PL y verificando cual de estas presenta el valor mínimo (óptimo) del PL ?. La respuesta es negativa por los siguientes motivos:

1. Las SBF (o los puntos extremos) son finitos, a pesar de esto, generalmente asumen un número muy alto.
2. No es posible saber si el problema es ilimitado.
3. Si **S** fuese vacío, ese hecho solamente es descubierto después de analizar todos los candidatos a SBF.

   Estrategia adecuada: El método simplex !

3.3 El Secreto del Método Simplex: La Capacidad de Verificar si una SBF (Punto Extremo) es Óptima

Suponer que se tiene disponible una SBF: Como verificar si esta es óptima o no ?

Sea el PL:

$$(PL)\begin{cases} min \quad cx & \\ s.a. & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

Siendo A una matriz $m \times n$ y de rank igual a m.

Sea la solución básica factible conocida: $\overline{x} = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$

Con un valor de la función objetivo dado por :

$$z_o(x) = c\overline{x} = \begin{bmatrix} c_B & c_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix} = c_B B^{-1} b \qquad (3.7)$$

Donde $\quad \overline{x} = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} \quad$ y c_B representa los coeficientes de costo de las variables básicas

Si $\overline{x}$ es SBF entonces para una deducción general tenemos que:

$$x_B \geq 0 \quad y \quad x_N \geq 0 \quad \text{ya que } \overline{x} \text{ es factible.}$$

$$A\overline{x} = b \Longrightarrow \begin{bmatrix} B & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = b \Longrightarrow Bx_B + Nx_N = b$$

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \tag{3.8}$$

$$x_B = B^{-1}b - \sum_{j \in R} B^{-1}a_j x_j \tag{3.9}$$

$$x_B = B^{-1}b - \sum_{j \in R} (y_j) x_j \tag{3.10}$$

Donde R es el conjunto de índices de las variables no básicas.

En (3.9) y (3.10) tenemos que: $a_j \Rightarrow$ son las columnas de N y $y_j = B^{-1}a_j$.

$$Nx_N = \begin{bmatrix} a_{m+1} & a_{m+2} & \ldots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{m+1} \\ x_{m+2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$Nx_N = a_{m+1}x_{m+1} + a_{m+2}x_{m+2} + \ldots + a_n x_n \Longrightarrow Nx_N = \sum_{j \in R} a_j x_j$$

La función objetivo en la forma general es:

$$z(x) = cx = \begin{bmatrix} c_B & c_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = c_B x_B + c_N x_N$$

De (3.9) se obtiene:

$$z(x) = c_B[B^{-1}b - \sum_{j \in R} B^{-1}a_j x_j] + c_N x_N$$

$$z(x) = c_B B^{-1} b - \sum_{j \in R} c_B B^{-1} a_j x_j + \sum_{j \in R} c_j x_j$$

$$z = z_o - \sum_{j \in R} (z_j - c_j) x_j \tag{3.11}$$

Donde: $z_o = c_B B^{-1} b$ y $z_j = c_B B^{-1} a_j$

Con estas modificaciones se tiene el siguiente (PL) equivalente:

$$(PLE) \quad \begin{cases} min \quad z(x) \quad = \quad z_o - \sum_{j \in R} (z_j - c_j) x_j \\ s.a. \\ \qquad \sum_{j \in R} (y_j) x_j + x_B = B^{-1} b \\ \qquad x_j \geq 0 \quad \forall_j \in R \\ \qquad x_B \geq 0 \end{cases} \tag{3.12}$$

En (3.12) las variables básicas aparecen simplemente como variables de holgura, así en (3.12) se pueden eliminar las variables básicas y tener el siguiente PL equivalente:

$$(PLE) \quad \begin{cases} min \quad z \quad = \quad z_o - \sum_{j \in R} (z_j - c_j) x_j \\ s.a. \\ \qquad \sum_{j \in R} (y_j) x_j \leq B^{-1} b \\ \qquad x_j \geq 0 \quad \forall_j \in R \end{cases} \tag{3.13}$$

El PL (3.13) está representado en un espacio reducido, en el espacio de las variables no básicas p = (n-m).

$(z_j - c_j)$ son conocidos como coeficientes de costo relativo.

Entonces: La SBF actual es óptima ?

La SBF actual es óptima si:

$$(z_j - c_j) \leq 0 \ \ \forall_j \in R \tag{3.14}$$

Porque en este caso, el óptimo de (3.13), llamado z^*, es igual a:

$$z^* \leq z_o \leq z(x) \tag{3.15}$$

Conclusión: $\exists$ una forma adecuada para descubrir si una SBF es óptima o no óptima !

1. Si $(z_j - c_j) \leq 0 \quad \forall_j \in R \Longrightarrow$ La SBF actual es óptima. Más importante todavia es constatar de que esa conclusión es encontrada analizando solamente el punto extremo o SBF representada por B (sin analizar explícitamente los otros puntos extremos).

2. Si algún $(z_j - c_j) > 0 \Longrightarrow$ El incremento de esa variable x_j de su valor actual de cero, permite disminuir la función objetivo actual.

Ejemplo 5: Verificar si un punto extremo (SBF) es óptimo o no.

Dado el siguiente PL (el mismo del ejemplo 2 donde ya fueron encontrados todos los puntos extremos y sus respectivas bases):

$$\begin{array}{ll} min & 4x_1 - x_2 \\ s.a. & \\ & -x_1 + x_2 \leq 2 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{array}$$

Verificar si las SBF correspondientes a los puntos extremos: $x_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ y $x_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

satizfacen la condición de optimalidad.

El ejemplo anterior es transformado en una forma más adecuada:

$$\begin{array}{lll} min\ z & = & 4x_1 - x_2 \\ s.a. & & \\ & & -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ & & -x_1 + 2x_2 + x_4 = 6 \\ & & x_1 \geq 0 \\ & & x_2 \geq 0 \\ & & x_3 \geq 0 \\ & & x_4 \geq 0 \end{array}$$

1. El punto extremo x_3 es óptimo ?

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}; \quad x_N = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}; \quad c_B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \end{bmatrix}; \quad c_N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}; \Longrightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}b = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}; \quad c_B B^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 3 \end{bmatrix}$$

j $\in$ R $\Rightarrow$ R = {3,4}

$$z_o = c_B B^{-1} b = \begin{bmatrix} -7 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = 4$$

$$z_3 = c_B B^{-1} a_3 = \begin{bmatrix} -7 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -7 \Longrightarrow (z_3 - c_3) = (-7 - 0) = -7$$

$$z_4 = c_B B^{-1} a_4 = \begin{bmatrix} -7 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 3 \Longrightarrow (z_4 - c_4) = (3 - 0) = 3$$

Como $(z_4 - c_4) > 0$ entonces x_3 no es un punto extremo óptimo.

$$y_3 = B^{-1} a_3 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$y_4 = B^{-1} a_4 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Entonces tenemos que:

$$(PLE) \qquad \begin{array}{lcl} min\ z & = & 4 + 7x_3 - 3x_4 \\ s.a. & & \\ & & -2x_3 + x_4 \leq 2 \\ & & -x_3 + x_4 \leq 4 \\ & & x_3 \geq 0 \\ & & x_4 \geq 0 \end{array}$$

Como puede ser observado en el (PLE), $z_o = 4$ no puede ser la solución óptima del PL, ya que incrementando el valor de x_4 de su valor actual de cero, es posible obtener un $z(x) < 4$. Entonces x_3 no es un punto óptimo del PL original.

2. El punto extremo x_2 es óptimo ?

$$x_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix}; \quad x_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}; \quad c_B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix}; \quad c_N = \begin{bmatrix} 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}; R = \left\{ \begin{matrix} 1 & 3 \end{matrix} \right\}$$

$$B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad c_B B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$z_o = c_B B^{-1} b = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = -2$$

$$z_1 = c_B B^{-1} a_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = 1 \Longrightarrow (z_1 - c_1) = (1 - 4) = -3$$

$$z_3 = c_B B^{-1} a_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -1 \Longrightarrow (z_3 - c_3) = (-1 - 0) = -1$$

Como $(z_j - c_j) \; < 0 \;\; \forall_j \in \mathrm{R} \Longrightarrow x_2$ es un punto extremo óptimo del PL. Esta afirmación puede ser verificada observando el siguiente PLE:

$$(PLE) \qquad \begin{array}{lcl} min\ z & = & -2 + 3x_1 + x_3 \\ s.a. & & \\ & & -x_1 + x_3 \leq 2 \\ & & x_1 - 2x_3 \leq 2 \\ & & x_1 \geq 0 \\ & & x_3 \geq 0 \end{array}$$

Es evidente que el óptimo del (PLE) es z^* = -2 y las variables x_1 y x_3 deben permanecer en sus valores actuales de cero.

3.4 Motivación Geométrica del Método Simplex

En la ecuación (3.13) se puede llevar a cabo una interpretación geométrica interesante. En el espacio de las variables no básicas, la región factible es determinada por la intersección de n semiespacios, m de los cuales estan asociados a las restricciones de desigualdad y las otras p = n - m relacionadas con las restricciones de no negatividad $[x_j \geq 0]$.

Asociado con cada semiespacio, existe una variable que asume el valor cero cuando el hiperplano asociado al semiespacio esta activo. En (3.13) estas variables son las variables básicas en el caso de las restricciones de desigualdad y las propias variables j $\in$ R en el caso de las restricciones $x_j \geq 0$.

Grafiquemos el caso (1) del ejemplo 5, cuya representación gráfica se muestra en la figura 3.4.

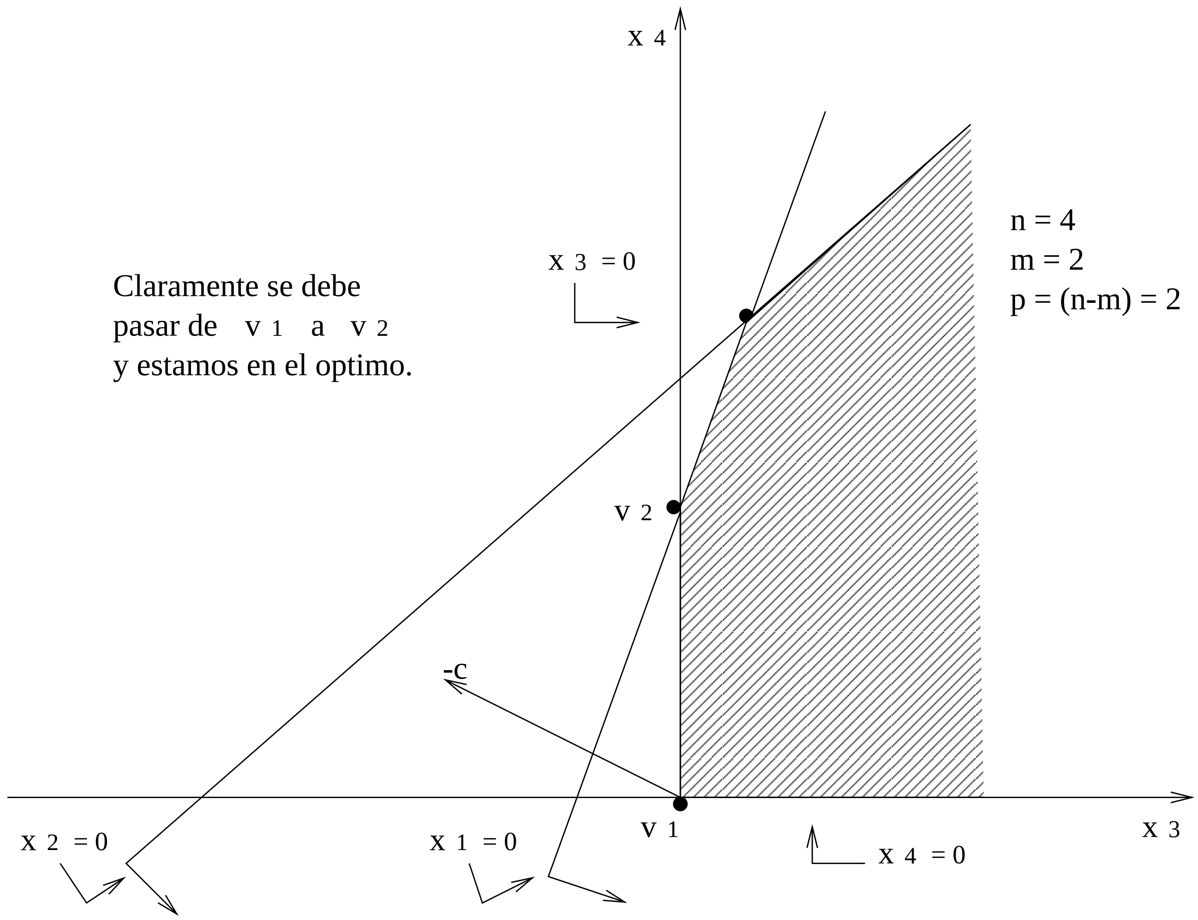


Figura 3.4: Interpretación geométrica del simplex.

Analicemos ahora un caso más general mostrado en la figura 3.5 donde:
n = 6; m = 4; p = 2 y R = {1,2} y por lo tanto $x_B = \{\ x_3, x_4, x_5, x_6\ \}$

La región factible es definida por restricciones de la forma: $x_j \geq 0$; j = 1,2,3,4,5 y 6.

La SBF actual es el vértice definido por v_1 y cada vértice es determinado por la intersección de p = 2 hiperplanos LI donde las variables asociadas a estos hiperplanos son variables no básicas.

Ejemplo 6:

Analizando puntos extremos y una trayectoria simplex:

En v_2 las variables no básicas son $x_1 = 0$ y $x_3 = 0$. v_3 es un vértice degenerado. Existen 3 hiperplanos activos y por lo tanto, 3 bases: $\{x_1, x_2, x_6, x_3\}$, $\{x_1, x_2, x_6, x_4\}$, $\{x_1, x_2, x_6, x_5\}$, las cuales son bases en v_3.

En v_1: existen p = 2 hiperplanos activos y dos variables no básicas $[x_1, x_2]$. Manteniendo

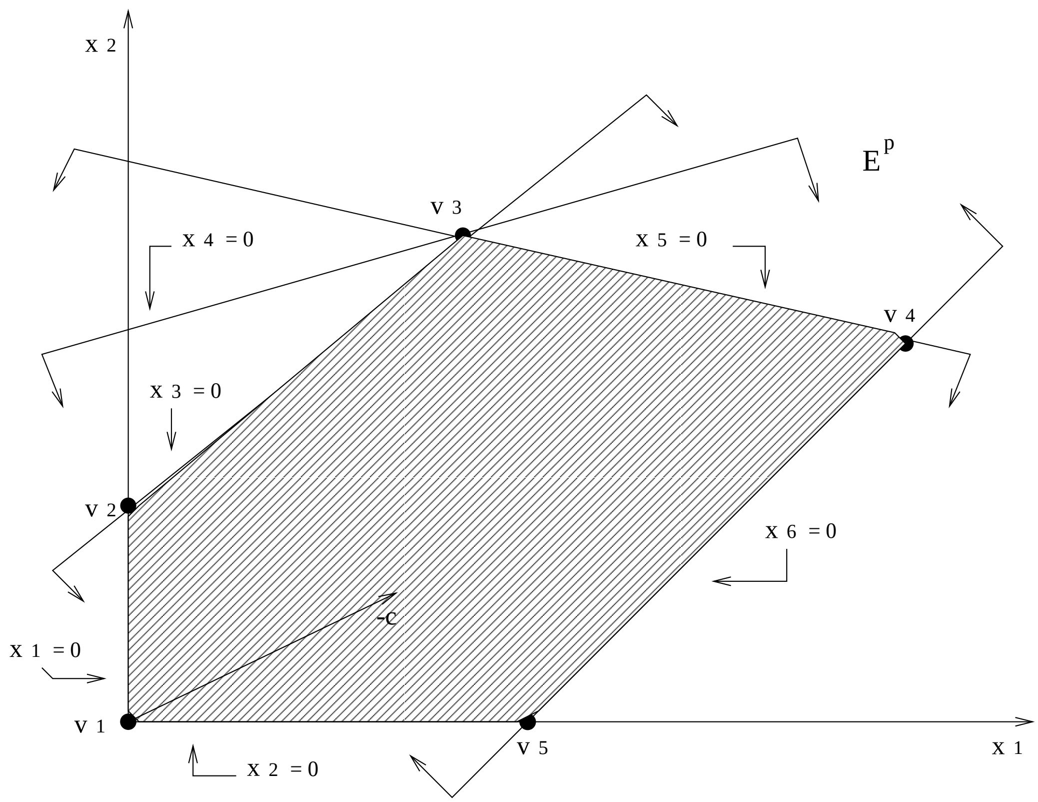


Figura 3.5: Caso general de interpretación geométrica

(p - 1) de esos hiperplanos activos, es posible desplazarse en la dirección factible del hiperplano relajado, siguiendo un rayo con vértice en v_1. Existen p rayos posibles. Así con (p -1) = 1, a partir de v_1 se puede incrementar x_1, manteniendo $x_2 = 0$, en la dirección del eje x_1, cuando la función objetivo varia en la razón $\frac{\partial z}{\partial x_1} = -(z_1 - c_1) < 0$. La misma situación es posible manteniendo $x_1 = 0$ e incrementando x_2 en la dirección del eje x_2, cuando la función objetivo varia en la razón $\frac{\partial z}{\partial x_2} = -(z_2 - c_2) = \overline{c}_2 < 0$. Por lo tanto, ambos rayos presentan direcciones atractivas de movimiento. Suponer que seleccionamos la segunda opción. La dirección es factible a través de una arista, ya que existen (p - 1) hiperplanos LI activos. Este movimiento, que debe ser lo máximo posible, ya que $\overline{c}_2$ es una constante negativa, es bloqueado por el hiperplano $x_3 = 0$ en v_3. Así en v_3 existen p hiperplanos activos LI, los (p -1) que estaban activos en el desplazamiento a través de la arista y el nuevo hiperplano activo $x_3 = 0$. v_2 es un punto extremo adyacente de v_1, ya que ambos tienen en común (p - 1) hiperplanos activos. En v_2, x_1 y x_3 son las variables básicas y en este punto fue realizada una iteración o pivot del simplex. El paso de v_1 a v_2 produce un cambio de variable en la base: x_2 entra en la base y x_3 sale de la base.

En v_1: Variables básicas $\{x_3, x_4, x_5, x_6\}$ y variables no básicas $\{x_1, x_2\}$.

En v_2: Variables básicas $\{x_2, x_4, x_5, x_6\}$ y variables no básicas $\{x_1, x_3\}$.

$x_2 \Longrightarrow$ es la variable que entra en la base

$x_3 \Longrightarrow$ es la variable que sale de la base o variable de bloqueo.

En v_3: No es posible el movimiento inverso (conduciria a la disminución en la calidad de la función objetivo que corresponderia a un incremento en el proceso de minimización) y por lo tanto, el único camino posible es a través de $x_3 = 0$ que conduce a una disminución de la función objetivo [observe la dirección de $-\overline{c}$]. Este desplazamiento es bloqueado simultaneamente por 2 hiperplanos [$x_4 = 0$ y $x_5 = 0$]. Se selecciona $x_4 = 0$ como hiperplano de bloqueo, entonces x_4 sale de la base y ahora x_3 y x_4 son variables no básicas.

Manteniendo $x_4 = 0$ debemos intentar incrementar el valor de x_3 ya que esta alternativa produce una disminución de la función objetivo [observe $-\overline{c}$], sin embargo este posible movimiento es bloqueado por el hiperplano $x_5 = 0$ antes de que el movimiento sea iniciado. Así x_5 sale de la base y x_3 entra en la base y las nuevas variables no básicas son $\{x_4, x_5\}$. A pesar del cambio de base, se mantiene el mismo vertice v_3. Ese paso pivot que produce un cambio en la base para otra adyacente mas en el cual el punto extremo no cambia es conocido como un paso pivot degenerado.

Los pasos pivot degenerados son indeseables en PL, ya que no producen disminución en la función objetivo y pueden producir el fenómeno llamado de ciclaje.

Con x_4 y x_5 como variables no básicas en v_3, se mantiene $x_5 = 0$ y se incrementa x_4 hasta alcanzar v_4 donde el desplazamiento es bloqueado por el hiperplano $x_6 = 0$, así en v_4, x_6 sale de la base y x_4 entra en la base.

En v_4: variables básicas $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ y variables no básicas $\{x_5, x_6\}$.

En v_4 no existe un desplazamiento a través de los 2 rayos posibles que mejoren la función objetivo [observe $-\overline{c}$]. Entonces v_4 es un punto extremo óptimo.

Importante: Ver figura 3.6.

En v_4 el cono poliedral definido por v_4 y los rayos definidos por los hiperplanos $x_5 = 0$ y $x_6 = 0$ { 2 rayos} identifican a v_4 como punto óptimo del poliedro y además de eso, ese cono poliedral contiene toda la región factible del PL analizado.

El camino seguido a través de v_1, v_2, v_3 y v_4 es conocido como trayectoria simplex.

Simplex ?

Un simplex en p dimensiones es la cobertura convexa de un conjunto de (p + 1) puntos no coplanares en E^p, esto es, de puntos que no están en el mismo hiperplano en E^p. Por lo tanto, para p = 1 el simplex es un segmento de línea, para p = 2 es un triángulo y para p = 3 es un tetraedro como es mostrado en la figura 3.7.

Así, dada una base que identifica un punto extremo, se debe analizar a la región factible representada por el espacio de las variables no básicas. Así, la cobertura convexa del vértice actual y p puntos que están en las direcciones extremas definen un simplex en E^p ya que

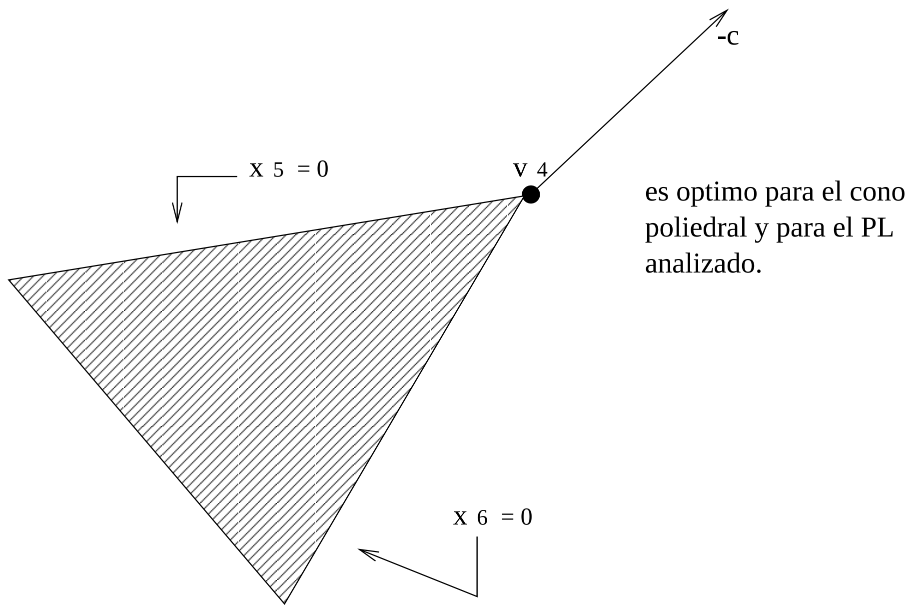


Figura 3.6: Cono poliedral

el cono poliedral generado a partir del vértice identifica las direcciones y comprende toda la región factible del PL. Por lo tanto, examinando esas direcciones el método simplex verifica si el vértice actual es óptimo o si existe una dirección que permite encontrar otro vértice mejor que el vértice actual.

Método simplex $\Longrightarrow$ examina un simplex, después de otro, y en cada caso verifica si el simplex actual es óptimo o no.

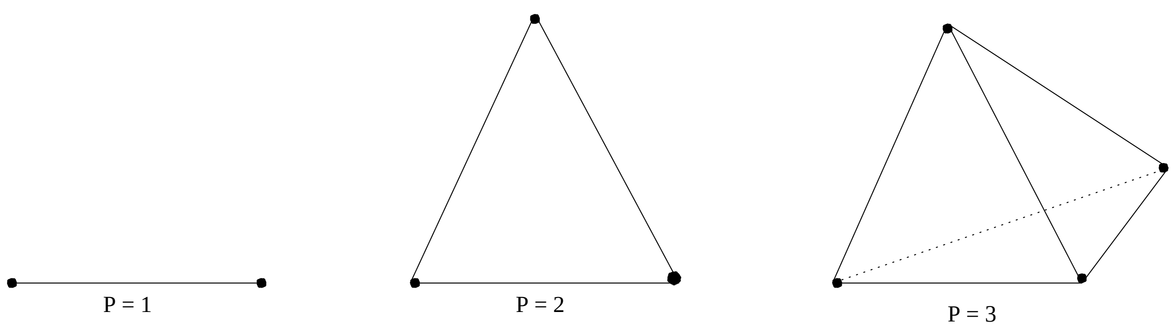


Figura 3.7: Simplex para $p = 1, 2$ y 3

3.5 Una Iteración del Método Simplex: Análisis Algebraico.

Consideremos el PL representado en el espacio de las variables no básicas.

$$\begin{array}{rcll} min \quad z & = & z_o - \sum_{j \in R} (z_j - c_j) x_j & \\ s.a. & & \sum_{j \in R} (y_j) x_j + x_B = \overline{b} & \Rightarrow \text{ m hiperplanos} \\ & & x_j \ \geq 0 \ \ \forall_j \in R & \Rightarrow \text{ p = (n - m) semiespacios que están activos} \\ & & x_B \geq 0 & \Rightarrow \text{ m semiespacios con hiperplanos no activos} \end{array} \quad (3.16)$$

En la SBF actual $\exists_n$ n hiperplanos activos [los m hiperplanos de las restricciones de igualdad y los p = (n - m) hiperplanos activos de los $x_j \ \ \forall_j \in R$].

(a) La SBF es óptima ?

$$si \qquad (z_j - c_j) \leq 0 \ \ \forall_j \in R \Longrightarrow \begin{cases} x_j = 0 \ \ \forall_j \in R \\ x_B = \overline{b} = B^{-1} b \\ \text{Es solución óptima del PL.} \end{cases}$$

(b) Si la SBF actual no es óptima, entonces debemos pasar a una SBF adyacente que permita disminuir la función objetivo:

Si en la SBF actual están activos p hiperplanos del tipo $x_j = 0$; j $\in$ R entonces una SBF adyacente tiene (p -1) de esos hiperplanos activos.

Estrategia para encontrar una SBF adyacente: Relajar (liberar) uno de los hiperplanos activos dentro de los p activos del tipo $x_j = 0$, esto es, un hiperplano de los p hiperplanos dejará de ser activo. Sea $x_k = 0$, el hiperplano activo que será relajado. Entonces manteniendo los otros (p -1) hiperplanos activos $[x_j = 0]$ podemos incrementar el valor de x_k de su valor actual de cero, hasta el máximo posible. Este incremento es hecho a través de un desplazamiento por una arista. El crecimiento de x_k es bloqueado en algún momento porque algún de los subespacios $x_B \geq 0$ se torna activo, esto es, un hiperplano del conjunto $x_B \geq 0$ queda activo. Sea x_{Br} ese hiperplano que queda activo, entonces $x_{Br} = 0$. En este punto, existen nuevamente n hiperplanos activos [los m hiperplanos que siempre están activos, los (p -1) que fueron mantenidos activos y $x_{Br} = 0$ que queda activo]. Entonces este nuevo punto es una nueva SBF que es adyacente a la SBF anterior.

En esta parte la variable x_k que era no básica [$x_k = 0$] pasó a ser básica [$x_k \neq 0$] y una variable básica [x_{Br}] que era normalmente $\neq 0$ se transforma en no básica [$x_{Br} = 0$]. Este paso, de una SBF para otra SBF adyacente, es concida como una iteración del método simplex.

Una iteración del simplex: Es el paso de una SBF para otra SBF adyacente donde el cambio de base consiste en el paso de una variable básica [x_{Br}] para no básica y de otra variable no básica que pasa a ser básica [x_k].

$$B^{'} = [a_{B1}, a_{B2}, \ldots, a_{Br}, \ldots, a_{Bm}] \Longleftarrow \text{ base antigua}$$

$$B^{''} = [a_{B1}, a_{B2}, \ldots, a_{Br-1}, a_k, a_{Br+1}, \ldots, a_{Bm}] \Longleftarrow \text{ base nueva}$$

Cuál variable no básica debe ser escogida ? Que hiperplano debe ser relajado ?

Dentro de los $x_j, \ \ \forall_j \in R$ se selecciona una que debe producir una disminución de la función objetivo, esto es, se selecciona un $x_k, k \in R$ tal que :

$$(z_k - c_k) > 0 \tag{3.17}$$

y de preferencia aquel que sea el más positivo entre todos los candidatos:

$$(z_j - c_j) > 0; j \in R$$

Sea x_k la variable no básica cuyo valor actual de cero puede crecer y todas las otras variables no básicas permanecen en el valor actual de cero. Entonces en (3.16) tenemos:

$$z = z_o - (z_k - c_k)x_k \tag{3.18}$$

y además:

$$\begin{bmatrix} x_{B1} \\ x_{B2} \\ \vdots \\ x_{Br} \\ \vdots \\ x_{Bm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{b}_1 \\ \overline{b}_2 \\ \vdots \\ \overline{b}_r \\ \vdots \\ \overline{b}_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_{1k} \\ y_{2k} \\ \vdots \\ y_{rk} \\ \vdots \\ y_{mk} \end{bmatrix} x_k$$

que es equivalente a:

$$\begin{cases} x_{B1} = \overline{b}_1 - y_{1k}x_k \\ x_{B2} = \overline{b}_2 - y_{2k}x_k \\ \vdots \\ x_{Br} = \overline{b}_r - y_{rk}x_k \\ \vdots \\ x_{Bm} = \overline{b}_m - y_{mk}x_k \end{cases} \tag{3.19}$$

Cuál variable básica llega primero al valor de cero, cuando x_k aumenta de su valor actual de cero ?

Solamente aquellas variables básicas que tienen $y_{ik} > 0$ pueden disminuir de valor. Obviamente la primera variable básica que llega a cero es aquella que tiene la menor relación $\frac{\overline{b}_i}{y_{ik}}$. Así, la primera variable básica que llega a cero se denomina x_{Br}, entonces,

$$x_{Br} \Longrightarrow x_k = \frac{\overline{b}_r}{y_{rk}} = \begin{array}{c} min \\ 1 \leq i \leq m \end{array} \left\{ \frac{\overline{b}_i}{y_{ik}}; \quad y_{ik} > 0 \right\} \tag{3.20}$$

Si la SBF actual no es degenerada, entonces $\overline{b}_r > 0$ y como $(z_k - c_k) > 0$ entonces la nueva función objetivo disminuye así:

$$z = z_o - (z_k - c_k)\frac{\overline{b}_r}{y_{rk}} < z_o \tag{3.21}$$

Por lo tanto, en la nueva SBF, existe una disminución de la función objetivo.

x_{Br} que era básica pasa a ser no básica.

x_k que era no básica pasa a ser básica.

En la nueva SBF tenemos que :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{Bi} = \overline{b}_i - \frac{y_{ik}}{y_{rk}}\overline{b}_r \quad i = 1, 2, ..., m \quad i \neq r \\ x_k = \frac{\overline{b}_r}{y_{rk}} \\ \text{Todos los otros } \; x_j = 0 \end{array} \right. \tag{3.22}$$

x_{Br} es también llamada variable que sale de la base o variable de bloqueo.

x_k es también llamada variable que entra en la base.

Ejemplo 7: Sea el siguiente PL:

$$\begin{array}{rcl} min \quad z & = & 4x_1 - x_2 \\ s.a. & & \\ & & -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ & & -x_1 + 2x_2 + x_4 = 6 \\ & & x_1 \geq 0 \\ & & x_2 \geq 0 \\ & & x_3 \geq 0 \\ & & x_4 \geq 0 \end{array}$$

$$\text{Muestre que la SBF:}\left\{\begin{array}{l} x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ \\ x_N = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \end{array}\right. \Longrightarrow B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

no es óptima y realice una iteración del simplex para una SBF adyacente.

Este problema ya fue representado en el espacio de las variables no básicas para la SBF mencionada, obteniéndoce el siguiente PL equivalente (ver ejemplo 5 - parte 1):

$$\begin{array}{rcl} min \quad z & = & 4 + 7x_3 - 3x_4 \\ s.a. & & \\ & & -2x_3 + x_4 + x_1 = 2 \\ & & -x_3 + x_4 + x_2 = 4 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_3 \geq 0 \\ x_4 \geq 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{No básicas, con valor} \\ \text{actual igual a cero} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{array}\right\} \text{Básicas}$$

Observe que la variable básica x_1 aparece solamente en la primera restricción y la variable básica x_2 aparece solamente en la segunda restricción.

De las variables no básicas [x_3 y x_4] seleccionamos x_4 para entrar a la base, ya que $(z_4 - c_4) = 3 > 0$ y mantenemos la otra variable no básica en su valor actual de $x_3 = 0$.

Entonces tenemos:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x_4 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = 2 - x_4 \\ x_2 = 4 - x_4 \end{array}\right. \Longrightarrow x_4 = 2$$

Al incrementar el valor de x_4, entonces x_1 llega primero al valor de cero.

$$min \ \ \{\frac{2}{1}, \ \ \frac{4}{1}\} = 2 = \frac{b_1}{y_{14}} = x_4 \Longrightarrow x_4 = 2$$

$$\text{Nuevos valores:}\left\{\begin{array}{l} x_1 = 0 \Longrightarrow \text{pasa a ser la nueva variable no básica} \\ x_2 = 2 \\ x_4 = 2 \Longrightarrow \text{pasa a ser variable básica} \end{array}\right.$$

Función objetivo: $z = z_o - (z_4 - c_4)x_4 = 4 - (3)(2) = -2 \Longrightarrow z = -2 < z_o$

Entonces pasamos a una SBF nueva con menor función objetivo: $z = -2 < z_o = 4$

$$\text{Nueva SBF:} \quad x_B = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad x_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ahora como obtener el (PLE) en el espacio de las nuevas variables no básicas ? Pivotage !

El nuevo (PLE) debe estar representado solamente en función de las nuevas variables no básicas x_1 y x_3. Esta transformación puede ser conseguida realizando el pivotaje. Pivotaje consiste en eliminar, por operaciones elementales de fila, la nueva variable básica x_4 de la función objetivo y de la segunda restricción y así, en el nuevo (PLE), x_4 deve aparecer solamente en la primera restricción (en substitución de x_1 que era la variable básica anterior). El (PLE) antiguo tiene la siguiente forma:

$$\text{De (PLE}_1\text{):} \quad \begin{array}{rcl} min \quad z & = & 4 + 7x_3 - 3x_4 \\ s.a. & & \\ & & -2x_3 + x_4 + x_1 = 2 \\ & & -x_3 + x_4 + x_2 = 4 \\ & & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

Ahora, multiplicando la primera restriccón por 3 y acrecentando en la función objetivo, y multiplicando la primera restricción por -1 y acrecentando en la segunda restricción obtenemos el nuevo (PLE) equivalente:

$$\text{De (PLE}_2\text{):} \quad \begin{array}{rcl} min \quad z & = & -2 + 3x_1 + x_3 \\ s.a. & & \\ & & x_1 - 2x_3 + x_4 = 2 \\ & & -x_1 + x_3 + x_2 = 2 \\ & & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

Observe que en este nuevo (PLE) las variables básicas aparecen (cada una de ellas) en una única restricción.

El nuevo (PLE) es óptimo!

Interpretación de $(z_k - c_k)$

$(z_k - c_k) > 0$ es el criterio para que una variable no básica sea seleccionada como candidata para entrar en la base.

Sabemos que la función objetivo asume la siguiente forma: $z = c_B\overline{b} - (z_k - c_k)x_k$

donde:

$$z_k = c_B B^{-1} a_k = c_B y_k = \sum_{i=1}^{m} c_{Bi} y_{ik} \tag{3.23}$$

donde c_{Bi} es el coeficiente del costo de la i-esima variable básica.

De (3.19) observamos que si x_k aumenta en una unidad entonces, todas las variables básicas varian en una cantidad igual a $y_{1k}, y_{2k}, ..., y_{mk}$ (particularmente cuando $y_{ik} > 0$ las variables básicas disminuyen). Por lo tanto, la economía resultante de la variación de x_k en una unidad es igual a:

$$\triangle z = c_B \triangle x_B = \begin{bmatrix} c_{B1} & c_{B2} & \dots & c_{Bm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1k} \\ \vdots \\ y_{mk} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{m} c_{Bi} y_{ik} \tag{3.24}$$

Que es exactamente igual a (3.23). Así, z_k representa la economía obtenida al incrementar x_k en una unidad. Por otro lado, el incremento de la variable no básica en una unidad, produce un incremento en la función objetivo igual a c_k.

Entonces : $(z_k - c_k)$ representa la economía neta en la función objetivo al incrementar x_k en una unidad. Entonces, si $(z_k - c_k) > 0$ existe una disminución de la función de costo al incrementar x_k.

1. $(z_k - c_k) > 0$ es ventajoso, ya que produce disminución de z.
2. $(z_k - c_k) < 0$ no es ventajoso, ya que produce incremento de z.
3. $(z_k - c_k) = 0$ no produce cambio en z.

Ahora suponer que x_k es una variable básica

Suponer que x_k es la t-ésima variable básica entonces, $x_k = x_{Bt}$; $c_k = c_{Bt}$; $a_k = a_{Bt}$.

Entonces:

$$z_k = c_B B^{-1} a_k = c_B B^{-1} a_{Bt} \text{ además se tiene que: } \quad B^{-1} a_{Bt} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftarrow t$$

$$z_k = c_B e_t = c_{Bt} \Longrightarrow (z_k - c_k) = (c_{Bt} - c_{Bt}) = 0$$

Así, para todas las variables básicas:

$$(z_k - c_k) = (c_{Bt} - c_{Bt}) = 0 \Longrightarrow (c_{Bi} - c_{Bi}) = 0$$

Vea lo siguiente:

$$e_j = Ie_j = (A^{-1}A)e_j = A^{-1}(Ae_j) = A^{-1}a_j \Longrightarrow A^{-1}a_j = e_j, \text{ ya que } Ae_j = a_j$$

Cambio de base y variable de bloqueo

De (3.19) se puede observar fácilmente que si la variable no básica x_k incrementa de valor, de su valor actual de cero, entonces las variables básicas cambian de valor de acuerdo con los valores de y_k. Si y_k tiene componentes positivas, entonces las variables básicas asociadas a ese elemento de y_k disminuyen de valor. En este contexto, x_k no puede incrementar su valor de manera indefinida, ya que esas variables básicas con $y_{ik} > 0$ asumirian valores negativos. Así, el máximo incremento de x_k está limitado (controlado) por la primera variable básica que asume el valor de cero. Esta variable básica x_{Br} es llamada de variable de bloqueo. Así, x_{Br} sale de la base y x_k entra en la base produciéndoce el cambio de base.

3.6 Criterio de Parada del Método Simplex: Existe Solución Óptima o el Problema es Ilimitado

Ya sabemos pasar de una SBF para otra SBF adyacente. Este paso que es un cambio de base, es realizado introduciendo una variable no básica en la base y removiendo otra variable de la base. Así tenemos:

1. Variable que entra en la base: x_k

   Una variable x_k con : $(z_k - c_k) > 0$

2. Variable que sale de la base: x_{Br}

   Determinada por:

$$\frac{\overline{b}_r}{y_{rk}} = \underset{1 \leq i \leq m}{min} \left\{ \frac{\overline{b}_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0 \right\}$$

En la tentativa de cambio de base, pueden ocurrir dos situaciones muy importantes que nos permiten terminar el proceso:

1. Fue encontrada la solución óptima del PL:

   Si $(z_j - c_j) \leq 0 \;\; \forall_j \in R$

   Esto es si todos los $(z_j - c_j)$ de todas las variables no básicas no son positivos $\Longrightarrow$ fue encontrada la solución óptima del PL.

2. El problema es ilimitado:

   Suponer que seleccionamos un x_k con $(z_k - c_k) > 0$ para entrar en la base. Sin embargo ocurre que todos los y_{ik} no son positivos, esto es: $y_k \leq 0$.

   En este caso x_k puede incrementar indefinidamente, ya que ninguna variable básica llega al valor cero, o sea, no existe variable de bloqueo. $\Longrightarrow$ el problema es ilimitado. Analizamos con más detalle estos dos casos.

a) Cuando existe solución óptima finita

   Del (PLE) tenemos que:

$$(PLE)\left\{\begin{array}{lcl} min \quad z & = & z_o - \sum\limits_{j \in R} (z_j - c_j) x_j \\ \quad s.a. & & \\ & & \sum\limits_{j \in R} (y_j) x_j + x_B = \overline{b} \\ & & x_j \geq 0 \;\; \forall_j \in R \\ & & x_B \geq 0 \end{array}\right. \tag{3.25}$$

   De (3.25) es fácil verificar que si $(z_j - c_j) \leq 0 \;\; \forall_j \in R$ entonces, la SBF actual es óptima, ya que no es posible disminuir el valor de Z. Así, el óptimo es:

$$z = z^* = z_o^o.$$

   A pesar de esto, existen dos posibilidades:

   a) Solución óptima única:

      Si todos los $(z_j - c_j) < 0 \;\; \forall_j \in R$, entonces $\exists$ solución óptima única.

   b) Soluciones óptimas alternativas:

      Si existe por lo menos una variable no básica x_k con: $(z_k - c_k) = 0$, entonces es posible encontrar una solución óptima alternativa con la entrada de x_k en la base que produce la misma función objetivo así:

$$z = z_o - (z_k - c_k) x_k = z_o - 0 x_k = z_o$$

      * En este caso, todos los puntos que unen los dos puntos extremos de las correspondientes SBF son tambien óptimos alternativos.
      * En general en E^n pueden existir varias variables no básicas con $(z_k - c_k) = 0$ produciendo cada una de ellas una SBF óptima alternativa.

Ejemplo 8: Verificar que el siguiente PL tiene óptimo finito único.

$$\begin{array}{lll} min \quad z & = & 4x_1 - x_2 \\ \quad s.a. & & \\ & & -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ & & -x_1 + 2x_2 + x_4 = 6 \\ & & x_1 \geq 0 \\ & & x_2 \geq 0 \\ & & x_3 \geq 0 \\ & & x_4 \geq 0 \end{array}$$

Emplear la SBF siguiente:

$$B = \begin{bmatrix} a_2 & a_4 \end{bmatrix} \qquad x_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} \qquad x_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad R = \{1,\ 3\}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} a_2 & a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c_B B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(z_j - c_j) = c_B B^{-1} a_j - c_j$$

$$\left. \begin{array}{l} (z_1 - c_1) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} - 4 = -3 \\ (z_3 - c_3) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = -1 \end{array} \right\} \Longrightarrow \quad como \left\{ \begin{array}{c} (z_1 - c_1) < 0 \\ y \\ (z_3 - c_3) < 0 \end{array} \right.$$

Entonces la SBF analizada es un óptimo único del PL.

Ejemplo 9: Verificar que el siguiente PL tiene soluciones óptimas alternativas:

$$\begin{array}{lll} min \quad z & = & x_1 - x_2 \\ \quad s.a. & & \\ & & -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ & & -x_1 + 2x_2 + x_4 = 6 \\ & & x_1 \geq 0 \\ & & x_2 \geq 0 \\ & & x_3 \geq 0 \\ & & x_4 \geq 0 \end{array}$$

Emplear la SBF siguiente:

$$B = \begin{bmatrix} a_2 & a_4 \end{bmatrix} \qquad x_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} \qquad x_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad R = \{1,\ 3\} \qquad c_B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} (z_1 - c_1) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} - 1 = 1 - 1 = 0 \\ (z_3 - c_3) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = -1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad como \left\{\begin{array}{c} (z_1 - c_1) = 0 \\ y \\ (z_3 - c_3) < 0 \end{array}\right.$$

Como $(z_j - c_j \leq 0 \ \ \forall_j \in R \Longrightarrow$ la SBF actual es óptima.

Sin embargo como $(z_1 - c_1) = 0$, entonces puede existir una SBF óptima alternativa que puede ser encontrada cuando x_1 entra en la base.

Cual variable básica bloquea la evolución de x_1 ?

$$y_1 = B^{-1}a_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Como $y_{21} = 1$ entonces la variable básica x_4 bloquea el incremento de x_1 y la proxima SBF adyacente óptima alternativa tendrá la siguiente base:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 10: Verificar que el siguiente PL tiene soluciones óptimas alternativas, sin embargo existe solamente una SBF óptima.

$$\begin{array}{rcl} min \ \ z & = & x_1 - 2x_2 \\ s.a. & & \\ & & -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ & & -x_1 + 2x_2 + x_4 = 6 \\ & & x_1 \geq 0 \\ & & x_2 \geq 0 \\ & & x_3 \geq 0 \\ & & x_4 \geq 0 \end{array}$$

Emplear la SBF siguiente:

$$B = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} \qquad x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad x_N = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \qquad c_B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad R = \{3,\ 4\}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c_B B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(z_j - c_j) = c_B B^{-1} a_j - c_j$$

$$\left.\begin{array}{l} (z_3 - c_3) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = 0 \\ \\ (z_4 - c_4) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = -1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} (z_3 - c_3) = 0 \\ y \\ (z_4 - c_4) = -1 \end{array} \right.$$

Como $(z_3 - c_3) = 0$ y $(z_4 - c_4) = -1$, entonces la SBF actual es óptima. Sin embargo, como $(z_3 - c_3) = 0$ entonces existen soluciones óptimas alternativas. Podremos intentar encontrar otra SBF óptima cuando x_3 entre en la base.

Cuál variable básica bloquea el incremento de x_3 ?

$$y_3 = B^{-1} a_3 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Pero como no existe ninguna variable básica para bloquear la evolución de x_3, ya que todos los $y_{i3} < 0$ entonces existe solamente una única SBF óptima (la actual).

Por lo tanto, todos los puntos encontrados para cualquier $x_3 > 0$ tambien es óptimo alternativo del PL.

Todos los puntos de la forma: $x_B^{'} = x_B - y_3 x_3$ son óptimos.

$$x_B^{'} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} x_3 \Longrightarrow x_B^{'} = \begin{bmatrix} 2 + 2x_3 \\ 4 + x_3 \end{bmatrix}$$

$$z = c_B x_B^{'} + c_3 x_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 + 2x_3 \\ 4 + x_3 \end{bmatrix} + 0x_3 = 2 + 2x_3 - 8 - 2x_3 = -6$$

z = - 6 corresponde al óptimo de la SBF (única analizada).

En la SBF óptima actual tenemos que :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_B = B^{-1} b = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \\ \\ z = c_B x_B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = -6 \end{array} \right.$$

Observación:

En el ejemplo 9 [Soluciones óptimas alternativas y dos SBF óptimas] también todos los puntos en la arista que unen ambas SBF son soluciones óptimas alternativas. Veamos:

$$x_B^{'} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} x_1 \Longrightarrow x_B^{'} = \begin{bmatrix} 2 + x_1 \\ 2 - x_1 \end{bmatrix}; \qquad x_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Cuando $x_1 = 2$, x_4 bloquea x_1, y tenemos la otra SBF, además para $0 < x_1 < 2$ también:

$$z = c_B x_B^{'} + c_1 x_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 + x_1 \\ 2 - x_1 \end{bmatrix} + x_1 = -2 - x_1 + x_1 = -2$$

Z = - 2 correponde a la solución óptima de la SBF.

Para cualquier punto: $x_B^{'} = \begin{bmatrix} 2 + x_1 \\ 2 - x_1 \end{bmatrix}$ y $0 < x_1 < 2$, el valor de la función objetivo es la misma que corresponde a la solución óptima de las dos SBF óptimas.

b) Cuando el problema es ilimitado

Cuando es seleccionada una variable x_k con $(z_k - c_k) > 0$ para ser candidata a entrar en la base y acontece que : $y_k \leq 0$ entonces el problema es ilimitado, ya que en este caso no existe variable básica de bloqueo, esto es, cuando x_k se incrementa, todas las variables básicas aumentan de valor $(y_{ik} < 0)$ o permanecen sin cambiar de valor $(y_{ik} = 0)$, sin embargo ninguna de ellas disminuye de valor.

De las restricciones de (3.25) tenemos que:

$$x_B = B^{-1}b - y_k x_k \tag{3.26}$$

Como $y_k \leq 0$ entonces todos los elementos de x_B se incrementan o permanecen igual. Particularmente, x_k puede crecer indefinidamente y así el objetivo:

$$z = z_o - (z_k - c_k)x_k \Longrightarrow -\infty \text{ cuando } x_k \Longrightarrow \infty \text{ problema ilimitado}$$

De (3.26) y colocando todas las variables del problema, vemos que el problema es ilimitado desplazándoce a través del rayo.

$$\overline{x} = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ \hline 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -y_k \\ \hline 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} x_k : \qquad x_k \geq 0$$

con el valor de 1 en la posición k.

Entonces tenemos:

$$x_o = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ \hline 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ Es la SBF actual y vértice del rayo} \qquad d = \begin{bmatrix} -y_k \\ \hline 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \text{ Es la dirección del rayo}$$

Se puede verificar que $cd < 0$ {significa problema ilimitado}:

$$cd = \begin{bmatrix} c_B & c_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -y_k \\ \hline 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = -c_B y_k + c_k = -z_k + c_k = -(z_k - c_k)$$

cd $= -(z_k - c_k)$ mas como $(z_k - c_k) > 0 \Longrightarrow cd < 0$.

Ejemplo 11: Verificar que d es una dirección de x = {x: Ax = b; $x \geq 0$ }.
El conjunto de direcciones de X es dado por :

$$D = \{d : \begin{array}{c} Ad = 0 \\ d \geq 0 \\ d \neq 0\} \end{array} \qquad \overline{d} = \begin{array}{|c|c} \hline -y_k & m \\ \hline 0 & 1 \\ \vdots & 2 \\ 1 & 3 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & n-m \\ \hline \end{array}$$

Veamos que $\overline{d}$ satisface D:

$$A\overline{d} = \begin{bmatrix} B & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -y_k \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = -By_k + a_k = -B(B^{-1}a_k) + a_k = a_k - a_k = 0$$

Entonces : $A\overline{d} = 0$.
$\overline{d} \geq 0$? si, es evidente porque $y_k < 0$.

$d \neq 0$ también puede verificarse en forma trivial.

Entonces, $\overline{d} \in D$ y podemos afirmar que $\overline{d}$ es una dirección de D.

$\overline{d}$ es una dirección extrema de X?. La respuesta es afirmativa también.

Basta mostrar que $\overline{d}$ es un punto extremo de:

$$D = \{d : \begin{array}{c} Ad = 0 \\ d \geq 0 \\ d \neq 0 \\ d_1 + d_2 + \ldots + d_n = 1\} \end{array}$$

Esto es, que n hiperplanos de D están activos en $\overline{d}$. Realmente en $\overline{d}$ están activos n hiperplanos:

1. m hiperplanos de Ad = 0
2. (n - m) - 1 hiperplanos del tipo $d_j = 0$ [ver la estructura de $\overline{d}$].
3. El hiperplano de normalización que siempre es satisfecho. Así, tenemos m + [(n - m) -1] + 1 = n hiperplanos activos $\Longrightarrow$ $\overline{d}$ es punto extremo de D.

Ejemplo 12: Verificar que el siguiente PL es ilimitado.

$$\begin{array}{rcl} min \quad z & = & x_1 - 3x_2 \\ s.a. & & \\ & & -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ & & -x_1 + 2x_2 + x_4 = 6 \\ & & x_1 \geq 0 \\ & & x_2 \geq 0 \\ & & x_3 \geq 0 \\ & & x_4 \geq 0 \end{array}$$

Emplear la SBF siguiente:

$$B = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} \qquad x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad x_N = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \qquad c_B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \end{bmatrix} \qquad R = \{3,\ 4\}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c_B B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(z_j - c_j) = c_B B^{-1} a_j - c_j$$

$$\left.\begin{array}{l} (z_3 - c_3) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = 1 \\ \\ (z_4 - c_4) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = -2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} (z_3 - c_3) > 0 \\ y \\ (z_4 - c_4) < 0 \end{array}\right.$$

Como $(z_3 - c_3) > 0$ entonces x_3 es candidata a entrar en la base. Ahora calculamos y_3.

$$y_3 = B^{-1}a_3 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} < 0$$

Como $y_3 \leq 0$ entonces el problema es ilimitado.

$$\overline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_3 \quad ; \quad x_3 \geq 0$$

Entonces el rayo en E^2 es el siguiente:

$$d = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3.7 El Método Simplex

Sea el PL:

$$\left\{\begin{array}{rcll} min\ z(x) & = & cx & \\ s.a. & & & \\ & & Ax = b & rank(A) = m \\ & & x \geq 0 & A_{m\times n} \end{array}\right.$$

Algoritmo Simplex:

Paso inicial: Escoger una SBF inicial con base B. (En el siguiente capítulo se analiza este asunto en detalle).

Paso principal:

1. Resolver el sistema $Bx_B = b$, o sea, calcular $x_B = B^{-1}b = \overline{b}$.

   Entonces: $x_B = B^{-1}b = \overline{b}$, $x_N = 0$ y $z(x) = c_Bx_B$

2. Resolver el sistema $wB = c_B$, o sea, calcular $w = c_B B^{-1}$. w es conocido como vector multiplicador simplex.

   Calcular los coeficientes de costo relativos:

   $$(z_j - c_j) = wa_j - c_j \qquad \forall j \in R$$

   R es el conjunto de índices de las variables no básicas.

   Sea:

   $$(z_k - c_k) = \begin{array}{c} max \\ j \in R \end{array} (z_j - c_j)$$

   (a) Si $(z_k - c_k) \leq 0 \Longrightarrow$ pare porques la SBF actual es **óptima**.

   (b) En caso contrario ir al paso 3 con x_k siendo la variable candidata a entrar en la base.

3. Resolver el sistema $By_k = a_k$, o sea, calcular $y_k = B^{-1}a_k$.

   (a) Si $y_k \leq 0 \Longrightarrow$ pare porque el **problema es ilimitado**. Es ilimitado a través del rayo:

   $$x^{'} = \begin{bmatrix} \overline{b} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -y_k \\ e_k \end{bmatrix} x_k; \quad x_k \geq 0$$

   (b) En caso contrario ir al paso 4.

4. x_k entra en la base. La variable básica x_{B_r} que debe salir de la base es encontrada usando la prueba de la razón mínima:

   $$\frac{\overline{b}_r}{y_{rk}} = \begin{array}{c} min \\ 1 \leq i \leq m \end{array} \left\{ \frac{\overline{b}_i}{y_{ik}} : \quad y_{ik} > 0 \right\}$$

   Actualizar la base B donde a_k debe substituir a_{B_r}, actualizar también el conjunto R y regresar al paso 1.

Observaciones:

1. Modificaciones si el problema es de maximización:

   Un problema de maximización puede ser transformado en un problema de minimización multiplicando la función objetivo por -1.

   $$max \quad f(x) \Longleftrightarrow -[min \quad - f(x)]$$

   Otra alternativa consiste en modificar el criterio de optimalidad. Así, en el problema de maximización si:

   $$(z_k - c_k) \geq 0 \Longrightarrow \text{pare}$$

   porque la SBF actual es óptima. En caso contrario, seleccionar un x_k con el $(z_j - c_j)$ más negativo.

2. Puede ser probado que el algoritmo simplex converge en un número finito de pasos.

Teorema 5: Convergencia finita del algoritmo simplex.

En la ausencia de degeneración (y asumiendo también existencia de factibilidad) el algoritmo simplex termina (converge) en un número finito de iteraciones después de encontrar una SBF óptima o identificando el problema como siendo ilimitado.

En cada iteración, si no existe degeneración, la función objetivo disminuye en:

$$x_k(z_k - c_k) > 0$$

así, en cada iteración, se pasa de una SBF para otra SBF con menor valor de la función objetivo y como el número de SBF es finita entonces el proceso termina en un número finito de iteraciones.

Cuando existe degeneración puede suceder el fenómeno llamado de ciclaje, sin embargo este problema también puede ser eliminado fácilmente.

Ejemplo 13: Resolver el PL:

$$\begin{array}{rcc} min\ z(x) & = & x_1 - 2x_2 \\ s.a. & & \\ & & -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ & & -x_1 + 2x_2 + x_4 = 6 \\ & & x_1; x_2; x_3; x_4 \geq 0 \end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>Paso inicial:</u> Escogemos una SBF trivial: (En el siguiente capítulo se presentan várias formas de encontrar uns SBF inicial).

$$B = \begin{bmatrix} a_3 & a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad B^{-1} = B = I$$

<u>Paso principal:</u>

1 Calcular las variables básicas y la función objetivo:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \qquad x_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad c_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad c_N = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad R = \{1, 2\}$$

$$x_B = B^{-1}b = Ib = b = \overline{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$z(x) = c_B x_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = 0 \Longrightarrow z(x) = 0$$

2 Verificando optimalidad:

$$w = c_B B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$z_1 - c_1 = wa_1 - c_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} - 1 = -1 \Longrightarrow z_1 - c_1 = -1$$

$$z_2 - c_2 = wa_2 - c_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - (-2) = 2 \Longrightarrow z_2 - c_2 = 2$$

como $z_2 - c_2 = 2 > 0$ entonces la SBF actual no es óptima. x_2 es el único candidato a entrar en la base.

3 Actualizar la columna de x_2 y verificar si el problema es ilimitado:

$$y_2 = B^{-1}a_2 = a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

y el problema no es ilimitado (por ahora) y existe cambio de base.

4 Encontrar la variable que debe salir de la base:

$$min\{\frac{\overline{b}_1}{y_{12}}, \ \frac{\overline{b}_2}{y_{22}}\} = min\{\frac{2}{1}, \ \frac{6}{2}\} = 2 \Longrightarrow \frac{\overline{b}_1}{y_{12}} = 2$$

Por lo tanto, la variable básica x_3 debe salir de la base y $R = \{1, 3\}$.

1 Calcular las variables básicas y la función objetivo:

$$B = \begin{bmatrix} a_2 & a_4 \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} \qquad x_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad c_B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix} \qquad c_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad R = \{1, 3\}$$

$$x_B = B^{-1}b = \overline{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$z(x) = c_B x_B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = -4 \Longrightarrow z(x) = -4$$

2 Verificar optimalidad:

$$w = c_B B^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$z_1 - c_1 = wa_1 - c_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} - 1 = 1 \quad \text{no es óptimo} \Longrightarrow z_1 - c_1 = 1$$

$$z_3 - c_3 = wa_3 - c_3 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = -2 \Longrightarrow z_3 - c_3 = -2$$

como $z_1 - c_1 = 1 > 0$ entonces la SBF actual no es óptima. x_1 es el único candidato a entrar en la base.

3 Actualizar la columna de x_1 y verificar si el problema es ilimitado:

$$y_1 = B^{-1}a_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

y el problema no es ilimitado (por ahora) y existe cambio de base.

4 Encontrar la variable que debe salir de la base:

$$min\{\frac{2}{1}\} = 2 \Longrightarrow \frac{\overline{b}_2}{y_{21}} = 2$$

Por lo tanto, la variable básica x_4 debe salir de la base y $R = \{4, 3\}$.

1 Calcular las variables básicas y la función objetivo:

$$B = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad x_N = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad c_B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad c_N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad R = \{4, 3\}$$

$$x_B = B^{-1}b = \overline{b} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$z(x) = c_B x_B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = -6 \Longrightarrow z(x) = -6$$

2 Verificar optimalidad:

$$w = c_B B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$z_3 - c_3 = wa_3 - c_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = 0 \Longrightarrow z_3 - c_3 = 0$$

$$z_4 - c_4 = wa_4 - c_4 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = -1 \Longrightarrow z_4 - c_4 = -1$$

como los 2 coeficientes de costo relativos son ≤ 0 entonces la SBF actual es óptima y el algoritmo termina encontrando una solución óptima finita.

Solución del problema:

$$x^* = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow z(x^*) = -6$$

Observaciones:

1. Como $(z_3 - c_3) = 0$ entonces existen soluciones óptimas alternativas. Si intentamos colocar x_3 en la base (intentando realizar más una iteración simplex) entonces sucedería lo siguiente:

$$y_3 = B^{-1}a_3 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} < 0$$

que indica que no existe bloqueo y por lo tanto no existe otra SBF óptima, mas todos los puntos del siguiente rayo son soluciones óptimas alternativas:

$$x^{'} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_3; \qquad x_3 \geq 0$$

2. La clave (y la parte dificultosa) del algoritmo simplex es conocer la matriz B^{-1}.

3. En este processo siempre, en cada iteración, son usados los datos originales del problema: $\{A, b, c\}$.

4. Existe necesidad de formular un esquema que no necesite calcular B^{-1} explícitamente en cada iteración.

3.8 El Método Simplex en Formato de Cuadro: Primera Forma Sistemática de Resolver un PL

Observación: En cada iteración en la solución de un PL se resuelve el siguiente sistema:

$$\begin{cases} Bx_B = b \\ wB = c_B \\ By_k = a_k \end{cases} \tag{3.27}$$

La forma de resolver y actualizar (3.27) en cada iteración lleva a una versión diferente del método simplex.

Sea el PL:

$$\begin{cases} min\ z(x) & = & cx \\ \quad s.a. & & \\ & & Ax = b \\ & & x \geq 0 \end{cases} \tag{3.28}$$

Conocida una base B y una SBF x_B, entonces (3.28) puede ser transformado en el siguiente PL equivalente:

$$\begin{cases} min\ z & = & \\ \ s.a. & & z - c_B x_B - c_N x_N = 0 \\ & & Bx_B + Nx_N = b \\ & & x_B \geq 0 \\ & & x_N \geq 0 \end{cases} \tag{3.29}$$

De la restricción $Bx_B + Nx_N = b$ tenemos:

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \tag{3.30}$$

y multiplicando por c_B tenemos:

$$c_B x_B = c_B B^{-1}b - c_B B^{-1}Nx_N \tag{3.31}$$

substituyendo $c_B x_B$ de (3.31) en $z - c_B x_B - c_N x_N = 0$ tenemos:

$$z - c_B B^{-1} b + c_B B^{-1} N x_N - c_N x_N = 0$$

$$z + [c_B B^{-1} N - c_N] x_N = c_B B^{-1} b \tag{3.32}$$

Ordenando (3.30) y (3.32) tenemos:

$$\begin{cases} z + 0x_B + [c_B B^{-1} N - c_N] x_N = c_B B^{-1} b \\ \qquad x_B + \qquad\qquad B^{-1} N x_N = B^{-1} b \end{cases} \tag{3.33}$$

El sistema (3.33) puede ser colocado en un formato de cuadro de la siguiente manera:

	z	x_B	x_N	RHS	
z	1	0	$c_B B^{-1} N - C_N$	$c_B B^{-1} b$	$\Leftarrow$ fila 0
x_B	0	I	$B^{-1} N$	$B^{-1} b$	$\Leftarrow$ fila 1 a m

En este cuadro existe toda la información para identificar si una SBF actual es óptima o ilimitada y también las informaciones necesarias para pasar a otra SBF.

En la SBF actual tenemos:

$$\begin{cases} x_N = 0 \\ x_B = B^{-1} b \\ z = c_B B^{-1} b \end{cases} \qquad x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \qquad x_N = \begin{bmatrix} x_{m+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

1. $c_B B^{-1} N - C_N$ suministra todos los $(z_j - c_j)$ $\forall j \in R$ que son los costos relativos de todas las variables no básicas:

   $c_B B^{-1} N = wN$

   $wN = [w][a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_n] = [z_{m+1}, z_{m+2}, \ldots, z_n]$

   $c_B B^{-1} N - c_N = [(z_{m+1} - c_{m+1}), (z_{m+2} - c_{m+2}), \ldots, (z_n - c_n)]$

2. $B^{-1} N$ suministra los y_k de todas las variables no básicas:

   $B^{-1} N = B^{-1}[a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_n] = [y_{m+1}, y_{m+2}, \ldots, y_k, \ldots, y_n]$

Por lo tanto, existe toda la información para identificar el criterio de parada y, en el caso de que exista necesidad de nuevas iteraciones simplex, existe una forma de identificar la variable que debe entrar a la base y la variable que debe salir de la base. Mas, cómo actualizar este cuadro adecuadamente? Cuando existe cambio de base, cómo actualizar el cuadro de manera que sea posible encontrar un nuevo cuadro con la entrada a la base de la variable x_k y la salida de la base de la variable x_{B_r} ?. Esa transformación la llamamos pivotaje.

Pivotaje:

Se llama pivotaje al conjunto de operaciones que transforma un cuadro simplex, con una base conocida, en otro cuadro simplex con la nueva base. Para actualizar el cuadro simplex se debe realizar las siguientes operaciones:

1. Actualizar las variables básicas y sus valores.
2. Actualizar los costos relativos $(z_j - c_j)$ de las nuevas variables no básicas.
3. Actualizar las columnas y_j de las nuevas variables no básicas.

Pivotaje realiza todas estas operaciones simultaneamente. Sea x_k la variable que entra en la base y x_{B_r} la variable que sale de la base, entonces la operación de pivotaje sigue la siguiente secuencia:

1. Divide la fila r por y_{rk}.
2. Para las filas $i = 1, \ldots, m$ y $i \neq r$ se debe actualizar cada fila i adicionando a esa fila $-y_{ik}$ veces la nueva fila r.
3. Actualizar la fila cero adicionando a ella $-(z_k - c_k)$ veces la nueva fila r.

Así, el cuadro resultante ya está actualizado para la nueva base.

Observaciones: Realizar pivotaje implica que:

1. x_k entra en la base y x_{B_r} sale de la base.
2. El lado derecho del cuadro suministra el valor actualizado de la función objetivo y de las variables básicas. Todas las variables no básicas tienen valor igual a cero.
3. Conocida una base B de una SBF, se puede montar el cuadro en cualquier etapa (cuadro) del proceso.

Algoritmo Simplex en Formato de Cuadro:

(Problema de Minimización)

Paso inicial: Encontrar una SBF con base B y montar el cuadro inicial.

	z	x_B	x_N	RHS	
z	1	0	$c_B B^{-1} N - C_N$	$c_B B^{-1} b$	$\Leftarrow$ fila 0
x_B	0	I	$B^{-1} N$	$B^{-1} b$	$\Leftarrow$ fila 1 a m

Paso principal:

Sea:

$$(z_k - c_k) = \begin{matrix} max \\ j \in R \end{matrix} \{z_j - c_j\}$$

1. **Verificar la optimalidad:**

   Si $(z_k - c_k) \leq 0 \Longrightarrow$ pare porque la SBF actual es óptima y el proceso termina encontrando una solución óptima finita.

2. **Verificar si el problema es ilimitado:**

   En caso contrario analizar y_k:

   (a) Si $y_k \leq 0 \Longrightarrow$ pare porque el problema es ilimitado. La función objetivo z disminuye en la dirección de rayo:

   $$x^{'} = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -y_k \\ e_k \end{bmatrix} x_k : \qquad x_k \geq 0$$

   donde e_k es un vector de ceros excepto en la posición k donde vale 1.

   (b) Si $y_k \nleq 0$ entonces determine el índice r de:

   $$\frac{\overline{b}_r}{y_{rk}} = \begin{matrix} min \\ 1 \leq i \leq m \end{matrix} \left\{ \frac{\overline{b}_i}{y_{ik}} : \qquad y_{ik} > 0 \right\}$$

   Pivotar el cuadro usando el pivot y_{rk}.

   Actualizar las variables básicas y no básicas porque x_k entra en la base y x_{B_r} sale de la base.

   Repetir el paso principal hasta encontrar la convergencia.

Ejemplo 14: Resolver el PL:

$$\begin{array}{rcl} min\ z(x) & = & x_1 - 2x_2 \\ s.a. & & \\ & & -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ & & -x_1 + 2x_2 + x_4 = 6 \\ & & -x_1; x_2; x_3; x_4 \geq 0 \end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>Paso inicial</u>: Identificación de variables y cálculos para montar el cuadro inicial. Para iniciar el processo se debe conocer una SBF inicial (en el próximo capítulo se discute como encontrar

esta SBF inicial de manera sistemática). Escogemos una SBF trivial, aquella formada por las columnas de x_3 y x_4. Entonces tenemos:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \Longrightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \Longrightarrow B^{-1} = I \Longrightarrow B^{-1}b = b = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$x_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Longrightarrow N = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow B^{-1}N = N$$

$$c_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad c_N = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \Longrightarrow c_B B^{-1}N - c_N = -c_N = \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$c_B B^{-1}b = c_B b = 0$$

Así, fueron encontrados todos los datos necesarios para montar el cuadro inicial. La única información necesaria fue la certeza de disponer de una base B, o sea, de una SBF con base B.

Paso principal: En el cuadro se muestra la evolución del processo:

	z	x_3	x_4	x_1	x_2	RHS	
z	1	0	0	-1	2	0	
x_3	0	1	0	-1	1	2	$\min\{\frac{2}{1}, \ \frac{6}{2}\} = 2$
x_4	0	0	1	-1	2	6	
z	1	-2	0	1	0	-4	
x_2	0	1	0	-1	1	2	$\min\{\frac{2}{1}\} = 2$
x_4	0	-2	1	1	0	2	
z	1	0	-1	0	0	-6	
x_2	0	-1	1	0	1	4	
x_1	0	-2	1	1	0	2	

Así, del cuadro óptimo tenemos la solución óptima:

$$\left\{ \begin{matrix} x_1 = 2 \\ x_2 = 4 \end{matrix} \right\} \qquad \Longrightarrow z^* = -6$$

Observación: $(z_3 - c_3) = 0$ significa que existen soluciones óptimas alternativas mas $y_3 = (-1, -2)$ indica que no existe otra SBF óptima.

Observaciones Importantes del Cuadro Simplex

Del cuadro simplex tenemos:

$$z = c_B B^{-1} b - [c_B B^{-1} N - c_N] x_N = c_B B^{-1} b - \sum_{j \in R} (z_j - c_j) x_j \tag{3.34}$$

$$x_B = B^{-1} b - B^{-1} N x_N = B^{-1} b - \sum_{j \in R} y_j x_j \tag{3.35}$$

1. De (3.34) tenemos:

$$\frac{\partial z}{\partial x_j} = -(z_j - c_j) \qquad \forall j \in R$$

   Así, es posible disminuir z aumentando x_j desde que $(z_j - c_j) > 0$.

2. De (3.35) tenemos:

$$\frac{\partial x_B}{\partial x_j} = -y_j \Longrightarrow \frac{\partial x_{B_i}}{\partial x_j} = -y_{ij} \qquad \forall j \in R$$

3. También tenemos la siguiente relación:

$$B y_j = a_j \Longrightarrow a_j = \sum_{i=1}^{m} a_{B_i} y_{ij} = \sum_{i=1}^{m} y_{ij} a_{B_i}$$

   que indica que a_j es una combinación lineal de las columnas de B y los y_{ij} permiten esa combinación lineal.

4. De (3.34) tenemos:

$$\frac{\partial z}{\partial b} = c_B B^{-1} = w \Longrightarrow \frac{\partial z}{\partial b_i} = w_i$$

   donde los w_i son los multiplicadores simplex.

Propiedad importante:

Cuando el cuadro inicial es formado por una matriz identidad constituidas por las variables de holgura con costos iguales a cero, o sea, si en el cuadro original (inicial) se tiene que: $B = I$ y $c_B = 0 \Longrightarrow$ los valores de w se encuentran disponibles en el cuadro (en todos los cuadros generados), en la fila cero y debajo de las variables de holgura (variables básicas en el cuadro original). Esta propiedad puede ser fácilmente verificada:

Sea la base corriente igual a B (en cualquier cuadro del proceso simplex), entonces en relación a los elementos de la función objetivo de las variables de holgura (que formaban la base del cuadro original) y para el cuadro actual con base B tenemos:

$$c_B B^{-1} I - 0 = c_B B^{-1} = w$$

donde I es la matriz cuyas columnas son las variables de holgura y 0 es el vector de costo de las variables de holgura.

En otros casos, w no está disponible en el cuadro simplex y, caso sea necesario, debe ser calculado usando la relación $w = c_B B^{-1}$.

5. De (3.35) tenemos:

$$\frac{\partial x_B}{\partial b} = B^{-1} \Longrightarrow \frac{\partial x_{B_i}}{\partial b_j} = \{b_{ij}^{-1}\}$$

donde b_{ij}^{-1} es el elemento ij de la matriz B^{-1}.

6. La matriz B^{-1} puede estar disponible en el cuadro (en cada uno de los cuadros simplex).

Si la matriz básica (la base inicial) del cuadro inicial **es la identidad** entonces en cualquier cuadro posterior cuja base sea B, la inversa de ella está disponible en el cuadro y son las columnas que están debajo de las variables que formaban la matriz básica inicial.

Vea:

$$\begin{array}{cc} x_B & \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{\mathrm{I}} & \multicolumn{1}{c|}{\mathrm{N}} \\ \hline \end{array} \quad \Longleftarrow \text{cuadro original}$$

Si el cuadro actual (vigente) tiene base B, entonces multiplicando por B^{-1} el cuadro original tenemos:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline B^{-1}I & B^{-1}N \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} x_B & \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{B^{-1}} & \multicolumn{1}{c|}{B^{-1}N} \\ \hline \end{array} \quad \Longleftarrow \text{cuadro actual}$$

Ejemplo 15: Encontrar las relaciones deduzidas anteriormente para el cuadro óptimo del ejemplo anterior.

En el cuadro óptimo del problema anterior tenemos:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad\qquad x_N = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Entonces tenemos:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad\qquad w = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Con estas informaciones y con el cuadro óptimo del problema anterior podemos encontrar las siguientes relaciones:

1. Variación de la función objetivo en función de variable no básica:

$$\frac{\partial z}{\partial x_3} = 0 \qquad\qquad \frac{\partial z}{\partial x_4} = 1$$

2. Variación de variable básica en función de variable no básica:

$$\frac{\partial x_1}{\partial x_3} = 2 \qquad\qquad \frac{\partial x_1}{\partial x_4} = -1$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial x_3} = 1 \qquad\qquad \frac{\partial x_2}{\partial x_4} = -1$$

3. Variación de la función objetivo en función del vector de recursos b:

$$\frac{\partial z}{\partial b_1} = 0 \qquad\qquad \frac{\partial z}{\partial b_2} = -1$$

4. Variación de la variable básica en función del vector de recursos b:

$$\frac{\partial x_1}{\partial b_1} = -1 \qquad \frac{\partial x_1}{\partial b_2} = 1 \qquad \frac{\partial x_2}{\partial b_1} = -2 \qquad \frac{\partial x_2}{\partial b_2} = 1$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial x_B}{\partial b} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

3.9 Ejercicios Resueltos:

1. Considere el siguiente P.L.:

$$\begin{aligned} max. \quad & x_1 + 3x_2 \\ s.a \quad & \\ & x_1 - 3x_2 \leq 3 \\ & -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ & -3x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 9 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

a) Resolver el problema gráficamente.

b) Identifique los puntos extremos y formule el problema en términos de combinaciones de los puntos extremos. Resolver el problema.

c) Elimine la cuarta restricción e identifique los puntos extremos y rayos extremos y reformule el problema en términos de una combinación lineal convexa de las direcciones extremas y una combinación lineal de direcciones extremas. Resolver el problema.

a) Solución gráfica del problema

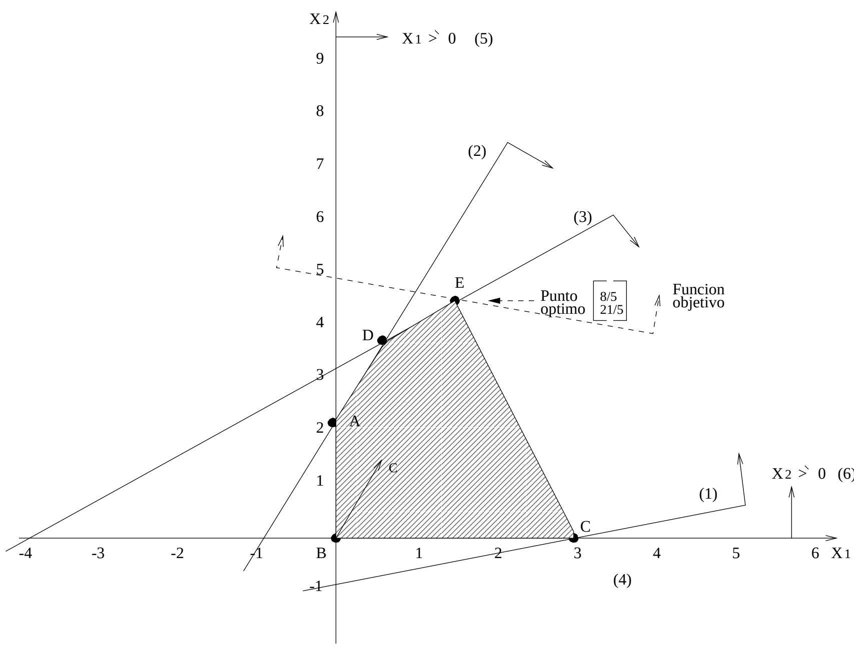


Figura 3.8: Representación gráfica del ejercicio 1.

Puntos extremos:

$$x_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}; x_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; x_C = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}; x_D = \begin{bmatrix} 4/11 \\ 30/11 \end{bmatrix}; x_E = \begin{bmatrix} 8/5 \\ 21/5 \end{bmatrix}; x_E : \text{punto óptimo}$$

El punto extremo E es la solución óptima del PL.

b) El conjunto X no posee direcciones extremas.

Por lo tanto, cualquier punto $\bar{x}$ de X puede representarse como una combinación lineal convexa de los puntos extremos.

$$x = \lambda_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_4 \begin{bmatrix} 4/11 \\ 30/11 \end{bmatrix} + \lambda_5 \begin{bmatrix} 8/5 \\ 21/5 \end{bmatrix}$$

Cambiamos la función objetivo:

$$\max\ x_1 + 3x_2 \Leftrightarrow -\ \min\ -x_1 - 3x_2$$

Definimos c = [-1 - 3]

P.L. equivalente:

$$\begin{cases} \min & \sum_{j=1}^{k} (cx_j)\lambda_j \\ s.a. & \\ & \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1 \\ & \lambda_j \geq 0 \ ; j = 1, 2, .., k \end{cases}$$

$$cx_A = \begin{bmatrix} -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = -6 \quad ; \quad cx_B = \begin{bmatrix} -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$cx_C = \begin{bmatrix} -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = -3 \quad ; \quad cx_D = \begin{bmatrix} -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4/11 \\ \\ 30/11 \end{bmatrix} = -94/11$$

$$cx_E = \begin{bmatrix} -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8/5 \\ \\ 21/5 \end{bmatrix} = -71/5$$

$$P.L.E. \quad \begin{cases} min & -6\lambda_1 + 0\lambda_2 - 3\lambda_3 - \frac{94}{11}\lambda_4 - \frac{71}{5}\lambda_5 \\ s.a. & \\ & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 = 1 \\ & \lambda_j \geq 0 \ ; j = 1, 2, 3, 4, 5 \end{cases}$$

El óptimo trivial exige que se asigne 1 al λ con mayor coeficiente negativo.

$$\Rightarrow \lambda_5 = 1 \ ; \ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$$

$\Rightarrow$ función objetivo mínima $= -\frac{71}{5} \Rightarrow$ Soluc.: $\frac{71}{5}$

Si se prueba la función objetivo del PL inicial en el punto E se obtiene:

$$Z(x) = \frac{8}{5} + 3(\frac{21}{5}) = \frac{71}{5}$$

que correponde al valor de la f.o. encontrada para el PLE.

c) Eliminamos la cuarta restricción

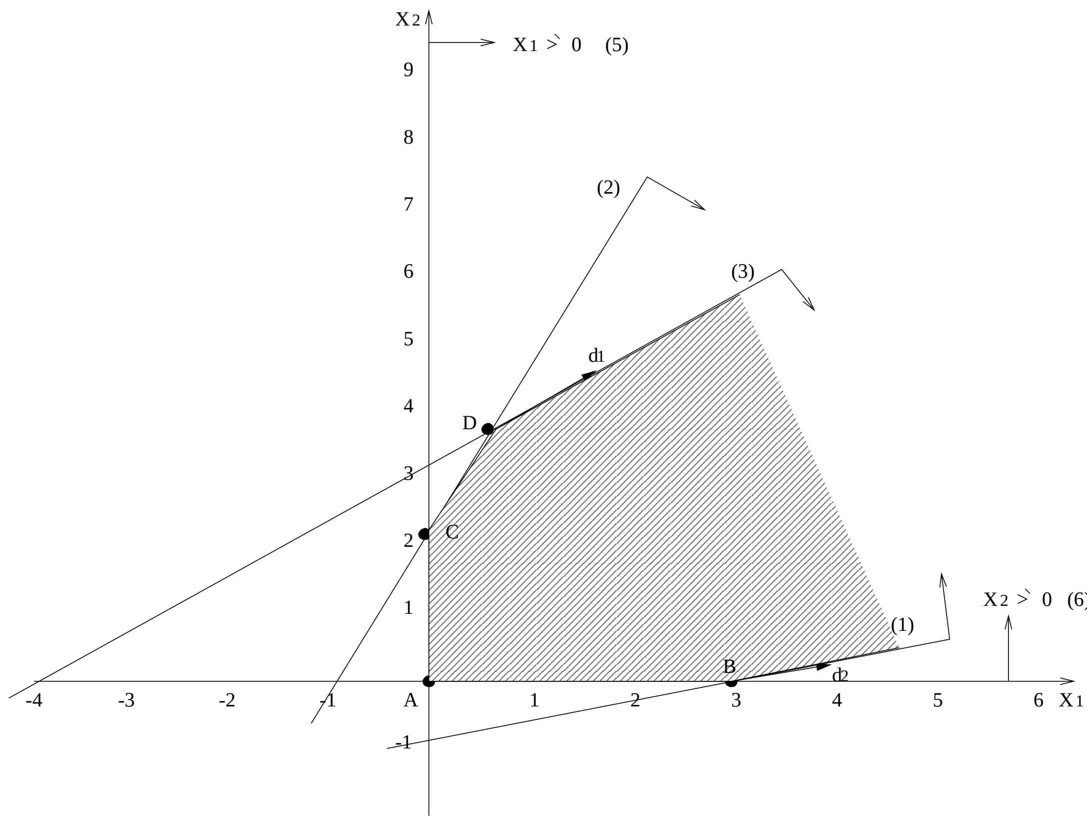


Figura 3.9: Representación gráfica de problema eliminada la restricción 4

El nuevo sistema posee 4 puntos extremos y dos direcciones extremas: d_1, d_2.

Puntos extremos:

$$x_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad x_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad x_C = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad x_D = \begin{bmatrix} \frac{4}{11} \\ \\ \frac{30}{11} \end{bmatrix}$$

Para usar direcciones extremas normalizadas, usamos la expresión

$$d = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+m} \\ \frac{m}{1+m} \end{bmatrix}; \text{donde m es la pendiente de la recta}$$

Las pendientes de las rectas (1) y (3) son: $m_1 = 3/4$; $m_3 = 1/3$

$$\Rightarrow d_1 = \begin{bmatrix} 4/7 \\ 3/7 \end{bmatrix}; \qquad d_2 = \begin{bmatrix} 3/4 \\ 1/4 \end{bmatrix}$$

rayos extremos:

$$x = x_0 + \theta d; \;\; \theta \geq 0$$

$$x_{r_1} = x_D + \theta_A d_1 = \begin{bmatrix} 4/11 \\ \\ 30/11 \end{bmatrix} \; + \; \theta_A \begin{bmatrix} 4/7 \\ \\ 3/7 \end{bmatrix}$$

$$x_{r_2} = x_D + \theta_B d_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ \\ 0 \end{bmatrix} \; + \; \theta_B \begin{bmatrix} 3/4 \\ \\ 1/4 \end{bmatrix}$$

Cualquier punto factible del problema puede definirse como:
$x = \lambda_1 x_A + \lambda_2 x_B + \lambda_3 x_C + \lambda_4 x_D + \mu_1 d_1 + \mu_2 d_2$

$$x = \lambda_1 \begin{bmatrix} 0 \\ \\ 0 \end{bmatrix} \; + \; \lambda_2 \begin{bmatrix} 3 \\ \\ 0 \end{bmatrix} \; + \; \lambda_3 \begin{bmatrix} 0 \\ \\ 2 \end{bmatrix} \; + \; \lambda_4 \begin{bmatrix} 4/11 \\ \\ 30/11 \end{bmatrix} \; +$$

$$+ \; \mu_1 \begin{bmatrix} 4/7 \\ \\ 3/7 \end{bmatrix} \; + \; \mu_2 \begin{bmatrix} 3/4 \\ \\ 1/4 \end{bmatrix}$$

$$PLE : \begin{cases} \min & \displaystyle\sum_{j=1}^{k} (cx_j)\lambda_j + \sum_{j=1}^{l} (cd_j)\mu_j \\ s.a. & \\ & \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1 \\ & \lambda_j \geq 0; \qquad \mu_j \geq 0 \\ & j = 1, k \qquad j = 1, l \end{cases}$$

$$cx_A = \begin{bmatrix} -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \\ 0 \end{bmatrix} = 0; \quad cx_B = \begin{bmatrix} -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ \\ 0 \end{bmatrix} = -3$$

$$cx_C = \begin{bmatrix} -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \\ 2 \end{bmatrix} = -6; \qquad cx_D = \begin{bmatrix} -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4/11 \\ \\ 30/11 \end{bmatrix} = -94/11$$

$$cd_1 = \begin{bmatrix} -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4/7 \\ \\ 3/7 \end{bmatrix} = -13/7; \qquad cd_2 = \begin{bmatrix} -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/4 \\ \\ 1/4 \end{bmatrix} = -3/2$$

$$P.L.E. \begin{cases} Min & -3\lambda_2 - 6\lambda_3 - (94/11)\lambda_4 - (13/7)\mu_1 - 3/2\mu_2 \\ s.a. & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1 \\ & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \geq 0 \\ & \mu_1, \mu_2 \geq 0 \end{cases}$$

Como los coeficientes de μ_1, μ_2 son negativos (es suficiente que solamente uno de ellos sea negativo), el problema es ilimitado!.

μ_1 y μ_2 pueden aumentar indefinidamente y hacer que la función objetivo tienda a $+\infty$.

En la figura 3.9 se puede observar que la función objetivo original tiende a $+\infty$

2. En el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\leq 2 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 &\leq 3 \\ x_1, x_2, x_3 &\leq 0 \end{aligned}$$

El punto $(1/2, 1/2, 1/2)$ es factible. Verificar si es solución básica, en caso contrario, a partir de este punto encontrar una solución básica factible.

<u>Solución</u>:

Hiperplanos:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\leq 2 & (1) \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 &\leq 3 & (2) \\ x_1 &\geq 0 & (3) \\ x_2 &\geq 0 & (4) \\ x_3 &\geq 0 & (5) \end{aligned}$$

$$x = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

El x anterior, es factible, cumple las restricciones, pero no activa ninguno de los hiperplanos.

Usamos el algoritmo para encontrar un punto extremo de x a partir del punto inicial.

Escogemos una dirección arbitraria:

$$d = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Calculamos γ_1 :

$$x = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \quad + \quad \gamma_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo en las 5 restricciones tenemos:

$$\begin{array}{lrcl} \text{restricción 1 :} & (1/2+\gamma_1)+(1/2+\gamma_1)+(1/2+\gamma_1)=2 & \Rightarrow & \gamma_1 = 1/6 \\ \text{restricción 2 :} & -(1/2+\gamma_1)+2(1/2+\gamma_1)+2(1/2+\gamma_1)=3 & \Rightarrow & \gamma_1 = 1/2 \\ \text{restricciones 3,4,5 :} & (1/2+\gamma_1)=0 & \Rightarrow & \gamma_1 = 1/2 \end{array}$$

$$\overline{\gamma_1} = \min\{1/6\ ,\ 1/2\} = 1/6$$

$$\text{El nuevo punto es :} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \quad + \quad 1/6 \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad = \quad \begin{bmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$$

El cual activa el hiperplano (1), únicamente.

Ahora hacemos $Gd = 0$ para determinar la nueva dirección.

$$Gd = 0 \Rightarrow [1 \quad 1 \quad 1] \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow d_1 + d_2 + d_3 = 0$$

Hacemos $d_1 = 0$ y $d_2 = -1 \Rightarrow d_3 = 1$ (observe que tenemos dos grados de libertad, o sea, estamos escogiendo arbitrariamente dos valores).

$\Rightarrow$ El nuevo punto x satisface:

$$x = \overline{x} + \gamma_1 d = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} \ + \ \gamma_1 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \ = \ \begin{bmatrix} 2/3 \\ 2/3-\gamma_1 \\ 2/3+\gamma_1 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo en las 5 restricciones tenemos:

$$\begin{array}{lrcl} \text{restricción 1:} & 2/3+(2/3-\gamma_1)+(2/3+\gamma_1)=2 & \Rightarrow & \gamma_1 = 0 \\ \text{restricción 2:} & -2/3+2(2/3-\gamma_1)+2(2/3+\gamma_1)=3 & \Rightarrow & \gamma_1 = 0 \\ \text{restricción 3:} & 2/3 \geq 0 & & \\ \text{restricción 4:} & 2/3-\gamma_1=0 & \Rightarrow & \gamma_1 = 2/3 \\ \text{restricción 5:} & 2/3+\gamma_1=0 & \Rightarrow & \gamma_1 = -2/3 \end{array}$$

$$\overline{\gamma_1} = \min\{2/3\} = 2/3$$

$$\text{El nuevo punto es:} \begin{bmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} \quad + \quad 2/3 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad = \quad \begin{bmatrix} 2/3 \\ 0 \\ 4/3 \end{bmatrix}$$

Este punto activa los hiperplanos (1) y (4)

Hacemos de nuevo $Gd = 0$ para hallar una nueva dirección.

$$Gd = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 + d_2 + d_3 \\ d_2 \end{bmatrix} \qquad = \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

de donde : $d_2 = 0$; $d_1 = -d_3 \quad \Rightarrow \quad d = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^t$

El nuevo punto x satisface:

$$x = \overline{x} + \gamma_1 d = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 0 \\ 4/3 \end{bmatrix} \quad + \quad \gamma_1 \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad = \quad \begin{bmatrix} 2/3 - \gamma_1 \\ 0 \\ 4/3 + \gamma_1 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo en las 5 restricciones tenemos:

$$\begin{array}{lrcl}
\text{restricción 1:} & (2/3 - \gamma_1) + 0 + (4/3 + \gamma_1) = 2 & \Rightarrow & \gamma_1 = 0 \\
\text{restricción 2:} & -(2/3 - \gamma_1) + 0 + 2(4/3 + \gamma_1) = 3 & \Rightarrow & \gamma_1 = 1/3 \\
\text{restricción 3:} & (2/3 - \gamma_1) = 0 & \Rightarrow & \gamma_1 = 2/3 \\
\text{restricción 4:} & 0 = 0 & & \\
\text{restricción 5:} & (4/3 + \gamma_1) = 0 & \Rightarrow & \gamma_1 = -4/3
\end{array}$$

$$\overline{\gamma_1} = \min\{1/3, 2/3\} = 1/3$$

$$\text{El nuevo punto es:} \begin{bmatrix} 2/3 \\ 0 \\ 4/3 \end{bmatrix} \quad + \quad 1/3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad = \quad \begin{bmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 5/3 \end{bmatrix}$$

El nuevo punto activa los hiperplanos (1), (2) y (4) y representa una SBF

$$SBF \quad : \quad x \quad = \quad \begin{bmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 5/3 \end{bmatrix}$$

3. En el siguiente PL :

$$\begin{array}{ll} \max & 10x_1 + 15x_2 + 5x_3 \\ s.a. & \\ & 2x_1 + x_2 \qquad\qquad \leq 6000 \\ & 3x_1 + 3x_2 + x_3 \qquad \leq 9000 \\ & x_1 + 2x_2 + 2x_3 \qquad \leq 4000 \\ & x_1, x_2, x_3 \qquad\qquad \geq 0 \end{array}$$

a) Sin usar el método SIMPLEX, verifique si (x_4, x_1, x_2) forman una base óptima, siendo x_4 la variable de holgura de la primera restricción.

b) Usando la información de (a), monte un cuadro óptimo de SIMPLEX.

c) Adicionar una nueva variable al problema: x_7, siendo $c_7 = 12$ y su columna correspondiente $[2\ 4\ 1]^t$. La inclusión de esta variable altera la solución del problema ? Cual es el nuevo óptimo ?

$$PLE : \left\{ \begin{array}{lll} \min & -10x_1 - 15x_2 - 5x_3 & \\ s.a. & & \\ & & \\ & 2x_1 + x_2 + x_4 & = 6000 \\ & 3x_1 + 3x_2 + x_3 + x_5 & = 9000 \\ & x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_6 & = 4000 \\ & x_j \geq 0 \quad j = 1,6 & \end{array} \right.$$

a) Verificar que (x_4, x_1, x_2) conforma una base óptima

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad b = \begin{bmatrix} 6000 \\ 9000 \\ 4000 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a_4 & a_1 & a_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{array} ; c_B = \begin{bmatrix} 0 & -10 & -15 \end{bmatrix} ; c_N = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para que sea base óptima:

$Z_j - c_j \leq 0$; j = 3,5,6 y $B^{-1}b = \bar{b} \geq 0$; $(Z_j - c_j)$ para j = 3,5,6 $\Rightarrow c_B B^{-1} N - c_N$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2/3 & -1 \\ 0 & -1/3 & 1 \end{bmatrix} ; \quad N = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a_3 & a_5 & a_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$c_BB^{-1}N = \begin{bmatrix} 0 & -10 & -15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2/3 & -1 \\ 0 & -1/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -35/3 & -5/3 & -5 \end{bmatrix}$$

$$c_BB^{-1}N - c_N = [-35/3 \quad -5/3 \quad -5] - [-5 \quad 0 \quad 0]$$

$$c_BB^{-1}N - c_N = [-\frac{20}{3} \quad -5/3 \quad -5]$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\begin{array}{lcr} z_3 - c_3 & = & -20/3 \\ z_5 - c_5 & = & -5/3 \\ z_6 - c_6 & = & -5 \end{array}}$$

Cumple optimalidad. Todos los $(Z_j - c_j) \leq 0$

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2/3 & -1 \\ 0 & -1/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6000 \\ 9000 \\ 4000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 \\ 2000 \\ 1000 \end{bmatrix}$$

$\bar{b} \geq 0$ cumple factibilidad.

En consecuencia: (x_4, x_1, x_2) conforma una SBF óptima

b) Cuadro óptimo del SIMPLEX:

$$c_BB^{-1}N - c_N = \begin{bmatrix} -20/3 & -5/3 & -5 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}N = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2/3 & -1 \\ 0 & -1/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -4/3 & 2/3 & -1 \\ 5/3 & -1/3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c_BB^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 & -10 & -15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2/3 & -1 \\ 0 & -1/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6000 \\ 9000 \\ 4000 \end{bmatrix} = -35000$$

$$B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2/3 & -1 \\ 0 & -1/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6000 \\ 9000 \\ 4000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 \\ 2000 \\ 1000 \end{bmatrix}$$

Cuadro óptimo SIMPLEX:

	Z	x_B	x_N	rhs
Z	1	0	$c_B B^{-1}N - c_N$	$c_B B^{-1} b$
x_B	0	I	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$

	Z	x_4	x_1	x_2	x_3	x_5	x_6	RHS
Z	1	0	0	0	-20/3	-5/3	-5	-35000
x_4	0	1	0	0	1	0	1	1000
x_1	0	0	1	0	-4/3	-1/3	-1	2000
x_2	0	0	0	1	5/3	2/3	1	1000

c) Adicionamos x_7 ; $c_7 = 12$; $a_7 = [2 \;\; 4 \;\; 1]^t$

Se altera la solución ?

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} ; \quad b = \begin{bmatrix} 6000 \\ 9000 \\ 4000 \end{bmatrix}$$

Respecto al ejercicio en la parte b, no cambian los valores de B; B^{-1}; c_B ; b; por tanto $B^{-1}b$ se conserva y se mantiene la factibilidad.

Se conserva optimalidad ?

Los coficientes de costo relativo de las variables no básicas x_3, x_5 y x_6 también no se alteran porque son encontradas usando la relación:

$$\overline{c}_j = c_B B^{-1} a_j - c_j$$

y esos valores no fueron modificados para esas variables.

La nueva variable x_7 puede alterar la solución óptima si su coeficiente de costo relativo es positivo para la base que representa el cuadro óptimo del problema original.

El coeficiente de costo relativo de x_7 es el siguiente:

$$\overline{c}_7 = c_B B^{-1} a_7 - c_7$$

$$\overline{c}_7 = \begin{bmatrix} 0 & -10 & -15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2/3 & -1 \\ 0 & -1/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} - (-12) == 1/3$$

Observe que fue colocado $c_7 = -12$ porque en el cuadro simplex el problema es de minimización. Como $\overline{c}_7 = 1/3 > 0$ entonces el nuevo cuadro simplex no es óptimo.

Cálculo del nuevo punto óptimo:

Al cuadro SIMPLEX de la parte b le agregamos $(z_7 - c_7)$ en la fila de Z y en la columna y_7 (ya calculada), en el cuadro parcial de $\overline{c}_7$:

$$y_7 = B^{-1}a_7 = \begin{bmatrix} -1 \\ 5/3 \\ -1/3 \end{bmatrix}$$

Nuevo cuadro SIMPLEX:

	Z	x_4	x_1	x_2	x_3	x_5	x_6	$\Downarrow$ x_7	rhs
Z	1	0	0	0	-20/3	-5/3	-5	1/3	-35000
x_4	0	1	0	0	1	-1	1	-1	1000
$\Leftarrow$ x_1	0	0	1	0	-4/3	2/3	-1	5/3	2000
x_2	0	0	0	1	5/3	-1/3	1	-1/3	1000

<u>Entra</u>: la variable no básica con mayor coeficiente de costo relativo POSITIVO: $x_7 \rightarrow 1/3$

<u>Sale</u>: a variable básica que tenga $yi > 0$ y el menor b_i/y_i. Sólo x_1 tiene $y_i > 0$ (5/3)

Pivote: 5/3

	Z	x_4	x_1	x_2	x_3	x_5	x_6	x_7	RHS
Z	1	0	-1/5	0	-96/15	-9/5	-24/5	0	-35400
x_4	0	1	3/5	0	1/5	-3/5	2/5	0	2200
x_7	0	0	3/5	0	-4/5	2/5	-3/5	1	1200
x_2	0	0	1/5	1	7/5	-1/5	4/5	0	1400

El cuadro es óptimo:

$$SBF \text{ óptima} = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_7 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2200 \\ 1200 \\ 1400 \end{bmatrix}$$

Función objetivo óptima = -35400

4. Para el siguiente PL:

$$\begin{array}{lll} \max & 2x_1 + 12x_2 + 7x_3 & \\ s.a. & & \\ & x_1 + 3x_2 + 2x_3 & \leq 10000 \\ & 2x_1 + 2x_2 + x_3 & \leq 4000 \\ & x_1, x_2, x_3 & \geq 0 \end{array}$$

Un cuadro óptimo con x_4 y x_5 como variables de holgura es:

	Z	x_4	x_3	x_1	x_2	x_5	RHS
Z	1	0	0	12	2	7	28000
x_4	0	1	0	-3	-1	-2	2000
x_3	0	0	1	2	2	1	4000

a) Calcular $\frac{\delta Z}{\delta b_1}$ y $\frac{\delta Z}{\delta b_2}$

b) Suponga que b_2 cambia de 4000 para 4000 + Δ; Cual es la variación permitida (Δ) para mantener optimalidad en la base escogida.

c) Encontrar explícitamente el valor de Z en función de Δ.

a)

$$\left[\begin{array}{cc} \frac{\delta Z}{\delta b_1} & \frac{\delta Z}{\delta b_2} \end{array} \right] = C_B B^{-1} = w$$

Estos valores también se encuentran en el cuadro óptimo debajo de las variables de holgura x_4 y x_5.

$$\begin{array}{cc} b_4 & b_3 \\ \end{array} \left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{array} \right]; \quad B^{-1} = \left[\begin{array}{cc} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{array} \right]; \quad c_B = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} c_4 & c_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc} 0 & 7 \end{array} \right] \end{array}$$

$$c_B B^{-1} = \left[\begin{array}{cc} 0 & 7 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{array} \right] = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} w_4 & w_5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc} 0 & 7 \end{array} \right] \end{array}$$

Por lo tanto: $\frac{\delta Z}{\delta b_1} = 0$; $\frac{\delta Z}{\delta b_2} = 7$

b) b_2 cambia de 4000 para 4000 + Δ ;
Cual debe ser el valor de Δ para conservar optimalidad ?
Solución:
Al afectar b, no se afectan los coeficientes de costo relativo: $c_B B^{-1} N - c_N$, pero si se puede afectar la factibilidad: $B^{-1} b^* \geq 0$

$$\overline{b} = B^{-1} b = \left[\begin{array}{cc} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 10000 \\ 4000 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 2000 \\ 4000 \end{array} \right]$$

Cambiamos $b_2 \rightarrow b_2^*$

$$\overline{b}^* = B^{-1} b^* = \left[\begin{array}{cc} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{r} 10000 \\ 4000 + \Delta \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 2000 - 2\Delta \\ 4000 + \Delta \end{array} \right]$$

Para que $\overline{b}^* \geq 0$,
$2000 - 2\Delta \geq 0$ y $4000 + \Delta \geq 0$,

$\Delta \leq 1000$ y $\Delta \geq -4000$

$$\Delta \text{ permitido: } \boxed{-4000 \leq \Delta \leq 1000}$$

c) Encontrar explícitamente el valor óptimo de Z en función de Δ.

$$Z_{(\Delta)} = c_B B^{-1} b^* = w b^* = \begin{bmatrix} 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2000 - 2\Delta \\ 4000 + \Delta \end{bmatrix}$$

$$\boxed{Z_{(\Delta)} = 28000 + 7\Delta}$$

Como $\quad -4000 \leq \Delta \leq 1000 \Rightarrow \quad 0 \leq Z_\Delta \leq 35000$

5. El siguiente cuadro corresponde a un problema de maximización:

   max $\quad 2x_1 - 3x_2$, con Variables de holgura x_3, x_4, y restricciones del tipo $\leq$.

   a) Hallar a,b,c,d,e,f,g
   b) Escribir el sistema original
   c) Calcular: $\frac{\delta x_3}{\delta x_2}, \frac{\delta z}{\delta b_1}, \frac{\delta z}{\delta x_4}, \frac{\delta x_1}{\delta b_1}$.
   d) Decir si el cuadro es óptimo.

	Z	x_3	x_1	x_2	x_4	rhs
Z	1	f	b	1	g	6
x_3	0	1	c	0	1/5	4
x_1	0	0	d	e	2	a

a) De acuerdo al SIMPLEX, en el cuadro anterior:

$$f = 0;\ b = 0;\ c = 0 \ \text{ y } \ d = 1, \text{ por que } x_3 \text{ y } x_1 \text{ forman la base}$$

El nuevo cuadro queda:

	Z	x_3	x_1	x_2	x_4	RHS
Z	1	0	0	1	g	6
x_3	0	1	0	0	1/5	4
x_1	0	0	1	e	2	a

Puesto que B^{-1} aparece debajo de las variables de holgura si las restricciones son $\leq$ y los $b \geq 0$, del cuadro:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1/5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto

$$B = (B^{-1})^{-1} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} a_3 & a_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1/10 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \end{array}$$

En B, cada columna representa el vector a_j de la base formada por x_3 y x_1.
En consecuencia, en la matriz A solo se desconoce a_2

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1/10 & p & 1 & 0 \\ 1/2 & q & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

la columna de x_2 la llamaremos $\begin{bmatrix} p & q \end{bmatrix}^t$

Función de costo relativo:

$$c_B B^{-1} N - c_N = \begin{bmatrix} 1 & g \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} c_3 & c_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & 0 \\ q & 1 \end{bmatrix} - \begin{array}{c} \begin{array}{cc} c_2 & c_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -3 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Resolviendo tenemos:

$$[1 \quad g] \quad = \quad [4q + 3 \quad 4]$$

En consecuencia: g $= 4$, q $= -\frac{1}{2}$

El vector b original no se conoce, lo denominaremos:

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto: $c_B B^{-1} b = 6$ (función objetivo)

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = 6 \Rightarrow 4b_2 = 6 \Rightarrow b_2 = \frac{3}{2}$$

Además :

$$B^{-1} b = \begin{bmatrix} 4 \\ a \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ a \end{bmatrix}$$

En consecuencia: $a = 2b_2 = 3$ y $b_1 + \frac{b_2}{5} = 4 \Rightarrow b_1 = \frac{37}{10}$

Finalmente:

$$B^{-1} a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ e \end{bmatrix}$$

CAPITULO 4

DETERMINACION DE UNA SOLUCION BASICA FACTIBLE INICIAL Y ANALISIS DE CONVERGENCIA DEL METODO SIMPLEX

4.1 Discusión sobre una Base Factible Inicial

Motivación: El método simplex necesita de una SBF inicial para iniciar el proceso de optimización.

Estrategia: En la formulación normal del simplex la **estrategia fundamental** consiste en encontrar una base inicial factible y esa base inicial debe ser **una matriz identidad**. Si en el problema no existe una matriz identidad como base inicial entonces la metodologia simplex **construye artificialmente** una matriz I, identidad, como base inicial. Esta base inicial factible y artificial es construida adicionando variables artificiales al problema original hasta que se encuentre disponible una matriz identidad I como base. Porqué la matriz identidad I es deseable como base inicial? Por los siguientes motivos:

1. Es muy fácil montar el cuadro inicial porque $B = I = B^{-1}$ siempre que $b \geq 0$.
2. Se puede verificar trivialmente que esa base es realmente una base factible.
3. Se evita el trabajo de invertir una matriz, que seria necesario cuando se escoge una base inicial B diferente de I.

Observación: Existen algunas técnicas que siguen una lógica diferente y escogen una base inicial que **no necesariamente** tenga una matriz identidad como base inicial y tampoco que esa base inicial sea factible. Una de esas técnicas es conocida como **método de dos fases usando una única variable artificial**.

Cuándo existe una matriz identidad como base factible?

Esta situación sucede únicamente cuando el PL tiene la siguiente forma:

$$\begin{array}{rcl} min & = & cx \\ s.a. & & \\ & & Ax \leq b \\ & & x \geq 0 \end{array}$$

Desde que, adicionalmente, $b \geq 0$. La inclusión de las variables de holgura (para transformar las desigualdades en igualdades) suministran una base $B = I$ trivial. En cualquier otra formulación serán necesarias la utilización de variables artificiales.

Ejemplo 1: Existe una base inicial $B = I$ trivial.

Encontrar la base inicial factible de un PL cuyas restricciones son las siguientes;

$$S \Longrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1; \quad x_2 \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad = 4 \\ -x_1 + x_2 \qquad + x_4 = 1 \\ x_1; \quad x_2; \quad x_3; \quad x_4 \geq 0 \end{cases}$$

donde x_3 y x_4 son las variables de holgura (y decimos que ellas forman parte del problema original).

Así, tenemos una matriz identidad como base inicial factible que es encontrada en forma trivial:

$$A = \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{1} & \multicolumn{1}{c|}{2} & \multicolumn{1}{c|}{1} & \multicolumn{1}{c|}{0} \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{-1} & \multicolumn{1}{c|}{1} & \multicolumn{1}{c|}{0} & \multicolumn{1}{c|}{1} \\ \hline \end{array}$$

$$\Longrightarrow B = \begin{bmatrix} a_3 & a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad x_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La base inicial escogida es lógicamente factible porque:

$$B^{-1}b = Ib = b = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \geq 0$$

Ejemplo 2: No existe una base inicial $B = I$.

Encontrar la base inicial factible de un PL cuyas restricciones son las siguientes:

$$S \Longrightarrow \begin{cases} -x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 3 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 7 \\ x_1; \; x_2; \; x_3 \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 \qquad = 3 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 \qquad + x_5 = 7 \\ x_1; \quad x_2; \quad x_3; \quad x_4; \quad x_5 \geq 0 \end{cases}$$

donde x_4 y x_5 son las variables de holgura (y decimos que ellas forman parte del problema original).

La matriz A asume la siguiente forma:

$A =$

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
-1	-1	2	-1	0
-2	1	3	0	1

donde no existen 2 columnas en A para formar I. En este caso deben ser adicionadas tantas variables artificiales como sean necesarias para formar una matriz I. En este ejemplo solamente es necesario una variable artificial, x_6, adicionada de la siguiente forma:

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 \qquad + x_6 = 3 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 \qquad + x_5 \qquad = 7 \\ \quad x_1; \;\; x_2; \;\; x_3; \;\; x_4; \;\; x_5; \;\; x_6 \geq 0 \end{cases}$$

La matriz A aumentada asume la siguiente forma:

$A =$

				a_5	a_6
-1	-1	2	-1	0	1
-2	1	3	0	1	0

$$\Longrightarrow B = \begin{bmatrix} a_6 & a_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

4.2 Método Simplex de Dos Fases

Este método simplex para resolver problemas de programación lineal es usado cuando no existe, en forma trivial, una matriz identidad como base inicial factible.

Sea el sistema (conjunto convexo):

$$Ax = b; \qquad x \geq 0 \tag{4.1}$$

con $b \geq 0$ y $A_{m \times n}$. Además, no existe una submatriz de A que forme una matriz identidad. Por construcción, a partir de (4.1) aumentamos el tamaño del sistema para que la nueva matriz A aumentada tenga una submatriz I. Por facilidad de análisis aumentamos el tamaño del sistema con m columnas adicionando m variables artificiales cuyas variables artificiales son almacenadas en el vector x_a. Así, el sistema (4.1) modificado asume la siguiente forma:

$$Ax + Ix_a = b; \qquad x \geq 0; \qquad x_a \geq 0$$

Entonces una SBF trivial es encontrada así:

$$\begin{cases} x_a = b \\ x = 0 \end{cases}$$

Propiedad:

$Ax = b \Longleftrightarrow Ax + Ix_a = b$ con $x_a = 0$

La incorporación de x_a permite encontrar de manera artificial una SBF inicial con base I.

Observación:

Como ya fue mencionado anteriormente, se debe adicionar tantas variables como sean necesarias para formar la matriz I como base inicial, en otras palabras, algunas variables originales pueden ser aprovechadas para formar la base inicial (aquellas variables cuyos vectores columna tienen un elemento igual a 1 y los otros son iguales a cero) y adicionar solamente las variables artificiales necesarias para formar la matriz I. Esta práctica es común y recomendable en problemas didácticos (pequeños) donde fácilmente se puede verificar las columnas de A que pueden ser aprovechadas.

En problemas grandes (resueltos usando un programa de computador) no es sencillo este trabajo de verificación y por eso algunos programas frecuentemente usan una variable artificial por cada restricción (base artificial llena). Es necesario observar también que por cada variable artificial que es adicionado al problema estamos aumentando el tamaño del problema, en otras palabras, estamos pasando de E^n a un espacio mayor.

Estrategia para eliminar los elementos de x_a

La estrategia más eficiente para eliminar las variables artificiales consiste en usar la propia filosofia del simplex. En este caso el PL es resuelto en dos fases:

1. En la fase I es minimizada la suma de las variables artificiales y si este proceso termina con una solución óptima igual a cero pasamos para la fase II. Como se analizará después, si la fase I converge para un óptimo igual a cero, entonces fue encontrado una SBF del problema original. Por lo tanto, la fase I se utiliza apenas para encontrar una SBF del problema original, o sea, un punto extremo.

2. En la fase II es reintroducida la función objetivo original y como ya se conoce una SBF del problema original, se procede a optimizar usando el simplex tradicional.

Algoritmo de Dos Fases del Método Simplex

Fase I: Resolver el siguiente PL:

$$\begin{array}{rcl} min \quad x_o & = & \sum_k x_k \\ s.a. & & \\ & & Ax + Ix_a = b \\ & & x \geq 0 \\ & & x_a \geq 0 \end{array}$$

donde los x_k son los elementos de x_a que fueron adicionados para encontrar una submatriz I. Puede suceder los siguientes casos:

1. Si $x_o \neq 0 \Longrightarrow$ pare porque el problema original **es infactible**.
2. Si $x_o = 0$ entonces existe una base (SBF) para el problema original siendo x_B las variables básicas y x_N las variables no básicas. Pasar para la fase II.

Fase II: Resolver PL original:

Con la base B conocida y sabiendo que $x_B = B^{-1}b$ y $x_N = 0$, resolver el siguiente problema:

$$\begin{array}{rcl} min \quad z(x) & = & c_B x_B + c_N x_N \\ s.a. & & \\ & & x_B + B^{-1}N x_N = B^{-1}b \\ & & x_B \geq 0 \\ & & x_N \geq 0 \end{array}$$

Observaciones:

1. Reiteramos la observación de que se puede usar un número mínimo de variables artificiales apesar de que en la formulación matemática generalmente se coloca una base llena (una variable artificial por restricción) por facilidad de manipulación.
2. En el algoritmo estamos suponiendo que al final de la fase I todas las variables artificiales se encuentran fuera de la base con valores iguales a cero (porque son variables no básicas) y, por lo tanto, son eliminadas del proceso juntamente con sus vectores columnas. Sin embargo, en ciertos casos que son analizados después, algunas variables artificiales permanecen en la base con valores iguales a cero.

Ejemplo 3: Resolver el siguiente PL:

$$\begin{array}{rcl} min \ z & = & x_1 - 2x_2 \\ s.a. & & \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} x_1 + x_2 \geq 2 \\ -x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1; \quad x_2 \geq 0 \end{array}\right\} \Longleftarrow S$$

Usando variables de holgura transformamos las desigualdades en igualdades:

$$S \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 &+& x_2 &-& x_3 & & & & &=& 2 \\ -x_1 &+& x_2 & & &-& x_4 & & &=& 1 \\ & & x_2 & & & & &+& x_5 &=& 3 \\ x_1; & & x_2; & & x_3; & & x_4; & & x_5 &\geq& 0 \end{array}\right.$$

Como no existe una submatriz igual a I en el sistema anterior, adicionamos 2 variables artificiales, x_6 y x_7, que juntamente con x_5 permiten montar una base artificial con base I. Así, podemos resolver la fase I del PL.

<u>Fase I</u>: Tenemos el siguiente PL:

$$\begin{array}{rcl} min\ \ x_o &=& x_6 + x_7 \\ s.a. & & \\ & & x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = 2 \\ & & -x_1 + x_2 - x_4 + x_7 = 1 \\ & & x_2 + x_5 = 3 \\ & & x_1; \quad x_2; \quad x_3; \quad x_4; \quad x_5; \quad x_6; \quad x_7 \geq 0 \end{array}$$

de donde tenemos que:

$$A' = \begin{array}{ccccccc} & & & & a_5 & a_6 & a_7 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\Longrightarrow B = \left[\begin{array}{ccc} a_6 & a_7 & a_5 \end{array}\right] = I$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_6 \\ x_7 \\ x_5 \end{bmatrix}; \quad x_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}; \quad c_B' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad c_N' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Realizamos los cálculos necesarios para montar el cuadro:

$$B = I = B^{-1} \Longrightarrow B^{-1}N = N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \qquad B^{-1}b = b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$c_B^{'}B^{-1}b = c_B^{'}b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = 3$$

$$c_B^{'}B^{-1}N - c_N^{'} = c_B^{'}N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Ahora es posible montar el cuadro inicial de la fase I del PL y resolver la fase I.

Cuadro simplex de la fase I.

	x_o	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
x_o	1	0	2	-1	-1	0	0	0	3
x_6	0	1	1	-1	0	0	1	0	2
x_7	0	-1	1	0	-1	0	0	1	1
x_5	0	0	1	0	0	1	0	0	3
x_o	1	2	0	-1	1	0	0	-2	1
x_6	0	2	0	-1	1	0	1	-1	1
x_2	0	-1	1	0	-1	0	0	1	1
x_5	0	1	0	0	1	1	0	-1	2
x_o	1	0	0	0	0	0	-1	-1	0
x_1	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_2	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
x_5	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$

La fase I termina con una función objetivo igual a $x_o = 0$. Por lo tanto, fue encontrada una SBF que es la base formada por las columnas de x_1, x_2 y x_5. La fase II se puede iniciar a partir del último cuadro de la fase I simplemente retirando la fila de x_o y colocando la fila de la función objetivo original z, lógicamente, adecuadamente actualizada para la base actual.

Entonces calculamos los elementos actualizados de la fila de z, o sea, los costos relativos de las variables no básicas y el valor actual de z. Tenemos la SBF con $B = [a_1 \quad a_2 \quad a_5]$.

Del último cuadro de la fase I tenemos:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}; \quad B^{-1}N = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}; \quad B^{-1}b = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

También conocemos:

$$c_B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad c_N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \quad x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} \quad x_N = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

y podemos calcular fácilmente:

$$c_B B^{-1} b = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} = -\frac{5}{2}$$

$$c_B B^{-1} N - c_N = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Ahora es posible montar el cuadro inicial de la fase II y terminar el proceso simplex para el PL.

Cuadro simplex de la fase II.

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
z	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{5}{2}$
x_1	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
x_2	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$
x_5	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
z	1	-3	0	2	0	0	-4
x_4	0	2	0	-1	1	0	1
x_2	0	1	1	-1	0	0	2
x_5	0	-1	0	1	0	1	1
z	1	-1	0	0	0	-2	-6
x_4	0	1	0	0	1	1	2
x_2	0	0	1	0	0	1	3
x_3	0	-1	0	1	0	1	1

Por lo tanto, la solución óptima del PL es el siguiente:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 = 1 \\ x_4 = 2 \\ x_5 = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow z^* = -6$$

Observación: Si en el cuadro 2 de la fase I se hubiera escogido x_4 para entrar a la base (que era posible) en lugar de x_1 entonces la fase II llegaría a la solución óptima con una simple iteración (más rápido). La Figura 4.1 muestra los caminos de ambos procesos simplex en E^2.

4.3 Análisis del Método de las Dos Fases

La función objetivo de la fase I, x_o, puede convergir a dos tipos de solución:

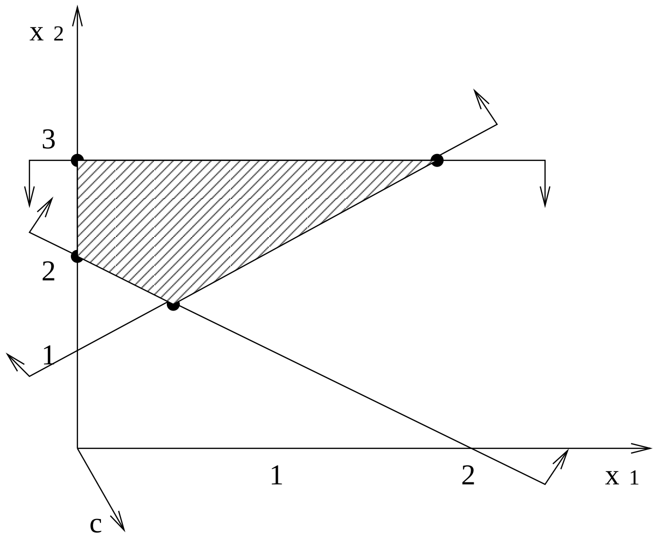


Figura 4.1: Gráfico del ejemplo 3.

1. **Cuando** $x_o \neq 0$:

   Si x_o es diferente de cero entonces el problema original es **infactible**. En este caso no existe solución factible pues si suponemos que existe un punto x tal que $x \geq 0$ con $Ax = b$ para el problema original entonces en el problema modificado:

$$\begin{bmatrix} x \\ x_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$$

   seria factible que por su vez implica lo siguiente:

$$x_o^{'} = 0x + \sum_k x_k = 0x + 0 = 0 < x_o$$

   así, el objetivo $x_o^{'}$ está violando la suposición de que x_o es óptimo del problema, por lo tanto, no existe una solución factible para el problema original.

Ejemplo 4: Resolver el siguiente PL:

$$\begin{array}{rcl} min\ \ z & = & -3x_1 + 4x_2 \\ s.a. & & \\ & & \left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 \leq 4 \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 18 \\ x_1; \quad x_2 \geq 0 \end{array}\right\} \Longleftarrow S \end{array}$$

Sean x_3 y x_4 las variables de holgura y sea x_5 la variable artificial adicionada a la segunda restricción, entonces tenemos el siguiente problema de la fase I:

$$min \quad x_o = x_5$$

s.a.

$$\left.\begin{array}{rl} x_1 + x_2 + x_3 & = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 \qquad - x_4 + x_5 & = 18 \\ x_1; \quad x_2; \quad x_3; \quad x_4; \quad x_5 & \geq 0 \end{array}\right\} \Longleftarrow S$$

Asumiendo la base inicial con las columnas de x_3 y x_5 podemos calcular los datos necesarios para montar el cuadro inicial:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} \qquad x_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} a_3 & a_5 \end{bmatrix} = I \qquad c_B^{'} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad c_N^{'} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}N = N \qquad\qquad B^{-1}b = b$$

$$c_B^{'}B^{-1}N - c_N^{'} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$c_B^{'}B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 18 \end{bmatrix} = 18$$

Fase I del proceso simplex

	x_o	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_o	1	2	3	0	−1	0	18
x_3	0	1	1	1	0	0	4
x_5	0	2	3	0	−1	1	18
x_o	1	−1	0	−3	−1	0	6
x_2	0	1	1	1	0	0	4
x_5	0	−1	0	−3	−1	1	6

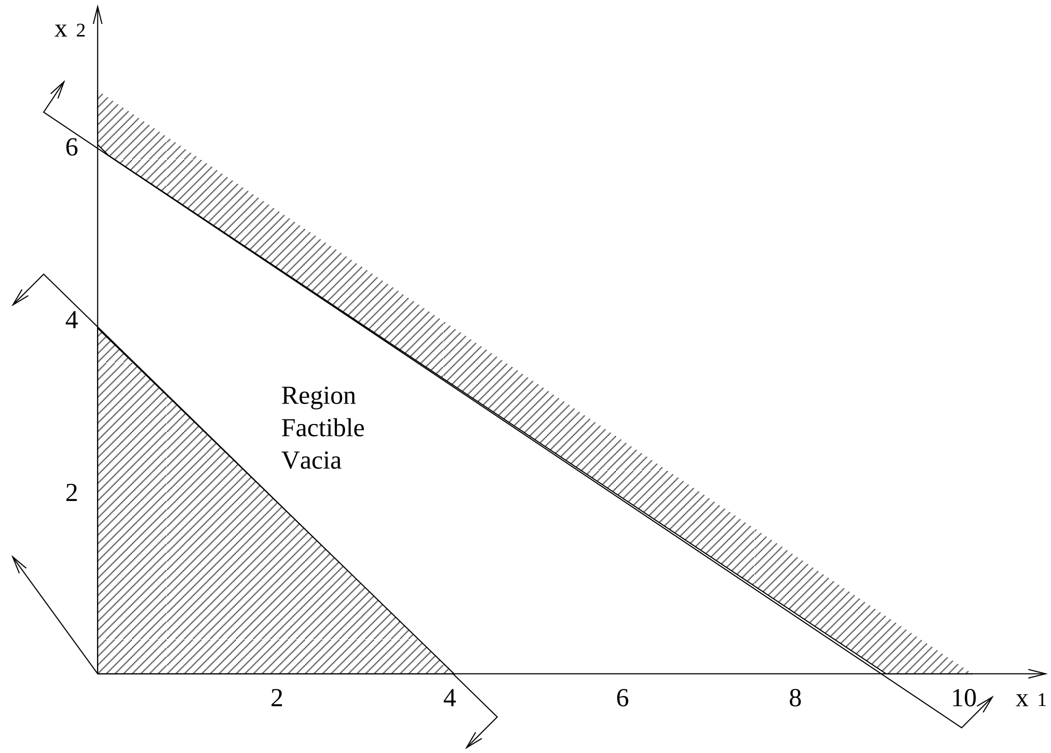


Figura 4.2: Gráfico del ejemplo 4.

El proceso simplex termina encontrando una solución óptima con $x_o^* = 6$ y, por lo tanto, el problema es infactible. La figura 4.2 muestra claramente que el problema original es infactible.

2. **Cuando** $x_o = 0$:

   En este caso fue encontrada una SBF para el problema original. Sin embargo, existe la posibilidad de que, al final de la fase I, algunas variables artificiales se encuentren formando parte de la base con valores iguales a cero. Analizamos cada uno de los casos separadamente.

   (a) **Cuando todas las variables artificiales están fuera de la base:**

   En este caso todas las variables que están en la base son variables del problema original, por lo tanto, existe una SBF. Sea B esa base, entonces al final de la fase I tenemos el siguiente cuadro:

   Cuadro final de la fase I

	x_o	x_B	x_N	x_a	RHS
x_o	1	0	0	-1	0
x_B	0	I	$B^{-1}N$	B^{-1}	$B^{-1}b$

El cuadro anterior asume esa forma cuando fue usada una base artificial llena, o sea, cuando la base inicial fue formada solamente con variables artificiales. Observe que los costos relativos de las variables artificiales asumen la siguiente forma:

$$c_B^{'}B^{-1}I - c_N^{'} = 0 - 1 = -1$$

Cuando la base inicial tiene solamente algunas variables artificiales entonces el costo relativo de solamente esas variables artificiales serán iguales a -1.

Ahora, en la fase II, el cuadro inicial debe incorporar la fila de costo de la función objetivo original debidamente actualizada para la base actual B. Por lo tanto, se debe eliminar todas las columnas de las variables artificiales (y las propias variables artificiales) y la fila de costo de la fase I. Es fácil montar la nueva fila de costo porque en el cuadro existe la información de $B^{-1}b$ y $B^{-1}N$ y es posible calcular $c_B[(B^{-1}N) - c_N]$ y $c_B(B^{-1}b)$.

Así, el cuadro inicial de la fase II asume la siguiente forma:

Cuadro inicial de la fase II

	z	x_B	x_N	RHS
z	1	0	$c_BB^{-1}N - c_N$	$c_BB^{-1}b$
x_B	0	I	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$

(b) **Cuando algunas variables artificiales están en la base con valor actual igual a cero**.

En este caso existen dos alternativas para continuar con el proceso de optimización.

i. **Pasar directamente para la fase II**:
Primero debemos eliminar todas las columnas de las variables artificiales no básicas y, por lo tanto, el cuadro inicial de la fase II debe tener las variables originales del problema y aquellas variables artificales que están en la base con valores actuales iguales a cero. La fila de costo de la función objetivo original tiene costos relativos iguales a cero para todas las variables básicas (originales y artificiales) porque tenemos la propiedad trivial:

$$c_BB^{-1}B - c_B = c_B - c_B = 0$$

o sea, es independiente de los valores de c_B.
En este contexto, cuando resolvemos el problema durante la fase II, se debe tener cuidado de que ninguna variable artificial asuma un valor diferente de cero porque esto significaría destruir la factibilidad.

Sea el siguiente cuadro típico de la fase II:

$$
\begin{array}{c|c|ccc|c|ccc|c|}
 & z & x_1 & \cdots & x_k & x_{k+1}\ldots x_j \ldots x_n & x_{n+k+1} & \cdots & x_{n+m} & RHS \\
\hline
z & 1 & 0 & \cdots & 0 & (z_j - c_j) & 0 & \cdots & 0 & c_B\overline{b} \\
\hline
x_1 & & 1 & & & y_{1j} & 0 & \cdots & 0 & \overline{b}_1 \\
x_2 & & & & & y_{2j} & 0 & \cdots & 0 & \overline{b}_2 \\
x_3 & & & \ddots & & & & & & \\
\vdots & & & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
x_k & & & & 1 & y_{kj} & 0 & \cdots & 0 & \overline{b}_k \\
\hline
x_{n+k+1} & & 0 & \cdots & 0 & y_{k+1,j} & 1 & & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & & \\
x_{n+r} & & 0 & \cdots & 0 & y_{rj} & & 1 & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & & \ddots & \\
x_{n+m} & & 0 & \cdots & 0 & y_{mj} & & & 1 & \\
\hline
\end{array}
$$

donde:
x_1, x_2, $\ldots x_k$ son variables básicas originales.
x_{n+k+1}, $\ldots x_{n+m}$ son variables básicas artificiales.
x_{n+1}, $\ldots x_{n+k}$ son variables no básicas artificiales y que fueron eliminados y por eso no aparecen en el cuadro.

Sea x_j una variable no básica original que es escogida como candidata a entrar en la base $[(z_j - c_j)]$. Entonces, cuando intentamos aumentar el valor de x_j a partir de su valor actual, las variables básicas varian de valor de acuerdo con la relación:

$$x_{B_i} = \overline{b}_i - y_{ij}x_j \qquad \forall i = 1, \ldots, m \tag{4.2}$$

En particular, para una variable básica artificial tenemos que:

$$x_{B_i} = 0 - y_{ij}x_j = -y_{ij}x_j \qquad i = k+1, \ldots, m \tag{4.3}$$

Así, para las variables artificiales básicas debemos analizar 2 casos:

A. Si x_j es candidata a entrar a la base y si tenemos que:

$$y_{ij} \geq 0 \qquad \forall i = k+1, \ldots, m$$

entonces no existe problema porque todas las variables permanecen en cero (tenemos una base degenerada).

B. Si existe un $y_{ij} < 0$ para una variable básica artificial entonces llamamos de y_{rj} a este elemento. En estas condiciones, si

$$y_{rj} < 0 \ \text{ para algún } \ r \in [k+1, \ldots, m]$$

entonces la variable básica artificial x_{B_r} puede asumir valores positivos transformando el problema en infactible. En este caso se debe escoger y_{rj} como elemento pivot produciendo la salida de x_{B_r} de la base (esa variable es artificial) y la entrada de x_j en la base. Esta iteración, lógicamente, no produce variación en la función objetivo porque $\overline{b}_r = 0$.

Podemos resumir la estrategia:
Si x_j es escogida para entrar en la base entonces:

1. Verificar si alguna variable básica artificial tiene un $y_{ij} < 0$. Si existe, llamaremos a esa variable de x_{B_r} y su correspondiente elemento en la columna x_j es y_{rj}.
   Entonces, hacemos una iteración escogiendo y_{rj} como pivot y x_{B_r} (variable básica artificial) sale de la base y x_j entra en la base.
2. En caso contrario, si todos los y_{ij} correspondientes a las variables básicas artificiales satisfacen la relación:

$$y_{ij} \geq 0$$

entonces, se procede en la forma normal usando la prueba de la razón mínima tradicional para escoger la variable que debe salir de la base.

ii. **Después de terminar la fase I primero se eliminan las variables artificiales de la base**
Una estrategia alternativa consiste en eliminar primero todas las variables básicas artificiales intercambiando essas variables por variables no básicas originales. Solamente después de eliminar todas las variables artificiales de la base se pasa para la fase II.
Sea el siguiente cuadro después de terminar la fase I:

	x_1	$\cdots$	x_k	$x_{k+1},\ldots,x_n$	$x_{n+1},\ldots,x_{n+k}$	x_{n+k+1}	$\cdots$	x_{n+m}	RHS
x_1	1					0	$\cdots$	0	$\bar{b}_1$
x_2				R_1	R_3	0	$\cdots$	0	$\bar{b}_2$
$\vdots$		$\ddots$				$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_k			1			0	$\cdots$	0	$\bar{b}_k$
x_{n+k+1}	0	$\cdots$	0			1			0
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	R_2	R_4		$\ddots$		$\vdots$
x_{n+m}	0	$\cdots$	0					1	0

Solamente la matriz R_2 es útil para el análisis. Así, por ejemplo, es fácil retirar la variable básica artificial x_{n+k+1} de la base. Simplemente se debe escoger un elemento pivot diferente de cero de la primera fila de R_2. Así, existe un cambio de base donde x_{n+k+1} sale de la base y entra en la base una variable no básica original que es identificado por el elemento pivot escogido. Este cambio de base exige la realización de pivotaje para actualizar adecuadamente el cuadro. Este proceso de cambio de base (en cada operación una variable no básica artificial sale de la base y entra una variable no básica original) puede ser repetido hasta que sucede uno de los siguientes casos:

A. Todas las variables artificiales fueron retiradas de la base:
En este caso fue encontrada una base constituida exclusivamente de variables originales y pasamos sin problemas para la fase II.

B. No fue posible retirar todas las variables artificiales de la base:
Este caso sucede cuando en algún momento del proceso de retirada de las variables básicas artificiales de la base la nueva matriz R_2 transformada por los pivotajes se transforma en $R_2^{'} = 0$, o sea, no existe ningún elemento diferente de cero para realizar el pivot.

Sean, x_1 el vector de las variables básicas constituidas por las variables originales y x_2 el vector de las variables básicas constituidas por las variables artificiales, entonces la matriz A y el vector b pueden ser representadas de la siguiente forma:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \qquad\qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

Sea k el número de variables básicas originales, entonces podemos escribir el sistema original de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccc} & & \begin{array}{cc} k & (n-k) \end{array} \\ m & \begin{array}{c} k \\ (m-k) \end{array} & \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

Entonces este sistema puede ser transformado, usando operaciones elementales de matrices, en el siguiente sistema:

$$\begin{array}{ccc} & & \begin{array}{cc} k & (n-k) \end{array} \\ m & \begin{array}{c} k \\ (m-k) \end{array} & \begin{bmatrix} I & R_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{b}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como el $rank(A, b) = k < m \Longrightarrow$ existen $(m-k)$ ecuaciones redundantes. Entonces tenemos:

$$\begin{cases} R_1 = A_{11}^{-1} A_{12} \\ \overline{b}_1 = A_{11}^{-1} b_1 \\ R_2 = 0 \end{cases}$$

En ese caso son eliminadas las $(m-k)$ filas correspondientes a las variables básicas artificiales y el proceso continua para la fase II con una base reducida:
Variables básicas: $x_1, x_2, \ldots, x_k$.
Variables no básicas: $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$.

Resumen: Si $R_2' = 0$ entonces este caso identifica el número de ecuaciones redundantes en el sistema original y esas líneas deben ser eliminadas. Una estrategia previsora seria revisar si la matriz A es de rank completo antes de iniciar el proceso de optimización del simplex y eliminar las filas redundantes.

En este caso no es posible que encontremos un $R_2^{'} = 0$. Esta estrategia raramente es usada en la práctica debido a su elevado esfuerzo computacional.
Ahora, colocando la función objetivo original, el cuadro simplex inicial de la fase II asume la siguiente forma:

Cuadro inicial de la fase II

	z	$x_1, \ldots, x_k$	$x_{k+1}, \ldots, x_n$	RHS
z	1	0	$c_B A_{11}^{-1} A_{12} - c_N$	$c_B \overline{b}_1$
x_B	0	I	$A_{11}^{-1} A_{12} = R_1$	$\overline{b}_1$

Ejemplo 5: Problema con restricción redundante.

Resolver el siguiente PL:

$$
\begin{array}{rcr}
min \;\; z(x) & = & -x_1 + 2x_2 - 3x_3 \\
s.a. & & \\
 & & x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\
 & & -x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\
 & & 2x_2 + 3x_3 = 10 \\
 & & x_3 \leq 2 \\
 & & x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{array}
$$

Después de colocar la variable de holgura x_4 tenemos la siguiente matriz A:

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}
$$

En realidad el $rank(A) = 3 < m = 4$ mas vamos a suponer que no conocemos el rank de A. Por lo tanto, procedemos a adicionar las variables artificiales x_5, x_6 y x_7 al sistema anterior. Así, la fase I del problema asume la siguiente forma:

$$
\begin{array}{rcr}
min \;\; x_o & = & x_5 + x_6 + x_7 \\
s.a. & & \\
 & & x_1 + x_2 + x_3 \quad + x_5 \qquad\qquad = 6 \\
 & & -x_1 + x_2 + 2x_3 + \qquad\qquad x_6 \qquad = 4 \\
 & & 2x_2 + 3x_3 + \qquad\qquad\qquad x_7 = 10 \\
 & & x_3 + x_4 \qquad\qquad\qquad = 2 \\
 & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0
\end{array}
$$

La matriz A modificada (aumentada), $A^{'}$, asume la siguiente forma:

$$A' = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La SBF trivial evidente está constituida por las variables x_5, x_6, x_7 y x_4 con una base igual a la matriz identidad. Por lo tanto, encontramos todas las relaciones necesarias para montar el cuadro inicial de la fase I. Usamos el índice $'$ para identificar parámetros relacionados con la función objetivo de la fase I. Así, tenemos:

$$B = I \Longrightarrow B = \begin{bmatrix} a_5 & a_6 & a_7 & a_4 \end{bmatrix}$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_4 \end{bmatrix} \qquad x_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad c_B^{'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad c_N^{'} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}N = IN = N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B^{-1}b = b = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 10 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$c_B^{'}B^{-1}N - C_N = c_B^{'}N - C_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$c_B^{'}B^{-1}b = c_B^{'}b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 10 \\ 2 \end{bmatrix} = 20$$

Con todos los parámetros calculados es posible montar el cuadro inicial de la fase I e implementar el método simplex mostrado en los cuadros siguientes:

Cuadro simplex de la fase I.

	x_o	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
x_o	1	0	4	6	0	0	0	0	20
x_5	0	1	1	1	0	1	0	0	6
x_6	0	-1	1	2	0	0	1	0	4
x_7	0	0	2	3	0	0	0	1	10
x_4	0	0	0	1	1	0	0	0	2
x_o	1	0	4	0	-6	0	0	0	8
x_5	0	1	1	0	-1	1	0	0	4
x_6	0	-1	1	0	-2	0	1	0	0
x_7	0	0	2	0	-3	0	0	1	4
x_3	0	0	0	1	1	0	0	0	2
x_o	1	4	0	0	2	0	-4	0	8
x_5	0	2	0	0	1	1	-1	0	4
x_2	0	-1	1	0	-2	0	1	0	0
x_7	0	2	0	0	1	0	-2	1	4
x_3	0	0	0	1	1	0	0	0	2
x_o	1	0	0	0	0	-2	-2	0	0
x_1	0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	2
x_2	0	0	1	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	2
x_7	0	0	0	0	0	-1	-1	1	0
x_3	0	0	0	1	1	0	0	0	2

La fase I termina con una función objetivo igual a cero que significa que fue encontrada una SBF del problema original. Sin embargo, la variable artificial x_7 está en la base. Por lo tanto, debemos escoger una de las siguientes estrategias para trabajar en la fase II:

- Pasar directamente a la fase II.
- Eliminar primero la variable artificial que está en la base.

1. Pasamos directamente a la fase II:

   Introducimos los elementos de la fila objetivo original adecuadamente actualizadas para la base corriente, por lo tanto, debemos calcular los siguientes parámetros (recordando que en el último cuadro simplex de la fase I está disponible $B^{-1}N$ y $B^{-1}b$):

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_7 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad x_N = \begin{bmatrix} x_4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_7 & a_3 \end{bmatrix} \qquad c_B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \qquad c_N = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$$c_B B^{-1}N - c_N = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = -\frac{13}{2} \Longrightarrow c_B B^{-1}N - c_N = -\frac{13}{2}$$

$$c_B B^{-1}b = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = -4 \Longrightarrow c_B B^{-1}b = -4$$

   Así tenemos el siguiente cuadro inicial de la fase II:

Cuadro simplex de la fase II.

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_7	RHS
z	1	0	0	0	$-\frac{13}{2}$	0	-4
x_1	0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	2
x_2	0	0	1	0	$-\frac{3}{2}$	0	2
x_7	0	0	0	0	0	1	0
x_3	0	0	0	1	1	0	2

El cuadro simplex es óptimo y la solución óptima es la siguiente:

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 2 \end{cases} \Longrightarrow z^*(x) = -4$$

2. Primero eliminamos las variables artificiales de la base:

Del último cuadro simplex de la fase I tenemos:

Último cuadro simplex de la fase I.

	x_o	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
x_o	1	0	0	0	0	-2	-2	0	0
x_1	0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	2
x_2	0	0	1	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	2
x_3	0	0	0	1	1	0	0	0	2
x_7	0	0	0	0	0	-1	-1	1	0

Como $R_2 = 0$, entonces la última fila es redundante. Por lo tanto, eliminamos la última fila y pasamos para la fase II.

Introducimos los elementos de la fila objetivo original adecuadamente actualizadas para la base corriente, por lo tanto, debemos calcular los siguientes parámetros (recordando que en el último cuadro simplex de la fase I está disponible $B^{-1}N$ y $B^{-1}b$):

$$R_1 = A_{11}^{-1}A_{12} = B^{-1}N = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad x_N = \begin{bmatrix} x_4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \qquad c_B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \qquad c_N = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$$c_B B^{-1}N - c_N = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = -\frac{13}{2} \Longrightarrow c_B B^{-1}N - c_N = -\frac{13}{2}$$

$$c_B B^{-1}b = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = -4 \Longrightarrow c_B B^{-1}b = -4$$

Así tenemos el siguiente cuadro inicial de la fase II:

Cuadro simplex de la fase II.

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
z	1	0	0	0	$-\frac{13}{2}$	-4
x_1	0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	2
x_2	0	0	1	0	$-\frac{3}{2}$	2
x_3	0	0	0	1	1	2

El cuadro simplex es óptimo y la solución óptima es la siguiente:

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 2 \\ x_4 = 0 \end{cases} \Longrightarrow z^*(x) = -4$$

4.4 Organización de un Cuadro Único para el Método de las Dos Fases

Calcular los elementos de la fila de la función objetivo original adecuadamente actualizados para iniciar la fase II no es el estilo más frecuente de trabajo. Una forma de eliminar este trabajo consiste en montar el cuadro inicial de la fase I con las dos filas objetivo, una fila para la función objetivo de la fase I y otra fila para la función objetivo (original) de la fase II. Por lo tanto, en este cuadro inicial se debe calcular adecuadamente los coeficientes de costo relativo y el valor de la función objetivo actual para las dos filas de las funciones objetivo.

En la propuesta mencionada anteriormente, durante la fase I todas las decisiones son tomadas llevando en cuenta exclusivamente la fila de la función objetivo de la fase I y la fila de la función objetivo original simplemente es pivotada junto con las demás filas del cuadro. Entonces, simplemente fue transferido el trabajo de calcular los elementos de la función objetivo original para iniciar la fase II por el trabajo de ir pivotando esta fila durante la fase I después de montar esa fila en el cuadro inicial.

Observación importante:

En los ejemplos, cuando realizamos el montaje del cuadro simplex inicial, generalmente calculamos los diferentes elementos del cuadro, o sea, calculamos los elementos de la fila objetivo, $c_B B^{-1} N - c_N$ y $c_B B^{-1} b$, así como los otros elementos del cuadro, $B^{-1}N$ y $B^{-1}b$. Este trabajo, lógicamente, se simplifica bastante cuando escogemos una base igual a $B = I$. Sin embargo, cuando la base inicial es $B = I$ y $b \geq 0$ entonces $B^{-1}N = N$ y $B^{-1}b = b$ están disponibles y no necesitan ser calculados y el único trabajo consiste en calcvular los elementos de la fila de la función objetivo, o sea, $c_B B^{-1} N - c_N$ y $c_B B^{-1} b$.

Para montar el cuadro inicial es recomendable usar siempre las relaciones matemáticas deducidas anteriormente. Sin embargo, existen propuestas alternativas para montar el cuadro inicial. Así, la mayoría de los libros usan una estrategia generalmente más rápida que consiste en montar un cuadro inicial, con una determinada estructura, y a través de operaciones elementales de fila montar el cuadro inicial de la fase I. Así, calcular adecuadamente los elementos de la fila de la función objetivo, o sea, $c_B B^{-1} N - c_N$ y $c_B B^{-1} b$, es **equivalente** a transformar en valores iguales a cero los elementos de la fila objetivo correspondientes a las **variables básicas** y esta transformación puede hacerse a través de operaciones elementales de matrices. El cuadro simplex inicial, con los elementos de la fila objetivo correspondientes a las variables básicas iguales a cero es conocido como cuadro canónico.

Por ejemplo, cuando queremos montar un cuadro simplex inicial (canónico) con las dos filas de las funciones objetivo y usando una base inicial exclusivamente con variables artificiales, el cuadro pre-preparado y el cuadro simplex inicial (canónico) asumen la siguiente forma:

Cuadro pre-preparado:

	z	x_o	x_1	$\cdots$	x_n	x_{n+1}	$\cdots$	x_{n+m}	RHS
z	1	0	$-c_1$	$\cdots$	$-c_n$	0	$\cdots$	0	0
x_o	0	1	0	$\cdots$	0	-1	$\cdots$	-1	0
x_{n+1}	0	0	a_{11}	$\cdots$	a_{1n}	1	$\cdots$	0	b_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{n+m}	0	0	a_{m1}	$\cdots$	a_{mn}	0	$\cdots$	1	b_m

$\Downarrow$ operaciones elementales de fila

	z	x_o	x_1	$\cdots$	x_n	x_{n+1}	$\cdots$	x_{n+m}	RHS
z	1	0	$-c_1$	$\cdots$	$-c_n$	0	$\cdots$	0	0
x_o	0	1	$c_1^{'}$	$\cdots$	$c_n^{'}$	0	$\cdots$	0	$b^{'}$
x_{n+1}	0	0	a_{11}	$\cdots$	a_{1n}	1	$\cdots$	0	b_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{n+m}	0	0	a_{m1}	$\cdots$	a_{mn}	0	$\cdots$	1	b_m

Cuadro simplex inicial (canónico)

Puede observarse que en el cuadro pre-preparado las filas objetivo aparecen con los coeficientes de costo con signo cambiado, o sea, se coloca $-c_N$ y las operaciones elementales de matrices acrecentan a estas filas el término $c_B B^{-1} N$ para que esas filas tengan la forma adecuada, o sea, $c_B B^{-1} N - c_N$. Por lo tanto, ambas formas de montar el cuadro son equivalentes y en problemas pequeños es más rápido montar el cuadro simplex inicial a partir del cuadro pre-preparado. Sin embargo, la forma algebraica será preferida por nosotros porque usa una lógica más consistente y porque puede ser usada para todos los tipos de casos, inclusive para el caso en que la matriz básica es diferente de la identidad.

Ejemplo 6: Montar el cuadro inicial del PL del ejemplo 5 usando el cuadro pre-preparado e incluyendo las dos filas de la función objetivo.

En este caso simplemente se coloca el vector de costos c y $c^{'}$ de las dos funciones objetivo con el signo cambiado para tener el cuadro pre-preparado. Después se realiza operaciones elementales de matrices para transformar en ceros todos los coeficientes de costo relativo de las variables básicas en las dos filas de las funciones objetivo. El siguiente cuadro muestra los dos cuadros, pre-preparado y el simplex inicial.

Encontrando el cuadro simplex inicial.

	z	x_o	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
z	1	0	1	-2	3	0	0	0	0	0
x_o	0	1	0	0	0	0	-1	-1	-1	0
x_5	0	0	1	1	1	0	1	0	0	6
x_6	0	0	-1	1	2	0	0	1	0	4
x_7	0	0	0	2	3	0	0	0	1	10
x_4	0	0	0	0	1	1	0	0	0	2
z	1	0	1	-2	3	0	0	0	0	0
x_o	0	1	0	4	6	0	0	0	0	20
x_5	0	0	1	1	1	0	1	0	0	6
x_6	0	0	-1	1	2	0	0	1	0	4
x_7	0	0	0	2	3	0	0	0	1	10
x_4	0	0	0	0	1	1	0	0	0	2

El lector está invitado a terminar el proceso de solución del ejemplo cuyo cuadro inicial fue montado.

Ejemplo 7: Usando un cuadro único para las dos fases del simplex, resolver el siguiente PL:

$$\begin{array}{rcl} min\ \ z & = & x_1 - 2x_2 \\ s.a. & & \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} x_1 + x_2 \geq 2 \\ -x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1; \quad x_2 \geq 0 \end{array}\right\} \Longleftarrow S$$

Usando las variables de holgura x_3, x_4 y x_5 para transformar las desigualdades en igualdades y usando las variables artificiales x_6 y x_7 para construir una base artificial igual a la matriz identidad tenemos el siguiente PL modificado:

$$\begin{array}{rcl} min\ \ z(x) & = & x_1 - 2x_2 \\ & & \\ min\ \ x_o & = & \qquad\qquad\qquad\qquad x_6 + x_7 \\ s.a. & & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 - x_3 \qquad\qquad + x_6 & & = 2 \\ -x_1 + x_2 \qquad - x_4 \qquad\qquad + x_7 & & = 1 \\ x_2 \qquad\qquad\qquad + x_5 & & = 3 \\ x_1; \quad x_2; \quad x_3; \quad x_4; \quad x_5; \quad x_6; \quad x_7 & & \geq 0 \end{array}$$

de donde tenemos que:

$$A' = \begin{array}{ccccccc} & & & & a_5 & a_6 & a_7 \\ \hline 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\Longrightarrow B = \left[\begin{array}{ccc} a_6 & a_7 & a_5 \end{array}\right] = I$$

$$x_B = \left[\begin{array}{c} x_6 \\ x_7 \\ x_5 \end{array}\right] \quad x_N = \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array}\right] \quad c_B' = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \quad c_N' = \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$c_B = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad c_N = \left[\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Realizamos los cálculos necesarios para montar el cuadro:

$$B = I = B^{-1} \Longrightarrow B^{-1}N = N \qquad\qquad B^{-1}b = b$$

Para la fila objetivo original:

$$c_B B^{-1} b = c_B b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = 0$$

$$c_B B^{-1} N - c_N = c_B N - c_N = -c_N = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para la fila objetivo de la fase I:

$$c_B^{'} B^{-1} b = c_B^{'} b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = 3$$

$$c_B^{'} B^{-1} N - c_N^{'} = c_B^{'} N - c_N^{'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la solución óptima del PL es el siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 3 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} x_3 = 1 \\ x_4 = 2 \\ x_5 = 0 \end{array} \right. \qquad \Longrightarrow z^* = -6$$

Cuando se usa las dos filas objetivo desde el inicio del proceso entonces no es necesario actualizar las columnas de las variables artificiales que salen de la base. Así, en el ejemplo anterior, las columnas de x_7 y x_6 pueden ser eliminadas cuando esas variables salen de la base.

Ahora es posible montar el cuadro inicial de la fase I del PL y resolver las fases I y II consecutivamente. Los cuadros simplex encontrados son los siguientes:

	z	x_o	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
z	1	0	-1	2	0	0	0	0	0	0
x_o	0	1	0	2	-1	-1	0	0	0	3
x_6	0	0	1	1	-1	0	0	1	0	2
x_7	0	0	-1	1	0	-1	0	0	1	1
x_5	0	0	0	1	0	0	1	0	0	3
z	1	0	1	0	0	2	0	0	-2	-2
x_o	0	1	2	0	-1	1	0	0	-2	1
x_6	0	0	2	0	-1	1	0	1	-1	1
x_2	0	0	-1	1	0	-1	0	0	1	1
x_5	0	0	1	0	0	1	1	0	-1	2
z	1	0	-3	0	2	0	0	-2	0	-4
x_o	0	1	0	0	0	0	0	-1	-1	0
x_4	0	0	2	0	-1	1	0	1	-1	1
x_2	0	0	1	1	-1	0	0	1	0	2
x_5	0	0	-1	0	1	0	1	-1	0	1
z	1	$\cdot$	-1	0	0	0	-2	$\cdot$	$\cdot$	-6
x_4	0	$\cdot$	1	0	0	1	1	$\cdot$	$\cdot$	2
x_2	0	$\cdot$	0	1	0	0	1	$\cdot$	$\cdot$	3
x_3	0	$\cdot$	-1	0	1	0	1	$\cdot$	$\cdot$	1

4.5 Método de las Dos Fases con el Uso de una Única Variable Artificial

En este caso se usa una única variable artificial independientemente del tamaño del problema y de los tipos de desigualdades existentes en el problema original. Sin embargo, el uso de una única variable artificial no necesariamente significa que la fase I del proceso simplex va ser más rápida o que va tener menos iteraciones simplex.

Sea el problema de PL:

$$\begin{aligned} min \;\; z(x) \;\; &= \;\; cx \\ s.a. \quad & \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Sea la matriz $A_{m\times n} = [B \quad N]$ de rank m donde la matriz B es una matriz cuadrada de rank completo mas que no necesariamente corresponde a una SBF.

Observación importante: Al mostrar el método de variable artificial única, la mayoría de los autores de libros de PL procuran encontrar una matriz B, lógicamente de rank completo, que sea la matriz identidad mismo que ella represente apenas una solución básica y no necesariamente una SBF. La principal motivación de este tipo de implementación es evitar invertir la matriz B si ella no es la identidad para montar el cuadro simplex inicial. Sin embargo, la eficiencia del método de usar una única variable artificial al parecer se encuentra en usar una base B constituido por las columnas (vectores) de las variables originales que tienen mayor posibilidad de que sean las varibles básicas óptimas, disminuyendo las iteraciones simplex para encontrar la base óptima. Esta posibilidad es más evidente cuando se desea resolver un tipo particular de problema donde las variables tienen algún significado físico y puede ser altamente posible identificar muchas de las variables que forman parte de la base óptima. En estos casos interesa identificar las variables básicas óptimas y, por lo tanto, la matriz básica ya no es más la identidad y se tiene que invertir la matriz B para montar el cuadro inicial.

Escogemos una submatriz B de A de rank completo. Entonces, las restricciones $Ax = b$ pueden ser separadas de la siguiente manera:

$$Bx_B + Nx_N = b$$

Multiplicando la relación anterior por B^{-1}, tenemos:

$$B^{-1}Bx_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b = \overline{b} \Longrightarrow x_B + B^{-1}Nx_N = \overline{b} \tag{4.5}$$

En la transformación anterior pueden acontecer dos casos:

1. Si $B^{-1}b = \overline{b} \geq 0$ entonces la base B escogida es una SBF y, por lo tanto, fue encontrada una SBF inicial para iniciar el proceso simplex (en este caso no seria necesaria la fase I).
2. Puede también (y es lo más frecuente) suceder que $\overline{b} \ngeq 0$. En este caso se puede construir una base artificial usando una única variable artificial cuyo vector columna debe tener un valor igual a -1 en las posiciones correspondientes a las restricciones que tienen un valor de $\overline{b}_i < 0$ en (4.5) y valores iguales a cero en la otras posiciones. La variable artificial es llamada de x_a y su vector columna de y_a. Este caso lleva al método de dos fases con una única variable artificial.

El sistema (4.5) puede ser modificado y asumir la siguiente forma:

$$x_B + B^{-1}Nx_N + y_a x_a = \overline{b} \tag{4.6}$$

Es importante observar que el sistema (4.6) fue construido a partir del sistema (4.5) y no a partir del sistema $Ax = b$ y también que en el sistema (4.6) el espacio fue incrementado en una dimensión con la incorporación de la nueva variable x_a.

Ahora introducimos x_a en la base escogiendo el siguiente pivot:

$$\overline{b}_r = \min_{i\,:\,\overline{b}_i < 0} \{\overline{b}_i\} \tag{4.7}$$

Realmente se está escogiendo el menor de los $\overline{b}_i < 0$. Este tipo de pivot garantiza que en el nuevo cuadro todos los nuevos $\overline{b}_i \geq 0$ porque todos los elementos de y_a diferentes de cero son iguales a -1 y como fue escogido como pivot el $\overline{b}_i$ mas negativo debe transformar en positivo todos los $\overline{b}_i$ que estaban negativos y los otros $\overline{b}_i$ permanecen inalterados. Por lo tanto, pivotando la fila r con la columna y_a (x_a entra en la base y x_{B_r} sale de la base), tenemos lo siguiente:

$$\begin{cases} \overline{b}'_r = -\overline{b}_r & \text{que ahora es} > 0 \\ \overline{b}'_i = \overline{b}_i - \overline{b}_r & \text{que es} \geq 0 \text{ si } \ \overline{b}_i < 0,\ i \neq r \\ \overline{b}'_i = \overline{b}_i & \text{en otro caso (permenece igual)} \end{cases}$$

De esta manera fue encontrada una SBF artificial con la variable x_a en la base. Ahora podemos comenzar la fase I del simplex con una única variable artificial. Lógicamente, si existe una SBF para el problema original, la fase I termina cuando x_a sale de la base.

Observaciones: En relación al método de las dos fases con una única variable artificial tenemos:

1. La función objetivo de la fase I tiene la siguiente forma:

$$min \quad x_o = x_a$$

2. Al final de la fase I pueden suceder uno de los siguientes casos:
   (a) $x_a \neq 0 \Longrightarrow$ el problema es **infactible**.
   (b) $x_a = 0$. En esta posibilidad existen todavia dos subcasos:
      i. Si x_a es no básica (está fuera de la base) entonces no existe problema y representa el caso normal. En este caso se elimina x_a del problema y se inicia la fase II del PL.

ii. Si x_a es básica:
En este caso se puede retirar x_a de la base pivotando con una variable no básica o se puede pasar directamente a la fase II llevando en cuenta que si x_a permanece en la base entonces debe permanecer siempre con valor igual a cero (de manera similar al método de las dos fases con múltiples variables artificiales)

En este caso también es posible organizar un cuadro único para las 2 fases del método simplex de manera similar que en el método de las variables artificiales múltiples.

Ejemplo 8: Usando un cuadro único para las dos fases del simplex, resolver el siguiente PL:

$$\begin{array}{rcl} min\ \ z & = & 2x_1 + 3x_2 \\ s.a. & & \\ & & \left.\begin{array}{r} x_1 + x_2 \geq 3 \\ -2x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1;\quad x_2 \geq 0 \end{array}\right\} \Longleftarrow S \end{array}$$

Usando las variables de holgura x_3 y x_4, para transformar las desigualdades en igualdades, las restricciones principales asumen la siguiente forma:

$$\left.\begin{array}{rl} -x_1 + x_2 - x_3 \qquad & = 3 \\ -2x_1 + x_2 \qquad - x_4 & = 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rl} x_1 - x_2 + x_3 \qquad & = -3 \\ 2x_1 - x_2 \qquad + x_4 & = -2 \end{array}\right.$$

en donde aparece una base igual a la matriz identidad evidente formado por x_3 y x_4 (que obviamente no es una SBF del problema original). Se puede verificar fácilmente que:

$$B^{-1}b = b = \overline{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

lo que significa que necesitamos de una variable artificial con su vector columna de la siguiente forma:

$$y_a = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

porque los dos elementos de $\overline{b}$ son negativos. Por lo tanto, el PL modificado, con las dos funciones objetivo asume la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
min \;\; z(x) &= 2x_1 + 3x_2 \\
\\
min \;\; x_o &= x_a \\
s.a. & \\
& x_1 - x_2 + x_3 \quad\;\; - x_a = -3 \\
& 2x_1 - x_2 \quad\;\; + x_4 - x_a = -2 \\
& x_1; \;\; x_2; \;\; x_3; \;\; x_4; \;\; x_a \geq 0
\end{aligned}
$$

de donde tenemos que:

$$
A' = \begin{array}{ccccc}
 & & a_3 & a_4 & a_5 \\
\hline
\multicolumn{1}{|c|}{-1} & \multicolumn{1}{c|}{-1} & \multicolumn{1}{c|}{1} & \multicolumn{1}{c|}{0} & \multicolumn{1}{c|}{-1} \\
\hline
\multicolumn{1}{|c|}{2} & \multicolumn{1}{c|}{-1} & \multicolumn{1}{c|}{0} & \multicolumn{1}{c|}{1} & \multicolumn{1}{c|}{-1} \\
\hline
\end{array}
$$

$$\Longrightarrow B = \left[\begin{array}{cc} a_3 & a_4 \end{array} \right] = I$$

$$x_B = \left[\begin{array}{c} x_3 \\ x_4 \end{array} \right] \quad x_N = \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_a \end{array} \right] \quad c_B^{'} = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \end{array} \right] \quad c_N^{'} = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$c_B = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \end{array} \right] \qquad\qquad c_N = \left[\begin{array}{ccc} 2 & 3 & 0 \end{array} \right]$$

Realizamos los cálculos necesarios para montar el cuadro:

$$B = I = B^{-1} \Longrightarrow B^{-1}N = N \qquad\qquad B^{-1}b = b$$

Para la fila objetivo original:

$$c_B B^{-1} b = c_B b = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} -3 \\ -2 \end{array} \right] = 0$$

$$c_B B^{-1} N - c_N = c_B N - c_N = -c_N = \left[\begin{array}{ccc} -2 & -3 & 0 \end{array} \right]$$

Para la fila objetivo de la fase I:

$$c_B^{'}B^{-1}b = c_B^{'}b = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix} = 0$$

$$c_B^{'}B^{-1}N - c_N^{'} = -c_N^{'} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Ahora es posible montar el cuadro inicial que es infactible mas con un cambio de base, con la entrada de x_a a la base y la salida de x_3 de la base se encuentra un cuadro inicial factible donde se puede resolver las fases I y II consecutivamente. Los cuadros simplex encontrados son los siguientes:

	z	x_o	x_1	x_2	x_3	x_4	x_a	RHS	
z	1	0	-2	-3	0	0	0	0	
x_o	0	1	0	0	0	0	-1	0	$\Longleftarrow$ Cuadro inicial infactible
x_3	0	0	-1	-1	1	0	-1	-3	
x_4	0	0	2	-1	0	1	-1	-2	
z	1	0	-2	-3	0	0	0	0	
x_o	0	1	1	1	-1	0	0	3	$\Longleftarrow$ Cuadro inicial factible
x_a	0	0	1	1	-1	0	1	3	
x_4	0	0	3	0	-1	1	0	1	
z	1	0	1	0	-3	0	3	9	
x_o	0	1	0	0	0	0	-1	0	$\Longleftarrow$ fin de la fase I
x_2	0	0	1	1	-1	0	1	3	
x_4	0	0	3	0	-1	1	0	1	
z	1	$\cdot$	0	0	$-\frac{8}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\cdot$	$\frac{26}{3}$	
x_2	0	$\cdot$	0	1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\cdot$	$\frac{8}{3}$	
x_1	0	$\cdot$	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\cdot$	$\frac{1}{3}$	

Por lo tanto, la solución óptima del PL es el siguiente:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3} \\ x_2 = \frac{8}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow z^* = \frac{26}{3}$$

La figura 4.3 muestra el proceso de optimización en el plano $x_1 - x_2$.

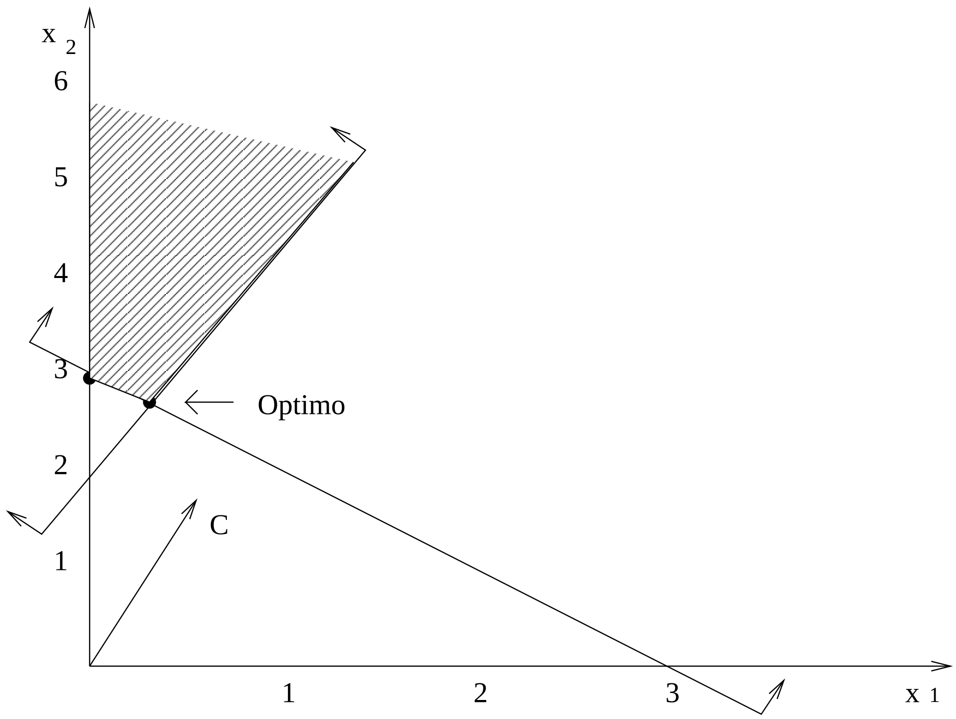


Figura 4.3: Representación gráfica.

Ejemplo 9: Usando un cuadro único para las dos fases del simplex, resolver el siguiente PL usando una única variable artificial:

$$\begin{array}{rcl} min\ \ z & = & x_1 - 2x_2 \\ s.a. & & \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} x_1 + x_2 \geq 2 \\ -x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1; \quad x_2 \geq 0 \end{array}\right\}$$

Usando las variables de holgura x_3, x_4 y x_5 para transformar las desigualdades en igualdades y multiplicando las dos primeras restricciones por -1, las restricciones principales asumen la siguiente forma:

$$\left.\begin{array}{rr} x_1 + x_2 - x_3 \qquad\qquad & = 2 \\ -x_1 + x_2 \qquad - x_4 \qquad & = 1 \\ x_2 \qquad\qquad + x_5 & = 3 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rr} -x_1 - x_2 + x_3 \qquad\qquad & = -2 \\ x_1 - x_2 \qquad + x_4 \qquad & = -1 \\ x_2 \qquad\qquad + x_5 & = 3 \end{array}\right.$$

en donde aparece una base igual a la matriz identidad evidente formado por x_3, x_4 y x_5 (que obviamente no es una SBF del problema original). Se puede verificar fácilmente que:

$$B^{-1}b = b = \overline{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

lo que significa que necesitamos de una variable artificial con su vector columna de la siguiente forma:

$$y_a = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

porque los dos primeros elementos de $\overline{b}$ son negativos. Por lo tanto, el PL modificado, con las dos funciones objetivo asume la siguiente forma:

$$\begin{array}{lcl} min\ \ z(x) & = & x_1 - 2x_2 \\ \\ min\ \ x_o & = & \qquad\qquad\qquad\qquad x_a \\ s.a. & & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -x_1 - x_2 + x_3 \qquad\qquad - x_a = -2 \\ x_1 - x_2 \qquad + x_4 \qquad - x_a = -1 \\ x_2 \qquad\qquad + x_5 \qquad\quad = 3 \\ x_1;\ \ x_2;\ \ x_3;\ \ x_4;\ \ x_5;\ \ \ x_a \geq 0 \end{array}$$

de donde tenemos que:

$$A' = \begin{array}{cccccc} & & a_3 & a_4 & a_5 & \\ \hline -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\Longrightarrow B = \begin{bmatrix} a_3 & a_4 & a_5 \end{bmatrix} = I$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \quad x_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_a \end{bmatrix} \quad c_B^{'} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad c_N^{'} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad\qquad c_N = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Realizamos los cálculos necesarios para montar el cuadro:

$$B = I = B^{-1} \Longrightarrow B^{-1}N = N \quad B^{-1}b = b$$

Para la fila objetivo original:

$$c_B B^{-1} b = c_B b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = 0$$

$$c_B B^{-1} N - c_N = c_B N - c_N = -c_N = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Para la fila objetivo de la fase I:

$$c_B^{'} B^{-1} b = c_B^{'} b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = 0$$

$$c_B^{'} B^{-1} N - c_N^{'} = -c_N^{'} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Ahora es posible montar el cuadro inicial que es infactible mas con un cambio de base, con la entrada de x_a a la base y la salida de x_3 de la base se encuentra un cuadro inicial factible donde se puede resolver las fases I y II consecutivamente. Los cuadros simplex encontrados son los siguientes:

	z	x_o	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_a	RHS	
z	1	0	-1	2	0	0	0	0	0	
x_o	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	
x_3	0	0	-1	-1	1	0	0	-1	-2	$\Longleftarrow$ Cuadro inicial infactible
x_4	0	0	1	-1	0	1	0	-1	-1	
x_5	0	0	0	1	0	0	1	0	3	
z	1	0	-1	2	0	0	0	0	0	
x_o	0	1	1	1	-1	0	0	0	2	
x_a	0	0	1	1	-1	0	0	1	2	$\Longleftarrow$ Cuadro inicial factible
x_4	0	0	2	0	-1	1	0	0	1	
x_5	0	0	0	1	0	0	1	0	3	
z	1	0	-3	0	2	0	0	-2	-4	
x_o	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	$\Longleftarrow$ fin de la fase I
x_2	0	0	1	1	-1	0	0	1	2	
x_4	0	0	2	0	-1	1	0	0	1	
x_5	0	0	-1	0	1	0	1	-1	1	
z	1	·	-1	0	0	0	-2	·	-6	
x_2	0	·	0	1	0	0	1	·	3	$\Longleftarrow$ Cuadro óptimo
x_4	0	·	1	0	0	1	1	·	2	
x_3	0	·	-1	0	1	0	1	·	1	

Por lo tanto, la solución óptima del PL es el siguiente:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 = 1 \\ x_4 = 2 \\ x_5 = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow z^* = -6$$

4.6 Análisis Sobre las Ventajas de Usar una Única Variable Artificial y Variables Artificiales Múltiples

Existen puntos de vista polémicos en relación a la eficiencia de la técnica de usar una única variable artificial o la alternativa de usar variables artificiales múltiples. Ilustramos ambas propuestas usando un ejemplo. En realidad la idea de usar una única variable artificial está orientado a tener mayor libertad en escoger la base inicial y a escoger variables básicas del cuadro inicial que tengan grandes chances de pertenecer a la base óptima. Si en la técnica de usar una única variable artificial se procura una base inicial igual a la matriz identidad entonces es posible que ambas propuestas sean, en promedio, equivalentes. Intentamos mostrar el uso de la técnica de variable artificial única usando una matriz básica diferente de la matriz identidad.

Ejemplo 10: Usando un cuadro único para las dos fases del simplex y, usando la técnica de variable artificial única y de variables artificiales múltiples, resolver el siguiente PL:

$$min \quad z(x) = -x_1 - 2x_2$$

s.a.

$$\left.\begin{array}{r} 3x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ 2x_1 - x_2 \geq 2 \\ x_1; \quad x_2 \geq 0 \end{array}\right\}$$

1. Usando la técnica de variable artificial única:

   Usando las variables de holgura x_3 y x_4 para transformar las desigualdades en igualdades las restricciones del problema asumen la siguiente forma:

$$\left\{\begin{array}{r} 3x_1 + 4x_2 + x_3 \qquad = 12 \\ 2x_1 - x_2 \qquad - x_4 = 2 \\ x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4 \geq 0 \end{array}\right.$$

   de donde tenemos que:

$$A = \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline 3 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \end{array}$$

   (a) Escogemos arbitrariamente la base $B = [a_2 \quad a_3]$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad x_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} \qquad c_B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix} \qquad c_N = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Realizamos los cálculos necesarios para montar el cuadro inicial:

$$B^{-1}N = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 11 & -4 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 20 \end{bmatrix} \qquad c_B B^{-1}b = \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 20 \end{bmatrix} = 4$$

$$c_B B^{-1}N - c_N = \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 11 & -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \end{bmatrix}$$

Como $\overline{b}_1 = -2 < 0$ entonces debemos usar la variable artificial x_a. Para completar el cuadro inicial se debe calcular los elementos de la fila de la función objetivo de la fase I y el costo relativo de x_a en la fila de la función objetivo original. Se debe observar también de que y_a es una columna de x_a que ya está actualizada para la base B escogida (recuerde que la variable x_a es incorporado al sistema $x_B + B^{-1}Nx_N = \overline{b}$ y no al sistema original), o sea tenemos la relación:

$$B^{-1}y_a^{'} = y_a = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde $y_a^{'}$ seria la columna de x_a que se incorporaria al sistema original $Ax = b$ que, lógicamente, puede ser fácilmente calculada mas que no interesa por ahora. Entonces, calculamos los elementos restantes para montar el cuadro inicial.
Costo relativo de x_a en la función objetivo original:

$$c_B B^{-1}y_a^{'} - c_{x_a} = c_B y_a - c_{x_a} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = 2$$

Costos relativos de las variables no básicas de la función objetivo de la fase I que tiene la forma simple $min \;\; x_o = x_a$ (considerando x_a como variable no básica):

$$c_B^{'} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad\qquad c_N^{'} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c_B^{'}B^{-1}N - c_N^{'} = -c_N^{'} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Función objetivo de las fases I actualizado para la base actual:

$$c_B^{'}B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 20 \end{bmatrix} = 0$$

Todos los elementos necesarios para montar el cuadro inicial ya fueron calculados. Se procede a montar el cuadro inicial y a optimizar usando el método de las dos fases usando un cuadro único.

	z	x_o	x_1	x_2	x_3	x_4	x_a	RHS
z	1	0	5	0	0	-2	2	4
x_o	0	1	0	0	0	0	-1	0
x_2	0	0	-2	1	0	1	-1	-2
x_3	0	0	11	0	1	-4	0	20
z	1	0	1	2	0	0	0	0
x_o	0	1	2	-1	0	-1	0	2
x_a	0	0	2	-1	0	-1	1	2
x_3	0	0	11	0	1	-4	0	20
z	1	0	0	$\frac{5}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1
x_o	0	1	0	0	0	0	-1	0
x_1	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
x_3	0	0	0	$\frac{11}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{11}{2}$	9
z	1	·	0	0	$-\frac{5}{11}$	$-\frac{2}{11}$	·	$-\frac{56}{11}$
x_1	0	·	1	0	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	·	$\frac{20}{11}$
x_2	0	·	0	1	$\frac{2}{11}$	$\frac{2}{11}$	·	$\frac{18}{11}$

Por lo tanto, la solución óptima del PL es el siguiente:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{20}{11} \\ \\ x_2 = \frac{18}{11} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow z^* = -\frac{56}{11}$$

La figura 4.4 muestra el proceso de optimización en el plano $x_1 - x_2$.

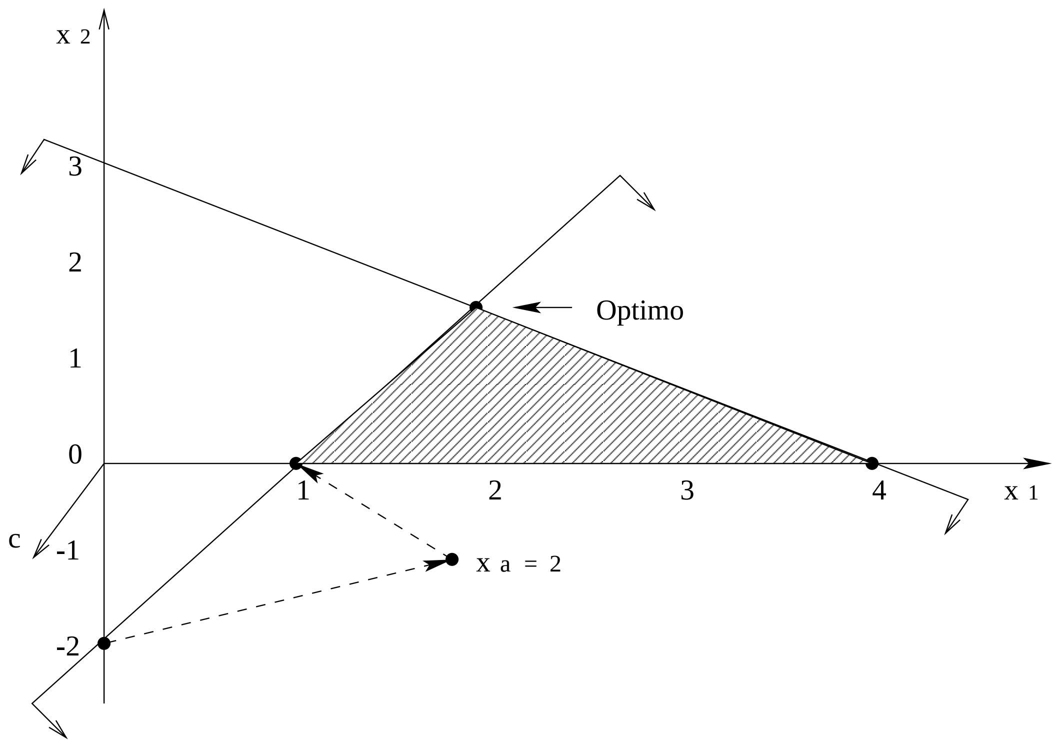


Figura 4.4: Representación gráfica.

Como sabemos que $B^{-1}y_a' = y_a$ entonces, por simple curiosidad, podemos montar el problema original que fue optimizado, calculando y_a':

$$y_a' = By_a = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, el problema que fue optimizado tiene la siguiente forma:

$$\begin{cases} min \;\; z(x) \;\; = \;\; -x_1 - 2x_2 \\ \\ min \;\; x_o \;\; = \qquad\qquad\qquad\qquad x_a \\ \quad s.a. \\ \qquad 3x_1 + 4x_2 + x_3 \qquad - 4x_a = 12 \\ \qquad 2x_1 - x_2 \qquad - x_4 + x_a = 2 \\ \qquad x_1, \;\; x_2, \;\; x_3, \;\; x_4, \;\; x_a, \;\; \geq 0 \end{cases}$$

El lector está convidado a verficar que el cuadro inicial concuerda exactamente con este problema.

Observación importante: La inclusión de la variable x_a como variable artificial para calcular los coeficientes de esta variable en las dos filas de la función objetivo en el cuadro inicial puede producir alguna confusión en el lector. Una forma alternativa de montar el cuadro inicial es separando la variable x_a del resto de los cálculos. En este caso el cuadro inicial tiene la siguiente forma:

	z	x_o	x_B	x_N	x_a	RHS
z	1	0	0	$c_B B^{-1} N - c_N$	$c_B y_a - c_a$	$c_B B^{-1} b$
x_o	0	1	0	$c_B^{'} B^{-1} N - c_N^{'}$	$c_B^{'} y_a - c_a^{'}$	$c_B^{'} B^{-1} b$
x_B	0	0	I	$B^{-1} N$	y_a	$B^{-1} b$

donde $y_a = B^{-1} a_a = B^{-1} y_a^{'}$ es conocido y para el ejemplo tiene la siguiente forma:

$$y_a = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y $c_a = 0$ es el coeficiente de costo de x_a en la función objetivo original (siempre vale cero) y $c_a^{'} = 1$ es el coeficiente de costo de x_a en la función objetivo de la fase I (y siempre vale 1). Por lo tanto los elementos de la columna de x_a todavia desconocidos en el cuadro inicial se puede calcular de la siguiente forma:

$$c_B y_a - c_a = \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = 2$$

$$c_B^{'} y_a - c_a^{'} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} - 1 = -1$$

(b) Ahora resolvemos nuevamente el problema escogiendo, también arbitrariamente, la siguiente base: $B = [a_2 \quad a_4]$. Entonces tenemos:

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & -1 \end{bmatrix}$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad x_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad c_B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix} \quad c_N = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Realizamos los cálculos necesarios para montar el cuadro inicial:

$$B^{-1}N = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{11}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}b = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix} \qquad c_B B^{-1}b = \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix} = -6$$

$$c_B B^{-1}N - c_N = \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{11}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Como $\overline{b}_2 = -5 < 0$ entonces debemos usar la variable artificial x_a. Para completar el cuadro inicial se debe calcular los elementos de la fila de la función objetivo de la fase I y el costo relativo de x_a en la fila de la función objetivo original. Se debe observar también de que y_a es una columna de x_a que ya está actualizada, así tenemos:

$$B^{-1}y_a^{'} = y_a = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Calculamos los elementos restantes para montar el cuadro inicial.
Costo relativo de x_a en la función objetivo original:

$$c_B B^{-1}y_a^{'} - c_{x_a} = c_B y_a - c_{x_a} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} - 0 = 0$$

Costos relativos de las variables no básicas de la función objetivo de la fase I que tiene la forma simple $min \;\; x_o = x_a$ (considerando x_a como variable no básica):

$$c_B^{'} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad c_N^{'} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c_B^{'} B^{-1}N - c_N^{'} = -c_N^{'} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Función objetivo de las fases I actualizado para la base actual:

$$c_B^{'} B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix} = 0$$

Todos los elementos necesarios para montar el cuadro inicial ya fueron calculados. Se procede a montar el cuadro inicial y a optimizar usando el método de las dos fases usando un cuadro único.

	z	x_o	x_1	x_2	x_3	x_4	x_a	RHS
z	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	-6
x_o	0	1	0	0	0	0	-1	0
x_2	0	0	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	0	3
x_4	0	0	$-\frac{11}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	1	-1	-5
z	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	-6
x_o	0	1	$\frac{11}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	-1	0	5
x_2	0	0	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	0	3
x_a	0	0	$\frac{11}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	-1	1	5
z	1	0	0	0	$-\frac{5}{11}$	$-\frac{2}{11}$	$\frac{2}{11}$	$-\frac{56}{11}$
x_o	0	1	0	0	0	0	-1	0
x_2	0	0	0	1	$\frac{2}{11}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{18}{11}$
x_1	0	0	1	0	$\frac{1}{11}$	$-\frac{4}{11}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{20}{11}$

Lógicamente, la solución óptima del PL es la misma encontrada anteriormente.

La figura 4.5 muestra el proceso de optimización en el plano $x_1 - x_2$ donde se puede verificar que la trayectoria simplex es diferente que en la estrategia de solución adoptada en (a).

En este caso también podemos montar el problema original que fue optimizado, calculando $y_a^{'}$:

$$y_a^{'} = By_a = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

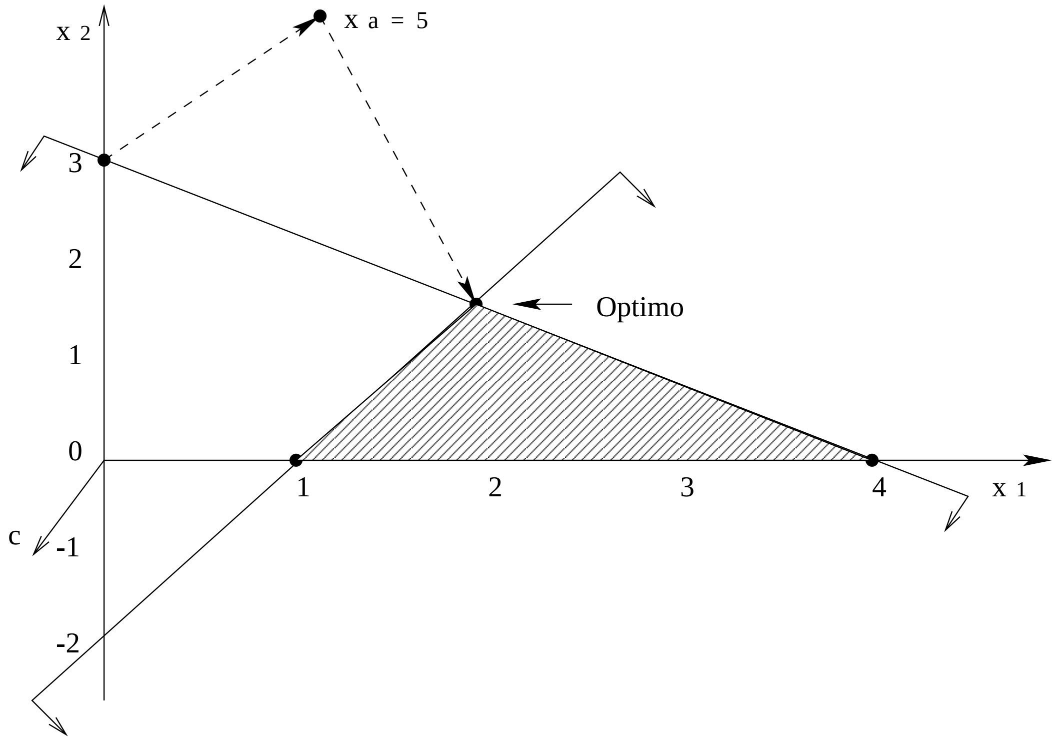


Figura 4.5: Representación gráfica.

Por lo tanto, el problema que fue optimizado tiene la siguiente forma:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} min \;\; z(x) & = & -x_1 - 2x_2 \\ & & \\ min \;\; x_o & = & \qquad\qquad\qquad\qquad x_a \\ s.a. & & \\ & & 3x_1 + 4x_2 + x_3 \qquad\quad = 12 \\ & & 2x_1 - x_2 \qquad - x_4 + x_a = 2 \\ & & x_1, \;\; x_2, \;\; x_3, \;\; x_4, \;\; x_a, \;\; \geq 0 \end{array} \right.$$

El lector está invitado a verficar que el cuadro inicial concuerda exactamente con este problema.

(c) El lector está invitado a resolver nuevamente el problema ahora escogiendo la base $B = [a_1 \quad a_2]$. La sorpresa puede ser agradable !!.

2. Usando el método de las dos fases convencional (Variables artificiales múltiples):

   Usando las variables de holgura x_3 y x_4 y, usando la variable artificial x_5 las restricciones del problema asumen la siguiente forma:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 \qquad\qquad = 12 \\ \;2x_1 - x_2 \qquad - x_4 + x_5 = 2 \\ \;\; x_1, \;\; x_2, \;\; x_3, \;\; x_4, \;\; x_5, \;\; \geq 0 \end{cases}$$

Calculamos los coeficientes adecuados para montar el cuadro inicial a partir de la base artificial evidente:

$$B = [a_3 \quad a_5] = I \Longrightarrow B = B^{-1} = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} \quad x_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad c_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \quad c_N = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$c_B^{'} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad c_N^{'} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Realizamos los cálculos necesarios para montar el cuadro inicial:

$$B^{-1}N = N = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad B^{-1}b = b = \begin{bmatrix} 12 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$c_B B^{-1} b = c_B b = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ 2 \end{bmatrix} = 0 \qquad c_B B^{-1} N - c_N = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$c_B^{'} B^{-1} b = c_B^{'} b = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ 2 \end{bmatrix} = 2$$

$$c_B^{'} B^{-1} N - c_N^{'} = c_B^{'} N - c_N^{'} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Todos los elementos necesarios para montar el cuadro inicial ya fueron calculados. Se procede a montar el cuadro inicial y a optimizar usando el método de las dos fases convencional:

	z	x_o	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
z	1	0	1	2	0	0	0	0
x_o	0	1	2	-1	0	-1	0	2
x_3	0	0	3	4	1	0	0	12
x_5	0	0	2	-1	0	-1	1	2
z	1	0	0	$\frac{5}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1
x_o	0	1	0	0	0	0	-1	0
x_3	0	0	0	$\frac{11}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	9
x_1	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
z	1	$\cdot$	0	0	$-\frac{5}{11}$	$-\frac{2}{11}$	$\cdot$	$-\frac{56}{11}$
x_2	0	$\cdot$	0	1	$\frac{2}{11}$	$\frac{3}{11}$	$\cdot$	$\frac{18}{11}$
x_1	0	$\cdot$	1	0	$\frac{1}{11}$	$-\frac{4}{11}$	$\cdot$	$\frac{20}{11}$

La solución óptima, lógicamente, es la misma que las encontradas con los métodos anteriores.

Observación: El ejemplo presentado apenas muestra la mecánica de implementación de ambos métodos porque el ejemplo es muy pequeño para encontrar resultados conclusivos sobre el desempeño de ambos métodos. Todavía existe otra técnica diferente para implementar el método de las dos fases del simplex que será presentado en la próxima sección.

4.7 Inicialización del Método Simplex Usando un Parámetro Grande (Método Big-M)

Motivación y crítica al método de las dos fases: En la fase I de los métodos simplex presentados anteriormente no es llevada en cuenta los coeficientes de costo de la función objetivo original, por lo tanto, la fase I del simplex procura una SBF cualquiera y no necesariamente una buena SBF. Este aspecto siempre fue criticado en el método de las dos fases. Como una alternativa a esta crítica fue desarrollada una propuesta alternativa para contornar el problema de la falta de una SBF evidente para iniciar el proceso simplex.

El método big-M, por lo tanto, es una forma alternativa de resolver un problema de PL cuando no se tiene una SBF, generalmente identificado por una matriz identidad. En este método existe solamente una función objetivo que está constituida por los términos de la función objetivo original más unos términos adicionales correspondientes a las variables artificiales que típicamente tienen coeficientes de costos elevados. Los coeficientes elevados de las variables artificiales incentiva al método simplex para retirar las variables artificiales de la base porque esos coeficientes aumentan mucho el valor de la función objetivo cuando las variables básicas se encuentran en la base. Por lo tanto, si el PL original tiene por lo menos un punto extremo (SBF) entonces todas las variables artificiales son eliminadas de la base siendo substituidas por variables originales y encontrando una SBF del problema original.

Sea el PL:

$$\begin{array}{rcl} min & = & cx \\ s.a. & & \\ & & Ax = b \\ & & x \geq 0 \end{array} \tag{4.8}$$

donde $b \geq 0$. Suponer que (4.8) no tiene una SBF evidente. Entonces colocando las variables artificiales en (4.8) tenemos lo siguiente:

$$\begin{array}{lcl} min & = & cx + M1.x_a \\ s.a. & & \\ & & Ax + Ix_a = b \\ & & x \geq 0 \\ & & x_a \geq 0 \end{array} \tag{4.9}$$

Observaciónes: En relación al método big-M se pueden hacer las siguientes observaciones:

1. En todas las relaciones matemáticas se están considerando x_a como un vector con variables artificiales completa, o sea, con m variables artificiales para un sistema con una matriz $A_{m \times n}$. El motivo es simplemente para facilitar las notaciones matemáticas. En implementaciones prácticas, generalmente son consideradas apenas las variables artificiales que faltan para completar una SBF evidente, generalmente esa SBF es identificado por la matriz identidad. En otras palabras, generalmente es aprovechada algunas variables originales para formar la SBF inicial.

2. El término $M\ 1.x_a$ puede ser interpretado como una penalización a la función objetivo debido a cualquier solución con $x_a \neq 0$.

3. La estrategia también puede ser entendida como siendo un problema de minimización donde se minimiza la parte $1.x_a$ de la función ojetivo con prioridad principal (porque esas variables tendrán generalmente coeficientes de costo relativo elevados) y con prioridad secundaria minimiza la parte cx de la función objetivo.

Ejemplo 11: Resolver el siguiente PL:

$$\begin{array}{rcl} min \;\; z & = & x_1 - 2x_2 \\ s.a. & & \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} x_1 + x_2 \geq 2 \\ -x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1; \quad x_2 \geq 0 \end{array}\right\} \Longleftarrow S$$

Usando las variables de holgura x_3, x_4 y x_5 transformamos las desigualdades en igualdades:

$$S \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 \qquad\qquad = 2 \\ -x_1 + x_2 \qquad - x_4 \qquad = 1 \\ \qquad x_2 \qquad\qquad + x_5 = 3 \\ x_1; \;\; x_2; \;\; x_3; \;\; x_4; \;\; x_5 \geq 0 \end{array}\right.$$

Como no existe una submatriz igual a I en el sistema anterior, adicionamos 2 variables artificiales, x_6 y x_7, que juntamente con x_5 permitem montar una base artificial con base I. Así, tenemos el siguiente PL modificado:

$$\left\{\begin{array}{rcl} min \;\; z(x) & = & x_1 - 2x_2 + Mx_6 + Mx_7 \\ s.a. & & \\ & & x_1 + x_2 - x_3 \qquad\qquad + x_6 \qquad = 2 \\ & & -x_1 + x_2 \qquad - x_4 \qquad\qquad + x_7 = 1 \\ & & x_2 \qquad\qquad + x_5 \qquad\qquad = 3 \\ & & x_1; \;\; x_2; \;\; x_3; \;\; x_4; \;\; x_5; \;\; x_6; \;\; x_7 \geq 0 \end{array}\right.$$

de donde tenemos que la nueva matriz A' con una SBF artificial identificado por una matriz identidad:

$$A' = \begin{array}{ccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \\ \hline 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \Longrightarrow \text{B} = [\; a_6 \; a_7 \; a_5 \;] = \text{I} = B^{-1}$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_6 \\ x_7 \\ x_5 \end{bmatrix} \quad x_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad c_B = \begin{bmatrix} M & M & 0 \end{bmatrix} \quad c_N = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Realizamos los cálculos necesarios para montar el cuadro:

$$B = I = B^{-1} \Longrightarrow B^{-1}N = N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B^{-1}b = b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$c_B B^{-1} b = c_B b = \begin{bmatrix} M & M & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = 3M$$

$$\overline{c}_N = c_B B^{-1} N - c_N = c_B N - c_N = \begin{bmatrix} M & M & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{c}_N = \begin{bmatrix} -1 & 2+2M & -M & -M \end{bmatrix}$$

Ahora es posible montar el cuadro inicial del PL y resolver el problema. A continuación se presenta los cuadros simplex del proceso de optimización.

Cuadro simplex del método big-M.

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
z	1	-1	$2M+2$	$-M$	$-M$	0	0	0	$3M$
x_6	0	1	1	-1	0	0	1	0	2
x_7	0	-1	1	0	-1	0	0	1	1
x_5	0	0	1	0	0	1	0	0	3
z	1	$1+2M$	0	$-M$	$2+M$	0	0	$-2-2M$	$-2+M$
x_6	0	2	0	-1	1	0	1	-1	1
x_2	0	-1	1	0	-1	0	0	1	1
x_5	0	1	0	0	1	1	0	-1	2
z	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}-M$	$-\frac{3}{2}-M$	$-\frac{5}{2}$
x_1	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_2	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
x_5	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
z	1	-3	0	2	0	0	$-2-M$	$-M$	-4
x_4	0	2	0	-1	1	0	1	-1	1
x_2	0	1	1	-1	0	0	1	0	2
x_5	0	-1	0	1	0	1	-1	0	1
z	1	-1	0	0	0	-2	$-M$	$-M$	-6
x_4	0	1	0	0	1	1	0	-1	2
x_2	0	0	1	0	0	1	0	0	3
x_3	0	-1	0	1	0	1	-1	0	1

Por lo tanto, la solución óptima del PL es el siguiente:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 = 1 \\ x_4 = 2 \\ x_5 = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow z(x)^* = -6$$

4.8 Análisis del Método Big-M

En esta parte se analiza los varios casos en que puede parar el proceso de optimización usando el método big-M, o sea, la convergencia del simplex para resolver PL's usando el método big-M. Intuitivamente, podemos suponer que el algoritmo debe parar en uno de los 3 tipos de convergencia del método simplex: (1) identificando el problema como siendo infactible, (2) encontrando una solución óptima finita para el problema, o (3) identificando el problema como siendo ilimitado.

Sea el problema original:

$$(P) \Longrightarrow \begin{cases} min \quad z(x) \; = \; cx \\ s.a. \\ \qquad\qquad Ax = b \\ \qquad\qquad x \geq 0 \end{cases} \tag{4.10}$$

y sea el problema modificado:

$$(PM) \Longrightarrow \begin{cases} min \quad z(x) \; = \; cx + M_1 x_a \\ s.a. \\ \qquad\qquad Ax + x_a = b \\ \qquad\qquad x \geq 0 \\ \qquad\qquad x_a \geq 0 \end{cases} \tag{4.11}$$

El método big-M inicia el proceso de optimización con una SBF artificial (recuerde que estamos resolviendo el problema modificado) y converge en uno de los siguientes tipos generales de respuesta (porqué no converge para un problema infactible?):

1. Fue encontrada una solución óptima de (PM).
2. El (PM) es ilimitado.

A partir de estos resultados deben ser obtenidas las conclusiones para el problema (P).

1. Caso A: Existe solución finita de (PM)

   En este caso existen dos posibilidades, el primero acontece cuando todas las variables artificiales son iguales a cero y el segundo cuando no todas las variables artificiales son iguales a cero.

   (a) Subcaso A1: Todas las variables artificiales son iguales a cero
   Entonces $(x^*, 0)$ es una solución óptima de (PM).
   En este caso x^* es una soución óptima de (P).
   Suponer que $x \in P \Longrightarrow (x, 0) \in PM$.
   Ahora se supone que uno de esos puntos, $(x^*, 0)$ es óptimo de PM. Entonces en el objetivo de PM tenemos que:

   $$cx^* + 0 \leq cx + 0 \Longrightarrow cx^* \leq cx$$

   y como $x^* \in P \Longrightarrow x^*$ es óptimo de P.

   (b) Subcaso A2: No todas las variables artificiales son iguales a cero.
   Entonces, (x^*, x_a^*) es una solución óptima de PM y $x_a^* \neq 0$. En este caso no existe solución factible para P.
   Por contradicción, suponer que $\exists$ un $x \in P \Longrightarrow (x, 0) \in PM$ y por la optimalidad de (x^*, x_a^*) tenemos que:

   $$cx^* + M_1 x_a^* \leq cx + 0$$

   $$cx^* + M_1 x_a^* \leq cx \tag{4.12}$$

   Como M es muy grande y $x_a^* \geq 0$ y $\neq 0$ entonces la desigualdad 4.12 es imposible.

Ejemplo: No existe solución factible.

$$\begin{array}{rcl} min \;\; z(x) & = & -x_1 - 3x_2 + x_3 \\ s.a. & & \\ & & x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 4 \\ & & -x_1 + x_3 \geq 4 \\ & & x_3 \geq 3 \\ & & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

Colocando las variables de holgura x_4, x_5, x_6 y las variables artificiales x_7, x_8, tenemos el siguiente problema modoficado (PM):

$$\begin{array}{rcl} min \;\; z(x) & = & -x_1 - 3x_2 + x_3 + Mx_7 + Mx_8 \\ s.a. & & \\ & & x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 4 \\ & & -x_1 + x_3 - x_5 + x_7 = 4 \\ & & x_3 - x_6 + x_8 = 3 \\ & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \geq 0 \end{array}$$

Montaje del cuadro inicial:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = I = \begin{bmatrix} a_4 & a_7 & a_8 \end{bmatrix}$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix} \qquad x_n = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} \qquad c_B = \begin{bmatrix} 0 & M & M \end{bmatrix} \qquad c_N = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_B B^{-1} N - C_N = \begin{bmatrix} 0 & M & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_B B^{-1} N - C_N = \begin{bmatrix} (1-M) & 3 & (-1+2M) & -M & -M \end{bmatrix}$$

$$C_B B^{-1} b = C_B b = \begin{bmatrix} 0 & M & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = 7M$$

Ahora con base en la información anterior, puede ser montado el cuadro inicial.

Cuadro inicial del ejemplo

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	RHS
z	1	$1-M$	3	$-1+2M$	0	$-M$	$-M$	0	0	$7M$
x_4	0	1	1	2	1	0	0	0	0	4
x_7	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0	4
x_8	0	0	0	1	0	0	-1	0	1	3
z	1	$\frac{3}{2}-2M$	$\frac{7}{2}-M$	0	$\frac{1}{2}-M$	$-M$	$-M$	0	0	$2+3M$
x_3	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	2
x_7	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	0	1	0	2
x_8	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	-1	0	1	1

Como M $\gg 0$ y bastante grande, entonces el cuadro final es óptimo. En este caso como tenemos que x_7 y x_8 son $\neq s$ de cero, entonces tenemos **un problema infactible**.

2. **Caso B: El problema (PM) es ilimitado**

   En este caso tambien existen 2 casos, cuando todas las variables artificiales son iguales a cero y cuando existe por lo menos una variable artificial $\neq$ de cero.

   (a) Subcaso B1: Todas las variables artificiales son iguales a cero
   Entonces el problema original P es ilimitado.

   Prueba: Tenemos que en el cuadro óptimo de PM: $(x^*, x_a^*) = (x^*, 0)$

$$(z_k - c_k) = \begin{array}{c} max \\ j \in R \end{array} \{(z_j - c_j)\} > 0$$

   Adicionalmente se tiene que, $y_k \leq 0 \;\; y \;\; x_a^* = 0$

   Entonces: $(x^*, 0) \in P$.

   Como el problema PM es ilimitado, entonces $\exists$ una dirección $d = (d_1, d_2) \geq (0, 0)$ para el siguiente conjunto convexo de PM:

$$\{(x, x_a) : \begin{array}{r} Ax + x_a = b \\ \left.\begin{array}{r} x \geq 0 \\ x_a \geq 0 \end{array}\right\} \end{array}$$

   Tal que: $c^{'}d < 0$ [definición de problema ilimitado]
   $\Longrightarrow \begin{bmatrix} c & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = cd_1 + Md_2 < 0 \Longrightarrow$

$$cd_1 + Md_2 < 0 \tag{4.13}$$

   Como M es un número positivo bastante grande, y $d_2 \geq 0$, entonces la desigualdad (4.13) solo es posible cuando $d_2 = 0$,
   $\Longrightarrow d_2 = 0 \Longrightarrow cd_1 < 0 \Longrightarrow$ P es ilimitado !!!
   Ya que d_1 es una dirección del conjunto convexo:

$$\{x : \begin{array}{r} Ax = b \\ \left. x \geq 0 \right\} \end{array}$$

   por lo tanto, como $cd_1 < 0 \Longrightarrow$ P es ilimitado.

Ejemplo: Problema ilimitado

Resolver el siguiente PL:

$$(P) \Longrightarrow \begin{cases} min \;\; z(x) \;\; = \;\; -x_1 - x_2 \\ \qquad s.a. \\ \qquad\qquad x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ \qquad\qquad -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ \qquad\qquad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Empleando las variables artificiales $x_5 \;\; y \;\; x_6$ tenemos el problema modificado (PM):

$$(PM) \Longrightarrow \begin{cases} min \;\; z(x) \;\; = \;\; -x_1 - x_2 + Mx_5 + Mx_6 \\ \qquad s.a. \\ \qquad\qquad x_1 - x_2 - x_3 + x_5 = 1 \\ \qquad\qquad -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_6 = 1 \\ \qquad\qquad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

Implementación del cuadro inicial: $c_B = [\; M \;\; M \;]; \;\; c_N = [\; -1 \;\; -1 \;\; 0 \;\; 0 \;]$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad x_B = \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} \qquad x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$c_B B^{-1} N - c_N = \begin{bmatrix} M & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Donde: $B = \begin{bmatrix} a_5 & a_6 \end{bmatrix} = I$

$$c_B B^{-1} N - c_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & M & -M \end{bmatrix}$$

$$c_B B^{-1} b = c_B \overline{b} = \begin{bmatrix} M & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2M$$

Ahora el cuadro inicial está listo.

Cuadro inicial del ejemplo

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z	1	1	1	M	$-M$	0	0	$2M$
x_5	0	1	-1	-1	0	1	0	1
x_6	0	-1	1	2	-1	0	1	1
z	1	$1+\frac{M}{2}$	$1-\frac{M}{2}$	0	$-\frac{M}{2}$	0	$-\frac{M}{2}$	$\frac{3M}{2}$
x_5	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
x_3	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
z	1	0	2	0	1	$-M-2$	$-M-1$	-3
x_1	0	1	-1	0	-1	2	1	3
x_3	0	0	0	1	-1	1	1	2

En el cuadro final x_2 es candidata a entrar en la base ya que $(z_2 - c_2) = 2 > 0$, sin embargo $y_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \leq 0 \Longrightarrow$ (PM) es ilimitado.

Como las variables artificiales $x_5 = x_6 = 0 \Longrightarrow$ P es ilimitado.

Entonces P es ilimitado en la dirección del rayo:

$$x' = \begin{bmatrix} \\ x_o \\ \\ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -y_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} x_2; \quad x_2 \geq 0$$

$$x' = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \lambda; \lambda \geq 0 \qquad donde: \quad x' = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Reordenando los elementos de $x^{'}$ tenemos el rayo $x^{''}$:

$$x^{'} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \lambda; \lambda \geq 0 \qquad \Longleftarrow \text{ rayo de P}$$

(b) Subcaso B2: No todas las variables artificiales son iguales a cero.
Entonces el problema P es infactible (o inconsistente).
En el cuadro final tenemos que:

$$z_k - c_k = \begin{matrix} max \\ j \in R \end{matrix} \{(z_j - c_j)\} > 0 \;\; y \;\; y_k \leq 0 \;\; y \;\; x_a \neq 0$$

A continuación se presenta un cuadro típico donde las m filas de la base están formadas de tal forma que se tiene una base B con las p primeras columnas de las variables originales y las otras columnas, de (p+1) a m, son formadas por columnas de variables artificiales.

	x_1	$\cdot$	$\cdot$	x_p	x_{p+1}	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	x_m	$\cdot$	x_j	$\cdot$	x_n	RHS
x_1	1	$\cdot$	$\cdot$	0	0	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	0	$\cdot$	$y_{1,j}$	$\cdot$	$\cdot$	$\overline{b}_1$
x_2	0	$\cdot$	$\cdot$	0	0	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	0	$\cdot$	$y_{2,j}$	$\cdot$	$\cdot$	$\overline{b}_2$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
x_p	0	$\cdot$	$\cdot$	0	1	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	0	$\cdot$	$y_{p,j}$	$\cdot$	$\cdot$	$\overline{b}_p$
x_{p+1}	0	$\cdot$	$\cdot$	0	0	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	0	$\cdot$	$y_{p+1,j}$	$\cdot$	$\cdot$	$\overline{b}_{p+1}$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
x_m	0	$\cdot$	$\cdot$	0	0	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	1	$\cdot$	$y_{m,j}$	$\cdot$	$\cdot$	$\overline{b}_m$

Sabemos que: $c_i = M \;\; \forall i = p+1, ..., m \;\; y \;\; Z_j = \sum_{i=1}^{m} c_{B_i} y_{ij}$

Entonces para las variables no básicas j = m+1,....,n tenemos que:

$$z_j - c_j = \sum_{i=1}^{p} c_i y_{ij} + M(\sum_{i=p+1}^{m} y_{ij}) - c_j \tag{4.14}$$

Ahora se va a demostrar que:

$$\sum_{i=p+1}^{m} y_{ij} \leq 0 \quad \forall j = m+1, ..., n \tag{4.15}$$

Si j = k, entonces como $y_{ik} \leq 0 \Longrightarrow$ de manera trivial tenemos que: $\sum_{i=p+1}^{m} y_{ik} \leq 0$

Para $j \neq k$ suponer por contradicción de que: $\sum_{i=p+1}^{m} y_{ij} > 0$ para algún x_j que es variable no básica. Con esa consideración y recordando que M es muy grande de (4.14), se puede concluir que :

$(z_j - c_j) \Longrightarrow$ es muy grande (arbitrariamente grande)
Este hecho viola la definición de que:

$$z_k - c_k = \begin{matrix} max \\ j \in R \end{matrix} \; \{(c_j - c_j) \;\; y \;\; y_k \leq 0\}$$

Así, la consideración es incorrecta y por lo tanto:

$$\sum_{i=p+1}^{m} y_{ij} \leq 0 \;\; \forall j = m+1, .., n \tag{4.16}$$

Sumando las últimas (p-m) filas del cuadro tenemos que:

$$\sum_{i=p+1}^{m} x_i + \sum_{j=m+1}^{n} x_j(\sum_{i=p+1}^{m} y_{ij}) = \sum_{i=p+1}^{m} \overline{b}_i \tag{4.17}$$

Ahora suponer que el problema P tiene una solución factible. Entonces $x_i = 0$ para todas las variables artificiales y por lo tanto $x_i = 0 \;\; \forall_i \;\; i = p+1, .., m$. También $x_j \geq 0$ y como $\sum_{i=p+1}^{m} y_{ij} \leq 0 \;\; \forall_j \; j = m+1, .., n$ como fue demostrado en (4.16) entonces el lado izquierdo de (4.17) es ≤ 0 y el lado derecho de (4.17) es $\neq$ de cero y positivo, ya que no todas las variables artificiales son iguales a cero. Esta contradicción muestra que no existe solución factible para el problema original P.

Observación: No podemos concluir que el problema es inconsistente si observamos que algún $z_j - c_j > 0 \;\; y \;\; y_j \leq 0 \;\; y \;\; x_a \neq 0$. Es necesario que se utilice el más positivo de los $(z_j - c_j)$ en la decisión.

Ejemplo: Problema infactible

Resolver el siguiente PL:

$$(P)\begin{cases} min \;\; z(x) \;\; = \;\; -x_1 - x_2 \\ s.a. \\ \qquad\qquad x_1 - x_2 \geq 1 \\ \qquad\qquad -x_1 + x_2 \geq 1 \\ \qquad\qquad x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Empleando las variables de holgura tenemos:

$$\begin{array}{rcl} x_1 - x_2 - x_3 \qquad & = & 1 \\ -x_1 + x_2 \qquad - x_4 & = & 1 \end{array}$$

Ahora se emplean las variables artificiales $x_5 \;\; y \;\; x_6$ en el problema modificado.

$$\begin{cases} min \;\; z(x) \;\; = \;\; -x_1 - x_2 + Mx_5 + Mx_6 \\ s.a. \\ \qquad\qquad x_1 - x_2 - x_3 + x_5 = 1 \\ \qquad\qquad -x_1 + x_2 - x_4 + x_6 = 1 \\ \qquad\qquad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

Montaje del cuadro inicial:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}; \;\; A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \;\; B = \begin{bmatrix} a_5 & a_6 \end{bmatrix} = I; \;\; x_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$C_B = \begin{bmatrix} M & M \end{bmatrix}; \;\; C_N = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_B B^{-1} N - C_N = \begin{bmatrix} M & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -M & -M \end{bmatrix}$$

$$C_B B^{-1} b = \begin{bmatrix} M & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2M; \quad B^{-1}N = N; \quad B^{-1}b = b$$

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z	1	1	1	$-M$	$-M$	0	0	$2M$
x_5	0	1	-1	-1	0	1	0	1
x_6	0	-1	1	0	-1	0	1	1
z	1	0	2	$1-M$	$-M$	-1	0	$2M-1$
x_1	0	1	-1	-1	0	1	0	1
x_6	0	0	0	-1	-1	1	1	2

El problema es ilimitado $\Longrightarrow x_6 \neq 0 \Longrightarrow$ P es infactible

Observación: La última restricción tiene la siguiente forma:

$$-x_3 - x_4 + x_5 + x_6 = 2 \quad \Rightarrow \quad x_5 + x_6 = 2 + x_3 + x_4 \tag{4.18}$$

Sin embargo en (4.18) siempre se debe satisfacer que:

$x_3 \geq 0; \quad x_4 \geq 0\}$ ya que son variables originales (holgura)

Así, de (4.18) podemos concluir que:

$x_5 + x_6 > 0 \;\Rightarrow\;$ El problema original es inconsistente (infactible).

4.9 Comparación del método de las dos fases y el método Big-M

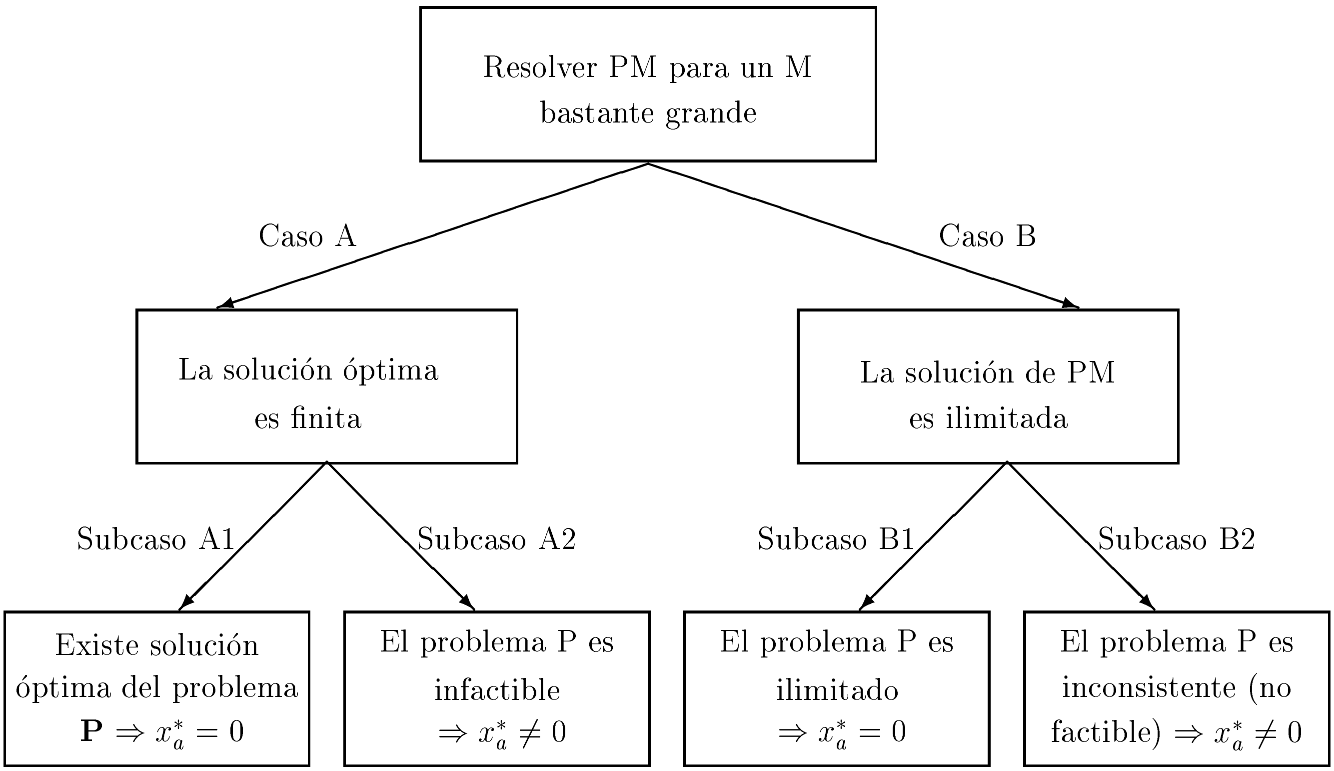
Qué tan grande debe ser M ?

No existe argumento teórico para afirmar que el método Big-M sea más rápido que el método de las dos fases.

El método Big-M puede presentar problemas de error de redondeo por el valor seleccionado para M.

Problema serio envuelto con el método Big-M: Qué tan grande debe ser M? debe asumir un valor tal que para alguna SBF de PM con todas las variables artificiales iguales a cero su correspondiente objetivo debe ser mejor que la mejor SBF de PM con todas las variables artificiales iguales a cero, ya que esa es la única forma de garantizar que una SBF del problema original es más atractiva que la mejor SBF de PM con todas las variables artificiales iguales a cero.

Portanto, en la selección de M no es suficiente comparar el valor de M con los coeficientes de costo de la función objetivo original.



Resumen de resultados

Ejemplo: Puede existir problemas con la selección de M.

Resolver el siguiente PL:

$$(P)\left\{\begin{array}{rcl} \min z(x) & = & x_1 \\ & s.a. & \\ & & \epsilon x_1 - x_2 \geq \epsilon \\ & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}\right.$$

El problema modificado asume la siguiente forma:

$$\begin{array}{rl} \min z(x) = & x_1 + Mx_4 \\ s.a. & \\ & \epsilon x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = \epsilon \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

La figura 4.6 muestra la región factibel del problema en el espacio (x_1, x_2):

Observación:

1. El problema original en $E^3 \Rightarrow$ P tiene solamente un punto extremo $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

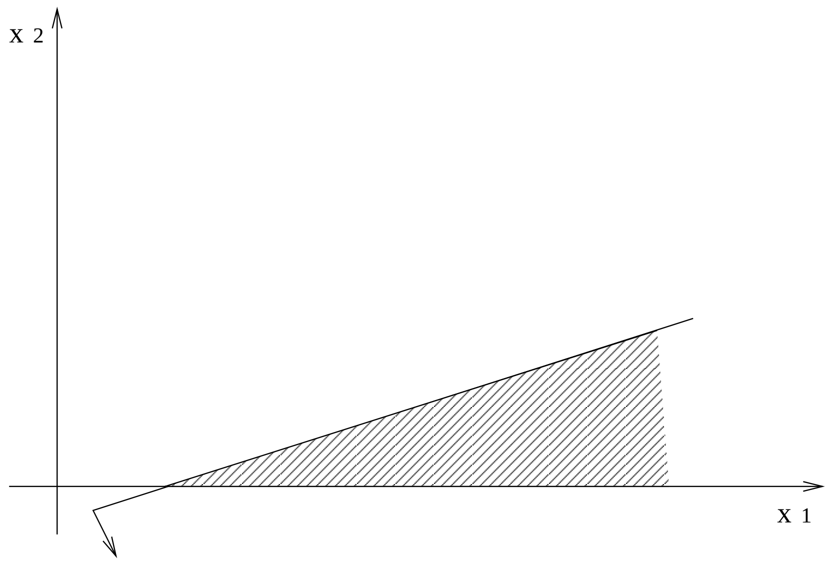


Figura 4.6: Comparación de los métodos de las dos fases y Big-M

2. El problema modificado (PM) en E^4 tiene dos puntos extremos: $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \epsilon \end{bmatrix}$.

   Así, el peligro en la selección de un M inadecuado está en el hecho de que un M no muy grande puede identificar el "punto extremo artificial" como siendo óptimo. Sea $\overline{x}$ el punto extremo original y $x^{''}$ el punto extremo artificial. $\overline{x}$ lleva una función objetivo igual a 1 y $x^{''}$ lleva a un objetivo igual a M. Así, no existe problema con la selección de M si $1 < \epsilon M \Rightarrow M > \frac{1}{\epsilon}$. Una figura en el espacio (x_1, x_4) ilustra mejor el problema.

   En el ejemplo se $\epsilon = 0.01$. entonces $M > 100$, a pesar de que el coeficiente de x_1 sea relativamente pequeña e igual a 1.

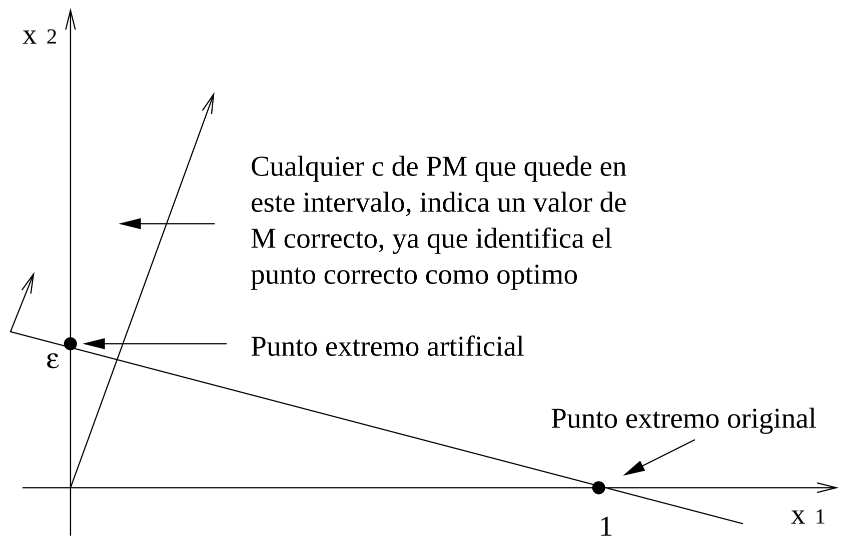


Figura 4.7: Comparación de los métodos de las dos fases y Big-M

4.10 Ejercicios Resueltos:

1. Usar el método de dos fases con múltiples variables artificiales para resolver el siguiente PL:

$$PL: \begin{cases} min & -2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \\ s.a. & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \leq 2 \\ & x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \geq 3 \\ & 2x_1 - x_2 + x_3 \geq 2 \\ & x_j \geq 0, \forall_j \end{cases}$$

Solución:

En cada una de las ecuaciones de la forma $\geq$ donde aparecen variables de holgura negativas, agregamos variables artificiales:

$$PLE: \begin{cases} \text{min } x_0 & = x_8 + x_9 \\ \text{min } z(x) & -2x_1, +2x_2 + x_3 + x_4 \\ s.a. & \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2 \\ & x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 - x_6 + x_8 = 3 \\ & 2x_1 - x_2 + x_3 - x_7 + x_9 = 2 \\ & x_j \geq 0,\ \forall_j = 1,9 \end{cases}$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}; \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$Base = (x_5, x_8, x_9) \;\; ; \;\; c_B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c_5 & c_8 & c_9 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$c_N = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_6 & c_7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}; \quad c_B^{'} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c_5^{'} & c_8^{'} & c_9^{'} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$c_N^{'} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = I$$

Cálculo de coeficiente de costo relativo:

$$c_B^{'}B^{-1}N - c_N^{'} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} [I] \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$c_B^{'}B^{-1}N - c_N^{'} = [3 \quad -2 \quad 1 \quad 2 \quad -1 \quad -1]$$

$$c_B B^{-1}N - c_N^{'} = 0 - c_N = [2 \quad -2 \quad -1 \quad -1 \quad 0 \quad 0]$$

$$B^{-1}N = N \quad ; \quad B^{-1}b = b \quad ; \quad c_B B^{-1}b = 0 \quad ; \quad c_B^{'}B^{-1}b = [0 \ \ 1 \ \ 1]\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 5$$

Inicio de la Fase I: $\Downarrow$

		Z	x_0	x_5	x_8	x_9	x_1 $\Downarrow$	x_2	x_3	x_4	x_6	x_7	RHS	
	Z	1	0	0	0	0	2	-2	-1	- 1	0	0	0	
	x_0	0	1	0	0	0	3	-2	1	2	-1	-1	5	
	x_5	0	0	1	0	0	1	2	1	1	0	0	2	: 2/1
	x_8	0	0	0	1	0	1	-1	1	2	-1	0	3	: 3/1
$\Leftarrow$	x_9	0	0	0	0	1	2	-1	1	0	0	-1	2	: 2/2

Entra x_1 : (Mayor coeficiente de costo relativo en x_0)

		Z	x_0	x_5	x_8	x_9	x_1	x_2	x_3	x_4 $\Downarrow$	x_6	x_7	RHS	
	Z	1	0	0	0	-1	0	-1	-2	- 1	0	1	-2	
	x_0	0	1	0	0	-3/2	0	- 1/2	-1/2	2	-1	1/3	2	
	x_5	0	0	1	0	-1/2	0	5/2	1/2	1	0	1/2	1	: 1/1
$\Leftarrow$	x_8	0	0	0	1	-1/2	0	-1/2	1/2	2	-1	1/2	2	: 2/2
	x_1	0	0	0	0	-1/2	1	-1/2	-1/2	0	0	-1/2	1	: 1/0

Entra x_4 (Mayor coeficiente de costo relativo positivo en x_0)

	Z	x_0	x_5	x_8	x_9	x_1	x_2	x_3	x_4	x_6	x_7	RHS
Z	1	0	0	1/2	-5/4	0	-5/4	-7/4	0	-1/2	5/4	-1
x_0	0	1	0	-1	-1	0	0	-1	0	0	0	0
x_5	0	0	1	-1/2	-1/4	0	11/4	1/4	0	1/2	1/4	0
x_4	0	0	0	1/2	-1/4	0	-1/4	1/4	1	-1/2	1/4	1
x_1	0	0	0	0	1/2	1	-1/2	1/2	0	0	-1/2	1

Fin de Fase I e inicio de la Fase II

$x_0 = 0$ y variables artificiales fuera de la base

Inicio de Fase II:

Z	Z	x_5	x_4	x_1	x_2	x_3	x_6	x_7 $\Downarrow$	RHS	
Z	1	0	0	0	-5/4	-7/4	-1/2	5/4	-1	
$\Leftarrow x_5$	0	1	0	0	11/4	1/4	1/2	1/4	0	: 0
x_4	0	0	1	0	-1/4	1/4	-1/2	1/4	1	: 4
x_1	0	0	0	1	-1/2	1/2	0	-1/2	1	

Entra x_7 (único con coef. de costo relativo positivo)
Sale x_5 (min 0,4)

Después de pivotar:

	Z	x_5	x_4	x_1	x_2	x_3	x_6	x_7	RHS
Z	1	-5	0	0	-15	-3	-3	0	-1
x_7	0	4	0	0	11	1	2	1	0
x_4	0	-1	1	0	-3	0	-1	0	1
x_1	0	2	0	1	5	1	1	0	1

El cuadro obtenido es óptimo

Solución:

$$
\begin{array}{ll}
x_1 = 1 & x_5 = 0 \\
x_2 = 0 & x_6 = 0 \\
x_3 = 0 & x_7 = 0 \\
x_4 = 1 &
\end{array}
$$

$$Z^* = -1$$

2. Resolver el mismo ejercicio anterior usando una única variable artificial.

   Solución:

   Intentando formar una base inicial B = I multiplicamos la segunda y tercera restricción por -1 y tenemos lo siguiente:

$$PLE: \begin{cases} \min & z(x) = -2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \\ s.a. & \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2 \\ & -x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 \qquad + x_6 = -3 \\ & -2x_1 + x_2 - x_3 \qquad + x_7 = -2 \\ & x_j \geq 0, \forall_j \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$B = I = x_B = \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix}; \quad x_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}; c_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad c_N = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Intentamos montar el cuadro inicial:

$$\overline{c}_N = c_B B^{-1} N - c_N = -c_N = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c_B B^{-1} b = 0 \qquad \overline{b} = B^{-1} b = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Como $\overline{b}$ tiene dos elementos negativos entonces necesitamos de la Fase I con la variable artificial $x_a$con un vector y_a asociado de la siguiente forma:

$$y_a = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Calculamos los elementos del cuadro relacionados con x_0 y x_a porque tenemos la función objetivo de la fase I:

$$min \;\; x_0 = x_a$$

$$c_B^{'} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \qquad c_N^{'} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$c_B^{'} B^{-1} N - c_N^{'} = 0; \qquad c_B^{'} y_a - c_a^{'} = 0 - 1 = -1; \qquad \overline{c}_{xa} = c_B y_a = 0; \qquad c_B^{'} B^{-1} b = 0$$

Por lo tanto tenemos el cuadro inicial de la siguiente forma:

	Z	x_0	x_5	x_6	x_7	x_1	x_2	x_3	x_4	x_a	RHS
Z	1	0	0	0	0	2	-2	-1	-1	0	0
x_0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	0
x_5	0	0	1	0	0	1	2	1	1	0	2
$\Leftarrow x_6$	0	0	0	1	0	-1	1	-1	-2	-1	-3
x_7	0	0	0	0	1	-2	1	-1	0	-1	- 2

	Z	x_0	x_5	x_6	x_7	x_1	x_2	x_3	x_4	x_a	RHS
Z	1	0	0	0	0	2	-2	-1	-1	0	0
x_0	0	1	0	-1	0	1	-1	1	2	0	3
x_5	0	0	1	0	0	1	2	1	1	0	2
x_a	0	0	0	-1	0	1	-1	1	2	1	3
$\Leftarrow x_7$	0	0	0	-1	1	-1	0	0	2	0	1

	Z	x_0	x_5	x_6	x_7	x_1	x_2	x_3	x_4	x_a	RHS
Z	1	0	-2	0	0	0	-6	-3	-3	0	-4
x_0	0	1	-1	-1	0	0	-3	0	1	0	1
x_1	0	0	1	0	0	1	2	1	1	0	2
x_a	0	0	-1	-1	0	0	-3	0	1	1	1
x_7	0	0	1	-1	1	0	2	1	3	0	3

	Z	x_0	x_5	x_6	x_7	x_1	x_2	x_3	x_4	x_a	RHS
Z	1	0	-5	-3	0	0	-15	-3	0	3	-1
x_0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	0
x_1	0	0	0	-1	0	1	5	1	0	-1	1
x_4	0	0	-1	-1	0	0	-3	0	1	1	1
x_7	0	0	4	2	1	0	11	1	0	-3	0

$$
\text{Solución :}\quad
\begin{array}{ll}
x_1 = 1 & x_5 = 0 \\
x_2 = 0 & x_6 = 0 \\
x_3 = 0 & x_7 = 0 \\
x_4 = 1 &
\end{array}
\qquad Z^* = -1
$$

El lector esta invitado a resolver nuevamente el problema anterior usando como base inicial $B = [\ a_1 \ \ a_3 \ \ a_4\ ]$, o sea, la base inicial es formada por las variables originales con los valores menores de coeficientes de costo en la función objetivo.

3. Resolver el siguiente PL usando el método de múltiples variables artificiales:

$$PLE : \begin{cases} \min & 3x_1 - 3x_2 + x_3 \\ s.a. & \\ & x_1 + 2x_2 - x_3 \quad \geq 5 \\ & -3x_1 + x_2 + x_3 \quad \leq 4 \\ & x_j \geq 0 \quad \forall_j \end{cases}$$

Se requiere una variable artificial

$$PLE : \begin{cases} \min & 3x_1 - 3x_2 + x_3 \qquad : Z \\ \min & x_6 \qquad : x_0 \\ s.a. & \\ & x_1 + 2x_2 - x_3 \qquad \geq 5 \\ & x_1 + 2x_2 - x_3 \quad -x_4 + x_6 = 5 \\ & -3x_1 - x_2 + x_3 \quad +x_5 = 4 \\ & x_j \geq 0 \quad \forall_j \end{cases}$$

$x_4, x_5 :$ variables de holgura

$x_6 :$ variable artificial

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \qquad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}; \qquad c_N = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$c_B^{'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}; \qquad c_N^{'} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \qquad c_B B^{-1} N - c_N = 0 - c_N = -c_N$$

$$c_B^{'} B^{-1} N - c_N^{'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$c_B^{'} B^{-1} N - c_N^{'} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}; \qquad c_B B^{-1} b = 0$$

$$c_B^{'} B^{-1} b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} = 5 \quad ; \quad B^{-1} b = b$$

$\Downarrow$

	Z	x_0	x_6	x_5	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS	
Z	1	0	0	0	-3	3	-1	0	0	
x_0	0	1	0	0	1	2	-1	-1	5	
$\Leftarrow x_6$	0	0	1	0	1	2	-1	-1	5	$: \frac{5}{2}$
x_5	0	0	00	1	-3	-1	1	0	4	

Entra x_2 (Mayor coef. de costo positivo en la fila de x_0)

$\Downarrow$

	Z	x_0	x_6	x_5	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
Z	1	0	-3/2	0	-9/2	0	1/2	3/2	-15/2
x_0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0
x_2	0	0	1/2	0	1/2	1	-1/2	-1/2	5/2
$\Leftarrow x_5$	0	0	1/2	1	-5/2	0	1/2	-1/2	13/2

Fin de la Fase I. inicio de la fase II

En el cuadro anterior, x_4 es la variable que debe entrar por tener mayor coeficiente de costo positivo en la fila de Z_1 pero no existe un coeficiente y_{ik} positivo que permita su entrada a la base. Por lo tanto el problema es ilimitado. Sin embargo, a manera de ilustración escogemos entonces a x_3 que también tiene coeficiente de costo positivo.

$\Downarrow$

	Z	x_5	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
Z	1	-2	-2	0	0	2	-14
x_2	0	1	-2	1	0	-1	9
x_3	0	2	-5	0	1	-1	13

Se observa que la función objetivo $\rightarrow$ mejora. Sin embargo la función costo relativo de x_4 es positiva y no hay posibilidad de entrada a la base ya que y_{24} y y_{34} son negativos significa que x_4 puede crecer indefinidamente ya que no existe variable de bloqueo continuando el carácter ilimitado del problema. El problema es ilimitado a partir del siguiente punto extremo:

$$\left[\ x_1 = 0 \quad x_2 = 9 \quad x_3 = 13 \quad x_4 = 0\ \right]$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p - 1/10 \\ -1 \end{bmatrix}$$

En consecuencia, $e = -1$ y $p = 1/10$

Cuadro encontrado:

	Z	x_3	x_1	x_2	x_4	RHS
Z	1	0	0	1	4	6
x_3	0	1	0	0	1/5	4
x_1	0	0	1	-1	2	3

En resumen:
a = 3 ; b= 0 ; c = 0 ; d = 1 ; e = -1 ; f = 0 ; g = 4

b) Sistema original:

$$P:L. \begin{cases} max & 2x_1 - 3x_2 \\ s.a. & \\ & -1/10x_1 + 1/10x_2 \leq 37/10 \\ & 1/2x_1 - 1/2x_2 \leq 3/2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

c) $\frac{\delta x_3}{\delta x_2} = 0$; $\frac{\delta Z}{\delta b_1} = 0$; $\frac{\delta Z}{\delta x_4} = -4$; $\frac{\delta x_1}{\delta b_1} = 0$

	Z	x_3	x_1	x_2	x_4	RHS
Z	1	0	0	1	4	6
x_3	0	1	0	0	1/5	4
x_1	0	0	1	-1	2	3

d) El cuadro es óptimo ?

$$\left.\begin{array}{l} (z_2 - c_2) = 1 \geq 0 \\ (z_4 - c_4) = 4 \geq 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{cuando la función objetivo es del tipo Maximizar} \\ \Rightarrow \text{ todos los}(z_j - c_j) \geq 0 \Rightarrow \text{óptimo} \end{array}$$

La solución es **óptima**!

CAPÍTULO 5

EL SIMPLEX REVISADO

5.1 Introducción

El método simplex revisado es un esquema de implementación del método simplex en una forma computacionalmente eficiente en algunos problemas, dependiendo de los valores de m y n, donde las operaciones de pivotaje son realizadas solamente en un cuadro reducido del tamaño de la base.

Recordando los pasos del Simplex: Problema de minimización

Suponer que tenemos una SBF con base B e inversa B^{-1}, entonces:

1. La solución básica factible es dada por $x_B = B^{-1}b = \overline{b}$ y $x_N = 0$
   con objetivo: $z(x) = c_B B^{-1} b = wb = c_B \overline{b}$ donde: $w = c_B B^{-1}$.
2. Se puede calcular: $w = c_B B^{-1}$
   Para las variables no básicas se puede calcular sus costos relativos: $\overline{c}_N$
   $\overline{c}_N = c_B B^{-1} N - c_N$ donde cada elemento de $\overline{c}_N$ es :
   $$(z_j - c_j) = c_B B^{-1} a_j - c_j = w a_j - c_j$$
   Sea $(z_k - c_k)$ el mayor elemento de $\overline{c}_N$, entonces:
   Si $(z_k - c_k) \leq 0 \Longrightarrow$ pare $\Longrightarrow$ el óptimo fue encontrado.
   En otro caso, la variable no básica x_k es candidata para entrar en la base.
3. Calcular: $y_k = B^{-1} a_k$ correspondiente a la columna k de la matriz original A, actualizada para la base actual B.
   Si $y_k \leq 0 \Longrightarrow$ pare $\Longrightarrow$ problema ilimitado.

En otro caso, seleccionar una variable x_{Br} que debe salir de la base. El índice r es obtenido de la columna k actualizada a través de la relación:

$$\frac{\overline{b}_r}{y_{rk}} = min\left\{\frac{\overline{b}_i}{y_{ik}}; y_{ik} > 0\right\}; i = 1, m$$

Actualizamos B substituyendo a_{B_r} por a_k (pivotaje) y regresamos al paso 1.

5.2 Cuadro Reducido del Simplex

Suponer que se tiene disponible una base B y su inversa B^{-1}, entonces es posible implementar el siguiente cuadro reducido:

BASE INVERSA	RHS
w	$c_B\overline{b}$
B^{-1}	$\overline{b}$

Cuadro 5.1: Cuadro del Simplex Revisado

Donde: $w = c_B B^{-1}$ y $\overline{b} = B^{-1}b$

Verificando la posibilidad de emplear el cuadro Simplex revisado:

1. Toda la información necesaria está en el cuadro. Y también lógicamente, tenemos disponible los valores de A,b y c.

2. Se pueden calcular todos los costos relativos de las variables no básicas:

$$\overline{c}_N = c_B B^{-1} N - c_N = wN - c_N$$

   Esto es posible porque w es conocido y, además, N y c_N son las columnas de las variables no básicas del problema original y los costos originales de las mismas.

3. Se puede calcular: $B^{-1}a_k = y_k$ ya que B^{-1} es conocido (está en el cuadro) y a_k es la columna original de la variable no básica x_k en la matriz A.

   Si es realizado el cambio de base, entonces el pivotaje es realizado solamente para el cuadro reducido:

Base inversa	RHS	x_k(variable no básica que entra en la base)
w	$c_B\overline{b}$	$(z_k - c_k)$
	$\overline{b}_1$	y_{1k}
	$\overline{b}_2$	y_{2k}
B^{-1}	$\vdots$	$\vdots$
	$\overline{b}_r$	$y_{rk} \Longleftarrow$ (elemento pivot)
	$\vdots$	$\vdots$
	$\overline{b}_m$	y_{mk}

Cuadro 5.2

El cuadro 5.2 pivotado mantiene la estructura de w y B^{-1} para la nueva base ? Si, ya que B^{-1} y w aparecen siempre abajo de las mismas columnas del cuadro, desde que el cuadro original ya tenga w y B^{-1}.

Ejemplo 1: Resolver el siguiente PL:

$$\begin{array}{rcr} min \;\; z(x) & = & -x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - 4x_5 + 2x_6 \\ s.a. & & \\ & & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 6 \\ & & 2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 \leq 4 \\ & & x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 \leq 4 \\ & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{array}$$

Al introducir las variables de holgura x_7, x_8, x_9 se tiene:

$$\begin{array}{rcr} min \;\; z(x) & = & -x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - 4x_5 + 2x_6 \\ s.a. & & \\ & & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 6 \\ & & 2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 + x_8 = 4 \\ & & x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 + x_9 = 4 \\ & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9 \geq 0 \end{array}$$

1. **Montaje del cuadro inicial**:

   Base Inicial: $x_B = (x_7, x_8, x_9) \Longrightarrow$ B = I (matriz identidad);

   $x_N = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$

   $w = c_B B^{-1} = [0 \;\; 0 \;\; 0]I = [0 \;\; 0 \;\; 0]$

   $$\Longrightarrow \overline{b} = B^{-1}b = Ib = b \Longrightarrow \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

   También: $c_B B^{-1} b = 0$

	Base inversa			RHS	x_5
z	0	0	0	0	4
x_7	1	0	0	6	1
x_8	0	1	0	4	0
x_9	0	0	1	4	2

$\Longleftarrow$ *pivot*

2. Verificar optimalidad:
   $\overline{c}_N = c_B B^{-1} N - c_N = wN - c_N = -c_N = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$
   No es óptimo, entonces x_5 entra en la base.

3. Actualizar la columna de x_5:

$$y_5 = B^{-1} a_5 = a_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Por el momento no existe posibilidad de que el problema sea ilimitado y debe ser seleccionada la variable que sale de la base. La columna actualizada de x_5 es la siguiente:

Columna de a_5 actualizada: $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow x_9$ sale de la base

1. **Pivotaje**:

	Base inversa			RHS	x_2
z	0	0	-2	-8	2
x_7	1	0	$-\frac{1}{2}$	4	1
x_8	0	1	0	4	-1
x_5	0	0	$\frac{1}{2}$	2	0

$\Longleftarrow$ *pivot*

$$x_B = [x_7, x_8, x_5] \quad ; \quad x_N = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_6, x_9]$$

2. Verificar optimalidad:

$$\overline{c}_N = c_B B^{-1} N - c_N = wN - c_N$$

$$\overline{c}_N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{c}_N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & -2 & -2 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 & -4 & -2 \end{bmatrix}$$

No es óptimo $\Longrightarrow x_2$ es candidato a entrar en la base.

3. Actualizar la columna de x_2

$$y_2 = B^{-1}a_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \textit{Columna} \\ \text{actualizada de } y_2 \end{array}$$

Es ilimitado? no es por el momento. Entonces x_7 sale de la base.

1. **Pivotaje**:

	Base inversa			RHS
z	-2	0	-1	-16
x_2	1	0	$-\frac{1}{2}$	4
x_8	1	1	$-\frac{1}{2}$	8
x_5	0	0	$\frac{1}{2}$	2

2. Verificar la optimalidad:

$\overline{c}_N = wN - c_N$

$x_B = (x_2, x_8, x_5)$

$x_N = (x_1, x_3, x_4, x_6, x_7, x_9)$

$$\overline{c}_N = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{c}_N = \begin{bmatrix} -2 & -3 & -3 & -3 & -2 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{c}_N = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -2 & -5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \text{óptimo}$$

Es óptimo entonces $\Longrightarrow$ pare. La solución óptima es la siguiente:

$$\begin{cases} x_2 = 4 \\ x_5 = 2 \Longrightarrow z(x) = -16 \\ x_8 = 8 \end{cases}$$

Operaciones: Las operaciones realizadas, por iteración, para este problema con m = 3 (restricciones) y n = 9 (variables) son los siguientes:

Simplex Revisado:

Multiplicaciones = $m(n-m)+(m+1)^2 = 34$.

Sumas = $m(n+1) = 30$.

Simplex normal:

Multiplicaciones = $m(n-m)+n+1 = 28$.

Sumas = $m(n-m+1) = 21$.

El siguiente cuadro muestra la solución del problema usando el algoritmo simplex normal:

Simplex normal:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	RHS
z	1	1	2	-1	1	4	-2	0	0	0	0
x_7	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	6
x_8	0	2	-1	-2	1	0	0	0	1	0	4
x_9	0	0	0	1	1	2	1	0	0	1	4
z	1	1	2	-3	-1	0	-4	0	0	-2	-8
x_7	0	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	4
x_8	0	2	-1	-2	1	0	0	0	1	0	4
x_5	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	2
z	1	-1	0	-4	-2	0	-5	-2	0	-1	-16
x_2	0	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	4
x_8	0	3	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	1	$-\frac{1}{2}$	8
x_5	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	2

$$\text{Solución óptima: } \begin{cases} x_2 = 4 \\ x_5 = 2 \\ x_8 = 8 \end{cases} \Longrightarrow z(x) = -16$$

Observaciones:

1. Que método requiere más operaciones, el simplex normal o simplex revisado ?

   En cada iteración se realizan las siguientes operaciones de adición y/o multiplicación:

   Normal: $2m(n-m)+m+n+1$

   Revisado: $(m+1)^2+m(2n-m+1)$

   Así, dependiendo de los valores de m y n, se pueden determinar las operaciones necesarias por iteración.

   Para sistemas pequeños el esfuerzo computacional es similar y hasta menor en el caso del simplex normal.

2. El simplex revisado presenta un mejor comportamiento en sistemas de gran tamaño. Para una matriz A muy grande se tienen las siguientes ventajas:

   a) Como el simplex revisado emplea la submatriz N original, entonces si A es dispersa (tiene pocos elementos diferentes de cero) toda la matriz A es almacenada en forma compacta en un vector con apuntadores adecuados. Así, el número de operaciones para calcular $\overline{c}_N$ se reduce considerablemente. Igual acontece con y_k.

   b) El simplex revisado presenta menor error de redondeo ya que emplea los valores originales para calcular $\overline{c}_N$ y y_k.
   Así, el simplex revisado presenta error de redondeo solamente en el pivotaje.

Algoritmo Simplex Revisado (minimización)

Paso Inicial:

Encontrar una SBF inicial con base B e inversa B^{-1}. Calcular $w=c_BB^{-1}$, $c_BB^{-1}b=wb$ y $\overline{b}=B^{-1}b$ e implementar el cuadro revisado:

BASE INVERSA	RHS
w	$c_B\overline{b}$
B^{-1}	$\overline{b}$

Si no existe SBF inicial, entonces se implementa la fase I del simplex.

Paso Principal:

1. Calcular los costos relativos de las variables no básicas:

$$\overline{c}_N = c_BB^{-1}N - c_N = wN - c_N \Longleftarrow (z_j - c_j) \quad \forall_j \in R$$

2. Sea: $(z_k - c_k) = \begin{array}{c} max \\ j \in R \end{array} \{(z_j - c_j)\}$

   - Si $(z_k - c_k) \leq 0 \Longrightarrow$ pare $\Longrightarrow$ fue encontrada la solución óptima.
   - En caso contrario x_k es candidata a entrar en la base. Entonces se debe ir al paso (3).

3. Calcular: $y_k = B^{-1}a_k$

   - Si $y_k \leq 0 \Longrightarrow$ pare. El problema es ilimitado.
   - Si $y_k \not\leq 0$ entonces colocar la columna $\begin{bmatrix} z_k - c_k \\ y_k \end{bmatrix}$ en el lado derecho del cuadro simplex revisado, de la siguiente forma:

BASE INVERSA	RHS		x_k
w	$c_B\overline{b}$		$(z_k - c_k)$
B^{-1}	$\overline{b}$		y_k

   Determine el índice pivot r usando la siguiente relación:

$$\frac{\overline{b}_r}{y_{rk}} = \begin{array}{c} min \\ 1 \leq i \leq m \end{array} \left\{ \frac{\overline{b}_i}{y_{ik}}; \quad y_{ik} > 0 \right\}$$

   Pivotar el cuadro simplex revisado con el pivot y_{rk}, actualizar las variables básicas y regresar para el paso (1).

5.3 Método de las Dos Fases del Simplex Revisado

En este caso se pueden tener dos filas para la función objetivo o actualizar la fila objetivo original después de concluir la fase I.

Ejemplo 2: Resolver el siguiente PL:

$$\begin{array}{rcl} min \;\; z(x) & = & 3x_1 - x_2 - 7x_3 + 3x_4 + x_5 \\ s.a. & & \\ & & 5x_1 - 4x_2 + 13x_3 - 2x_4 + x_5 = 20 \\ & & x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 + x_5 = 8 \\ & & x_j \geq 0 \end{array}$$

Adicionando las variables artificiales tenemos:

$$\begin{array}{rcl} min \;\; z(x) & = & 3x_1 - x_2 - 7x_3 + 3x_4 + x_5 \\ s.a. & & \\ & & 5x_1 - 4x_2 + 13x_3 - 2x_4 + x_5 + x_6 = 20 \\ & & x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 + x_5 + x_7 = 8 \\ & & x_j \geq 0 \end{array}$$

Incorporando la función objetivo de la fase I y usando una notación compacta el PL asume la siguiente forma:

$$min \; z(x) = \left[\begin{array}{ccccccc} 3 & -1 & -7 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] x$$

$$min \; x_o = \left[\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] x$$

s.a.

$$\left[\begin{array}{ccccccc} 5 & -4 & 13 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 5 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] x = \left[\begin{array}{c} 20 \\ 8 \end{array}\right]$$

Base: $x_B = [x_6, x_7]$; $\qquad B = I = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right]$

Sea $w^{'}$ los multiplicadores simplex relacionados con la función objetivo de fase I:

$$w^{'} = c^{'}_B B^{-1} = c^{'}_B I = c^{'}_B = \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \end{array}\right]$$

También:

$$\overline{b} = B^{-1} b = b = \left[\begin{array}{c} 20 \\ 8 \end{array}\right]$$

$$x_o = c^{'}_B B^{-1} b = w^{'} b = \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} 20 \\ 8 \end{array}\right] = 28$$

1. Montaje del cuadro inicial:

	Cuadro inicial		RHS	x_3
x_o	1	1	28	18
x_6	1	0	20	13
x_7	0	1	8	5

$\Longrightarrow$ *pivot*

1. Calcular los coeficientes de costo relativos de las variables no básicas y verificar optimalidad:

   $x_N = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$

   $$\overline{c}^{'}_N = c^{'}_B B^{-1} N - c^{'}_N = \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccccc} 5 & -4 & 13 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 5 & 1 & 1 \end{array}\right] - \left[\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

   $$\overline{c}^{'}_N = \left[\begin{array}{ccccc} 6 & -5 & 18 & -3 & 2 \end{array}\right] - \left[\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccccc} 6 & -5 & 18 & -3 & 2 \end{array}\right]$$

2. Escoger la variable candidata a entrar en la base:

   El cuadro no es óptimo, entonces x_3 entra en la base.

3. Actualizar la columna de x_3 y realizar pivotaje:

   $y_3 = B^{-1}a_3 = a_3 = \begin{bmatrix} 13 \\ 5 \end{bmatrix}$

   Columna pivot de x_3 actualizada: $\begin{bmatrix} 18 \\ 13 \\ 5 \end{bmatrix}$

   x_6 sale de la base y se debe realizar pivotaje:

	Base inversa		RHS	x_5	
x_o	$-\frac{5}{13}$	1	$\frac{4}{13}$	$\frac{8}{13}$	
x_3	$\frac{1}{13}$	0	$\frac{20}{13}$	$\frac{1}{13}$	
x_7	$-\frac{5}{13}$	1	$\frac{4}{13}$	$\frac{8}{13}$	$\Longleftarrow$ *pivot*

1. Calcular los coeficientes de costo relativos de las variables no básicas y verificar la optimalidad:

   $x_N = [x_1, x_2, x_4, x_5, x_6]$

   $\overline{c}'_N = c'_B B^{-1} N - c'_N = \begin{bmatrix} -\frac{5}{13} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

   $\overline{c}'_N = \begin{bmatrix} -\frac{12}{13} & \frac{7}{13} & -\frac{3}{13} & \frac{8}{13} & -\frac{18}{13} \end{bmatrix}$

2. Escoger la variable candidata a entrar en la base:

   El cuadro no es óptimo, entonces x_5 es candidata a entrar en la base.

3. Actualizar la columna de x_5 y realizar pivotaje:

   $y_5 = B^{-1}a_5 = \begin{bmatrix} \frac{1}{13} & 0 \\ -\frac{5}{13} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{13} \\ \frac{8}{13} \end{bmatrix}$

   Columna actualizada. $\begin{bmatrix} \frac{8}{13} \\ \frac{1}{13} \\ \frac{8}{13} \end{bmatrix}$

   No es ilimitado por ahora y x_7 sale de la base y se debe realizar pivotaje.

   Pivotaje:

	Base inversa		RHS
x_o	0	0	0
x_3	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{2}$
x_5	$-\frac{5}{8}$	$\frac{13}{8}$	$\frac{1}{2}$

Final de la Fase I: $x_N = [x_1, x_2, x_4, x_6, x_7]$

1. Calcular los coeficientes de costo relativos de las variables no básicas y verificar la optimalidad:

$$\overline{c}'_N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} N - c'_N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \text{óptimo !}$$

2. El cuadro es óptimo y termina la fase I.

Fase II:

Para la fase II se debe calcular w y $c_B B^{-1} b \Longrightarrow w$ y wb.

$$w = c_B B^{-1} = \begin{bmatrix} -7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{5}{8} & \frac{13}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

$$w\, b = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 8 \end{bmatrix} = -10$$

$$x_N = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_4 \end{bmatrix}$$

Ahora es posible montar el cuadro inicial de la fase II y continuar el proceso de optimización.

Cuadro inicial de la fase II				
	Base inversa		RHS	x_2
z	$-\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	-10	$\frac{9}{2}$
x_3	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{8}$
x_5	$-\frac{5}{8}$	$\frac{13}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{8}$

$\Longleftarrow$ *pivot*

1. Calcular los coeficientes de costo relativos de las variables no básicas y verificar la optimalidad:

$$\overline{c}_N = wN - c_N = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\overline{c}_N = \begin{bmatrix} -5 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \end{bmatrix} \Longrightarrow \overline{c} = \begin{bmatrix} -8 & \frac{9}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

2. Escoger la variable que debe entrar en la base:

   El cuadro no es óptimo y x_2 es candidata para entrar en la base.

3. Actualizar la columna de x_2 y realizar pivotaje:

$$y_2 = B^{-1} a_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{5}{8} & \frac{13}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{8} \\ \frac{7}{8} \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} \frac{9}{2} \\ -\frac{3}{8} \\ \frac{7}{8} \end{bmatrix}$$

   x_5 sale de la base.

Pivotaje:

	Base inversa		RHS	
z	$\frac{12}{7}$	$-\frac{41}{7}$	$-\frac{88}{7}$	
x_3	$-\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{12}{7}$	
x_2	$-\frac{5}{7}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{4}{7}$	*pivot*

$x_B = [x_3, x2] \qquad x_N = [x_1, x_4, x_5]$

1. Calcular los coeficientes de costo relativos de las variables no básicas y verificar la optimalidad:

$$\overline{c}_N = wN - c_N = \begin{bmatrix} \frac{12}{7} & -\frac{41}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overline{c}_N = \begin{bmatrix} -\frac{2}{7} & -\frac{4}{7} & -\frac{36}{7} \end{bmatrix} \Longrightarrow \text{óptimo global}$$

2. El cuadro es óptimo y la solución óptima es la siguiente:

$$\text{Solución} \begin{cases} x_2 = \frac{4}{7} \\ x_3 = \frac{12}{7} \end{cases} \Longrightarrow z(x) = -\frac{88}{7}.$$

Montaje de un único cuadro para las dos fases del simplex revisado

Es posible colocar inicialmente las dos filas de la función objetivo en el cuadro simplex revisado para facilitar la transición para la fase II. A manera de ilustración se resuelve nuevamente el problema anterior realizando el montaje de un único cuadro desde el inicio del proceso.

Para montar el cuadro inicial y resolver el ejemplo nuevamente, aprovechamos los cálculos realizados en el problema anterior y simplemente se calcula los parámetros restantes. Por lo tanto, para montar el cuadro inicial se calcula los elementos de la fila de la función objetivo original para la base inicial formado por $x_B = [x_6 \quad x_7]$.

Como $c_B = [\,0 \quad 0\,]$ tenemos:

$$w = c_B B^{-1} = c_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}; \qquad c_B B^{-1} b = 0$$

	Cuadro inicial global				
	Base inversa		RHS	x_3	
x_o	1	1	28	18	
z	0	0	0	7	
x_6	1	0	20	13	*pivot*
x_7	0	1	8	5	

Es necesario calcular solamente $\overline{c}_3 = wa_3 - c_3 = -c_3 = 7$ para tener la columna pivot:

$$\Longrightarrow \text{Columna pivot: } \begin{bmatrix} 18 \\ 7 \\ 13 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Entonces realizamos pivotaje:

	Base inversa		RHS	x_5	
x_o	$-\frac{5}{13}$	1	$\frac{4}{13}$	$\frac{8}{13}$	
z	$-\frac{7}{13}$	0	$-\frac{140}{13}$	$-\frac{20}{13}$	
x_3	$\frac{1}{13}$	0	$\frac{20}{13}$	$\frac{1}{13}$	
x_7	$-\frac{5}{13}$	1	$\frac{4}{13}$	$\frac{8}{13}$	$\Longleftarrow$ *pivot*

Nuevamente, se calcula solamente c_5 para tener disponible la columna pivot de x_5 adecuadamente actualizada. Así tenemos:

$$\overline{c}_5 = \begin{bmatrix} -\frac{7}{13} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - c_5 = -\frac{7}{13} - 1 = -\frac{20}{13} \Longrightarrow \overline{c}_5 = -\frac{20}{13}$$

$$\text{Columna pivot: } \begin{bmatrix} \frac{8}{13} \\ -\frac{20}{13} \\ \frac{1}{13} \\ \frac{8}{13} \end{bmatrix}$$

Se realiza pivotaje:

	Base inversa		RHS
x_o	0	0	0
z	$-\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	-10
x_3	$\frac{1}{8}$	-$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{2}$
x_5	$-\frac{5}{8}$	$\frac{13}{8}$	$\frac{1}{2}$

En este caso termina la fase I y se pasa para la fase II.

Cálculo de $\overline{c}_N$:

$x_N = [x_1, x_2, x_4]$

$$\overline{c}_N = wN - c_N = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & \frac{9}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

No es óptimo y x_2 entra en la base.

3. Calculamos la columna actualizada de x_2 explícitamente:

$$y_2 = B^{-1}a_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{5}{8} & \frac{13}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{8} \\ \frac{7}{8} \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} \frac{9}{2} \\ -\frac{3}{8} \\ \frac{7}{8} \end{bmatrix}$$

	Base inversa		RHS	x_2
z	$-\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	-10	$\frac{9}{2}$
x_3	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{8}$
x_5	$-\frac{5}{8}$	$\frac{13}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{8}$

$\Longleftarrow$ *pivot*

x_5 sale de la base.

1. **Pivotaje**

	Base inversa		RHS
z	$\frac{12}{7}$	$-\frac{41}{7}$	$-\frac{88}{7}$
x_3	$-\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{12}{7}$
x_2	$-\frac{5}{7}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{4}{7}$

$x_B = [x_3, x_2] \qquad x_N = [x_1, x_4, x_5]$

Verificando optimalidad:

$\overline{c}_N = wN - c_N = \begin{bmatrix} \frac{12}{7} & -\frac{41}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{7} & -\frac{4}{7} & -\frac{36}{7} \end{bmatrix} \Longrightarrow$ óptimo global.

Solución óptima global:

$$\begin{cases} x_2 = \frac{4}{7} \\ x_3 = \frac{12}{7} \end{cases} \Longrightarrow z(x) = -\frac{88}{7}$$

A manera de ilustración se muestra, en el próximo cuadro, la solución del problema usando el simplex normal y montando el cuadro inicial de la misma forma que es realizada en el libro de Bazaraa:

Simplex normal:

	z	x_o	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
z	1	0	-3	1	7	-3	-1	0	0	0
x_o	0	1	0	0	0	0	0	-1	-1	0
x_6	0	0	5	-4	13	-2	1	1	0	20
x_7	0	0	1	-1	5	-1	1	0	1	8
z	1	0	-3	1	7	-3	-1	0	0	0
x_o	0	1	6	-5	18	-3	2	0	0	28
x_6	0	0	5	-4	13	-2	1	1	0	20
x_7	0	0	1	-1	5	-1	1	0	1	8
z	1	0	$-\frac{74}{13}$	$\frac{41}{13}$	0	$-\frac{25}{13}$	$-\frac{20}{13}$	$-\frac{7}{13}$	0	$-\frac{140}{13}$
x_o	0	1	$-\frac{12}{13}$	$\frac{7}{13}$	0	$-\frac{3}{13}$	$\frac{8}{13}$	$-\frac{18}{13}$	0	$\frac{4}{13}$
x_3	0	0	$\frac{5}{13}$	$-\frac{4}{13}$	1	$-\frac{2}{13}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{1}{13}$	0	$\frac{20}{13}$
x_7	0	0	$-\frac{12}{13}$	$\frac{7}{13}$	0	$-\frac{3}{13}$	$\frac{8}{13}$	$-\frac{5}{13}$	1	$\frac{4}{13}$
z	1	0	-8	$\frac{9}{2}$	0	$-\frac{5}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	-10
x_o	0	1	0	0	0	0	0	-1	-1	0
x_3	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{8}$	1	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{2}$
x_5	0	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{7}{8}$	0	$-\frac{3}{8}$	1	$-\frac{5}{8}$	$\frac{13}{8}$	$\frac{1}{2}$
z	1	$\cdot$	$-\frac{2}{7}$	0	0	$-\frac{4}{7}$	$-\frac{36}{7}$	$\cdot$	$\cdot$	$-\frac{88}{7}$
x_3	0	$\cdot$	$-\frac{1}{7}$	0	1	$-\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{12}{7}$
x_2	0	$\cdot$	$-\frac{12}{7}$	1	0	$-\frac{3}{7}$	$\frac{8}{7}$	$-\frac{5}{7}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{4}{7}$

Observación importante:

Se debe observar que el cuadro inicial del método simplex revisado se puede montar con cualquier base factible y no necesariamente a partir de una base que sea la matriz identidad.

Para ilustrar esta posibilidad procedemos a montar el cuadro inicial del método simplex revisado, para el ejemplo 2, para una base definida por $x_B = (x_3,\ x_5)$ (que obviamente tiene que ser una SBF).

Así tenemos:

$$B = \begin{bmatrix} 13 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{5}{8} & \frac{13}{8} \end{bmatrix}$$

Entonces: $w = c_B B^{-1} = \begin{bmatrix} -7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{5}{8} & \frac{13}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$

$\overline{z} = c_B B^{-1} b = wb = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 8 \end{bmatrix} = -10$

$\overline{b} = B^{-1} b = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{5}{8} & \frac{13}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

El lector está invitado a terminar de resolver el problema.

	Cuadro actual		
	Base inversa		RHS
z	$-\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	-10
x_3	$\frac{1}{8}$	-$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{2}$
x_5	$-\frac{5}{8}$	$\frac{13}{8}$	$\frac{1}{2}$

Prevención de ciclaje

Cuando un problema tiene puntos extremos degenerados puede aparecer problemas de ciclaje que consiste en un proceso de oscilación del método simplex en torno del punto extremo degenerado. Este fenómeno anormal es más típico de problemas teóricos y raramente sucede en problemas reales. Para evitar ciclaje se puede usar la siguiente estrategia:

Sea x_k la variable que entra en la base, entonces la variable que sale de la base es determinada por :

$$I_o = \left\{ r : \frac{\overline{b}_r}{y_{rk}} = min \left\{ \frac{b_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0; i = 1, m \right\} \right\}$$

Si $\exists$ un simple elemento (único) entonces x_{B_r} sale de la base. En caso contrario determinar:

$$I_1 = \left\{ r : \frac{y_{r1}}{y_{rk}} = \begin{array}{c} min \\ i \in I_o \end{array} \left\{ \frac{y_{i1}}{y_{ik}} \right\} \right\}$$

Si existe un único elemento entonces x_{B_r} sale de la base, en caso contrario continuar así hasta encontrar un único índice a través de la relación:

$$I_j = \left\{ r : \frac{y_{rj}}{y_{rk}} = \begin{array}{c} min \\ i \in I_{j-1} \end{array} \left\{ \frac{y_{ij}}{y_{ik}} \right\} \right\}$$

Ejemplo 3: Resolver el siguiente PL:

$$\begin{array}{rcl} min \quad z(x) & = & -\frac{3}{4}x_4 + 20x_5 - \frac{1}{2}x_6 + 6x_7 \\ s.a. & & \\ & & x_1 + \frac{1}{4}x_4 - 8x_5 - x_6 + 9x_7 = 0 \\ & & x_2 + \frac{1}{2}x_4 - 12x_5 - \frac{1}{2}x_6 + 3x_7 = 0 \\ & & x_3 + x_6 = 1 \\ & & x_j \geq 0 \end{array}$$

Cuadro simplex:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS	
z	1	0	0	0	$\frac{3}{4}$	-20	$\frac{1}{2}$	-6	0	x_4 entra en la base
x_1	0	1	0	0	$\frac{1}{4}$	-8	-1	9	0	$I_o = min\{\frac{0}{1/4}, \frac{0}{1/2}\ \} \Longrightarrow I_o \Longrightarrow \{\ 1,\ 2\ \}$
x_2	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	-12	$-\frac{1}{2}$	3	0	$I_1 = \min\ \{\ \frac{1}{1/4}, \frac{0}{1/2}\ \} \Longrightarrow I_1 \Longrightarrow \{\ 2\ \}$
x_3	0	0	0	1	0	0	1	0	1	x_2 sale de la base
z	1	0	$-\frac{3}{2}$	0	0	-2	$\frac{5}{4}$	$-\frac{21}{2}$	0	
x_1	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	-2	$-\frac{3}{4}$	$\frac{15}{2}$	0	x_6 entra en la base
x_4	0	0	2	0	1	-24	-1	6	0	$I_o = \{r :\ min\{\frac{1}{1}\ \}\ \} = 3$
x_3	0	0	0	1	0	0	1	0	1	x_3 sale de la base
z	1	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{4}$	0	-2	0	$-\frac{21}{2}$	$-\frac{5}{4}$	
x_1	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	0	-2	0	$\frac{15}{2}$	$\frac{3}{4}$	
x_4	0	0	2	1	1	-24	0	6	1	
x_6	0	0	0	1	0	0	1	0	1	

5.4 Ejercicios Resueltos:

1. Resolver el siguiente problema usando el método SIMPLEX revisado:

$$PL \quad \begin{cases} \max & 3x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 \\ s.a. & \\ & 8x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 \leq 7 \\ & 2x_1 + 6x_2 + x_3 + 5x_4 \leq 3 \\ & x_1 + 4x_2 + 5X_3 + 2X_4 \leq 8 \\ & \\ & x_j \geq 0, \forall_j \end{cases}$$

$$PL \quad \begin{cases} \text{-min} & -3x_1 - 4x_2 - x_3 - x_4 \\ s.a. & \\ & 8x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 + x_5 = 7 \\ & 2x_1 + 6x_2 + x_3 + 5x_4 + x_6 = 3 \\ & x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + x_7 = 8 \\ & \\ & x_j \geq 0, \forall_j \end{cases}$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 8 & 3 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 5 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}; \quad b = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$B = B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad N = \begin{bmatrix} 8 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}; \quad \begin{array}{ll} c_B = & [0 \quad 0 \quad 0] \\ c_N = & [-3 \quad -4 \quad -1 \quad -1] \end{array}$$

$$B^{-1}b = b; \quad c_B B^{-1} b = 0; \quad \omega = c_B B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

				RHS	x_2
z	0	0	0	0	4
x_5	1	0	0	7	3
$\Leftarrow x_6$	0	1	0	3	6
x_7	0	0	1	8	4

$$c_B B^{-1} N - c_N = -c_N = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \bar{c}_1 & \bar{c}_2 & \bar{c}_3 & \bar{c}_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

El cuadro no es óptimo, candidato a entrar: x_2

Actualizamos columna de x_2 : $y_2 = B^{-1}a_2 = a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$

				RHS	x_1
z	0	-2/3	0	0	5/3
$\Leftarrow x_5$	1	-1/2	0	11/2	7
x_2	0	1/6	0	-1/2	1/3
x_7	0	-2/3	1	6	-1/3

$$\begin{aligned} x_B = & \quad (x_5, x_2, x_7) \\ x_N = & \quad (x_1, x_3, x_4, x_6) \end{aligned}$$

$$\underbrace{c_B B^{-1}}N - c_N = \; [0 \quad -\tfrac{2}{3} \quad 0] \; \begin{bmatrix} 8 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 0 \end{bmatrix} - \; [-3 \quad -1 \quad -1 \quad 0]$$

$$\begin{array}{rcccc} & \bar{c}_1 & \bar{c}_3 & \bar{c}_4 & \bar{c}_6 \\ c_B B^{-1}N - c_N = & [5/3 & 1/3 & -7/3 & -2/3] \\ & \Uparrow & & & \\ & x_1 & & & \end{array}$$

: El cuadro No es óptimo.

: Candidato a entrar: x_1

Actualizamos columna de x_1:

$$y_1 = B^{-1}a_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1/3 \\ -1/3 \end{bmatrix};$$

				RHS
z	5/21	-23/42	0	-139/42
x_1	1/7	-1/4	0	11/14
x_2	-1/21	4/21	0	-5/21
x_7	1/21	-29/42	1	263/42

$$\begin{aligned} x_B = & \quad (x_1, x_2, x_7) \\ x_N = & \quad (x_3, x_4, x_5, x_6) \end{aligned}$$

$$c_B B^{-1}N - c_N = \begin{bmatrix} -5/21 & -23/42 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$c_B B^{-1}N - c_N = \begin{bmatrix} -1/2 & -83/42 & -5/21 & -23/42 \end{bmatrix}$$

El cuadro es óptimo !

Solución:

$$\begin{array}{ll} x_1 = 11/14 & x_5 = 0 \\ x_2 = 5/21 & x_6 = 0 \\ x_3 = 0 & x_7 = 263/42 \\ x_4 = 0 & \end{array}$$

$$z^* = -(-139/42) = \frac{139}{42}$$

CAPÍTULO 6

DUALIDAD EN PROGRAMACIÓN LINEAL

6.1 Formulación del Problema Dual

Cada vez que es resuelto un PL, simultáneamente es resuelto otro PL llamado problema dual. Así, asociado a cada problema de PL que llamaremos problema primal, existe otro llamado problema dual.

6.1.1 Dual de un Problema de PL en la Forma Canónica

Sea el problema original en la forma canónica:

$$P \Longrightarrow \begin{cases} min \;\; z(x) \;=\; cx \\ \quad\quad s.a. \\ \quad\quad\quad\quad Ax \geq b \\ \quad\quad\quad\quad x \geq 0 \end{cases}$$

Entonces se define el problema dual de (P) de la siguiente forma:

$$D \Longrightarrow \begin{cases} max \;\; v(w) \;=\; wb \\ \quad\quad s.a. \\ \quad\quad\quad\quad wA \leq c \\ \quad\quad\quad\quad w \geq 0 \end{cases}$$

Observación importante:

A cada restricción de (P) está asociada una variable de (D) y a cada variable de (P) esta asociada una restricción de (D).

Si (P) tiene m restricciones y n variables entonces (D) tiene m variables w_i y n restricciones cada una de ellas identificada por un c_i.

Ejemplo 1: Encontrar el dual del siguiente PL:

$$P \Longrightarrow \begin{cases} min \;\; z(x) & = & 6x_1 + 8x_2 \\ \qquad s.a. & & \\ & & 3x_1 + x_2 \geq 4 \\ & & 5x_1 + 2x_2 \geq 7 \\ & & x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$D \Longrightarrow \begin{cases} max \;\; v(w) & = & 4w_1 + 7w_2 \\ \qquad s.a. & & \\ & & 3w_1 + 5w_2 \leq 6 \\ & & w_1 + 2w_2 \leq 8 \\ & & w_1, w_2 \geq 0 \end{cases}$$

Note que :

$$\begin{bmatrix} w_1 & w_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 6 & 8 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2: Encontrar el dual del siguiente PL:

$$P \Longrightarrow \begin{cases} min \;\; z(x) & = & 2x_1 + 6x_2 \\ \qquad s.a. & & \\ & & 2x_1 + 3x_2 \geq 12 \\ & & -x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ & & x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

El problema dual asume la siguiente forma:

$$D \Longrightarrow \begin{cases} max \;\; v(w) = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ 4 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$s.a.$

$$\begin{bmatrix} w_1 & w_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$w_1, w_2 \geq 0$$

$$D \Longrightarrow \begin{cases} max \;\; v(w) & = & 12w_1 + 4w_2 \\ \qquad s.a. & & \\ & & 2w_1 - w_2 \leq 2 \\ & & 3w_1 + 2w_2 \leq 6 \\ & & w_1, w_2 \geq 0 \end{cases}$$

Observaciones: En el ejemplo anterior existen los siguientes aspectos interesantes:

- Ambos tienen el mismo valor de la función objetivo óptimo:

$$z^*(x) = v^*(w) = \frac{144}{7} \qquad \text{(ver solución gráfica)}$$

- Se puede observar en el ejemplo que el problema P no tiene una SBF inicial trivial mientras que el problema D tiene una SBF trivial, constituido por el punto extremo trivial (0,0) o sea una base formada por las variables de folga w_3 y w_4.

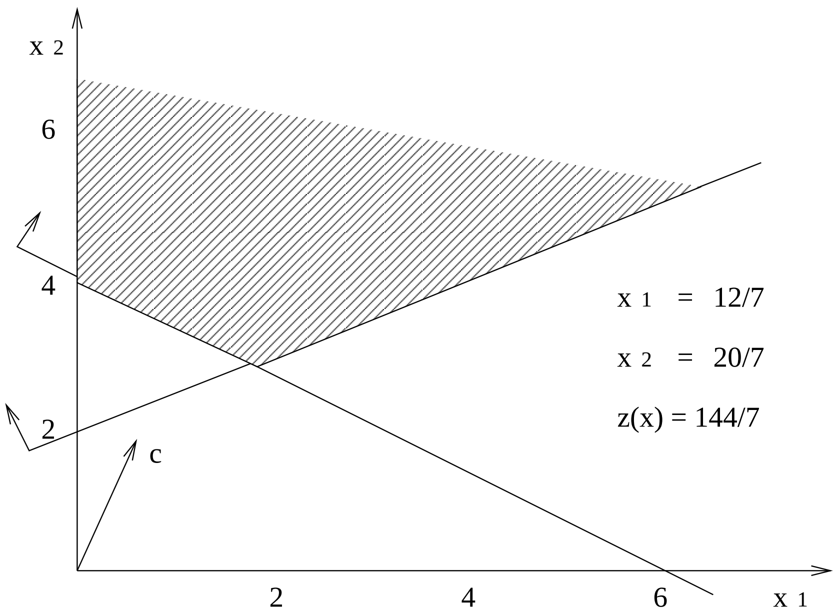


Figura 6.1: Problema primal

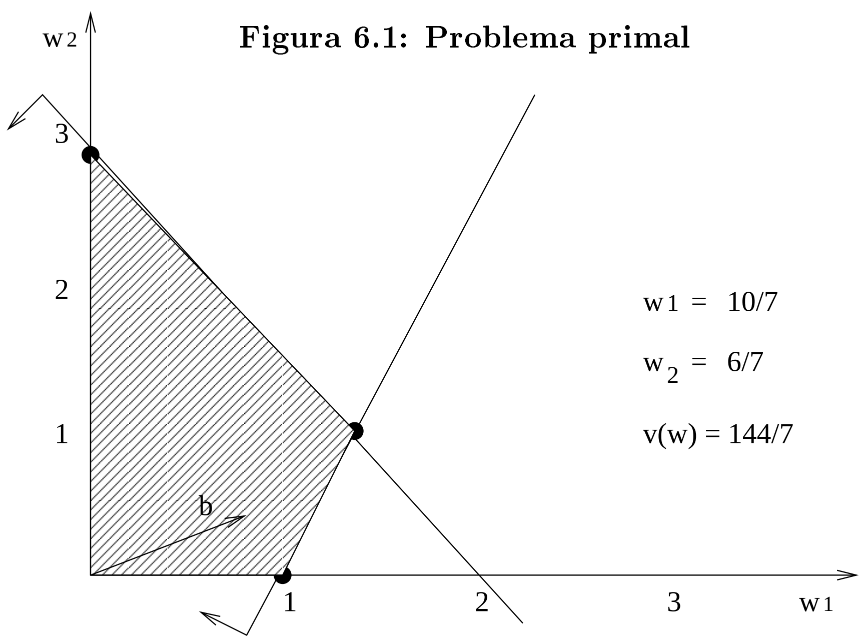


Figura 6.2: Problema dual

6.1.2 Dual de un Problema en la Forma Padronizada

Sea el problema original en la forma padronizada:

$$P \Longrightarrow \begin{cases} min \;\; z(x) \;=\; cx \\ \quad s.a. \\ \qquad Ax = b \\ \qquad x \geq 0 \end{cases}$$

Entonces **se define** el problema dual de (P) de la siguiente forma:

$$D \Longrightarrow \begin{cases} max \;\; v(w) \;=\; wb \\ \quad s.a. \\ \qquad wA \leq c \\ \qquad w \;\; \text{irrestricto} \end{cases}$$

Observación: Ambas definiciones son equivalentes. Verificamos este hecho resolviendo nuevamente el ejemplo 1 transformado en la forma padronizada:

Ejemplo 3: Encontrar el dual del siguiente PL:

$$P \Longrightarrow \begin{cases} min \;\; z(x) \;=\; 6x_1 + 8x_2 \\ \quad s.a. \\ \qquad 3x_1 + x_2 - x_3 \qquad = 4 \\ \qquad 5x_1 + 2x_2 \qquad - x_4 = 7 \\ \qquad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

$$D \Longrightarrow \begin{cases} max \;\; v(w) = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} \\ \\ \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 6 & 8 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \\ w_1, w_2 \qquad \text{irrestrictos} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} max \;\; v(w) \;&=\; 4w_1 + 7w_2 \\ s.a. \qquad & \\ & 3w_1 + 5w_2 \leq 6 \\ & w_1 + 2w_2 \leq 8 \\ & -w_1 \leq 0 \\ & -w_2 \leq 0 \\ & w_1 \;\; y \;\; w_2 \;\; \text{irrestrictos} \end{aligned}$$

$$D \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} max \;\; v(w) & = & 4w_1 + 7w_2 \\ s.a. & & \\ & & 3w_1 + 5w_2 \leq 6 \\ & & w_1 + 2w_2 \leq 8 \\ & & w_1 \geq 0 \\ & & w_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

Ejemplo 4: Encontrar el dual del siguiente PL:

$$P \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} min \;\; z(x) & = & 2x_1 + 6x_2 \\ s.a. & & \\ & & 2x_1 + 3x_2 - x_3 \qquad = 12 \\ & & -x_1 + 2x_2 \qquad - x_4 = 4 \\ & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

$$D \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} max \;\; v(w) & = & \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ 4 \end{bmatrix} \\ \text{s.a.} & & \\ & & \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & & w_1, w_2 \qquad \text{irrestrictos} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{rcl} max \;\; v(w) & = & 12w_1 + 4w_2 \\ s.a. & & \\ & & 2w_1 - w_2 \leq 2 \\ & & 3w_1 + 2w_2 \leq 6 \\ & & -w_1 \leq 0 \\ & & -w_2 \leq 0 \\ & & w_1 \;\; y \;\; w_2 \;\; irrestrictos \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} max \;\; v(w) & = & 12w_1 + 4w_2 \\ s.a. & & \\ & & 2w_1 - w_2 \leq 2 \\ & & 3w_1 + 2w_2 \leq 6 \\ & & w_1, w_2 \geq 0 \end{array}$$

Ejemplo 5:

Mostrar que las dos definiciones son equivalentes:

Consideramos como válida la definición en la forma padronizada y queremos encontrar el dual de P:

$$P \Longrightarrow \begin{cases} min \;\; z(x) \;=\; cx \\ \qquad s.a. \\ \qquad\qquad Ax \geq b \\ \qquad\qquad x \geq 0 \end{cases}$$

Entonces hacemos la transformación y aplicamos la definición:

$$P \Longrightarrow \begin{cases} min \;\; z(x) \;=\; cx \\ \qquad s.a. \\ \qquad\qquad Ax - Ix_s = b \\ \qquad\qquad x, x_s \geq 0 \end{cases}$$

Donde x_s corresponde al vector de variables de holgura.

De la definición:

$$D \Longrightarrow \begin{cases} max \;\; v(w) \;=\; wb \\ \qquad s.a. \\ \qquad\qquad w \begin{bmatrix} A & -I \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} c & 0 \end{bmatrix} \\ \qquad\qquad w \;\; irrestricto \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} max \;\; v(w) = \;\; wb \\ \qquad s.a. \\ \qquad\qquad wA \leq c \\ \qquad\qquad \left.\begin{array}{l} -wI \leq 0 \\ w \;\; \text{irrestricto} \end{array}\right\} \Longrightarrow w \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} max \;\; v(w) \;=\; wb \\ \qquad s.a. \\ \qquad\qquad wA \leq c \\ \qquad\qquad w \geq 0 \end{array}$$

Que corresponde a la otra definición.

6.1.3 Dual del Problema Dual

El dual de un problema de PL es otro problema de PL. Así, es posible demostrar que el dual de un problema dual es el propio problema original.

Problema original:

$$P \Longrightarrow \begin{cases} min \;\; z(x) \;\; = \;\; cx \\ \quad\quad s.a. \\ \quad\quad\quad\quad Ax \geq b \\ \quad\quad\quad\quad x \geq 0 \end{cases}$$

Problema dual:

$$D \Longrightarrow \begin{cases} max \;\; v(w) \;\; = \;\; wb \\ \quad\quad s.a. \\ \quad\quad\quad\quad wA \leq c \\ \quad\quad\quad\quad w \geq 0 \end{cases}$$

Dual del problema dual:

$$\text{Transformando} \quad \text{D} \Longrightarrow \begin{cases} -\left\{min \;\; v^{'}(w) \;\; = \;\; (-b^t)w^t\right\} \\ s.a. \\ \quad\quad (-A^t)w^t \geq (-c^t) \\ \quad\quad w^t \geq 0 \end{cases}$$

Ya que la transpuesta de un escalar es el mismo escalar.

Aplicando el dual:

$$\begin{cases} -\left\{max \;\; z^{'}(x) \;\; = \;\; x^t(-c^t\right\} \\ s.a. \\ \quad\quad x^t(-A^t) \leq (-b^t) \\ \quad\quad x^t \geq 0 \end{cases}$$

donde x^t es un vector fila de variables duales en relación a D.

Transformando la relación anterior tenemos que :

$$\begin{cases} min \;\; z(x) \;\; = \;\; cx \\ \quad\quad s.a. \\ \quad\quad\quad\quad Ax \geq b \\ \quad\quad\quad\quad x \geq 0 \end{cases}$$

Observación: En el proceso de transformación fue empleada la siguiente equivalencia:

$$max \;\; f(x) \;\; = \;\; -[min \;\; -f(x)]$$

Lema 1: El dual del dual es el primal.

El problema primal y el dual tiene definiciones relativas. Cualquiera de ellos puede ser considerado "problema primal" o "problema dual".

6.1.4 Dual de un Problema con Estructura Variada

Un PL típico generalmente presenta restricciones y variables de diverso tipo $\{\geq, \;\leq \text{ó} =\}$ y así es necesario desarrollar una forma sistemática para encontrar el dual de este tipo de problemas más rápidamente.

Considere el siguiente P.L.

$$(P) \Longrightarrow \begin{cases} min \;\; z(x) \;\; = \;\; c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \\ \quad\quad s.a. \\ \quad\quad\quad A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3 \geq b_1 \\ \quad\quad\quad A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + A_{23}x_3 \leq b_2 \\ \quad\quad\quad A_{31}x_1 + A_{32}x_2 + A_{33}x_3 = b_3 \\ \quad\quad\quad x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \;\text{ irrestricto} \end{cases}$$

donde x_1, x_2 y x_3 son vectores de dimensiones adecuadas y también el problema (P) presenta tres subconjuntos de restricciones.

Transformamos (P) en la forma canónica multiplicando el segundo subconjunto de restricciones por -1, escribiendo las restricciones de igualdad por dos restricciones de desigualdad y substituyendo los vectores $x_2 = -x_2^{'} \;\; y \;\; x_3 = x_3^{'} - x_3^{''}$ tenemos:

$$\begin{cases} min \;\; z(x) \;\; = \;\; c_1x_1 - c_2x_2^{'} + c_3x_3^{'} - c_3x_3^{''} \\ \quad\quad s.a. \\ \quad\quad\quad A_{11}x_1 - A_{12}x_2^{'} + A_{13}x_3^{'} - A_{13}x_3^{''} \geq b_1 \\ \quad\quad\quad -A_{21}x_1 + A_{22}x_2^{'} - A_{23}x_3^{'} + A_{23}x_3^{''} \geq -b_2 \\ \quad\quad\quad A_{31}x_1 - A_{32}x_2^{'} + A_{33}x_3^{'} - A_{33}x_3^{''} \geq b_3 \\ \quad\quad\quad -A_{31}x_1 + A_{32}x_2^{'} - A_{33}x_3^{'} + A_{33}x_3^{''} \geq -b_3 \\ \quad\quad\quad x_1 \geq 0, \; x_2^{'} \geq 0, \; x_3^{'} \geq 0, \; x_3^{''} \geq 0 \end{cases}$$

Sean $w_1, w_2^{'}, w_3^{'} \;\; y \;\; w_3^{''}$ vectores de variables duales asociadas a los 4 tipos de restricciones, entonces tenemos:

$$
\begin{cases}
max \;\; v(w) \;=\; w_1 b_1 - w_2^{'} b_2 + w_3^{'} b_3 - w_3^{''} b_3 \\
\quad s.a. \\
\quad\quad w_1 A_{11} - w_2^{'} A_{21} + w_3^{'} A_{31} - w_3^{''} A_{31} \leq c_1 \\
\quad\quad -w_1 A_{12} + w_2^{'} A_{22} - w_3^{'} A_{32} + w_3^{''} A_{32} \leq -c_2 \\
\quad\quad w_1 A_{13} - w_2^{'} A_{23} + w_3^{'} A_{33} - w_3^{''} A_{33} \leq c_3 \\
\quad\quad -w_1 A_{13} + w_2^{'} A_{23} - w_3^{'} A_{33} + w_3^{''} A_{33} \leq -c_3 \\
\quad\quad w_1 \geq 0, \;\; w_2^{'} \geq 0, \;\; w_3^{'} \geq 0, \;\; w_3^{''} \geq 0
\end{cases}
$$

Finalmente, haciendo $w_2 = -w_2^{'} \;\; y \;\; w_3 = w_3^{'} - w_3^{''}$ tenemos que :

$$
D \Longrightarrow
\begin{cases}
max \;\; v(w) \;=\; w_1 b_1 + w_2 b_2 + w_3 b_3 \\
\quad s.a. \\
\quad\quad w_1 A_{11} + w_2 A_{21} + w_3 A_{31} \leq c_1 \\
\quad\quad w_1 A_{12} + w_2 A_{22} + w_3 A_{32} \geq c_2 \\
\quad\quad w_1 A_{13} + w_2 A_{23} + w_3 A_{33} = c_3 \\
\quad\quad w_1 \geq 0, \;\; w_2 \leq 0, \; w_3 \;\; \text{irrestricto}
\end{cases}
$$

Es importante observar las relaciones entre (P) y (D). Las variables duales en w_1, w_2 y w_3 están relacionadas con las restricciones de (P), así por ejemplo $w_1 \geq 0$ implica que las restricciones correspondientes en (P) ya están en la forma adecuada, sin embargo, el segundo conjunto de restricciones se requiere multiplicar por -1 para estar en la forma adecuada y eso se ve reflejado en $w_2 \leq 0$ y el tercer conjunto de restricciones de igualdad refleja un w_3 irrestricto. La transformación necesaria en las variables de (P) son reflejadas en las restricciones de (D) así, por ejemplo, $x_1 \geq 0$ lleva a la forma padrón en el primer conjunto de restricciones de (D), mientras que $x_2 \leq 0$ produce restricciones del tipo $\geq$ en (D) y x_3 irrestricto produce restricciones de igualdad en (D).

Esos resultados se resumen en la tabla siguiente:

Relaciones entre los Problemas Primal y Dual

Problema de Minimización				**Problema de Maximización**	
Variables	≥ 0	$\Longleftrightarrow$	$\leq$	Restricciones	
	≤ 0	$\Longleftrightarrow$	$\geq$		
	Irrestricta	$\Longleftrightarrow$	$=$		
Restricciones	$\geq$	$\Longleftrightarrow$	≥ 0	Variables	
	$\leq$	$\Longleftrightarrow$	≤ 0		
	$=$	$\Longleftrightarrow$	Irrestricto		

Ejemplo 6: Encontrar el dual del siguiente PL:

$$\begin{array}{rcl} max \;\; z(x) & = & 8x_1 + 3x_2 - 2x_3 \\ s.a. & & \\ & & x_1 - 6x_2 + x_3 \geq 2 \\ & & 5x_1 + 7x_2 - 2x_3 = -4 \\ & & x_1 \leq 0; \;\; x_2 \geq 0 \\ & & x_3 \;\; \text{irrestricto} \end{array}$$

Usando los resultados resumidos en la tabla de equivalencia podemos encontrar fácilmente el problema dual:

Problema dual (D):

$$\begin{array}{rcl} min \;\; v(w) & = & 2w_1 - 4w_2 \\ s.a. & & \\ & & w_1 + 5w_2 \leq 8 \\ & & -6w_1 + 7w_2 \geq 3 \\ & & w_1 - 2w_2 = -2 \\ & & w_1 \leq 0 \\ & & w_2 \;\; \text{irrestricto} \end{array}$$

6.2 Relaciones Primal - Dual

6.2.1 Relaciones Entre las Funciones Objetivo

Sean los problemas primal (P) y dual (D) siguientes:

$$P \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} min \;\; z(x) & = & cx \\ s.a. & & \\ & & Ax \geq b \\ & & x \geq 0 \end{array} \right. \qquad D \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} max \;\; v(w) & = & wb \\ s.a. & & \\ & & wA \leq c \\ & & w \geq 0 \end{array} \right.$$

Sean $x_o \in P$ y $w_o \in D$, o sea, puntos de los problemas (P) y (D) respectivamente, entonces tenemos:

Si $x_o \in P \Longrightarrow Ax_o \geq b \Longrightarrow w_oAx_o \geq w_ob$ siempre que $w_o \geq 0$

Si $w_o \in D \Longrightarrow w_oA \leq c \Longrightarrow w_oAx_o \leq cx_o \quad x_0 \geq 0$

De las dos relaciones anteriores se puede concluir fácilmente:

$$cx_o \geq w_oAx_o \geq w_ob \Longrightarrow cx_o \geq w_ob$$

que es una relación conocida como **propiedad débil de la dualidad** (weak duality).

Lema 2: Propiedad débil de la dualidad:

La función objetivo de cualquier punto factible del problema de minimización (P) es siempre mayor o igual que la función objetivo de cualquier punto factible del problema de maximización (D). Por lo tanto, cualquier función objetivo de un punto factible de (P) es una limitante superior para la función objetivo óptima del problema (D) y, de manera similar, cualquier función objetivo de un punto factible de (D) es una limitante inferior de la función objetivo óptima de (P).

Corolario 1: Condición de optimalidad de (P) y (D):

Si $x_o \in P$ y $w_o \in D$ tal que:

$$cx_o = w_o b$$

entonces x_o es una solución óptima de (P) y w_o es una solución óptima de (D).

Corolario 2: Consecuencia de un problema ilimitado:

Si uno de los problemas es ilimitado, por ejemplo (P), entonces el otro problema es **infactible**.

Observación importante: El corolario 2 no es simétrico, o sea, si uno de los problemas es infactible entonces el otro problema no necesariamente es ilimitado. En realidad, si uno de los problemas es infactible entonces el otro problema puede ser infactible o ilimitado.

Ejemplo 7: Se presenta el caso en que los dos problemas son infactibles.

Sea el problema (P):

$$\begin{array}{rcl} min \;\; z(x) & = & -x_1 - x_2 \\ s.a. & & \\ & & x_1 - x_2 \geq 1 \\ & & -x_1 + x_2 \geq 1 \\ & & x_1; \;\; x_2 \geq 0 \end{array}$$

El problema dual (D) del problema (P) tiene la siguiente forma:

$$
\begin{array}{rcl}
max \;\; v(w) & = & w_1 + w_2 \\
s.a. & & \\
 & & w_1 - w_2 \leq -1 \\
 & & -w_1 + w_2 \leq -1 \\
 & & w_1 \geq 0 \\
 & & w_2 \geq 0
\end{array}
$$

Gráficamente se puede verificar que ambos problemas, (P) y (D), son infactibles.

6.2.2 Origen de la Dualidad y las Condiciones de Optimalidad de Karush-Kuhn-Tucker

Sea el problema (P):

$$
P \Longrightarrow \left\{
\begin{array}{rcl}
min \;\; z(x) & = & cx \\
s.a. & & \\
 & & Ax \geq b \\
 & & x \geq 0
\end{array}
\right.
$$

Por la condición de optimalidad de Karush-Kuhn-Tucker (KKT), un punto x^* cumple con las condiciones **necesarias y suficientes** de optimalidad para (P) si existe un vector w^* tal que:

1. $Ax^* \geq b; \;\; x^* \geq 0$ (condición de factibilidad del problema primal)
2. $w^*A \leq c; \;\; w^* \geq 0$ (condición de factibilidad del problema dual)
3. $w^*(Ax^* - b) = 0; \qquad (c - w^*A)x^* = 0$ (condición de holguras complementarias)

   La condición (1) suministra la factibilidad del problema primal (P) y la condición (2) suministra la factibilidad del problema dual (D). Por otro lado la condición (3), llamada condición de holguras complementarias, exige que $cx^* = w^*b$, ya que:

$$
\left.
\begin{array}{c}
w^*Ax* = w^*b \\
w^*Ax^* = cx^*
\end{array}
\right\} \Longrightarrow cx^* = w^*b
$$

Por lo tanto w^* es óptimo para el problema dual (D). La región factible del problema dual queda evidente de la condición (2). Su función objetivo viene del hecho de que cualquier w factible para el dual satisface $wb \leq cx^*$ por la propiedad débil de la dualidad.

Las condiciones (2) y (3) indican que el teorema de KKT suministra un w^* que es factible para el dual y $w^*b = cx^*$, así w^* debe maximizar wb sobre la región factible del dual. Simétricamente el teorema de KKT aplicado al problema dual muestra la existencia de una solución factible del primal cuyo objetivo es igual al óptimo del problema dual, ya que la condición (3) será la misma a la mostrada anteriormente.

Lema 3: Óptimos finitos iguales para (P) y (D): Propiedad fuerte de la dualidad:

Si uno de los problemas tiene óptimo finito entonces los dos problemas tienen función objetivo finita e iguales en valor.

Observación: Es importante observar que el problema dual aparece naturalmente en el contexto del algoritmo simplex. Un cuadro típico del simplex representa una situación en que múltiplos de $w_1, ..., w_m$ de las m filas de $Ax - x_s = b$ fueron adicionadas en la fila objetivo, donde $x_s \geq 0$. Así, en la fila objetivo aparecen los coeficientes de x en la forma $(wA - c)$ y aquellos que corresponden a las variables x_s son simplemente $w(-I) - 0 = -w$ con función objetivo wb. Obviamente, fue usada una SBF determinda por una matriz identidad. La condición (2) exige que esos w^* sean tales que los coeficientes de costo relativos sean no positivos, o sea, $\{w^*A - c \leq 0\}$ y como $-w \leq 0$ estamos en lo correcto. Si además de eso, estamos en el cuadro óptimo entonces los w^* disponibles satisfacen las condiciones de factibilidad del dual ya que todos los costos relativos son ≤ 0 esto es $w^*A - c \leq 0$ y $w \geq 0$ $\{de \quad -w \leq 0\}$. Tambien si x^* es la solución óptima entonces $cx^* = w^*b$ así en el óptimo w^* debe ser la maximización de wb sujeto a $wA \leq c$ y $w \geq 0$, o sea, tenemos el así llamado problema dual.

Forma homogénea del problema dual:

Sea el problema P:

$$\begin{array}{lll} min \;\; z(x) & = & cx \\ s.a. & & \\ & & Ax \geq b \\ & & x \geq 0 \end{array}$$

Se define la **forma homogénea** del problema dual (HD) así:

$$(HD) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{lll} max \;\; v(w) & = & wb \\ s.a. & & \\ & & wA \leq 0 \\ & & w \geq 0 \end{array} \right.$$

Observe que ahora tenemos las restricciones $wA \leq 0$ y no la forma $wA \leq c$ como fue en la definición del problema dual normal.

Corolario 3: Forma homogenea del dual

El problema primal es infactible si y solamente si la forma homogenea del problema dual es ilimitada (y vicerversa).

Prueba:

- $\Longrightarrow$

  (HD) es ilimitado $\Longrightarrow$ P es infactible:

  Se observa que el dual de (HD) tiene la misma región factible de P. Así, si (HD) es ilimitado entonces P es infactible.

- $\Longleftarrow$

  P es infactible entonces (HD) es ilimitado:

  Si P es infactible entonces (HD) debe ser ilimitado o debe tener una solución óptima finita. (HD) no puede ser infactible ya que tiene por lo menos un punto factible obvio $w = 0$. Mas (HD) no puede tener un óptimo finito ya que si (HD) tiene óptimo finito por el lema 3, P debe ser óptimo finito lo que viola la suposición de que P es infactible, así la única alternativa es que (HD) sea ilimitado.

Ejemplo 8: Muestra que si (P) es infactible $\Longrightarrow$ (HD) es ilimitado:

Sea el problema (P):

$$P \Longrightarrow \begin{cases} min \;\; z(x) \;\; = \;\; -x_1 - x_2 \\ \qquad s.a. \\ \qquad\qquad x_1 - x_2 \geq 1 \\ \qquad\qquad -x_1 + x_2 \geq 1 \\ \qquad\qquad x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Se puede verificar fácilmente que el problema (P) es infactible (ver el ejemplo anterior). El (HD) asume la siguiente forma:

$$(HD) \Longrightarrow \begin{cases} max \;\; v(w) \;\; = \;\; w_1 + w_2 \\ \qquad s.a. \\ \qquad\qquad \left.\begin{array}{l} w_1 - w_2 \leq 0 \\ -w_1 + w_2 \leq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow w_1 - w_2 = 0 \\ \qquad\qquad w_1, w_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$(HD) \Longrightarrow \begin{cases} max \;\; v(w) \;\; = \;\; w_1 + w_2 \\ \qquad s.a. \\ \qquad\qquad w_1 - w_2 = 0 \\ \qquad\qquad w_1, w_2 \geq 0 \end{cases}$$

Se puede observar fácilmente en la figura 6.3 que (HD) es ilimitado (ver gráfico):

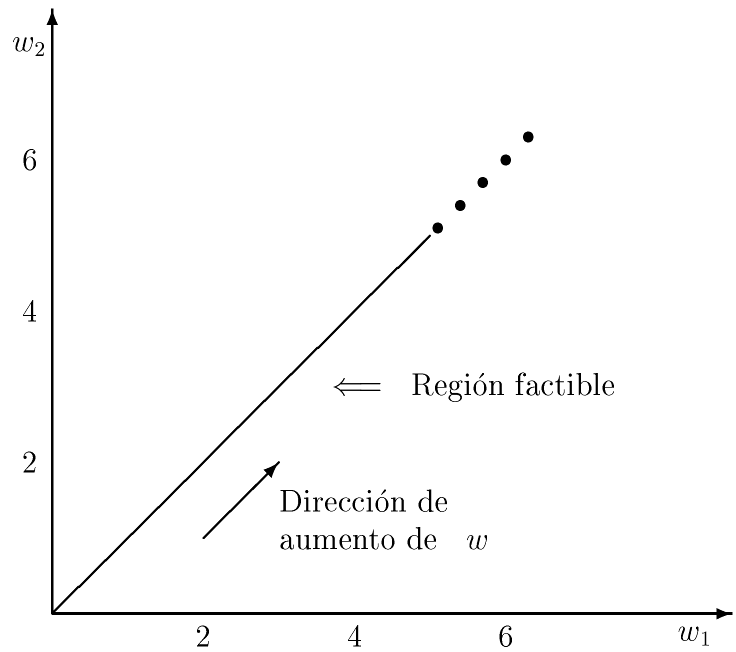


Figura 6.3: Problema ilimitado.

6.2.3 Teorema Fundamental de la Dualidad

Teorema 1: Teorema fundamental de la dualidad

En relación a los problemas primal y dual, exactamente una de las siguientes afirmaciones es verdadera:

1. Ambos poseen solución óptima x^* y w^* con $cx^* = w^*b$.
2. Si un problema tiene valor de la función objetivo ilimitado entonces en ese caso el otro problema es infactible.
3. Ambos problemas son infactibles.

Así el teorema de la dualidad muestra que la dualidad no es una propiedad completamente simétrica. Así, una forma equivalente de expresar la propiedad de dualidad es la siguiente:

P óptimo	$\Longleftrightarrow$	D óptimo
P(D) ilimitado	$\Longrightarrow$	D(P) infactible
P(D) infactible	$\Longrightarrow$	D(P) ilimitado o infactible
P(D) infactible	$\Longleftrightarrow$	D(P) ilimitado en forma homogénea

6.2.4 Holguras Complementarias y el Principio del Supervisor

Sea el problema (P):

$$P \Longrightarrow \begin{cases} min \;\; z(x) \;\; = \;\; cx \\ \qquad\quad s.a \\ \qquad\qquad\qquad Ax \geq b \\ \qquad\qquad\qquad x \geq 0 \end{cases}$$

Sea x la solución óptima de (P) y w la solución óptima del dual (D). Así, si x es óptimo de (P) y w es óptimo de (D) entonces $cx = wb$, esto es, las funciones objetivo son iguales. Esta propiedad simple $\{cx = wb\}$ es conocida como principio del supervisor ya que esa propiedad permite que un supervisor pueda verificar fácilmente la solución óptima de ambos problemas.

Las condiciones de KKT permiten verificar otra forma equivalente del principio del supervisor verificando la condición de holguras complementarias de la condición de KKT.

De la condición 3 de KKT tenemos que:

$$w^*(Ax^* - b) = 0 \tag{6.1}$$

mas como $w^* \geq 0$ y $Ax^* - b \geq 0$ entonces cada componente de (6.1) debe ser igual a cero, esto es:

$$w_i^*(a^i x^* - b_i) = 0 \quad \forall i = 1, ..., m$$

De igual forma, de la otra relación, $(c - w^*A)x^* = 0$, se obtiene que:

$$(c_j - w^* a_j)x_j^* = 0 \quad \forall j = 1, ..., n$$

Esos resultados llevan al teorema de la holguras complementarias.

Teorema 2: Teorema de las holguras complementarias.

Sean x^* y w^* soluciones factibles de (P) y (D) con ambos problemas en la forma canónica. Entonces esas soluciones son respectivamente óptimos de (P) y (D) $\Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} \qquad (c_j - w^* a_j)x_j^* = 0 \qquad j = 1, \ldots, n \\ \text{y} \\ \qquad w_i^*(a^i x^* - b_i) = 0 \qquad i = 1, \ldots, m \end{cases} \tag{6.2}$$

Las relaciones anteriores implican las siguientes relaciones:

$$
\begin{cases}
x_j^* > 0 & \Longrightarrow & w^* a_j = c_j \\
w^* a_j < c_j & \Longrightarrow & x_j^* = 0 \\
w_i^* > 0 & \Longrightarrow & a^i x^* = b_i \\
a^i x^* > b_i & \Longrightarrow & w_i^* = 0
\end{cases}
\tag{6.3}
$$

En otras palabras, si una variable en un problema (primal) es positiva entonces la restricción asociada a esa variable en el otro problema (dual) se encuentra activa. Por otro lado, si la restricción de un problema (primal) no está activa entonces la variable asociada a esa restricción en el otro problema (dual) debe ser igual a cero.

Finalmente, las variables de holgura de (P) asumen la siguiente forma:

$$
x_{n+i} = a^i x - b_i \geq 0 \qquad i = 1, \ldots, m \tag{6.4}
$$

y las variables de holgura de (D) asumen la siguiente forma:

$$
w_{m+j} = c_j - w a_j \geq 0 \qquad j = 1, \ldots, n \tag{6.5}
$$

Substituyendo las ecuaciones (6.4) y (6.5) en (6.2) se puede encontrar una forma equivalente del teorema de las holguras complementarias (que en realidad justifica el nombre de holguras complementarias):

$$
\begin{cases}
x_j^* w_{m+j}^* = 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, n \\
\\
w_i^* x_{n+i}^* = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, m
\end{cases}
\tag{6.6}
$$

El sistema (6.6) relaciona la variable de un problema (por ejemplo del primal) con la variable de holgura del otro problema (por ejemplo el dual). Así x_j y $w_{m+j} \quad \forall\ j$ son conocidos como un par de variables complementarias y, lógicamente, la misma cosa sucede con las variables w_i y $x_{n+i} \quad \forall\ i$.

6.2.5 Usando el Dual para Resolver el Primal

Una de las aplicaciones de dualidad, la menos importante y la más interesante, consiste en resolver el problema dual y a partir de esa solución encontrar la solución del problema primal usando los teoremas 1 y 2. En este caso se debe montar explícitamente el dual y resolverlo usando alguna técnica conocida (por ejemplo, simplex normal). Esta aplicación es mostrada através de un ejemplo. Sin embargo, las propiedades de dualidad mostradas anteriormente tienen una aplicación más importante y son usadas para justificar otro método de optimización de problemas de programación lineal llamado **método dual simplex** que será analizado posteriormente.

Ejemplo 9: Resolver el siguiente problema primal (P) resolviendo el problema dual:

$$(P) \Longrightarrow \begin{cases} min \quad z(x) & = & 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 \\ \qquad\quad s.a. & & \\ & & x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 \geq 4 \\ & & 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \geq 3 \\ & & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \geq 0 \end{cases}$$

El problema dual del problema anterior asume la siguiente forma:

$$(D) \Longrightarrow \begin{cases} max \quad v(w) & = & 4w_1 + 3w_2 \\ \qquad\quad s.a. & & \\ & & w_1 + 2w_2 \leq 2 \\ & & w_1 - 2w_2 \leq 3 \\ & & 2w_1 + 3w_2 \leq 5 \\ & & w_1 + w_2 \leq 2 \\ & & 3w_1 + w_2 \leq 3 \\ & & w_1,\ w_2 \geq 0 \end{cases}$$

En este caso el problema (D) puede resolverse gráficamente. La solución gráfica es mostrada en la figura 6.4 y la solución óptima del problema dual es el siguiente:

$$w_1 = \frac{4}{5} \quad w_2 = \frac{3}{5} \qquad \Longrightarrow v(w) = 5$$

Ahora resolvemos el problema primal con los resultados encontrados para el problema dual. Así, tenemos lo siguiente:

1. Usando el teorema 1 encontramos la función objetivo:

$$z(x^*) = cx^* = w^*b = v(w^*) = 5$$

2. Del teorema 2 encontramos los valores de x^*:

$$\begin{cases} w_1 \neq 0 & \Longrightarrow & x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 4 \\ w_2 \neq 0 & \Longrightarrow & 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_1 - 2w_2 < 3 & \Longrightarrow & x_2 = 0 \\ 2w_1 + 3w_2 < 5 & \Longrightarrow & x_3 = 0 \\ w_1 + w_2 < 2 & \Longrightarrow & x_4 = 0 \end{cases}$$

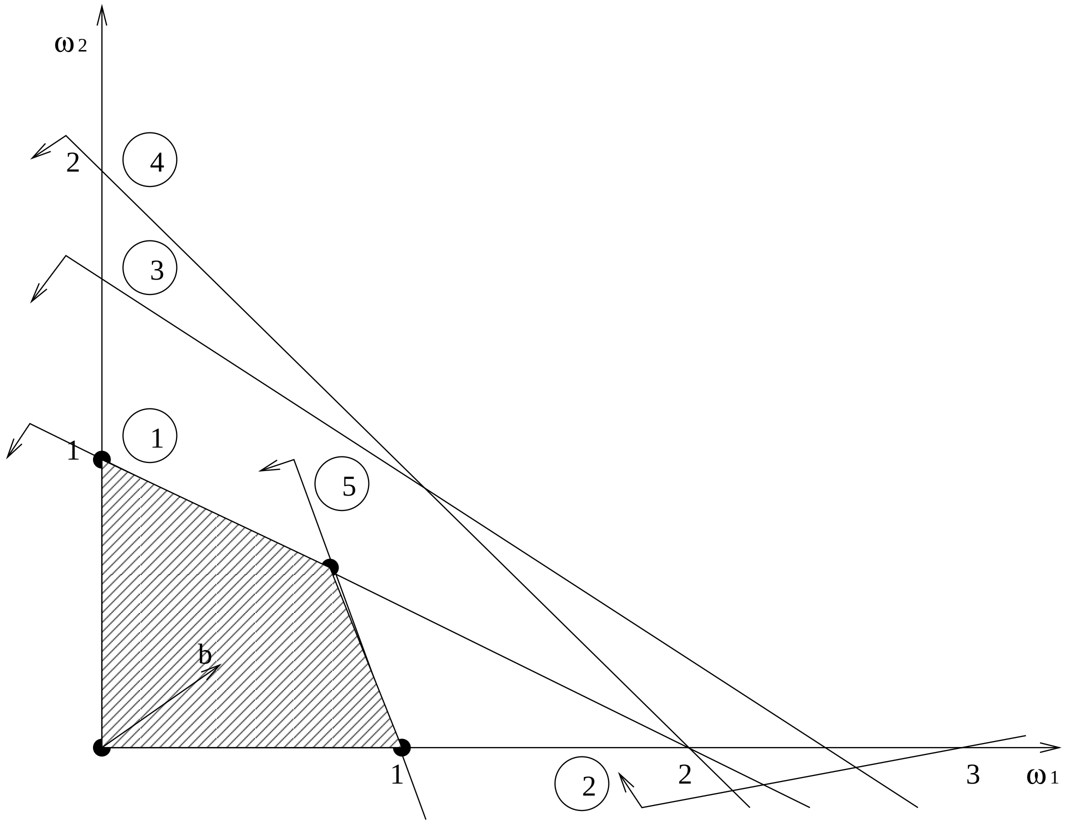


Figura 6.4: Gráfico del problema dual.

De las relaciones anteriores queda el siguiente sistema reducido:

$$\left.\begin{array}{r} x_1 + 3x_5 = 4 \\ 2x_1 + x_5 = 3 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_5 = 1 \end{array}\right.$$

Por lo tanto, la solución del problema primal es el siguiente:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = x_5 = 1 \\ \\ x_2 = x_3 = x_4 = 0 \end{array}\right. \qquad \Longrightarrow z(x^*) = 5$$

CAPÍTULO 7

El METODO DUAL SIMPLEX

El método dual simplex resuelve el problema dual directamente en el cuadro simplex (e indirectamente resuelve el problema primal original). El proceso es iniciado a partir de una SBF para el problema dual y en cada iteración se obtiene una SBF para el problema dual que es mejor (o igual) que el cuadro anterior. El proceso termina cuando se verifica la optimalidad del problema dual. Si ese cuadro óptimo es encontrado entonces, se tiene un cuadro óptimo para el problema dual y también para el problema primal. Solamente en este último cuadro el problema primal es factible y óptimo. En otras palabras, se puede decir que el método dual simplex resuelve el problema primal usando las propiedades del dual, así el proceso es iniciado con un cuadro que es factible para el problema dual (y satisface la optimalidad del problema primal) y se busca la optimalidad del problema dual (esto es, la factibilidad del problema primal).

Observación: Es necesario enfatizar que el método dual simplex es un método alternativo para resolver el problema primal y en general para resolver un problema de PL. Por lo tanto, el método presentado en los capítulos 3, 4, y 5 es llamado método Primal Simplex y el método que presentamos en este capítulo es llamado Dual Simplex.

Un problema particular, generalmente se resuelve más fácilmente por uno de esos dos métodos.

7.1 Cuando el Problema Dual es Factible en el Cuadro Simplex del problema original ?

Consideremos el PL en la forma canónica:

$$P \Longrightarrow \begin{cases} min \;\; z(x) = cx \\ \quad s.a. \\ \qquad\qquad Ax \geq b \\ \qquad\qquad x \geq 0 \end{cases} \tag{7.1}$$

Sea B una base de (P) no necesariamente factible; el cuadro número 1 presentado más adelante, muestra el cuadro simplex para esta base:

- Si $\overline{b}_i \geq 0 \;\; \forall i = 1, ..., m \Longrightarrow$ el cuadro es primal factible. $\overline{b} = B^{-1}b \geq 0$
- Por otro lado, si se tiene que: $(z_j - c_j) \leq 0 \;\; \forall_j = 1, 2, ..., n, n+1, ...(n+m)$ entonces el cuadro es óptimo.

Qué significa que el cuadro satisface la optimalidad ?

Sabemos que $w = c_B B^{-1}$, entonces tenemos:

1. Si $(z_j - c_j) \leq 0$ para $j = 1, 2, ..., n$ (las n variables originales) entonces:

$$(z_j - c_j) = c_B B^{-1} a_j - c_j = w a_j - c_j \leq 0 \;\; \forall j = 1, 2, ...n$$

$$\Longrightarrow wA \leq c \tag{7.2}$$

2. Si $z_j - c_j \leq 0$ para $j = (n+1), ..., (n+m)$ (las m variables de holgura) entonces:

De (P) sabemos que las columnas de las variables de holgura tipo a_j asumen la siguiente forma:

$$a_{n+i} = -e_i \;\; con \;\; i = 1, ..., m \quad donde \quad e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftarrow i$$

Además se sabe que $c_{n+i} = 0$ entonces tenemos:

$$(z_j - c_j) = w a_{n+i} - c_{n+i} = w(-e_i) - 0 \leq 0$$

$$(z_j - c_j) = -w_i \leq 0; \quad\;\; i = 1, 2, ..., m$$

$$\Longrightarrow w_i \geq 0 \;\;\; \forall i = 1, 2, ..., m \;\Longrightarrow w \geq 0 \tag{7.3}$$

De (7.2) y (7.3) se puede concluir que si el cuadro analizado satisface optimalidad entonces:

$$\begin{cases} wA \leq c \\ w \geq 0 \end{cases}$$

Si tenemos una base B para el problema (P) (no necesariamente factible) entonces $w = c_B B^{-1}$ es un punto factible del problema dual (D). Sin embargo, se puede demostrar que ese punto w, además de ser factible, es un punto extremo (SBF) del problema dual (D).

Teorema 1: La matriz B es una base del problema (P), no necesariamente factible (sin necesidad de cumplir $B^{-1}b \geq 0$) que cumple con el criterio de optimalidad de (P), $(z_j - c_j) \leq 0$ $\forall_j \quad \Leftrightarrow \quad w = c_B B^{-1}$ es una SBF del problema dual (D). En otras palabras, w es un punto extremo (factible) del problema dual (D).

Prueba: $\Rightarrow$ Demostramos que si la base B produce optimalidad en (P), $(z_j - c_j) \ \leq 0 \ \forall_j \Rightarrow$ $w = c_B B^{-1}$ es un punto extremo del problema dual (D).
En este caso, debemos demostrar que si en (P) n hiperplanos LI están activos $\Rightarrow$ en el problema dual m hiperplanos LI están activos y w es factible para el problema dual. Sean los problemas primal y dual:

$$P \ \Rightarrow \left[\begin{array}{lll} \min & z(x) = & cx \\ \text{s.a.} & & \\ & Ax \geq b & \rightarrow \ m \text{ subespacios} \\ & x \geq 0 & \rightarrow \ n \text{ subespacios} \end{array} \right.$$

En el espacio E^n.

$$D \ \Rightarrow \left[\begin{array}{lll} \max & v(w) = & wb \\ \text{s.a.} & & \\ & wA \leq c & \rightarrow \ n \text{ subespacios} \\ & w \geq 0 & \rightarrow \ m \text{ subespacios} \end{array} \right.$$

En el espacio E^m.

Sea x un punto del problema primal identificado por una base B que tiene inversa mas no necesariamente factible. Entonces en x se cumple la propiedad de optimalidad $(z_j - c_j) \leq \ 0 \ \forall_j$. Antes de enunciar el teorema ya se demostró que en este caso el punto $w = c_B B^{-1}$ es un punto factible del problema dual. Falta demostrar que w es también (además de factible) un punto extremo del problema dual. Demostramos esta propiedad recordando que un punto extremo (SBF) tiene un número de hiperplanos activos igual a la dimensión del espacio de trabajo.

Como x es punto extremo no necesariamente factible de (P) entonces en ese punto están activos n hiperplanos y debemos demostrar que en w están activos m hiperplanos.

Suponer que p hiperplanos están activos en $Ax \geq b$ y $(n - p)$ hiperplanos están activos en $x \geq 0$. Por el teorema de las holguras complementarias si p hiperplanos están activos en

$Ax \geq b$ (con $Ax = b$) los otros (m - p) hiperplanos no están activos ($Ax > b$) lo que exige que los (m - p) hiperplanos correspondientes en ($w \geq 0$) deben estar activos en el problema dual.

De igual manera, como existen (n - p) hiperplanos activos en (x = 0) entonces existen [n - (n - p)] = p hiperplanos que no están activos en ($x > 0$) y, por lo tanto, por el teorema de las holguras complementarias deben existir p hiperplanos activos en las restricciones ($wA \leq c$), o sea, deben existir p hiperplanos activos del tipo $wA = c$ en el problema dual.

Así, el número total de hiperplanos activos en el punto w del problema dual es igual a [(m - p) + p] = m. Como el problema dual está en el espacio E^m $\Rightarrow w$ es un punto extremo (SBF) del problema dual porque es factible y tiene m hiperplanos activos.

Si $w = c_B B^{-1}$ es un punto extremo (y por tanto factible) del problema dual entonces $\overline{c} \leq 0$ en el problema primal (P) (los coeficientes de costo relativo del problema primal satisfacen optimalidades del primal). Esta parte es más fácil.

Transformemos las restricciones de (P) en igualdad de la siguiente forma:

$$[A \quad -I]x \ = b$$

Los coeficientes de costo relativo de las variables que forman las columnas de A son las siguientes:

$$\overline{c}_A = c_B B^{-1} A - c = \quad wA - c \quad \Rightarrow \quad \overline{c}_A = wA - c$$

Más como w es factible $wA \leq c \ \ \Rightarrow \ \ wA - c \leq 0 \ \Rightarrow \overline{c}_A \leq 0$.

Los coeficientes de costo relativo de las variables que forman las columnas de -I son las siguientes:

$$\overline{c}_I = c_B B^{-1}(-I) - c_I = w(-I) - 0 = -w$$

Más como w es factible $w \geq 0 \ \Rightarrow \ -w \leq 0 \ \ \Rightarrow \ \ \overline{c}_I \ \leq \ 0$

Así se demuestra que si w es factible de (D) $\Rightarrow \overline{c} \ \leq 0$ (optimalidad) es verdadero en el problema Primal (P).

Una consecuencia del teorema 1 es el corolario 1.

Corolario 1: Si x es un punto extremo de (P) (es una SBF) con $x_N = 0$ y $x_B = B^{-1}b \geq 0$ $\Rightarrow \ w = c_B B^{-1}$ satisface optimalidad del problema dual (D).

Finalmente, podemos concluir que si $w = c_B B^{-1}$ es un punto extremo del problema dual y si $x_B = B^{-1}b \geq 0$ con $x_N = 0$ es SBF del primal entonces w es óptimo del primal y $x = (x_B, x_N)$ es óptimo del primal:

$$v(w) = wb = c_B B^{-1} b = c_B \overline{b} = z(x)$$

7.2 Análisis del Método Dual Simplex

Consideremos el siguiente PL:

$$P \implies \begin{cases} min \;\; z(x) \;\; = \qquad cx \\ \qquad s.a. \\ \qquad\qquad\qquad Ax = b \\ \qquad\qquad\qquad x \geq 0 \end{cases} \tag{7.4}$$

Utilización práctica:

En algunos problemas no es fácil encontrar una SBF ($B^{-1}b = \overline{b} \geq 0$) sin el empleo de variables artificiales. Sin embargo en estos casos, en determinadas ocasiones, es muy fácil encontrar una base inicial que no necesariamente sea factible mas que sea dual factible, esto es, $(z_j - c_j) \leq 0 \;\; \forall_j$ para el problema de minimización. En este tipo de problema el método dual simplex es más eficiente. Así, el método dual simplex produce una serie de cuadros simplex que manteniendo la factibilidad del dual, busca la factibilidad del primal. En otras palabras, el método dual simplex camina a través de puntos extremos del problema dual hasta encontrar el punto extremo óptimo del problema dual que también identifica el óptimo del problema primal. Adicionalmente, debemos insistir que el cuadro simplex de trabajo es un cuadro montado con los datos del problema primal, o sea, es un cuadro simplex del problema primal.

Selección de la variable que debe salir de la base:

Si el cuadro actual es dual factible entonces $(z_j - c_j) \leq 0 \;\; \forall_j$.

Si $\overline{b}_i \geq 0$ entonces el cuadro actual es óptimo.

En caso contrario se selecciona una variable básica x_{B_r} para salir de la base empleando el siguiente criterio:

$$x_{B_r} \implies \overline{b}_r = min\{\overline{b}_i\} \tag{7.5}$$

El criterio empleado en (7.5) no es único y en general puede ser seleccionada cualquier variable básica con $\overline{b}_i < 0$ como candidata a salir de la base.

Esta propuesta transforma en positivo por lo menos el elemento de la posición de x_{Br} y lo que se pretende es transformar todos los elementos de $\overline{b}$ a través de iteraciones simplex.

Selección de la variable que debe entrar en la base:

Seleccionada la variable candidata a salir de la base x_{B_r} entonces se debe seleccionar la variable candidata a entrar en la base y esa variable es seleccionada entre aquellas que tienen $y_{rk} < 0$ ya que un pivot de este tipo garantiza que después del pivotaje $\overline{b}_r^{'} > 0$.

Así, entre todas las variables que tiene $y_{rk} < 0$ se debe seleccionar aquella que mantenga la factibilidad del problema dual (optimalidad del problema primal), esto es $(z_j - c_j)^{'} \leq 0$ después del pivotaje.

Sea r la fila que identifica la variable básica x_{B_r} que es candidata a salir de la base, entonces la variable candidata a entrar en la base está definida por el índice k determinado así:

$$\frac{(z_k - c_k)}{y_{rk}} = min\left\{\frac{(z_j - c_j)}{y_{rj}} \quad : y_{rj} < 0\right\} \tag{7.6}$$

Verificamos que (7.6) garantiza la factibilidad del dual:

Después del pivotaje, los nuevos valores de la línea de costo son los siguientes:

$$(z_j - c_j)^{'} = (z_j - c_j) - \frac{y_{rj}}{y_{rk}}(z_k - c_k) \tag{7.7}$$

- Si $y_{rj} \geq 0 \Longrightarrow$ como $y_{rk} < 0$ y $(z_k - c_k) \leq 0$ entonces en (7.7) tenemos:
  $-\frac{y_{rj}}{y_{rk}}(z_k - c_k) \leq 0 \Longrightarrow (z_j - c_j)^{'} \leq (z_j - c_j) \leq 0 \quad$ (dual factible).

  En este caso los nuevos coficientes de costos relativos quedan todavía más negativos.

- Si $y_{rj} < 0$ de (7.6) tenemos que:
  $\dfrac{(z_k - c_k)}{y_{rk}} \leq \dfrac{(z_j - c_j)}{y_{rj}}$

Multiplicando por $y_{rj} < 0 \Longrightarrow \dfrac{y_{rj}(z_k - c_k)}{y_{rk}} \geq \dfrac{y_{rj}(z_j - c_j)}{y_{rj}}$

$$(z_j - c_j) \leq \frac{y_{rj}(z_k - c_k)}{y_{rk}} \Longrightarrow (z_j - c_j) - \frac{y_{rj}(z_k - c_k)}{y_{rk}} \leq 0 \tag{7.8}$$

Entonces de (7.7) y (7.8) tenemos que :

$$(z_j - c_j)^{'} \leq 0 \tag{7.9}$$

Así se verifica que (7.6) garantiza la factibilidad del problema dual, o sea, en el siguiente cuadro simplex, los coeficientes de costo relativo continúan siendo ≤ 0.

Cuadro No. 1

Análisis de optimalidad del problema primal

	z	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	x_{n+1}	$\cdots$	x_{n+m}	RHS
z	1	(z_1-c_1)	(z_2-c_2)	$\cdots$	(z_n-c_n)	$(z_{n+1}-c_{n+1})$	$\cdots$	$(z_{n+m}-c_{n+m})$	$c_B\overline{b}$
x_{B_1}	0	y_{11}	y_{12}	$\cdots$	y_{1n}	$y_{1,n+1}$	$\cdots$	$y_{1,n+m}$	$\overline{b}_1$
x_{B_2}	0	y_{21}	y_{22}	$\cdots$	y_{2n}	$y_{2,n+1}$	$\cdots$	$y_{2,n+m}$	$\overline{b}_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{B_m}	0	y_{m1}	y_{m2}	$\cdots$	y_{mn}	$y_{m,n+1}$	$\cdots$	$y_{m,n+m}$	$\overline{b}_m$

$\Uparrow$
Variables de holgura

Cuadro No. 2

Cuadro dual simplex

	z	x_1	$\cdots$	x_j	$\cdots$	$\Downarrow$ x_k	$\cdots$	x_n	RHS	
z	1	(z_1-c_1)	$\cdots$	(z_j-c_j)	$\cdots$	(z_k-c_k)	$\cdots$	(z_n-c_n)	$c_B\overline{b}$	
x_{B_1}	0	y_{11}	$\cdots$	y_{1j}	$\cdots$	y_{1k}	$\cdots$	y_{1n}	$\overline{b}_1$	
x_{B_2}	0	y_{21}	$\cdots$	y_{2j}	$\cdots$	y_{2k}	$\cdots$	y_{2n}	$\overline{b}_2$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
x_{B_r}	0	y_{r1}	$\cdots$	y_{rj}	$\cdots$	y_{rk}	$\cdots$	y_{rn}	$\overline{b}_r$	$\Longrightarrow$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
x_{B_m}	0	y_{m1}	$\cdots$	y_{mj}	$\cdots$	y_{mk}	$\cdots$	y_{mn}	$\overline{b}_m$	

Variación de la función objetivo: $z(x) = c_B\overline{b}$

Nuevo valor de la función objetivo: $z(x)^{'} = z(x) - \frac{\overline{b}_r}{y_{rk}}(z_k - c_k)$

Mas como $\overline{b}_r < 0$; $y_{rk} < 0$ y $(z_k - c_k) \leq 0 \Longrightarrow -\frac{\overline{b}_r}{y_{rk}}(z_k - c_k) \geq 0$

$$\Longrightarrow z(x)^{'} = z(x) - \frac{\overline{b}_r}{y_{rk}}(z_k - c_k) \Longrightarrow z(x)^{'} \geq z(x) \tag{7.10}$$

Donde $\Delta z(x) = -\frac{\overline{b}_r}{y_{rk}}(z_k - c_k) \geq 0$

Por lo tanto, la función objetivo aumenta y se hace menos infactible para el problema primal.

Cuando el problema primal es infactible:

Qué ocurre si todos los $y_{rj} \geq 0$? $\Longrightarrow$ No existe variable candidata a entrar en la base.

En este caso la fila r tiene la siguiente forma:

$$\sum_j y_{rj}x_j = \overline{b}_r \tag{7.11}$$

Con $y_{rj} \geq 0$ y $\overline{b}_r < 0$, así con la exigencia adicional de que $x_j \geq 0$, (7.11) es una relación matemática imposible de ser satisfecha. Esta contradicción implica que el problema primal es **infactible** y por lo tanto el problema dual es ilimitado. Primal infactible implica que el dual puede ser ilimitado o infactible, pero como el dual ya es factible en el cuadro actual, entonces la única posibilidad es que el problema dual sea ilimitado.

Ejemplo 1: Resolver el siguiente PL empleando el método dual-simplex:

$$\begin{array}{rcl} min\ \ z(x) & = & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ s.a. & & \\ & & x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 3 \\ & & 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 4 \\ & & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

Colocando las variables de holgura y multiplicando por -1 las restricciones tenemos que :

$$\begin{array}{rcl} min\ \ z(x) & = & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ s.a. & & \\ & & -x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ & & -2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_5 = -4 \\ & & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \geq 0 \end{array}$$

Usando la base $B = [a_4 \quad a_5]$ verificamos que tenemos una base que es dual factible.

$$B = [a_4 \quad a_5] = I$$

Entonces tenemos:

$$c_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad c_N = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\overline{c}_N = c_B B^{-1} N - c_N = -c_N = \begin{bmatrix} -2 & -3 & -4 \end{bmatrix} \leq 0$$

que es dual factible porque todos los coeficientes de costos relativos de las variables no básicas son ≤ 0.

Ahora es posible montar el cuadro inicial del método dual simplex y resolver el problema. Los resultados son mostrados en el siguiente cuadro:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
z	1	-2	-3	-4	0	0	0
x_4	0	-1	-2	-1	1	0	-3
x_5	0	-2	1	-3	0	1	-4
z	1	0	-4	-1	0	-1	4
x_4	0	0	$-\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	-1
x_1	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	2
z	1	0	0	$-\frac{9}{5}$	$-\frac{8}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{28}{5}$
x_2	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$
x_1	0	1	0	$\frac{7}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{11}{5}$

La solución óptima finita del problema presentado en el cuadro anterior es la siguiente:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{11}{5} \\ x_2 = \frac{2}{5} \\ x_3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow z^* = \frac{28}{5}$$

Algoritmo Dual Simplex

1. Encontrar una base B dual factible $\Longrightarrow (z_j - c_j) \leq 0 \ \ \forall_j$. En caso de no existir una base B evidente se entra en el proceso de la Fase I del método dual simplex.

2. Seleccionar la variable candidata a salir de la base: x_{B_r}

   Si $\overline{b} = B^{-1}b \geq 0 \Longrightarrow$ Stop, fue encontrado el óptimo del problema.

   En caso contrario seleccionar la variable básica x_{B_r} de la fila r como candidata a salir de la base empleando la relación:

$$\overline{b}_r = min\left\{\overline{b}_i\right\}$$

3. Seleccionar la variable candidata a entrar en la base, x_k

   Si $y_{rj} \geq 0 \ \ \forall_j \Longrightarrow$ stop, el problema es infactible (dual ilimitado).

   En caso contrario seleccionar la variable no básica x_k de la columna k como candidata a entrar en la base utilizando la relación:

$$\frac{z_k - c_k}{y_{rk}} = \begin{array}{c} min \\ j \in R \end{array} \left\{\frac{(z_j - c_j)}{y_{rj}} \ ; \ y_{rj} < 0\right\}$$

   R es el conjunto de índices de las variables no básicas.

4. Pivotar el cuadro empleando y_{rk} como pivot y regresar al paso 2.

Observación:

El método dual simplex es un método alternativo al método simplex convencional (primal simplex) y para determinados problemas es más adecuado emplearlo.

En determinadas aplicaciones como el análisis de sensibilidad y la postoptimización el método dual simplex es la única alternativa eficiente. En tópicos más avanzados existen técnicas de programación entera donde el método dual simplex es la única alternativa eficiente (métodos de cortes de Gomory, métodos de Branch and Bound, etc).

Ejemplo 2: Resolver el siguiente problema empleando el método dualsimplex.

$$\begin{array}{rcl} min \ \ z(x) & = & 2x_1 + 6x_2 \\ s.a. & & \\ & & 2x_1 + 3x_2 \geq 12 \\ & & -x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Colocando las variables de holgura y multiplicando las restricciones por -1 tenemos una base dual factible evidente:

$$\begin{array}{rcl} min \ \ z(x) & = & 2x_1 + 6x_2 \\ s.a. & & \\ & & -2x_1 - 3x_2 + x_3 = -12 \\ & & x_1 - 2x_2 + x_4 = -4 \\ & & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

Siendo las variables clasificadas así: $x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$; $x_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

Verifiquemos que $B = \begin{bmatrix} a_3 & a_4 \end{bmatrix} = I$ es una base dual factible:

$$\overline{c}_N = c_B B^{-1} N - c_N$$

siendo que: $c_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$; $c_N = \begin{bmatrix} 2 & 6 \end{bmatrix}$; $B = I = B^{-1}$; $N = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

$$\overline{c}_N = 0 - c_N = -c_N \Longrightarrow \overline{c}_N = \begin{bmatrix} -2 & -6 \end{bmatrix} \leq 0$$

Entonces tenemos una base dual factible ya que todos los $(z_j - c_j)\ \forall_j$ son menores o iguales a cero, así se tiene que :

$$(z_1 - c_1) = -2; \ \ (z_2 - c_2) = -6; \ \ (z_3 - c_3) = (z_4 - c_4) = 0$$

Implementación del cuadro inicial:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculamos los elementos de la fila objetivo (coeficientes de costos relativos de las variables no básicas y función objetivo):

$$\overline{c}_N = \begin{bmatrix} -2 & -6 \end{bmatrix} \ \ y \ \ \overline{z} = c_B B^{-1} b = 0$$

$\overline{b} = B^{-1} b = b = \begin{bmatrix} -12 \\ -4 \end{bmatrix} \Longrightarrow$ significa que el cuadro inicial esta listo.

Observación: Como se puede observar en el cuadro simplex del problema primal aparecen los valores de las variables w del problema dual en cada iteración, por lo tanto los valores de w en los cuadros son los siguientes: $(0,0)$, $(1,0)$, $(\frac{10}{7}, \frac{6}{7})$.

Para identificar los valores de w debemos recordar que el ejemplo tiene la misma estructura de (7.1) donde demostramos que los coeficientes de costo relativo, en cualquier cuadro, para las variables de holgura tienen la siguiente forma:

$$(z_j - c_j) = -w_j$$

También no podemos olvidar que siempre es válida la relación: $w = c_B B^{-1}$

Método Dual Simplex

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS	
z	1	-2	-6	0	0	0	
x_3	0	-2	-3	1	0	-12	$\Longrightarrow min\left\{\frac{-2}{-2}, \frac{-6}{-3}\right\}$
x_4	0	1	-2	0	1	-4	
z	1	0	-3	-1	0	12	
x_1	0	1	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	6	
x_4	0	0	$-\frac{7}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	-10	
z	1	0	0	$-\frac{10}{7}$	$-\frac{6}{7}$	$\frac{144}{7}$	
x_1	0	1	0	$-\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{12}{7}$	$\Longrightarrow$ Cuadro óptimo
x_2	0	0	1	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{2}{7}$	$\frac{20}{7}$	

Método primal Simplex

	z	x_o	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z	1	0	-2	-6	0	0	0	0	0
x_o	0	1	1	5	-1	-1	0	0	16
x_5	0	0	2	3	-1	0	1	0	12
x_6	0	0	-1	2	0	-1	0	1	4
z	1	0	-5	0	0	-3	0	3	12
x_o	0	1	$\frac{7}{2}$	0	-1	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{5}{2}$	6
x_5	0	0	$\frac{7}{2}$	0	-1	$\frac{3}{2}$	1	$-\frac{3}{2}$	6
x_2	0	0	$-\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2
z	1	0	0	0	$-\frac{10}{7}$	$-\frac{6}{7}$	$\frac{10}{7}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{144}{7}$
x_o	0	1	0	0	0	0	-1	-1	0
x_1	0	0	1	0	$-\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{2}{7}$	$-\frac{3}{7}$	$\frac{12}{7}$
x_2	0	0	0	1	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{20}{7}$

La solución óptima a la cual se llegó en los cuadros anteriores es la siguiente:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{12}{7} \\ x_2 = \frac{20}{7} \end{cases} \Longrightarrow z(x)^* = \frac{144}{7}$$

Observación: Los cuadros del problema original siempre son factibles para el problema dual, así en cada cuadro aparece un punto extremo del problema dual:

$$w_1 = (0,0); \quad w_2 = (1,0); \quad w_3 = (\frac{10}{7}, \frac{6}{7})$$

Insistimos nuevamente que el w aparece negativo en el cuadro ya que:

$$(z_j - c_j) \leq 0 \Longrightarrow -w_i \leq 0; \quad \text{se sabe que} : (z_j - c_j) = -w_i \Longrightarrow w_i \geq 0 \ \text{ ver } (7.3)$$

7.2.1 Fase I del Método Dual Simplex

Cuando el cuadro simplex del problema primal no satisface la optimalidad, entonces no es posible emplear el método dual simplex directamente. En este caso se debe encontrar "artificialmente" un cuadro dual factible lo que equivale a encontrar un cuadro que es "artificialmente" modificado para satisfacer la optimalidad del primal.

Suponer que ha sido seleccionada una base B. Después de montar el cuadro inicial se verifica que no es dual factible:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & z & x_1 & x_2 & \cdots & x_m & x_{m+1} & \cdots & x_n & RHS \\
z & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & (z_{m+1} - c_{m+1}) & \cdots & (z_n - c_n) & c_B\overline{b} \\
x_1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & y_{1,m+1} & \cdots & y_{1,n} & \overline{b}_1 \\
x_2 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & y_{2,m+1} & \cdots & y_{2,n} & \overline{b}_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
x_m & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & y_{m,m+1} & \cdots & y_{m,n} & \overline{b}_m
\end{array}$$

Como no todos los $(z_j - c_j)$ son ≤ 0 entonces el cuadro no es dual factible. Las m primeras variables forman la base. Para encontrar una base dual factible artificial adicionamos al cuadro anterior la siguiente restricción:

$$\sum_{j=m+1}^{n} x_j \leq M \quad (\text{donde:} j \in R \text{ representa las variables no básicas})$$

Siendo $M > 0$ y bastante grande. Así, el cuadro modificado tiene la siguiente forma:

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
 & z & x_1 & x_2 & \cdots & x_m & x_{m+1} & \cdots & x_n & x_o & RHS \\
z & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & (z_{m+1} - c_{m+1}) & \cdots & (z_n - c_n) & 0 & c_B\overline{b} \\
x_o & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \text{M} \\
x_1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & y_{1,m+1} & \cdots & y_{1,n} & 0 & \overline{b}_1 \\
x_2 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & y_{2,m+1} & \cdots & y_{2,n} & 0 & \overline{b}_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
x_m & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & y_{m,m+1} & \cdots & y_{m,n} & 0 & \overline{b}_m
\end{array}
$$

Donde x_o es la variable de holgura de la nueva restricción adicionada. La restricción anterior es constituida por todas las variables no básicas. Para obtener un cuadro dual factible se debe pivotar la restricción adicionada con la columna k encontrada por la relación:

$$(z_k - c_k) = \begin{array}{c} max \\ j \in R \end{array} \{(z_j - c_j)\} \tag{7.12}$$

Por lo tanto, se selecciona para pivotaje aquel x_k que presenta el mayor coeficiente de costo relativo $(z_k - c_k)$. Así, x_k entra en la base y x_o sale de la nueva base y después de efectuado el pivotaje, el nuevo cuadro es dual factible, o sea, con todos los $(z_j - c_j)' \leq 0$.

Se puede verificar fácilmente que la selección de x_k empleando (7.12) genera un nuevo cuadro con todos los $(z_j - c_j)' \leq 0$. Después del pivotaje los nuevos coeficientes de costo relativos son encontrados usando la relación:

$$(z_j - c_j)' = (z_j - c_j) - (z_k - c_k) \leq 0$$

porque $(z_k - c_k) \geq (z_j - c_j)$.

Una vez encontrado el cuadro "dual factible artificial" el proceso continua en la forma tradicional y termina con una de las siguientes conclusiones:

1. El dual es ilimitado $\Longrightarrow$ el primal es infactible.
2. Existe óptimo finito para el problema primal y para el problema dual. En este caso $x_o^* > 0$.
3. El problema modificado presenta una solución con $x_o^* = 0$. En este caso existen todavía dos posibilidades:

- Si $(z_o - c_o) < 0 \Longrightarrow x_o$ es no básica y el problema primal es ilimitado (problema dual infactible).
- Si $(z_o - c_o) = 0 \Longrightarrow$ los problemas primal y dual tienen soluciones óptimas finitas.

Verificación de los Tipos de Convergencia: Analizamos, brevemente los tipos de convergencia mostrados anteriormente:

1. El problema modificado puede ser infactible lo que implica que el problema dual es ilimitado. Obviamente, la inclusión de la nueva restricción no participa en la caracterización del problema como siendo infactible.
2. Existe óptimo finito para el problema primal y dual:

   Obviamente, el óptimo en este caso debe corresponder a un punto extremo (o SBF) en el cual la nueva restricción adicionada no debe estar activa y por lo tanto, $x_o^* > 0$.
3. El problema modificado presenta una solución con $x_o^* = 0$:

   En este caso la nueva restricción adicionada está activa y puede suceder uno de los siguientes casos:

   (a) Si $(z_o - c_o) < 0 \Longrightarrow x_o$ es una variable no básica:
   Sabemos que:

$$z = \overline{z} - \sum_{j \in R} (z_j - c_j) x_j \tag{7.13}$$

$$\sum_{j=m+1}^{n} x_j + x_o = M \quad (donde : j \in R) \tag{7.14}$$

   El valor específico escogido para M es lo que provoca un $x_o = 0$. Por lo tanto, si aumentamos el valor de M, x_o ya no será igual a cero y de (7.13) es posible disminuir el valor de z. Así, el valor actual de z está siendo "retenido" por el valor actual de M. Si M aumenta indefinidamente, entonces z también disminuye indefinidamente caracterizando un problema primal ilimitado.

   (b) Si $(z_o - c_o) = 0$. En este caso la solución actual es óptima finita a pesar de que x_o sea una variable no básica porque de (7.13) se puede verificar que si $(z_j - c_j) = 0$, entonces una variación de M en (7.14) no modifica la solución óptima.

Ejemplo 3: Resolver el siguiente PL usando el método dual simplex:

$$\begin{aligned} min \ \ z \ &= -2x_1 + 3x_2 \\ s.a. \ & \\ & \left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 3 \\ 3x_1 + x_2 &\leq 6 \\ x_1; \quad x_2 &\geq 0 \end{aligned}\right\} \Longleftarrow S \end{aligned}$$

Usando las variables de holgura x_3 y x_4 y, multiplicando la primera restricción por -1 tenemos:

$$S \Longrightarrow \begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 \qquad = -3 \\ \quad 3x_1 + x_2 \quad + x_4 = 6 \\ \quad x_1;\ x_2;\ x_3;\ x_4; \geq 0 \end{cases}$$

siendo que la matriz A asume la siguiente forma:

$$A = \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline -1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Aparentemente existe una base adequada con la matriz: $B = [a_3 \quad a_4] = I$. Entonces tenemos:

$$c_B = [0 \quad 0] \qquad\qquad c_N = [-2 \quad 3]$$

Verificamos si B corresponde a una base dual factible calculando los coeficientes de costos relativos de las variables no básicas:

$$\overline{c}_N = c_B B^{-1} N - c_N = -c_N = [2 \quad -3]$$

Con la respuesta anterior se verifica que B no corresponde a una base dual factible. También tenemos que $c_B B^{-1} b = 0$ y se puede montar el siguiente cuadro:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
z	1	2	-3	0	0	0
x_3	0	-1	-1	1	0	-3
x_4	0	3	1	0	1	6

Como este cuadro no es dual factible entonces adicionamos la siguiente restricción:

$$x_1 + x_2 \leq M \Longrightarrow x_1 + x_2 + x_o = M \ , \qquad \text{siendo que:} \quad x_o \geq 0$$

En este nuevo cuadro, con la nueva restricción adicionada al cuadro anterior, pivotamos inicialmente con aquella variable x_k que tiene el mayor coeficiente de costo relativo $\Longrightarrow (z_j - c_j)$. El proceso de solución se muestra en un cuadro separado.

Cuadro simplex del método dual simplex.

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_o	RHS
z	1	2	-3	0	0	0	0
x_o	0	1	1	0	0	1	M
x_3	0	-1	-1	1	0	0	-3
x_4	0	3	1	0	1	0	6
z	1	0	-5	0	0	-2	$-2M$
x_1	0	1	1	0	0	1	M
x_3	0	0	0	1	0	1	$M-3$
x_4	0	0	-2	0	1	-3	$-3M+6$
z	1	0	$-\frac{11}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	0	-4
x_1	0	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	2
x_3	0	0	$-\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	-1
x_o	0	0	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	1	$M-2$
z	1	0	0	$-\frac{11}{2}$	$-\frac{5}{2}$	0	$\frac{3}{2}$
x_1	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$
x_2	0	0	1	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$
x_o	0	0	0	1	0	1	$M-3$

Por lo tanto, la solución óptima finita del problema es el siguiente:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} \\ \\ x_2 = \frac{3}{2} \end{cases} \qquad \Longrightarrow z(x^*) = \frac{3}{2}$$

con $x_o^* = M - 3 > 0$. La figura 7.1 muestra la representación gráfica del problema primal. Se puede verificar que tanto el problema primal, así como el problema dual no tienen una SBF evidente (es necesario el método de las dos fases para resolver cualquiera de esos problemas usando el método primal simplex o usando el método dual simplex).

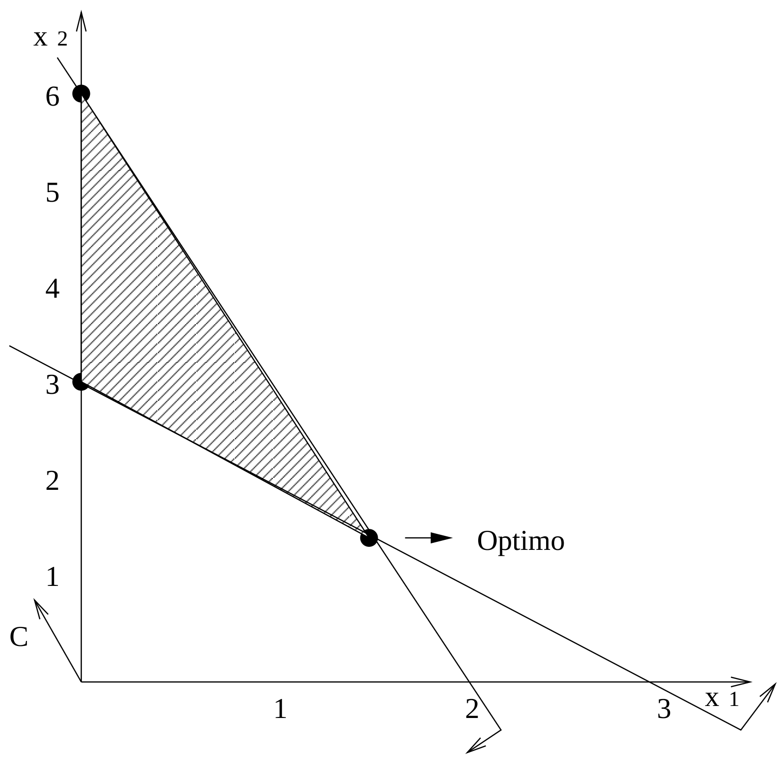


Figura 7.1: Problema primal.

El problema dual asume la siguiente forma:

$$\begin{array}{rcl} max \;\; v(w) & = & 3w_1 + 6w_2 \\ s.a. & & \\ & & w_1 + 3w_2 \leq -2 \\ & & w_1 + w_2 \leq 3 \\ & & w_1 \geq 0 \\ & & w_2 \leq 0 \end{array}$$

En los cuadros simplex encontrados para resolver el problema primal se puede observar que en realidad estamos resolviendo el problema dual. En esos cuadros simplex, debajo de las variables x_3 y x_4 aparecen los valores de w en la forma $w = [-w_1 \quad w_2]$. El lector está invitado a reflexionar sobre esa forma matemática para w. Por lo tanto, los sucesivos valores de w encontrados en esos cuadros son los siguientes:

1. Primer cuadro "factible": $w = [0 \quad 0]$.

   Indica que el cuadro es artificialmente factible.

2. Segundo cuadro factible (dual factible): $w = [0 \quad -\frac{2}{3}]$.

   Indica un punto extremo del problema dual.

3. Tercer cuadro factible (dual factible): $w = [\frac{11}{2} \quad -\frac{5}{2}]$.

   Indica otro punto extremo del problema dual que corresponde al punto extremo óptimo del problema dual y, lógicamente, corresponde a un cuadro óptimo del problema primal.

La figura 7.2 muestra la representación gráfica del problema dual.

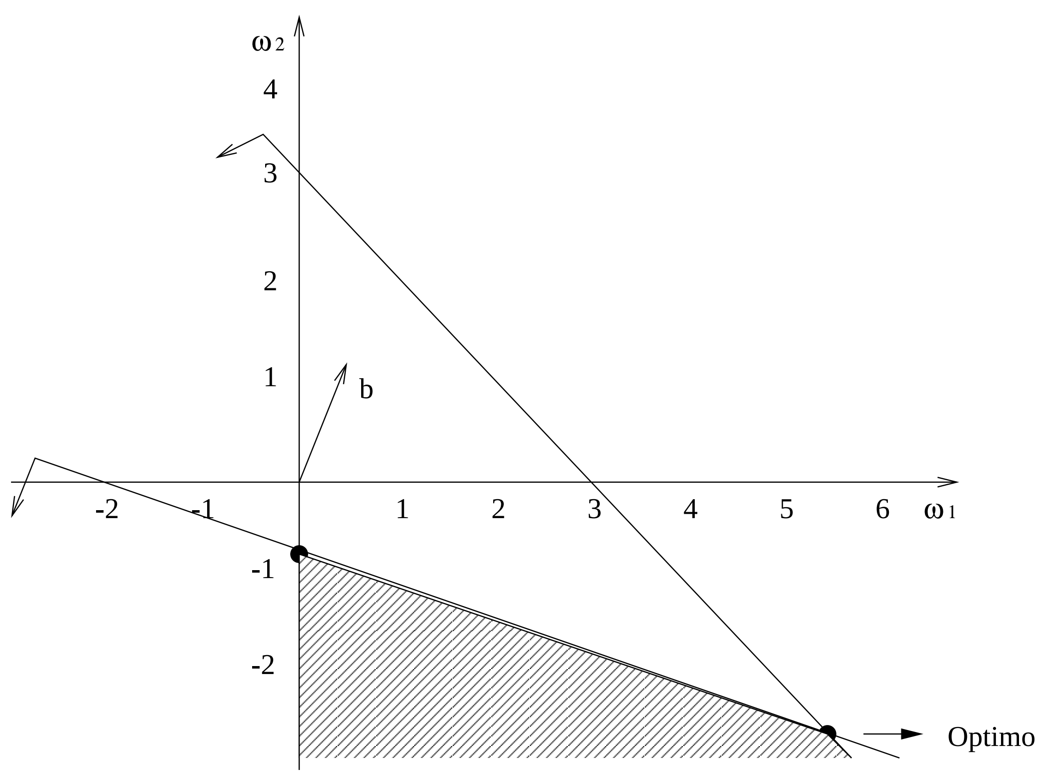


Figura 7.2: Problema dual.

7.3 Ejercicios Resueltos:

1. Resolver el siguiente PL usando Dual Simplex

$$PLE: \begin{cases} \min & x_3 \\ s.a. & \\ & -(1/4)x_1 - (1/2)x_2 \leq -3/4 \\ & 8x_1 + 12x_2 \leq 20 \\ & x_1 + (1/2)x_2 - x_3 \leq -1/2 \\ & -9x_1 - 3x_2 \leq 6 \\ & x_j \geq 0, \forall_j \end{cases}$$

$$PLE: \begin{cases} \min & x_3 \\ s.a. & \\ & -(1/4)x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_4 = -\frac{3}{4} \\ & 8x_1 + 12x_2 + x_5 = 20 \\ & x_1 + (1/2)x_2 - x_3 + x_6 = -1/2 \\ & -9x_1 - 3x_2 + x_7 = 6 \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1,7 \end{cases}$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1/4 & -1/2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 12 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -9 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}; \qquad b = \begin{bmatrix} -3/4 \\ 20 \\ -1/2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$x = (x_1, x_2, x_3) \ ; \ x_B = (x_4, x_5, x_6, x_7)$$

$$c_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad c_N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = I \ ; \quad B^{-1}b = b \ ; \quad \overline{c}_N = c_B B^{-1} N - c_N = -c_N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{(dual factible)}$$

$$N = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}; \quad c_B B^{-1} b = 0$$

	z	x_4	x_5	x_6	x_7	x_1	x_2	x_3	RHS
z	1	0	0	0	0	0	0	-1	0
x_4	0	1	0	0	0	-1/4	-1/2	0	-3/4
x_5	0	0	1	0	0	8	12	0	20
x_6	0	0	0	1	0	1	1/2	-1	-1/2
x_7	0	0	0	0	1	-9	-3	0	6
z	1	0	0	-1	0	-1	-1/2	0	1/2
x_4	0	1	0	0	0	-1/4	-1/2	0	-3/4
x_5	0	0	1	0	0	8	12	0	20
x_3	0	0	0	-1	0	-1	-1/2	1	1/2
x_7	0	0	0	0	1	-9	-3	0	6
z	1	-1	0	-1	0	-3/4	0	0	5/4
x_2	0	-2	0	0	0	1/2	1	0	3/2
x_5	0	24	1	0	0	-6	0	0	2
x_3	0	-1	0	-1	0	-3/4	0	1	5/4
x_7	0	-6	0	0	1	-15/2	0	0	21/2

Solución óptima:

$$\begin{array}{l} x_2 = 3/2 \\ x_3 = 5/4 \\ x_5 = 2 \\ x_7 = 21/2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad z(x) = 5/4$$

Observación: El lector puede observar que en la primera iteración fue escogida x_6 para salir de la base y no x_4. El lector puede usar la opción con x_4 saliendo de la base. En ese caso puede suceder el ciclaje. El problema de ciclaje en la estructura del método dual simplex no fue analizado en la teoría de este material académico.

2. Use Dual Simplex para resolver el siguiente PL, usando como base inicial $x_B = (x_1, x_2, x_3)$

$$PL: \quad \left[\begin{array}{ll} min & -2x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 + 6x_5 + 8x_6 - 9x_7 - 5x_8 \\ s.a. & \\ & x_1 + x_4 - 2x_5 + x_6 + x_7 - 2x_8 = -3 \\ & x_2 - x_4 + x_5 + x_6 - 3x_7 - x_8 = -14 \\ & x_3 + x_4 - x_5 - 2x_6 - x_7 + x_8 = -5 \\ & x_j \geq 0; \;\; \forall_j \end{array} \right.$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}; \qquad b = \begin{bmatrix} -3 \\ -14 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$c_B = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}; \quad c_N = \begin{bmatrix} -1 & 6 & 8 & -9 & -5 \end{bmatrix}; \quad B = B^{-1} = I$$

$$c_B B^{-1} N - c_N = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 6 & 8 & -9 & -5 \end{bmatrix}$$

$$c_B B^{-1} N - c_N = \begin{bmatrix} -4 & 1 & -8 & -6 & 6 \end{bmatrix}$$

$$c_B B^{-1} b = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ -14 \\ -5 \end{bmatrix} = -55$$

El cuadro inicial no satisface optimalidad ya que algunos coeficientes de costo relativo son positivos.

Debemos aplicar el método de 2 fases en el Dual Simplex.

Agregamos una restricción adicional:

$$x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_0 = M \ ; \ x_0 \geq 0$$

		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_0	RHS
	z	1	0	0	0	-4	1	-8	-6	6	0	-55
$\Leftarrow$	x_0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	M
	x_1	0	1	0	0	1	-2	1	1	-2	0	-3
	x_2	0	0	1	0	-1	1	1	-3	-1	0	-14
	x_3	0	0	0	1	1	-1	-2	-1	1	0	-5
	z	1	0	0	0	-10	-5	-14	-12	0	-6	-6M-55
	x_8	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	M
	x_1	0	0	0	0	3	0	3	3	0	2	2M-3
	x_2	0	0	1	0	0	2	2	-2	0	1	M-14
$\Leftarrow$	x_3	0	0	0	1	0	-2	-3	-2	0	-1	-M-5
	z	1	0	0	-5/2	-10	0	-13/2	-7	0	-7/2	-7/2M -85/2
	x_8	0	0	0	1/2	1	0	-1/2	0	1	1/2	M/2 - 5/2
	x_1	0	1	0	0	3	0	3	3	0	2	2M - 3
$\Leftarrow$	x_2	0	0	1	1	0	0	-1	-4	0	0	-19
	x_5	0	0	0	-12	0	1	3/2	1	0	1/2	M/2 + 5/2
	z	1	0	-7/4	-17/4	-10	0	-17/4	0	0	-7/2	-7/2M -37/4
	x_8	0	0	0	1/2	1	0	-1/2	0	1	1/2	M/2 - 5/2
	x_1	0	1	3/4	3/4	3	0	9/9	0	0	2	2M - 69/4
	x_7	0	0	-1/4	-1/4	0	0	1/4	1	0	0	19/4
	x_5	0	0	1/4	-1/4	0	1	5/4	0	0	1/2	M/2 - 9/4

El cuadro final es óptimo y factible, se observa que el problema es ilimitado y que la función objetivo puede disminuir indefinidamente hasta -∞, ya que en el cuadro, M detiene la evolución de la función objetivo. Recordemos que un cuadro "optimo" con $x_0 = 0$ y $(z_0 - c_0) = 7/2 < 0$ identifica el problema como ilimitado.

$$Z^* \to -\infty$$

CAPÍTULO 8

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

El análisis de sensibilidad es usado para analizar la variación de la solución óptima de un problema de programación lineal (PL) cuando se realizan pequeñas alteraciones en un problema, o sea, cuando son realizadas algunas alteraciones en los parámetros A, b y c.

Sea el siguiente PL:

$$\begin{array}{rcl} min\ \ z(x) & = & cx \\ s.a. & & \\ & & Ax = b \\ & & x \geq 0 \end{array} \tag{8.1}$$

con m restricciones y n variables. Después de resolver el PL (8.1) existe disponible, además de los valores óptimos de las variables y de la función objetivo, la base óptima y el cuadro simplex óptimo de (8.1). Toda esta información puede ser aprovechada para verificar y/o encontrar la solución de un problema ligeramente diferente que (8.1), o sea, para resolver nuevamente el problema (8.1) cuando realizamos pequeñas alteraciones en los parámetros A, b y c. Este proceso de análisis de la variación de la solución óptima al modificar algunos parámetros (datos) del problema es conocido como análisis de sensibilidad. Por lo tanto, analizamos separadamente todas las modificaciones posibles en un problema de PL y que pueden ser reoptimizados de manera eficiente. En todos los casos se asume como problema base o referencial el problema (8.1) y se procede a realizar algunas modificaciones en los datos de ese problema.

8.1 Introducir una Nueva Variable en el Problema

Introducir una nueva variable al problema equivale a incorporar una nueva actividad en el problema de la vida real. Sea x_{n+1} la nueva variable introducida con costo c_{n+1} y con su vector columna a_{n+1}. Sin necesidad de resolver el problema se puede determinar, fácilmente, si la base óptima del problema original continúa siendo óptima para el problema modificado.

Determinamos el coeficiente de costo relativo $(z_{n+1} - c_{n+1})$ de x_{n+1} para la base óptima del problema original para verificar si esa base continua siendo óptima para el problema modificado. Una vez calculado $(z_{n+1} - c_{n+1})$ puede suceder lo siguiente:

1. $(z_{n+1} - c_{n+1}) \leq 0$:

   Entonces la base óptima del problema original continúa siendo óptima para el problema modificado y, por lo tanto, la solución óptima no se modifica (ambos problemas, original y modificado, tienen la misma solución óptima) y $x_{n+1} = 0$ en la solución óptima del problema modificado.

2. $(z_{n+1} - c_{n+1}) > 0$:

   Entonces la base óptima del problema original ya no es más óptima para el problema modificado y x_{n+1} debe entrar a la base y continuar el proceso de optimización hasta encontrar la convergencia del problema modificado. En este caso el proceso de optimización debe usar el método **primal simplex** porque el cuadro simplex disponible satisface **factibilidad** y debemos procurar la **optimalidad**.

El coeficiente de costo relativo de x_{n+1} para la base actual se encuentra usando la relación:

$$(z_{n+1} - c_{n+1}) = c_B B^{-1} a_{n+1} - c_{n+1} = w a_{n+1} - c_{n+1}$$

donde B^{-1} (y w) está disponible en el cuadro simplex (o puede ser calculado a partir de B que son las columnas de A identificadas por las variables básicas x_B). Para continuar el proceso de optimización, lógicamente, se debe también encontrar la columna de x_{n+1} correctamente actualizada para la base actual B y colocar esa columna en el cuadro simplex, o sea, se debe calcular:

$$y_{n+1} = B^{-1} a_{n+1}$$

que juntamente con $(z_{n+1} - c_{n+1})$ representa la columna actualizada de x_{n+1} en el cuadro simplex. Lógicamente, x_{n+1} debe entrar en la base y se debe continuar el proceso de optimización. (Ver ejemplos 3 y 4 sobre aplicación de este tipo de problema).

Un asunto interesante, todavia es analizar el tipo de solución óptima del problema modificado cuando $(z_{n+1} - c_{n+1}) > 0$. El proceso de reoptimización puede encontrar una nueva solución óptima finita o el problema puede transformarse en ilimitado. El lector está invitado a reflexionar sobre estos tipos de convergencia del problema modificado.

El lector puede verificar que es posible adicionar varias variables al problema simultáneamente y la mecánica de reoptimización continua siendo válida. En este último caso, simplemente deben ser encontrados los coeficientes de costo relativos de todas las variables adicionadas al problema, así como sus columnas y_k adecuadamente actualizadas.

8.2 Adicionar una Restricción Adicional de Desigualdad

Cuando introducimos una nueva restricción de desigualdad en realidad estamos incorporando un subespacio al conjunto convexo y, por lo tanto, el nuevo conjunto convexo (la intersección de los subespacios) puede ser menor. Por lo tanto, lo primero que debe hacerse es verificar si la nueva restricción elimina de la región factible el punto óptimo del problema original. Si la nueva restricción no elimina la solución óptima del problema anterior entonces la solución óptima del problema modificado es igual al del problema original. En caso contrario se debe proceder a reoptimizar el nuevo problema a partir de la base óptima del problema original.

El incremento de una restricción incrementa también el tamaño de la base y la nueva restricción debe ser colocada en la base correctamente actualizada para la base actual.

Sea la nueva restricción adicionada al problema:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{m+1,j}x_j \leq b_{m+1}$$

que es transformada en una igualdad usando la variable de holgura x_{n+1}:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{m+1,j}x_j + x_{n+1} = b_{m+1} \tag{8.2}$$

Las siguientes ecuaciones representan el cuadro simplex de la base óptima del problema original (realmente ellas son de carácter general):

$$z(x) + \qquad (c_B B^{-1}N - c_N)x_N = c_B B^{-1}b \tag{8.3}$$

$$x_B \quad + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b \tag{8.4}$$

Con la información de las variables básicas y no básicas, la nueva restricción puede escribirse de la siguiente forma:

$$a_B^{m+1}x_B + a_N^{m+1}x_N + x_{n+1} = b_{m+1} \tag{8.5}$$

donde a_B^{m+1} es un vector formado por los coeficientes de las variables básicas en la nueva restricción y a_N^{m+1} es el vector de los coeficientes de las variables no básicas en la misma restricción.

Multiplicando (8.4) por a_B^{m+1} tenemos:

$$a_B^{m+1}x_B + a_B^{m+1}B^{-1}Nx_N = a_B^{m+1}B^{-1}b \tag{8.6}$$

Ahora hacemos (8.5)-(8.6) y tenemos:

$$x_{n+1} + (a_N^{m+1} - a_B^{m+1} B^{-1} N) x_N = b_{m+1} - a_B^{m+1} B^{-1} b \tag{8.7}$$

De esta manera fue encontrada la ecuación (8.7) que está representada exclusivamente con las variables no básicas y la nueva variable de holgura x_{n+1}, o sea, fue eliminada las variables básicas. En otras palabras, la nueva restricción adicionada al problema fue transformada exclusivamente en función de las variables no básicas y de la nueva variable básica x_{n+1} y, por lo tanto, está en la forma adecuada para ser colocada en el cuadro simplex. Así, es posible montar el siguiente sistema:

$$\begin{array}{lll} z(x) & & +(c_B B^{-1} N - c_N) x_N = c_B B^{-1} b \\ & x_B & +B^{-1} N x_N = B^{-1} b \\ & & x_{n+1} \ +(a_N^{m+1} - a_B^{m+1} B^{-1} N) x_N = b_{m+1} - a_B^{m+1} B^{-1} b \end{array} \tag{8.8}$$

Este nuevo sistema representa el nuevo cuadro simplex que en realidad es el cuadro simplex antiguo donde simplemente se debe adicionar la última restricción que representa a la restricción adicionada al problema adecuadamente actualizada para ser incorporada al cuadro. En otras palabras, si montamos un cuadro simplex usando una base B formada por las columnas de la siguiente base:

$$x_B^n = \begin{bmatrix} x_B \\ x_{n+1} \end{bmatrix}$$

donde x_B^n representa la base nueva y x_B representa la base antigua, entonces se obtendría el cuadro simplex representado por (8.8).

Observación:

Una forma práctica de encontrar el cuadro simplex que representa al sistema (8.8) consiste en colocar la restricción (8.2) en el cuadro simplex del problema original y a través de operaciones elementales de matrices transformar la última fila adicionada en la forma de (8.7). Lógicamente la forma sistemática consiste en identificar y determinar $(a_N^{m+1} - a_B^{m+1} B^{-1} N)$ y $(b_{m+1} - a_B^{m+1} B^{-1} b)$.

Si la restricción que fue adicionada al problema elimina de la región factible el punto óptimo del problema original entonces el valor actual de la variable básica x_{n+1} es negativo (porque?) y, por lo tanto, el nuevo cuadro simplex satisface **optimalidad** porque los coeficientes de costos relativos no fueron alterados, sin embargo se perdió la **factibilidad**. En este caso, la única alternativa para reoptimizar el problema es usando el método **dual simplex** (ver los problemas 5, 6 y 7 más adelante).

Otro aspecto interesante es analizar el tipo de solución óptima del problema modificado después de adicionar una nueva restricción. El proceso de reoptimización puede encontrar una nueva solución óptima finita o el problema puede transformarse en infactible. El lector está invitado a reflexionar sobre estos tipos de convergencia del problema modificado.

El lector puede verificar que es posible adicionar varias restricciones de desigualdad simultáneamente. En este caso se tiene que encontrar un conjunto de equaciones equivalentes a las encontradas en (8.7). El lector está invitado a encontrar relaciones genéricas para montar el nuevo cuadro simplex cuando son adicionadas, simultáneamente, k restricciones de desigualdad al problema.

8.3 Adicionar una Restricción Adicional de Igualdad

Cuando introducimos una nueva restricción de igualdad en realidad estamos incorporando un hiperplano al conjunto convexo y, por lo tanto, el nuevo conjunto convexo (la intersección de los subespacios) generalmente es menor. Por lo tanto, lo primero que debe hacerse es verificar si la nueva restricción elimina de la región factible el punto óptimo del problema original. Si la nueva restricción no elimina la solución óptima del problema anterior entonces la solución óptima del problema modificado es igual al del problema original. En caso contrario se debe proceder a reoptimizar el nuevo problema a partir de la base óptima del problema original.

El incremento de una restricción incrementa también el tamaño de la base y la nueva restricción debe ser colocada en la base correctamente actualizada para la base actual.

Sea la nueva restricción adicionada al problema:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{m+1,j} x_j = b_{m+1} \tag{8.9}$$

o de manera compacta:

$$a^{m+1} x = b_{m+1} \tag{8.10}$$

En este caso, como no existe variable de holgura, se tiene que inventar una variable básica para colocar la nueva restricción en el cuadro simplex. Así, inventamos la variable artificial x_{n+1} que, debido a que la restricción es de igualdad, debe ser irrestricta. Por lo tanto, substituimos la variable artificial por dos variables artificiales no negativas en la siguiente forma: $x_{n+1} = x'_{n+1} - x''_{n+1}$ y la nueva restricción asume la siguiente forma:

$$a^{m+1} x + x'_{n+1} - x''_{n+1} = b_{m+1} \tag{8.11}$$

Esta restricción puede ser adicionada al cuadro simplex actualizandolo adecuadamente como en el caso de la desigualdad analizada anteriormente. Sin embargo, como fue adicionada una variable artificial se debe proceder a resolver el problema usando el método de las dos fases del simplex. Lógicamente la función objetivo de la fase I asume la siguiente forma:

$$min \;\; x_o = x_{n+1}^{'} + x_{n+1}^{''}$$

Otra vez, el nuevo cuadro puede encontrarse actualizando adequadamente la nueva fila adicionada para la base actual así como la fila objetivo de fase I también actualizada para la base actual. Otra alternativa es colocar las filas en la forma original y realizar operaciones elementales de matrices sobre las filas para colocarla en la forma adecuada.

La propuesta anterior puede ser mejorada adicionando simplemente una única variable artificial no negativa. Sea x^* la solución óptima del problema original. Entonces hacemos lo siguiente:

1. Si $a^{m+1}x^* > b_{m+1}$ entonces adicionamos una variable artificial de la siguiente forma:

$$a^{m+1}x - x_{n+1} = b_{m+1} \qquad\qquad x_{n+1} \geq 0$$

2. Si $a^{m+1}x^* < b_{m+1}$ entonces adicionamos una variable artificial de la siguiente forma:

$$a^{m+1}x + x_{n+1} = b_{m+1} \qquad\qquad x_{n+1} \geq 0$$

Sin embargo, la única diferencia es que fue eliminada una variable artificial pero sigue vigente la necesidad de usar la fase I del simplex porque estamos usando una variable artificial.

A manera de ilustración consideremos la siguiente restricción de igualdad:

$$-x_1 + 2x_2 - x_4 - 3x_5 = 9$$

que es adicionada en un problema que tenia la siguiente solución óptima: $x = (3, 4, 2, 0, 0)$. Entonces verificamos que:

$$-3 + 2(4) = 5 < 9$$

entonces la nueva restricción debe tener la siguiente forma:

$$-x_1 + 2x_2 - x_4 - 3x_5 + x_{n+1} = 9 \qquad\qquad x_{n+1} \geq 0$$

Esta estrategia garantiza que, siempre, el nuevo cuadro sea **primal factible** y la técnica usada para reoptimizar el problema debe ser el método **primal simplex** con uso de las 2 fases.

Existe otra posibilidad de reoptimizar este tipo de problema. Se puede substituir la restricción de igualdad por 2 restricciones de desigualdad, transformar esas restricciones a la forma $\leq$ y colocar 2 variables de holgura (en este caso son variables de holgura y no variables artificiales como en el caso de la estrategia anterior) para transformar las desigualdades en igualdades. En este caso, el problema fue reducido al caso anterior con la adición de más de una restricción de desigualdad (comentada al final del caso anterior). En este caso se colocan las 2 restricciones adecuadamente actualizadas en el cuadro simplex y se procede a reoptimizar usando el método **dual simplex**. Probablemente esta propuesta sea la preferida porque evita usar una función objetivo de fase I.

El lector está invitado a continuar mejorando la propuesta de manipular de forma eficiente las restricciones de igualdad. Realmente, la forma más eficiente de trabajar con restricciones de igualdad consiste en transformarlo en una restricción de desigualdad. Como una restricción de igualdad (un hiperplano) puede substituirse por dos restricciones de desigualdad (dos subespacios) entonces debemos identificar apenas la restricción de desigualdad (subespacio) violada por el punto óptimo del problema original y solamente esa desigualdad (subespacio) debe ser incorporada en el nuevo cuadro simplex. De esta forma, el análisis de la adición de una restricción de igualdad puede tratarse de la misma forma que la adición de una restricción de desigualdad (incorporando solamente la restricción ≥ 0 ó ≤ 0 que está violada).

Un asunto interesante, todavía es analizar el tipo de solución óptima del problema modificado después de adicionar una nueva restricción. El proceso de reoptimización puede encontrar una nueva solución óptima finita o el problema puede transformarse en infactible. El lector está invitado a reflexionar sobre estos tipos de convergencia del problema modificado (ver ejemplos 8, 9 y 10).

Se puede verificar que es posible adicionar varias restricciones de igualdad simultáneamente, sin embargo, en este caso es cada vez más complicado encontrar relaciones genéricas para montar el nuevo cuadro dual simplex. Sin embargo, el lector está invitado a encontrar relaciones genéricas para montar el nuevo cuadro simplex cuando son adicionadas k restricciones de igualdad simultáneamente.

8.4 Variación del Coeficiente de Costo de una Variable No Básica

Sea x_k una variable no básica cuyo coeficiente de costo fue modificado de c_k para $c_k^{'}$.

En este caso debemos llevar en cuenta los siguientes aspectos:

1. Los coeficientes de costo relativos de las variables básicas en el problema modificado permanecen iguales a cero porque ya sabemos que en general $\overline{c}_N = c_B B^{-1} N - c_N$ y en particular para las variables básicas tenemos que: $\overline{c}_B = c_B B^{-1} B - c_B = 0$, o sea, no depende de los valores de los coeficientes de costo de las variables no básicas.

2. La variación del coeficiente de costo de una variable no básica no altera el coeficiente de costo relativo de las otras variables no básicas porque para la variable no básica x_j tenemos que: $\overline{c}_j = c_B B^{-1} a_j - c_j$.

3. Por lo tanto, la variación del coeficiente de costo de la variable no básica x_k altera solamente el coeficiente de costo relativo de la propia variable x_k.

Sea $(z_k - c_k)$ el coeficiente de costo relativo de la variable no básica x_k en el problema original. Entonces, el nuevo coeficiente de costo relativo de x_k en el problema modificado es el siguiente:

$$(z_k - c_k^{'}) = z_k - c_k + c_k - c_k^{'} = (z_k - c_k) + (c_k - c_k^{'}) \tag{8.12}$$

donde $(z_k - c_k)$ está disponible en el cuadro simplex óptimo del problema original. Por lo tanto, el cuadro simplex óptimo del problema original continúa siendo óptimo para el problema modificado si se cumple que:

$$(z_k - c_k^{'}) = (z_k - c_k) + (c_k - c_k^{'}) \leq 0$$

En caso contrario, el cuadro ya no es más óptimo para el problema modificado porque $(z_k - c_k^{'}) \geq 0$ y la variable no básica x_k puede (y debe) entrar en la base y mejorar la calidad de la función objetivo actual.

Un asunto interesante, todavía es analizar el tipo de solución óptima del problema modificado después de modificar el coeficiente de costo de una variable no básica. El proceso de reoptimización puede encontrar una nueva solución óptima finita de mejor calidad que el óptimo del problema original o el problema puede transformarse en ilimitado. El lector está invitado a reflexionar sobre estos tipos de convergencia del problema modificado.

Se puede verificar que es posible modificar los coeficientes de costo de varias variables no básicas simultáneamente y la estrategia básica presentada continúa siendo válida. Simplemente se debe calcular los nuevos coeficientes de costo relativos de aquellas variables no básicas que tuvieron sus coeficientes de costo modificados (cada modificación de costo de una variable no básica modifica solamente el coeficiente de costo relativo de esa variable no básica).

Otro aspecto interesante consiste en saber la máxima variación permitida al coeficiente de costo de una variable no básica para que la base óptima del problema original continúe siendo base óptima del problema modificado. En este caso, la respuesta es encontrada simplemente transformando en igualdad la relación (8.12) y tenemos:

$$(z_k - c_k) + (c_k - c_k^{'}) = 0$$

de donde se puede encontrar fácilmente $c_k^{'}$ (o Δc_k) porque los otros parámetros son conocidos (ver ejemplos 11 y 12).

8.5 Variación del Coeficiente de Costo de una Variable Básica

Sea x_k una variable básica cuyo coeficiente de costo fue modificado de c_k para $c_k^{'}$ y sea t el número de la fila que ocupa esa variable básica en el cuadro simplex óptimo del problema original.

En este caso llevando en cuenta el análisis del caso anterior (variación del coeficiente de costo de una variable no básica) se puede verificar que todas las variables no básicas deben tener sus coeficientes de costo relativos modificados. Por lo tanto, los nuevos valores de los coeficientes de costo relativos de las variables no básicas asumen la siguiente forma:

$$\begin{aligned} z_j^{'} - c_j &= c_B^{'} B^{-1} a_j - c_j = c_B^{'} y_j - c_j \\ &= (c_B y_j - c_j) + (c_B^{'} y_j - c_B y_j) = (z_j - c_j) + (c_B^{'} - c_B) y_j \\ &= (z_j - c_j) + \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 & (c_{B_t}^{'} - c_{B_t}) & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1j} \\ \vdots \\ y_{tj} \\ \vdots \\ y_{mj} \end{bmatrix} \Longleftarrow \text{ fila } j \end{aligned}$$

$$z_j^{'} - c_j = (z_j - c_j) + (c_{B_t}^{'} - c_{B_t}) y_{tj} \qquad \forall j \quad j \neq k$$

donde $z_j^{'} - c_j$ representan los nuevos coeficientes de costos relativos de las variables no básicas.

Para $j = k$ (coeficiente de costo relativo de la variable básica que esta variando de coeficiente de costo) tenemos:

$$z_k^{'} - c_k = (z_k - c_k) + (c_k^{'} - c_k) = z_k + c_k^{'} - 2c_k$$

$$(z_k^{'} - c_k^{'}) = (z_k - c_k) = 0$$

Por lo tanto, los nuevos coeficientes de costo relativos para las variables básicas y no básicas son los siguientes:

$$z_j^{'} - c_j = (z_j - c_j) + (c_{B_t}^{'} - c_{B_t}) y_{tj} \qquad \forall j \quad j \neq k$$

Lógicamente, el cuadro óptimo del problema original continúa siendo óptimo para el problema modificado si tenemos que:

$$z_j^{'} - c_j \leq 0 \qquad \forall j$$

Si el nuevo cuadro simplex no es óptimo entonces se debe reoptimizar el problema usando, lógicamente, el método **primal simplex** porque el cuadro satisface factibilidad y no satisface optimalidad (ver ejemplos 13 y 14).

Observaciones importantes: En relación a este tópico tenemos:

1. También es posible encontrar los coeficientes de costos relativos usando la relación general válida para cualquier tipo de variable:

$$\overline{c} = c_B B^{-1} A - c = wA - c$$

2. Cuando varía el coeficiente de costo de una variable básica, la base óptima del problema original puede seguir siendo óptima para el problema modificado pero la función objetivo óptima del problema modificado es diferente del problema original. Para verificar esta situación veamos lo siguiente:

   Función objetivo óptimo del problema original:
   $z(x^*) = c_B B^{-1} b = c_B \overline{b} = c_B x^*$
   Función objetivo óptimo del problema modificado:
   $z'(x^*) = c'_B B^{-1} b = c'_B \overline{b} = c'_B x^*$
   Si la variable básica que está en la fila t del cuadro varía su coeficiente de costo y hacemos: $c'_{B_t} = c_{B_t} + \Delta c_{B_t}$ entonces la relación anterior asume la siguiente forma:

$$z'(x^*) = \begin{bmatrix} \ldots & (c_{B_t} + \Delta c_{B_t}) & \ldots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ \overline{b}_t \\ \vdots \end{bmatrix} = c_B \overline{b} + \Delta c_{B_t} \overline{b}_t = z(x^*) + \Delta c_{B_t} \overline{b}_t$$

   Por lo tanto, si $\Delta c_{B_t} > 0$ la función objetivo óptima del problema modificado será mayor que la función objetivo óptima del problema original.

Un asunto interesante, todavía es analizar el tipo de solución óptima del problema modificado después de modificar el coeficiente de costo de una variable básica. El proceso de reoptimización puede encontrar una nueva solución óptima finita de mejor o de peor calidad que el óptimo del problema original o el problema puede transformarse en ilimitado. El lector está invitado a reflexionar sobre estos tipos de convergencia del problema modificado.

Se puede verificar que es posible modificar los coeficientes de costo de varias variables básicas simultáneamente, sin embargo, en este caso es posible que sea mejor modificar un poco la estrategia básica presentada y usar directamente la relación:

$$\overline{c}_N = c'_B B^{-1} N - c_N$$

para calcular los coeficientes de costos relativos de las variables no básicas y actualizar los elementos de la fila objetivo en el cuadro simplex. El resto de la estrategia continúa siendo válida y se debe proceder a la reoptimización si algunas variables no básicas tienen sus nuevos coeficientes de costo relativo con valores ≥ 0.

Otro aspecto interesante consiste en saber la máxima variación permitida al coeficiente de costo de una variable básica para que la base óptima del problema original continúe siendo base óptima del problema modificado.

8.6 Variación de un Elemento del Vector b

En este caso varía un elemento del vector de recursos b. Suponer que varía el elemento b_j para el nuevo valor $b_j^{'}$. En este caso el cuadro óptimo del problema original continúa siendo óptimo para el problema modificado si la **factibilidad** es preservada, o sea, si tenemos que:

$$B^{-1}b^{'} \geq 0$$

donde $b^{'}$ es el nuevo vector de recursos. En este caso puede suceder uno de los siguientes casos:

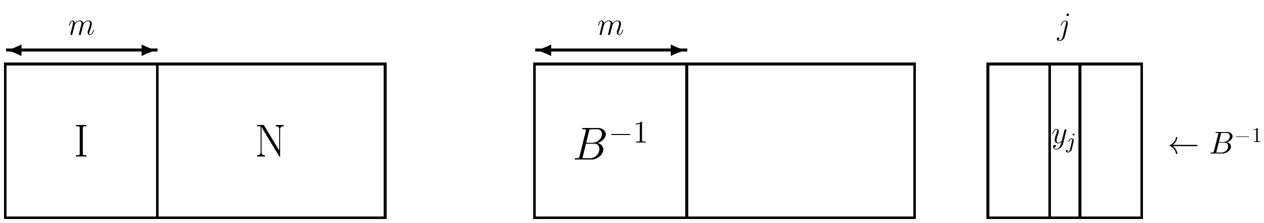
1. Si $B^{-1}b^{'} \geq 0$:

   En este caso la **factibilidad** (y la optimalidad) del cuadro es preservada y la base óptima del problema original continúa siendo óptima del problema modificado. Sin embargo no se debe olvidar de que la base óptima no varía (las variables básicas en ambos casos, problema original y problema modificado, son las mismas) pero los valores de las variables básicas, así como el valor de la función objetivo óptima si varían.

2. $B^{-1}b^{'} \ngeq 0$:

   En este caso se **pierde la factibilidad** del cuadro pero, lógicamente, la optimalidad del cuadro siempre se preserva en estos casos. Por lo tanto, el problema debe ser reoptimizado usando el método **dual simplex**.

Inicialmente deducimos relaciones específicas para este problema y después deducimos relaciones más genéricas. Sea j la fila que define el recurso modificado y suponer que el cuadro inicial fue montado usando como base una matriz identidad y que, por lo tanto, la matriz B^{-1} está disponible en el cuadro como se muestra en el siguiente esquema:



Los nuevos valores de las variables básicas pueden ser calculadas de la siguiente forma:

$$B^{-1}b^{'} = B^{-1}b - B^{-1}b + B^{-1}b^{'} = B^{-1}b + B^{-1}(b^{'} - b) = \overline{b} + B^{-1}(b^{'} - b)$$

y $B^{-1}(b^{'} - b)$ puede encontrarse del siguiente esquema (ver esquema anterior):

$$B^{-1}(b^{'} - b) = \begin{array}{c} j \\ \boxed{\begin{array}{c|c|c} & \begin{array}{c} y_{1j} \\ \vdots \\ y_{j-1,j} \\ y_{jj} \\ y_{j+1,j} \\ \vdots \\ y_{mj} \end{array} & \end{array}} \end{array} \boxed{\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ (b_j^{'} - b_j) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array}}$$

Por lo tanto, tenemos que:

$$B^{-1}b^{'} = \overline{b} + (b_j^{'} - b_j)y_j \tag{8.13}$$

Se debe observar que la relación (8.13) es válida independientemenete de la forma de la base inicial escogida para montar el cuadro simplex inicial (fue escogida la identidad en este análisis). Así, la única cosa que es diferente es la disponibilidad de B^{-1} en el cuadro simplex (lógicamente si se usa el simplex revisado no existe ningún problema porque en ese caso B^{-1} siempre está disponible en el cuadro). En general, siempre es posible conocer B^{-1} siempre que sea a partir de B.

Por lo tanto, el cuadro continúa óptimo si $B^{-1}b^{'} \geq 0$. Si el cuadro continúa óptimo entonces los nuevos valores de las variables básicas y de la función objetivo son los siguientes:

Variables básicas:

$$x_B = B^{-1}b^{'} = \overline{b} + (b^{'} - b)y_j$$

Función objetivo:

$$z^{'}(x^*) = c_B B^{-1} b^{'}$$

En caso contrario se procede a reoptimizar el problema usando el método **dual simplex** (ver ejemplos 15 y 16).

Otro asunto interesante, todavía es analizar el tipo de solución óptima del problema modificado después de modificar un elemento del vector de recursos b. El proceso de reoptimización puede encontrar una nueva solución óptima finita de mejor o de peor calidad que el óptimo del problema original o el problema puede transformarse en infactible. El lector está invitado a reflexionar sobre estos tipos de convergencia del problema modificado.

Se puede verificar que es posible modificar varios o todos los elementos del vector de recursos b y para cada elemento de b que es modificado se necesita de una columna de la matriz B^{-1} y, en el caso extremo de que sean modificados todos los elementos del vector b, entonces es mejor recalcular los nuevos valores de las variables básicas usando la relación fundamental: $B^{-1}b^{'}$.

Sin embargo, se puede generalizar la relación (8.13) para el caso en que pueden variar todos los elementos del vector b encontrándose la siguiente relación:

$$B^{-1}b^{'} = \overline{b} + \sum_{j=1}^{m}(b_j^{'} - b_j)y_j \tag{8.14}$$

Otro aspecto interesante consiste en saber la máxima variación permitida a un elemento (o varios elementos) del vector b para que la base óptima del problema original continúe siendo base óptima del problema modificado. El lector está invitado a reflexionar sobre este asunto.

8.7 Variación del Coeficiente a_{ij} de la Columna de una Variable No Básica

Esta modificación altera solamente el coeficiente de costo relativo de la propia variable no básica cuyo coeficiente a_{ij} fue modificada. Sea x_j la variable no básica cuyo coeficiente a_{ij} fue modificada. Entonces, el nuevo coeficiente de costo relativo de x_j es el siguiente:

$$z_j^{'} - c_j = c_B B^{-1} a_j^{'} - c_j = w a_j^{'} - c_j$$

En este caso puede suceder uno de los siguientes casos:

1. Si $z_j^{'} - c_j \leq 0$:

   En este caso la base óptima del problema original continúa siendo óptima para el problema modificado y no se alteran los valores de las variables básicas y de la función objetivo.

2. Si $z_j^{'} - c_j > 0$:

   En este caso se pierde la optimalidad del cuadro y x_j es candidata a entrar en la base. Lógicamente, la factibilidad del cuadro siempre es preservada en estos casos. Por lo tanto, el problema debe ser reoptimizado usando el método **primal simplex**. En este caso también debe ser recalculada la columna y_j de la variable no básica x_j, cuyo coeficiente a_{ij} fue modificado, usando la relación:

   $$y_j^{'} = B^{-1} a_j^{'} \tag{8.15}$$

   donde $y_j^{'}$ representa la nueva columna actualizada de x_j y que es usada para iniciar la reoptimización del problema juntamente con $(z_j^{'} - c_j)$.

La relación (8.15) puede ser simplificada considerando que $a_{ij}^{'} = a_{ij} + \Delta a_{ij}$ y b_j^{-1} es la columna j de la matriz inversa B^{-1}. Así, de (8.15) tenemos:

$$y_j^{'} = B^{-1}a_j^{'} = B^{-1}(a_j + \Delta a_j) = B^{-1}a_j + B^{-1}\Delta a_j = y_j + \Delta a_{ij} b_j^{-1} \tag{8.16}$$

Como ya fue mencionado, el proceso de reoptimización usa el método **primal simplex** (ver ejemplos 17 y 18).

Otro asunto interesante, es analizar el tipo de solución óptima del problema modificado después de modificar un elemento a_{ij} de la matriz A de una variable no básica. El proceso de reoptimización puede encontrar una nueva solución óptima finita de mejor calidad que el óptimo del problema original o el problema puede transformarse en ilimitado. El lector está invitado a reflexionar sobre estos tipos de convergencia del problema modificado.

El lector puede verificar que es posible modificar varios o todos los elementos del vector a_j de la variable no básica x_j. En estos casos puede ser preferible calcular el nuevo vector $y_j^{'}$ usando la relación (8.15). Obviamente, los únicos parámetros que necesitan ser recalculados son los elementos del cuadro simplex de la variable no básica x_j.

En este caso también se puede preguntar por la máxima variación permitida al elemento a_{ij} analizado para que la base óptima del problema original continue siendo base óptima del problema modificado. El lector está invitado a reflexionar sobre este asunto.

8.8 Variación del Coeficiente a_{ij} de la Columna de una Variable Básica

Esta modificación representa la alteración más crítica porque se está modificando la base óptima B y, por lo tanto, la inversa B^{-1} lo que significa que, en principio, pueden variar todos los elementos del cuadro simplex ya que todos ellos dependen de B^{-1}. Sea x_j la variable básica cuyo coeficiente a_{ij} fue modificada. En este caso, la modificación puede ser implementada de la siguiente manera:

1. Considerar una nueva variable $x_j^{'}$ que se incorpora al problema con la columna $a_j^{'}$ modificada de x_j y con el coeficiente de costo c_j. En otras palabras, inventamos una variable artificial $x_j^{'}$ donde colocamos los datos modificados de x_j.
2. Eliminar la variable x_j original del problema pivotando esta variable básica con la variable $x_j^{'}$ no básica inventada. Lógicamente, para implementar el pivotaje, se debe actualizar adecuadamente la columna de $x_j^{'}$ para la base corriente usando las relaciones:

$$z_j^{'} - c_j = c_B B^{-1} a_j^{'} - c_j = w a_j^{'} - c_j$$

$$y_j^{'} = B^{-1} a_j^{'}$$

En el proceso de transformación anterior pueden suceder los siguientes casos:

1. El elemento $y'_{jj} \neq 0$:

   En este caso es posible realizar el pivotaje y, después del pivotaje, x_j se elimina del problema (es adecuadamente substituida por x'_j). El proceso de pivotaje puede destruir la **optimalidad** y/o la **factibilidad** del cuadro. El proceso de optimización continúa usando um método **primal simplex** o **dual simplex** de acuerdo a cada caso. Si la factibilidad es destruida entonces se debe usar un método dual simplex; si la optimalidad es destruida entonces debe ser usado el método primal simplex y, finalmente, si tanto factibilidad como optimalidad son destruidas entonces, probablemente, sea más adecuado usar el método dual simplex con necesidad de implementar la fase I.

2. El elemento $y'_{jj} = 0$:

   En este caso no es posible realizar el pivotaje entre x_j y x'_j. Esto significa que las columnas básicas con la nueva columna de x_j ya no forman una base (primal ni dual factible), en otras palabras la nueva base B con la nueva columna de x_j no tiene inversa. En este caso se debe eliminar la variable x_j considerando esta variable como si fuese una variable artificial y usando un método **primal simplex** de dos fases (ver ejemplos 19 a 22).

Se puede verificar que es posible modificar varios o todos los elementos del vector a_j de la variable no básica x_j. En estos casos es más probable que se destruya la factibilidad y/o la optimalidad.

Para presentar ejemplos de análisis de sensibilidad usamos dos ejemplos simples como problemas originales o referenciales y en esos problemas son implementadas pequeñas alteraciones para realizar análisis de sensibilidad. Esos problemas referenciales son los ejemplos 1 y 2 mostrados a continuación.

Ejemplo 1: Sea el siguiente PL:

$$\begin{array}{rcl} min\ \ z(x) & = & -x_1 - 3x_2 \\ s.a. & & \\ & & x_1 + x_2 \leq 6 \\ & & -x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ & & x_1;\ \ x_2 \geq 0 \end{array}$$

La base óptima de este problema es $B = [a_1 \quad a_2]$ con $x_B = (x_1, x_2)$. x_3 y x_4 son las variables de holgura. El cuadro óptimo del problema es el siguiente:

Cuadro óptimo del ejemplo 1.

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
z	1	0	0	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{46}{3}$
x_1	0	1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$
x_2	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{14}{3}$

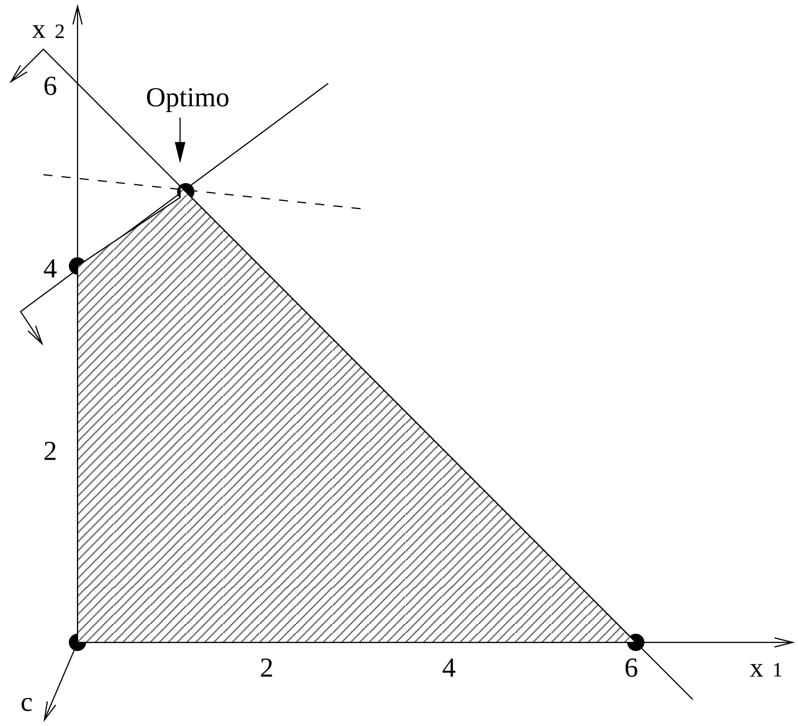


Figura 8.1: Gráfica del ejemplo 1.

Otros datos relevantes de la solución óptima del ejemplo 1 son los siguientes:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{4}{3} \\ \\ x_2 = \frac{14}{3} \end{cases} \Longrightarrow \qquad z(x^*) = -\frac{46}{3}$$

$$w = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}; \qquad B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

El lector está invitado a resolver el ejemplo 1 y verificar los resultados mostrados. La representación gráfica de este problema es mostrada en la figura 8.1.

Ejemplo 2: Sea el siguiente PL:

$$\begin{array}{rcl} min \quad z(x) & = & -x_1 + 2x_2 \\ s.a. & & \\ & & x_1 + x_2 \leq 6 \\ & & -x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ & & x_1; \;\; x_2 \geq 0 \end{array}$$

La base óptima de este problema es $B = [a_1 \quad a_4]$ con $x_B = (x_1, x_4)$. x_3 y x_4 son las variables de holgura. El cuadro óptimo del problema es el siguiente:

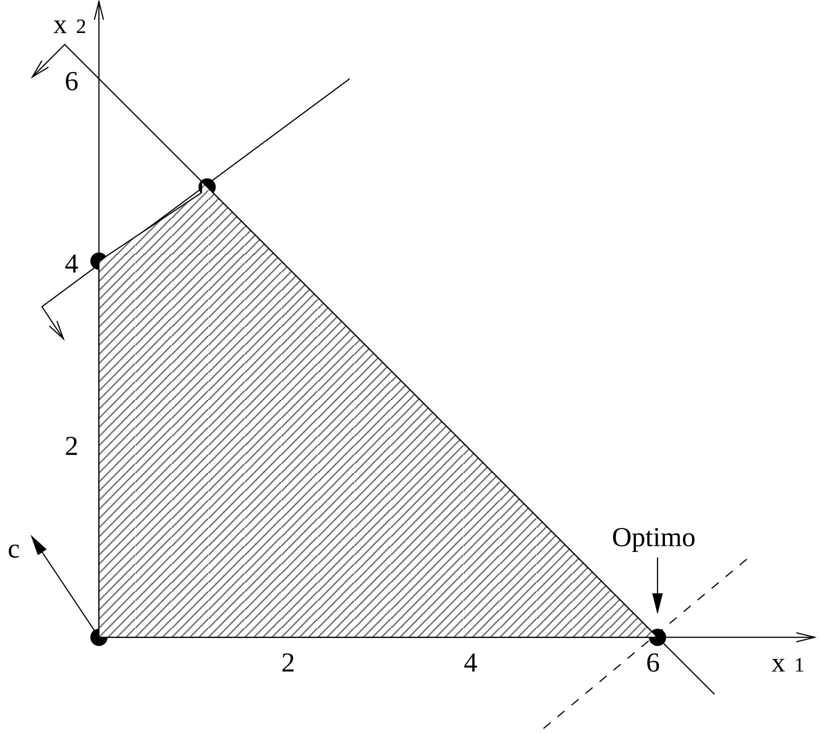


Figura 8.2: Gráfica del ejemplo 2.

Cuadro óptimo del ejemplo 2.

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
z	1	0	-3	-1	0	-6
x_1	0	1	1	1	0	6
x_4	0	0	3	1	1	14

Otros datos relevantes de la solución óptima del ejemplo 2 son los siguientes:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 6 \\ \\ x_4 = 14 \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \qquad z(x^*) = -6$$

$$w = \left[\begin{array}{cc} w_1 & w_2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} -1 & 0 \end{array} \right] \qquad\qquad B^{-1} = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ \\ 1 & 1 \end{array} \right]$$

El lector está invitado a resolver el ejemplo 2 y verificar los resultados mostrados. La representación gráfica de este problema es mostrada en la figura 8.2.

Ejemplo 3: En el ejemplo 1 considerar que es adicionada una nueva variable x_5 (nueva actividad) con los siguientes parámetros:

$$c_5 = 2 \qquad\qquad a_5 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Se desea resolver el problema modificado.

Se debe calcular el coeficiente de costo relativo de la nueva variable, considerada no básica, de la siguiente forma:

$$\overline{c}_5 = wa_5 - c_5$$

$$\overline{c}_5 = \begin{bmatrix} -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} - (2) = \frac{1}{3} - 2 = -\frac{5}{3} < 0$$

Por lo tanto, como $\overline{c}_5 = -\frac{5}{3} < 0$, entonces el cuadro óptimo del problema original continúa siendo óptimo para el problema modificado y la solución óptima no varía.

Ejemplo 4: En el ejemplo 1 considerar que es adicionada una nueva variable x_5 (nueva actividad) con los siguientes parámetros:

$$c_5 = -1 \qquad\qquad a_5 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Se desea resolver el problema modificado.

Se debe calcular el coeficiente de costo relativo de la nueva variable, considerada no básica, de la siguiente forma:

$$\overline{c}_5 = wa_5 - c_5$$

$$\overline{c}_5 = \begin{bmatrix} -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} - (-1) = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3} > 0$$

Por lo tanto, como $\overline{c}_5 = \frac{4}{3} > 0$, entonces el cuadro óptimo del problema original no es óptimo para el problema modificado y se debe reoptimizar usando el método primal simplex. Antes se debe calcular la columna actualizada de a_5 para la base actual de la siguiente forma:

$$y_5 = B^{-1}a_5 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Ahora colocamos la columna actualizada de x_5 en el cuadro óptimo del problema original y procedemos a reoptimizar usando el método primal simplex. Los cuadros resultantes son los siguientes:

Optimización del ejemplo 4.

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
z	1	0	0	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{46}{3}$
x_1	0	1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$
x_2	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{14}{3}$
z	1	0	-4	-3	-2	0	-34
x_1	0	1	4	2	1	0	20
x_5	0	0	3	1	1	1	14

Los nuevos valores óptimos son los siguientes:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 20 \\ x_5 = 14 \end{array} \right] \Longrightarrow z(x) = -34$$

La representación gráfica de este problema es mostrada en la figura 8.3.

El lector está invitado a resolver nuevamente este problema cuando los parámetros de x_5 son los siguientes:

$$c_5 = -1 \qquad\qquad a_5 = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

En este caso el lector debe verificar que el problema se vuelve ilimitado.

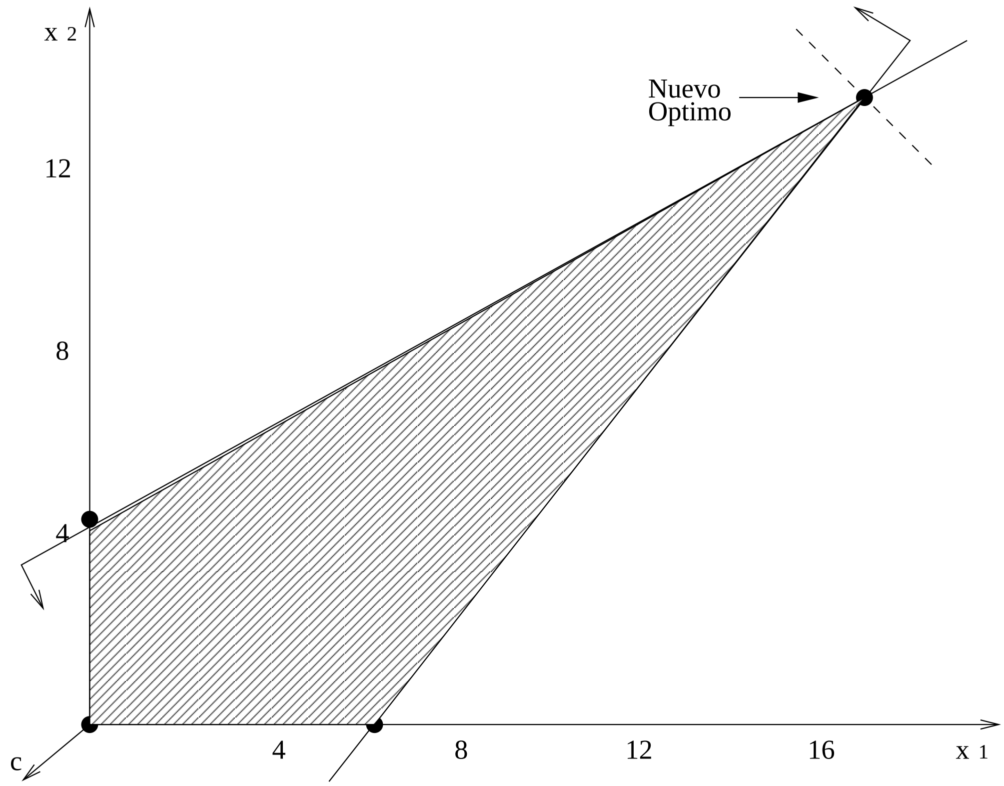


Figura 8.3: Gráfica del ejemplo 4.

Ejemplo 5: En el ejemplo 1 considerar que es adicionada la siguiente restricción:

$$x_1 - x_2 \leq 4$$

Se desea resolver el problema modificado.

La primera decisión consiste en verificar si la base óptima del problema original sigue siendo óptima para el problema modificado, o sea, si la restricción adicionada no elimina el punto extremo óptimo de la región factible del problema. Substituyendo la solución óptima del problema original, $x_1 = \frac{4}{3}$ y $x_2 = \frac{14}{3}$, en la nueva restricción tenemos:

$$\frac{4}{3} - \frac{14}{3} = -\frac{10}{3} < 4$$

entonces la nueva restricción no elimina la solución óptima del problema original y, por lo tanto, el óptimo del problema modificado es el mismo del problema original. En la figura 8.4 se puede verificar que la restricción adicionada no elimina el punto óptimo del problema original.

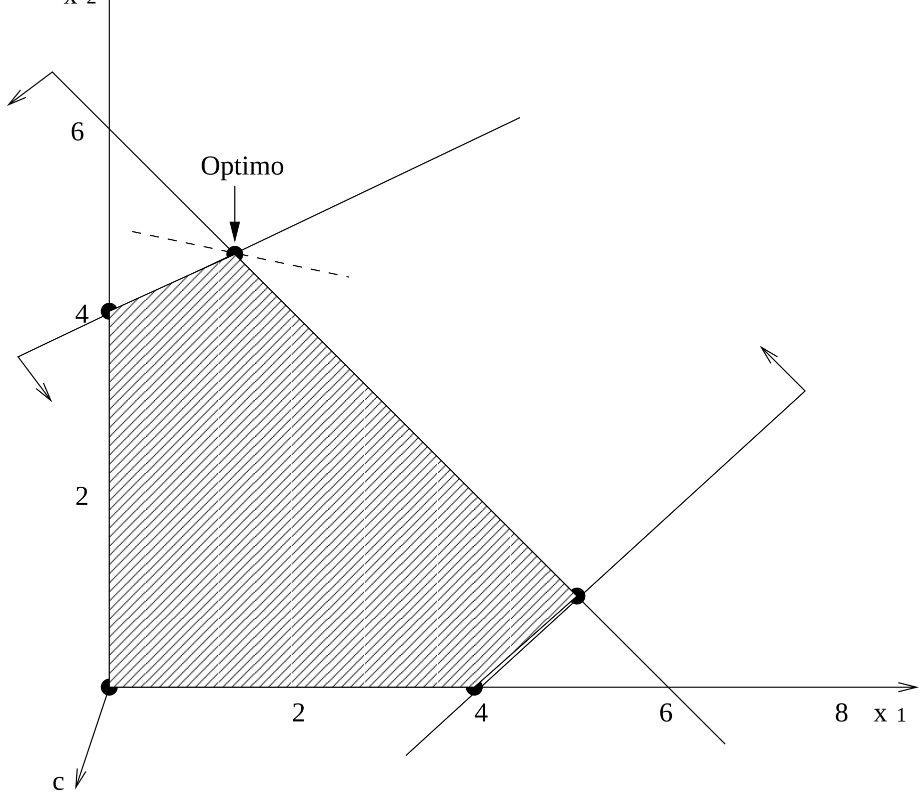


Figura 8.4: Gráfica del ejemplo 5.

Ejemplo 6: En el ejemplo 1 considerar que es adicionada la siguiente restricción:

$$x_1 + 2x_2 \leq 9$$

Se desea resolver el problema modificado.

La primera decisión consiste en verificar si la base óptima del problema original sigue siendo óptima para el problema modificado, o sea, si la restricción adicionada no elimina el punto extremo óptimo de la región factible del problema. Substituyendo la solución óptima del problema original, $x_1 = \frac{4}{3}$ y $x_2 = \frac{14}{3}$, en la nueva restricción tenemos:

$$\frac{4}{3} + 2(\frac{14}{3}) = \frac{32}{3} > 9$$

entonces la nueva restricción elimina la solución óptima del problema original y, por lo tanto, se debe reoptimizar el problema usando el método dual simplex. La forma matemática de la nueva restricción, adecuadamente actualizada para la base actual, es la siguiente:

$$x_{n+1} + [a_N^{m+1} - a_B^{m+1} B^{-1} N] x_N = b_{m+1} - a_B^{m+1} B^{-1} b$$

Del cuadro óptimo tenemos:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad x_N = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad B^{-1}N = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad B^{-1}b = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{14}{3} \end{bmatrix}$$

Transformando la restricción adicionada en igualdad tenemos:

$$x_1 + 2x_2 \qquad + x_5 = 9$$

De las relaciones anteriores tenemos:

$$a_B^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad a_N^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad b_3 = 9$$

$$a_N^3 - a_B^3 B^{-1}N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$b_3 - a_B^3 B^{-1}b = 9 - \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{14}{3} \end{bmatrix} = -\frac{5}{3}$$

El nuevo cuadro, aumentado con la nueva restricción adecuadamente actualizada, es montado y reoptimizado en los siguientes cuadros usando el método dual simplex:

Optimización del ejemplo 6.

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
z	1	0	0	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	$-\frac{46}{3}$
x_1	0	1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{4}{3}$
x_2	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{14}{3}$
x_5	0	0	0	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	$-\frac{5}{3}$
z	1	0	0	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{53}{4}$
x_1	0	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_2	0	0	1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{51}{12}$
x_3	0	0	0	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{5}{4}$

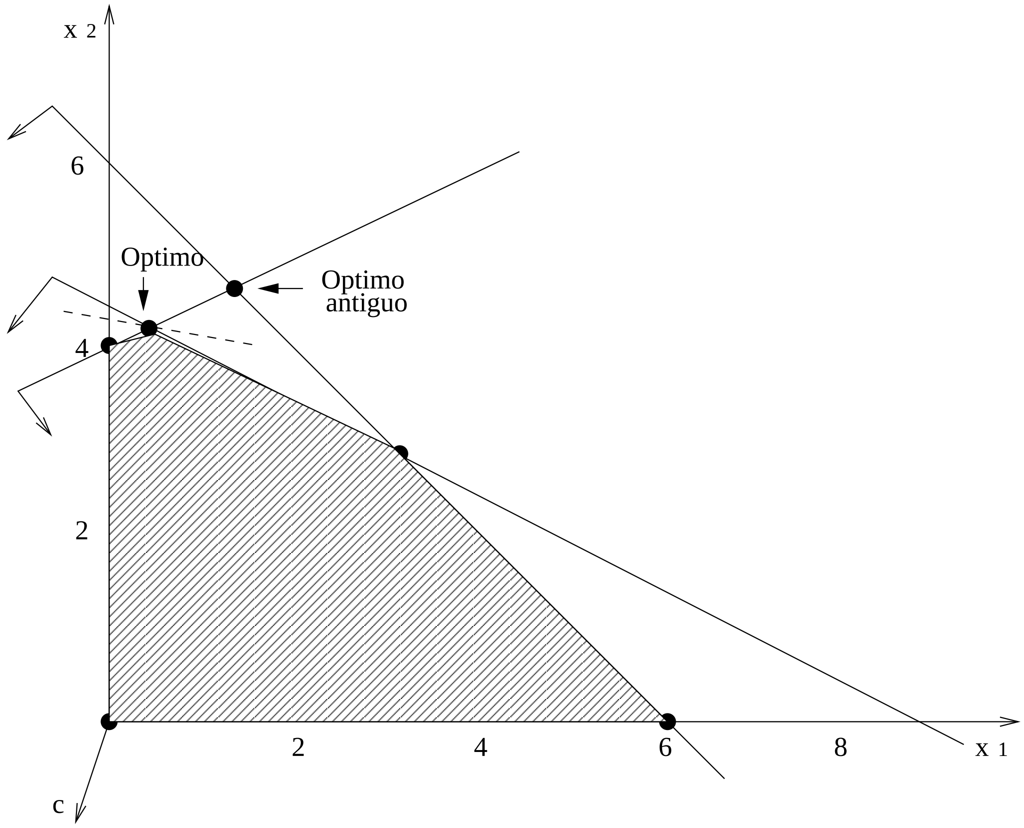


Figura 8.5: Gráfica del ejemplo 6.

Los nuevos valores óptimos son los siguientes:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \\ \\ x_2 = \frac{51}{12} \end{cases} \Longrightarrow z(x) = -\frac{53}{4}$$

La representación gráfica de este problema es mostrada en la figura 8.5.

Observación importante:

En el ejemplo anterior se puede montar un cuadro prepreparado como se hace en los libros tradicionales de PL (como en el libro de Bazaraa) y después montar el cuadro adecuado.

En este caso, simplemente se coloca la restricción después de colocar la variable de holgura y se realiza operaciones elementales de matrices para encontrar el cuadro adecuado. En los siguientes cuadros simplex, el primer cuadro es el cuadro prepreparado y el segundo cuadro es el primer cuadro de la estrategia usada anteriormente.

Forma alternativa para el ejemplo 6.

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS	
z	1	0	0	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	$-\frac{46}{3}$	Hacemos cero los coeficientes de la última restricción correspondientes a las columnas básicas
x_1	0	1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{4}{3}$	$\rightarrow\ \times(-1)$
x_2	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{14}{3}$	$\rightarrow\ \times(-2)$
x_5	0	1	2	0	0	1	9	
z	1	0	0	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	$-\frac{46}{3}$	
x_1	0	1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{4}{3}$	
x_2	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{14}{3}$	$\Longrightarrow$ Dual simplex
x_5	0	0	0	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	$-\frac{5}{3}$	
z	1	0	0	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{53}{4}$	
x_1	0	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
x_2	0	0	1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{51}{12}$	
x_3	0	0	0	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{5}{4}$	

Ejemplo 7: En el ejemplo 1 considerar que es adicionada la siguiente restricción:

$$x_1 - 4x_2 \geq 8$$

Se desea resolver el problema modificado.

La primera decisión consiste en verificar si la base óptima del problema original sigue siendo óptima para el problema modificado. Substituyendo la solución óptima del problema original, $x_1 = \frac{4}{3}$ y $x_2 = \frac{14}{3}$, en la nueva restricción tenemos:

$$\frac{4}{3} - 4(\frac{14}{3}) = -\frac{52}{3} < 8$$

entonces la nueva restricción elimina la solución óptima del problema original y, por lo tanto, se debe reoptimizar el problema usando el método dual simplex. Colocando la variable de hlgura x_5 en la nueva restricción y manipulando esa ecuación se tiene la siguiente relación:

$$-x_1 + 4x_2 + x_5 = -8$$

Podemos colocar esta restricción en el cuadro simplex del problema original y realizar operaciones elementales de fila para obtener un cuadro simplex en la forma adecuada (como en el caso de los cuadros simplex de la última tabla). Los cuadros simplex encontrados son los siguientes:

Forma alternativa para el ejemplo 7.

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS	
z	1	0	0	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	$-\frac{46}{3}$	Hacemos cero los coeficientes de la última restricción correspondientes a las columnas básicas
x_1	0	1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{4}{3}$	$\rightarrow \quad \times(1)$
x_2	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{14}{3}$	$\rightarrow \quad \times(-4)$
x_5	0	-1	4	0	0	1	-8	
z	1	0	0	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	$-\frac{46}{3}$	
x_1	0	1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{4}{3}$	$\Longrightarrow$ Dual simplex
x_2	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{14}{3}$	
x_5	0	0	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{5}{3}$	1	$-\frac{76}{3}$	
z	1	0	0	$-\frac{7}{5}$	0	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{26}{5}$	
x_1	0	1	0	$\frac{4}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{32}{5}$	
x_2	0	0	1	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\Longrightarrow$ Dual ilimitado $\Longrightarrow$ Primal infactible
x_4	0	0	0	$\frac{2}{5}$	1	$-\frac{3}{5}$	$\frac{76}{5}$	

Observación:

Lógicamente, el cuadro inicial de este problema también puede ser montado usando la misma estrategia usada en la primera parte del ejemplo 6 usando las relaciones de transformación fuera del cuadro simplex. El lector está invitado a encontrar el cuadro simplex inicial de esta forma.

El problema modificado se vuelve infactible. La representación gráfica de este problema es mostrada en la figura 8.6.

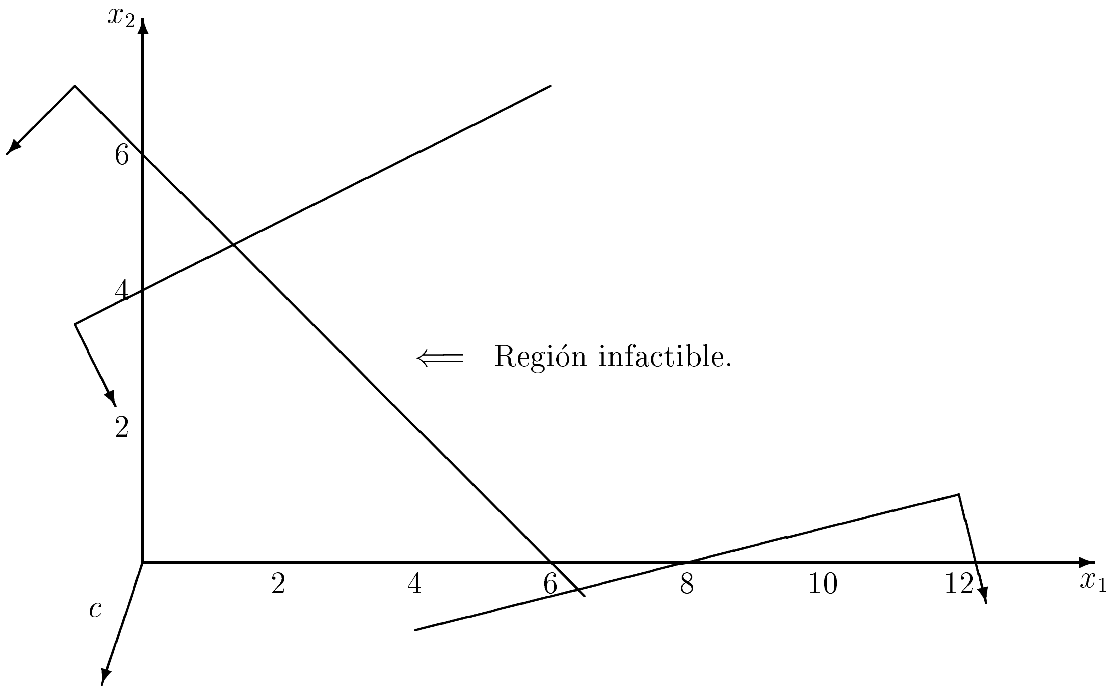


Figura 8.6: Gráfica del ejemplo 7.

Ejemplo 8: En el ejemplo 1 considerar que es adicionada la siguiente restricción de igualdad:

$$2x_1 - x_2 = 4$$

Se desea resolver el problema modificado.

La primera decisión consiste en verificar si la base óptima del problema original sigue siendo óptima para el problema modificado. Substituyendo la solución óptima del problema original, $x_1 = \frac{4}{3}$ y $x_2 = \frac{14}{3}$, en la nueva restricción tenemos:

$$2\frac{4}{3} - \frac{14}{3} = -2 < 4$$

entonces la nueva restricción elimina la solución óptima del problema original y, por lo tanto, se debe reoptimizar el problema usando el método primal simplex de 2 fases. Como para la solución óptima del problema original se tiene que $-2 < 4$ (se cumple la relación $<$) entonces adicionamos a la ecuación la variable artificial x_5 en la siguiente forma:

$$2x_1 - x_2 + x_5 = 4 \qquad x_5 \geq 0$$

donde, obviamente, se colocaría la forma $-x_5$ si en la ecuación se cumple la relación $>$. La función objetivo de fase I tiene la siguiente forma: $min \;\; x_o = x_5$

Ambas filas, la de la función objetivo de fase I y la nueva ecuación, pueden ser colocadas en el cuadro simplex óptimo del problema original para preparar el cuadro en la forma adecuada y después iniciar el proceso primal simplex de 2 fases. Los cuadros simplex encontrados son los siguientes:

Cuadro simplex del ejemplo 8.

	z	x_o	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS	Hacemos cero los coeficientes de la última restricción correspondientes a las columnas básicas y después la fila x_o
z	1	0	0	0	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	$-\frac{46}{3}$	
x_o	0	1	0	0	0	0	-1	0	
x_1	0	0	1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{4}{3}$	$\rightarrow \times(-2)$
x_2	0	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{14}{3}$	$\rightarrow \times(1)$
x_5	0	0	2	-1	0	0	1	4	$\rightarrow \times(1)$
z	1	0	0	0	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	$-\frac{46}{3}$	
x_o	0	1	0	0	-1	1	0	6	
x_1	0	0	1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{4}{3}$	$\Longrightarrow$ Primal simplex
x_2	0	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{14}{3}$	
x_5	0	0	0	0	-1	1	1	6	
z	1	0	0	0	$-\frac{7}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{34}{3}$	
x_o	0	1	0	0	0	0	-1	0	
x_1	0	0	1	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{3}$	$\Longrightarrow$ Cuadro óptimo
x_2	0	0	0	1	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$	
x_4	0	0	0	0	-1	1	1	6	

Los nuevos valores óptimos son los siguientes:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{10}{3} \\ \\ x_2 = \frac{8}{3} \end{array} \right. \Longrightarrow z(x) = -\frac{34}{3}$$

La representación gráfica de este problema es mostrada en la figura 8.7.

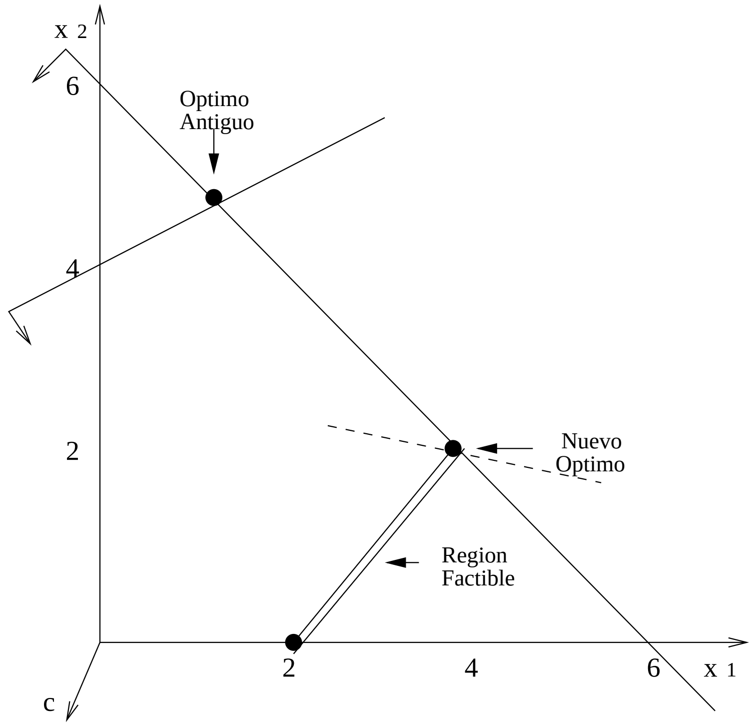


Figura 8.7: Gráfica del ejemplo 8.

Observación:

Lógicamente, el cuadro inicial de este problema también puede ser montado usando la misma estrategia usada en la primera parte del ejemplo 6 usando las relaciones de transformación fuera del cuadro simplex. Montamos el cuadro inicial usando esta estrategia más formal. La restricción adicionada tiene la siguiente forma:

$$2x_1 - x_2 + x_5 = 4$$

donde x_5 es una variable artificial. La forma matemática de la nueva restricción adecuadamente actualizada para la base actual es la siguiente:

$$x_{n+1} + [a_N^{m+1} - a_B^{m+1} B^{-1} N] x_N = b_{m+1} - a_B^{m+1} B^{-1} b$$

Del cuadro óptimo tenemos:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad x_N = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad B^{-1}N = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad B^{-1}b = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{14}{3} \end{bmatrix}$$

De las relaciones anteriores tenemos:

$$a_B^3 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad a_N^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad b_3 = 4$$

$$a_N^3 - a_B^3 B^{-1} N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b_3 - a_B^3 B^{-1} b = 4 - \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{14}{3} \end{bmatrix} = 6$$

Ahora se debe determinar los elementos de la fila x_o adecuadamente actualizados para la base actual. La función objetivo tiene la siguiente forma:

$$\text{Fase I} \qquad min \;\; x_o = x_5$$

Entonces tenemos los siguientes datos:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} \qquad x_N = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$c_B^{'} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad\qquad c_N^{'} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Entonces tenemos:

$$\overline{c}_N^{'} = c_B^{'} B^{-1} N - c_N^{'} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overline{x}_o = c_B^{'} B^{-1} b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{14}{3} \\ 6 \end{bmatrix} = 6$$

Obviamente, también es posible verificar que: $\overline{c}_5 = c_B B^{-1} a_5 - c_5 = 0$.

Por lo tanto, el cuadro inicial tiene la siguiente forma:

Cuadro simplex inicial del ejemplo 8.

	z	x_o	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
z	1	0	0	0	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	$-\frac{46}{3}$
x_o	0	1	0	0	-1	1	0	6
x_1	0	0	1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{4}{3}$
x_2	0	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{14}{3}$
x_5	0	0	0	0	-1	1	1	6

Ejemplo 9: Resolver el ejemplo 8 transformando la restricción de igualdad en 2 restricciones de desigualdad.

Cuando introducimos varias restricciones de desigualdad, la siguiente relación de transformación:

$$x_{n+1} + (a_N^{m+1} - a_B B^{-1} N) x_N = b_{m+1} - a_B^{m+1} B^{-1} b$$

continúa siendo válida para transformar nuevas restricciones a la forma adecuada para que sean adicionadas en el cuadro simplex del problema original. Sin embargo, en estos casos x_{n+1} es un vector y, a_N^{m+1} y a_B^{m+1} son matrices.

La restricción de igualdad puede ser manipulada de la siguiente forma:

$$2x_1 - x_2 = 4 \Longrightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 \leq 4 & \Longrightarrow \quad 2x_1 - x_2 \leq 4 \\ 2x_1 - x_2 \geq 4 & \Longrightarrow \quad -2x_1 + x_2 \leq -4 \end{cases}$$

Por lo tanto tenemos las siguientes relaciones:

$$\left.\begin{array}{rl} 2x_1 - x_2 + x_5 \qquad & = 4 \\ -2x_1 + x_2 + \qquad x_6 & = -4 \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad a_B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad a_N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$a_N - a_B B^{-1} N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$b_3 - a_B B^{-1} b = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{14}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \end{bmatrix}$$

Con los parámetros encontrados se puede montar el siguiente cuadro inicial del problema:

Cuadro simplex inicial del ejemplo 9.

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z	1	0	0	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	0	$-\frac{46}{3}$
x_1	0	1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{4}{3}$
x_2	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{14}{3}$
x_5	0	0	0	-1	1	1	0	6
x_6	0	0	0	1	-1	0	1	-6
z	1	0	0	$-\frac{7}{3}$	0	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{34}{3}$
x_1	0	1	0	$\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{10}{3}$
x_2	0	0	1	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$
x_5	0	0	0	0	0	1	1	0
x_4	0	0	0	-1	1	0	-1	6

Se puede observar que la restricción $2x_1 - x_2 \leq 4$ que corresponde al subespacio factible para el óptimo del problema original no participa en el proceso de optimización. Por lo tanto, solamente es necesario adicionar el subespacio violado $2x_1 - x_2 \geq 4$. Así, colocar la restricción $2x_1 - x_2 = 4$ equivale a resolver el problema colocando la restricción $2x_1 - x_2 \geq 4$ porque la otra restricción se cumple de forma trivial. La restricción que debe ser usada se identifica fácilmente usando la información del punto óptimo del problema original.

Observación:

Como ya fue mencionado al hacer el análisis teórico, la adición de una nueva restricción puede transformar el problema en infactible. El lector está invitado a verificar este caso reoptimizando el ejemplo 1 cuando es adicionada la siguiente restricción:

$$x_1 - 4x_2 = 8$$

Ejemplo 10: En el ejemplo 1 considerar que es adicionada la siguiente restricción de igualdad:

$$2x_1 + x_2 = 2$$

Se desea resolver el problema modificado.

Substituyendo la solución óptima del problema original, $x_1 = \frac{4}{3}$ y $x_2 = \frac{14}{3}$, en la nueva restricción tenemos:

$$2\frac{4}{3} + \frac{14}{3} = \frac{22}{3} > 2$$

entonces la nueva restricción asume la siguiente forma:

$$2x_1 + x_2 - x_5 = 2 \Longrightarrow -2x_1 - x_2 + x_5 = -2 \qquad x_5 \geq 0$$

donde x_5 es una variable artificial y tenemos que usar una función objetivo de fase I de la siguiente forma:

$$min \;\; x_o = x_5$$

Ambas filas, la de la función objetivo de fase I y la nueva ecuación, pueden ser colocadas en el cuadro simplex óptimo del problema original para preparar el cuadro en la forma adecuada y después iniciar el proceso primal simplex de 2 fases.

Los nuevos valores óptimos son los siguientes:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{array} \right. \Longrightarrow z(x) = -6$$

El lector está invitado a resolver nuevamente este problema de forma más eficiente.

Los cuadros simplex encontrados son los siguientes:

Cuadro simplex del ejemplo 8.

	z	x_o	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS	
z	1	0	0	0	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	$-\frac{46}{3}$	Hacemos cero los coeficientes de la última restricción correspondientes a las columnas básicas y después la fila x_o
x_o	0	1	0	0	0	0	-1	0	
x_1	0	0	1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{4}{3}$	
x_2	0	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{14}{3}$	
x_5	0	0	-2	-1	0	0	1	-2	
z	1	0	0	0	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	$-\frac{46}{3}$	
x_o	0	1	0	0	$\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{16}{3}$	
x_1	0	0	1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{4}{3}$	$\Longrightarrow$ Primal simplex
x_2	0	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{14}{3}$	
x_5	0	0	0	0	$\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{16}{3}$	
z	1	0	$\frac{5}{2}$	0	0	$-\frac{3}{2}$	0	-12	
x_o	0	1	$-\frac{5}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	2	
x_3	0	0	$\frac{3}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	2	
x_2	0	0	$-\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	0	4	
x_5	0	0	$-\frac{5}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	1	2	
z	1	0	-5	0	0	0	3	-6	
x_o	0	1	0	0	0	0	-1	0	
x_3	0	0	1	0	1	0	1	4	$\Longrightarrow$ Cuadro óptimo
x_2	0	0	2	1	0	0	-1	2	
x_4	0	0	-5	0	0	1	2	4	

Ejemplo 11: En el ejemplo 2, considere que el costo de la variable x_2 varía de $c_2 = 2$ para $c_2^{'} = 1$, entonces el cuadro óptimo varía ?

Como x_2 es variable no básica en ese cuadro, entonces:

$$\overline{c}_2^{'} = z_2 - c_2^{'} = (z_2 - c_2) + (c_2 - c_2^{'}) = -3 + (2 - 1) = -2 < 0$$

Lógicamente, también podemos usar la relación: $\overline{c}_2^{'} = wa_2 - c_2^{'}$

Como $\overline{c}_2^{'} = -2 < 0$ entonces el cuadro continua óptimo y la solución no varía.

Ejemplo 12: En el ejemplo 2, considere que el costo de la variable x_2 se cambia de $c_2 = 2$ para $c_2^{'} = -2$. En esta condiciones el cuadro óptimo varía ?

$$\overline{c}_2^{'} = z_2 - c_2^{'} = (z_2 - c_2) + (c_2 - c_2^{'}) = -3 + (2 - (-2)) = -3 + 4 \Longrightarrow \overline{c}_2^{'} = 1 > 0$$

Entonces el cuadro ya no es óptimo y x_2 debe entrar en la base.

La columna de x_2 ya está actualizada en el cuadro, por lo tanto no requiere ser actualizada. Entonces entramos en el cuadro con los valores de x_2 actualizados:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
z	1	0	1	-1	0	-6
x_1	0	1	1	1	0	6
x_4	0	0	3	1	1	14
z	1	0	0	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{32}{3}$
x_1	0	1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$
x_2	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{14}{3}$

Observación:

En el cuadro varía solamente el valor de $\overline{c}_2$ para $\overline{c}_2^{'}$.

Nueva solución: $\begin{cases} x_1 = \frac{4}{3} \\ x_2 = \frac{14}{3} \end{cases} \Longrightarrow z(x) = -\frac{32}{3}.$

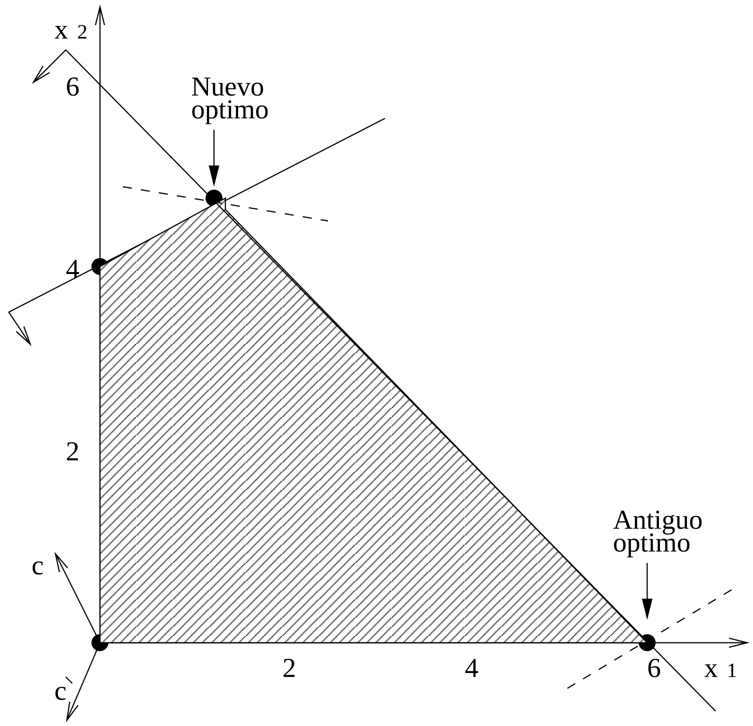


Figura 8.8: Gráfica del ejemplo 12.

Ejemplo 13: En el ejemplo 1, considere que la variable x_2 que es una variable básica cambia de costo de $c_2 = -3$ para $c_2^{'} = -2$, en estas condiciones el cuadro continúa óptimo ?

Como x_2 es variable básica entonces se recalculan todos los $\overline{c}_j$.

$z_j^{'} - c_j = (z_j - c_j) + (c_{B_t}^{'} - c_{B_t})y_{tj} \quad \forall_j \neq 2 \Longrightarrow x_2$

$(c_{B_t}^{'} - c_{B_t}) = -2 - (-3) = 1$

$\overline{c}_1^{'} = z_1^{'} - c_1 = 0 + 1(0) = 0$ (era esperado porque es variable básica)

$\overline{c}_2^{'} = z_2^{'} - c_2 = 0$ (era esperado porque es variable básica)

$\overline{c}_3^{'} = z_3^{'} - c_3 = -\frac{5}{3} + 1(\frac{1}{3}) = -\frac{4}{3}$

$\overline{c}_4^{'} = z_4^{'} - c_4 = -\frac{2}{3} + 1(\frac{1}{3}) = -\frac{1}{3}$

En este caso también podemos usar la relación: $\overline{c}_N^{'} = wN - c_N^{'}$

Como todos los $\overline{c}_j^{'} \leq 0 \Longrightarrow 0$ entonces el cuadro continúa óptimo .

Sin embargo la función objetivo varía así:

$$\overline{z} = c^{'}\overline{x} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ \\ \frac{14}{3} \end{bmatrix} = -\frac{32}{3}$$

La función objetivo también se puede calcular de la siguiente manera:

$$\overline{z} = w^{'}b = \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} = -\frac{32}{3}$$

Solución $\overline{z} = -\frac{32}{3}$ $\quad x_1 = \frac{4}{3}$ $\quad x_2 = \frac{14}{3}$

Ejemplo 14: En el ejemplo 1 el costo de la variable x_2 varía de c = -3 para $c^{'} = 2$ y, por lo tanto, el cuadro continúa óptimo ?

Como x_2 es variable básica recalculamos todos los $\overline{z}_j - c_j$, coeficientes de costos relativos y la función objetivo.

$$\overline{z}_j - c_j = (z_j - c_j) + (c_{B_t^{'}} - c_{B_t})y_{tj} \;\; \forall \; j \neq 2$$

$(c_{B_t^{'}} - c_{B_t}) = 2 - (-3) = 5$

$z_1^{'} - c_1 = 0 + 5(0) = 0$

$z_3^{'} - c_3 = -\frac{5}{3} + 5\frac{1}{3} = 0$

$z_4^{'} - c_4 = -\frac{2}{3} + 5\frac{1}{3} = 1$

Como $z_4^{'} - c_4 = \overline{c}_4^{'} = 1 > 0$ entonces el cuadro ya no es más óptimo.

$$\overline{z} = c_B^{'}\overline{b} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ \\ \frac{14}{3} \end{bmatrix} = 8 \Longrightarrow \overline{z} = 8$$

Procedemos a la optimización del cuadro simplex.

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
z	1	0	0	0	1	8
x_1	0	1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$
x_2	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{14}{3}$
z	1	0	-3	-1	0	-6
x_1	0	1	1	1	0	6
x_4	0	0	3	1	1	14

La nueva solución es: $\{x_1 = 6 \Longrightarrow z(x) = -6\}$

La figura 8.9 muestra la gráfica de este problema.

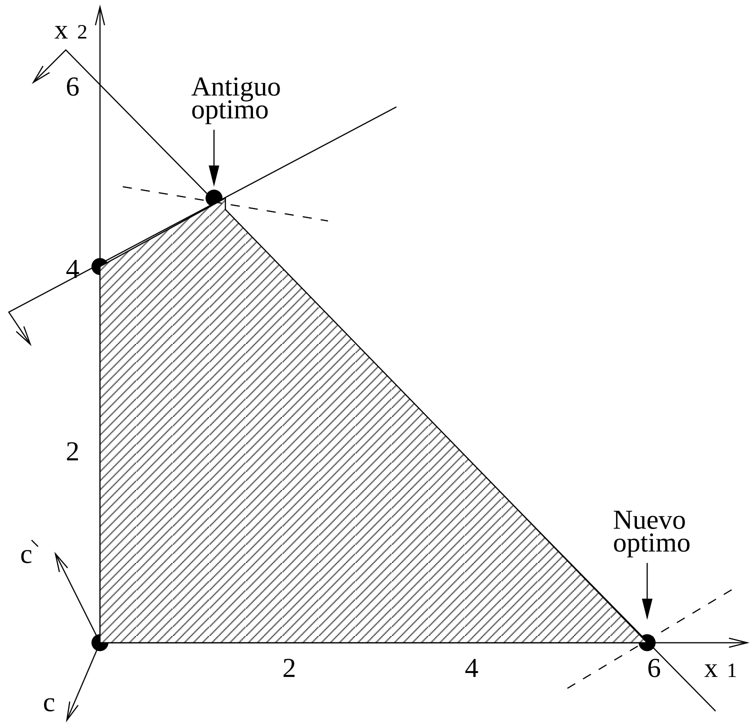


Figura 8.9: Gráfica del ejemplo 14.

Ejemplo 15: En el ejemplo 1, considere que $b_2 = 8$ cambia para $b_2^{'} = 6$. Qué ocurre con el cuadro óptimo ?

$$\overline{b}^{'} = B^{-1}b^{'} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} > 0 \text{ Entonces el cuadro continúa óptimo.}$$

Sin embargo la solución óptima cambia: $\overline{z} = c_B B^{-1} b^{'} = c_B \overline{b}^{'} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = -14$

Así la nueva solución es: $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 4 \end{cases} \Longrightarrow z(x) = -14$

La figura 8.10 muestra la gráfica de este problema.

Ejemplo 16: En el ejemplo 1, considere que $b_2 = 8$ cambia para $b_2^{'} = 15$. Qué ocurre con el cuadro óptimo ?

Se debe calcular:

$$\overline{b}^{'} = B^{-1}b^{'} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \end{bmatrix} \text{ que no es óptimo}$$

$$\overline{z} = c_B \overline{b}^{'} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \end{bmatrix} = -20$$

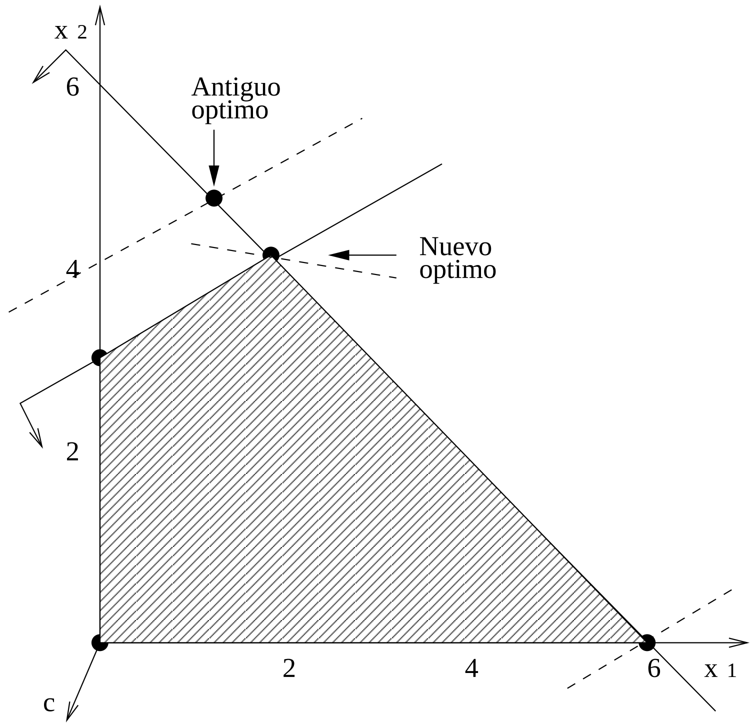


Figura 8.10: Gráfica del ejemplo 15.

Como $\overline{b}_1' = -1 < 0$ entonces el cuadro ya no es óptimo porque se pérdió la factibilidad. Se debe entonces reoptimizar empleando el método **dual simplex**.

Óptimo: $\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 6 \end{array} \right. \Longrightarrow z(x) = -18$

La figura 8.11 muestra la gráfica de este problema.

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
z	1	0	0	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$	-20
x_1	0	1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	-1
x_2	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	7
z	1	-2	0	-3	0	-18
x_4	0	-3	0	-2	1	3
x_2	0	1	1	1	0	6

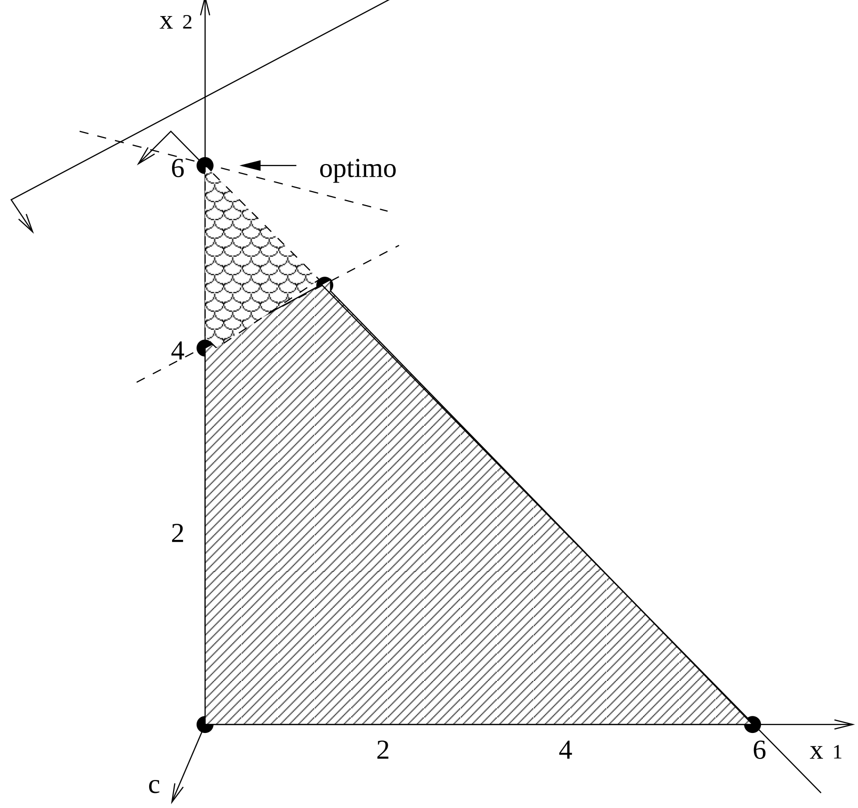


Figura 8.11: Gráfica del ejemplo 16.

Ejemplo 17: En el ejemplo 2, el coeficiente $a_{22} = 2$ cambia para $a'_{22} = 4$. Qué ocurre con el cuadro óptimo ?

Como x_2 es una variable no básica se verifica su coeficiente de costo relativo.

$$z'_2 - c_2 = wa'_2 - c_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} - (2) = -3 < 0$$

Como $z'_2 - c_2 = -3 < 0$ entonces el cuadro continúa siendo óptimo y la solución no varía.

Ejemplo 18: Para el ejemplo 2, los coeficientes de x_2 varían de $a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ *para* $\begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$

Verificar como queda el nuevo óptimo.

Verificamos el costo relativo de x_2:

$$z'_2 - c_2 = wa'_2 - c_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix} - (2) = 1 > 0$$

Entonces x_2 debe entrar en la base:

$$y'_2 = B^{-1}a'_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

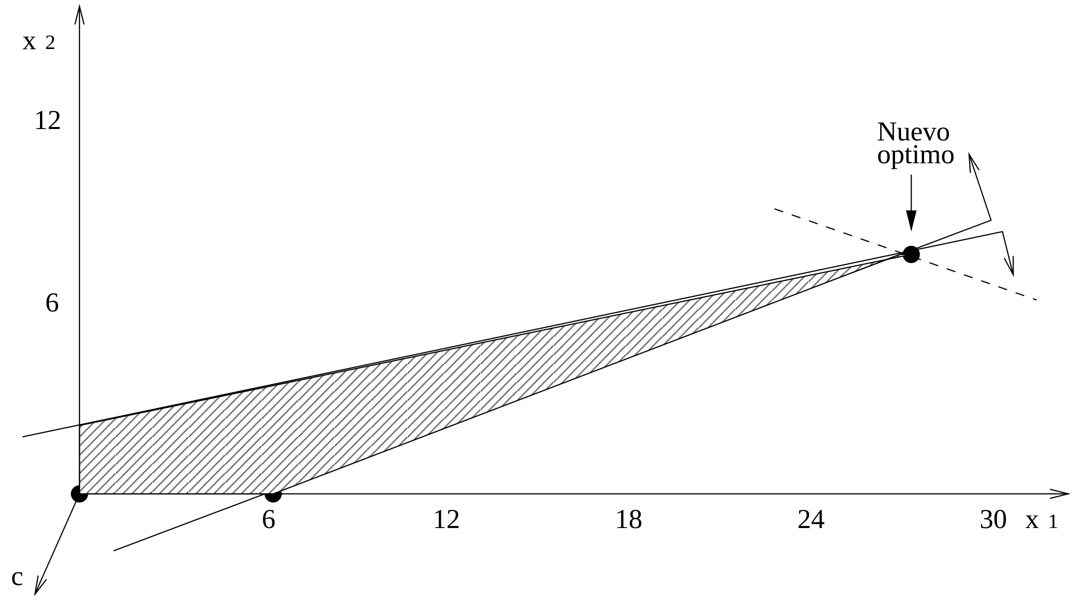


Figura 8.12: Gráfica del ejemplo 18.

Procedemos a reoptimizar el cuadro simplex:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
z	1	0	1	-1	0	-6
x_1	0	1	-3	1	0	6
x_4	0	0	2	1	1	14
z	1	0	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-13
x_1	0	1	0	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	27
x_2	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	7

Fue encontrada la solución óptima.

Nueva solución: $\begin{cases} x_1 = 27 \\ x_2 = 7 \end{cases} \Longrightarrow z(x) = -13$

La figura 8.12 muestra la gráfica de este problema.

El lector está invitado a verificar que cuando se lleva a cabo una variación para $a_2^{'} = \begin{bmatrix} -4 \\ -8 \end{bmatrix}$ entonces el problema se torna ilimitado.

Ejemplo 19: Considere el ejemplo 1, ahora el coeficiente a_{21} = -1 cambia a a'_{21} = 1. Qué ocurre con el cuadro óptimo ?

Consideremos una variable x'_1, cuya columna es actualizada para pivotar la variable básica x_1.

$$\overline{c}_1 = z'_1 - c_1 = wa'_1 - c_1 = \begin{bmatrix} -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - (-1) = -\frac{4}{3}$$

Calculamos la columna actualizada de x'_1:

$$y'_1 = B^{-1}a'_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Existe un pivot diferente de cero entre x'_1 y x_1. Entonces realizamos pivotaje para ver como queda la factibilidad y la optimalidad del nuevo cuadro.

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x'_1	RHS
z	1	0	0	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{46}{3}$
x_1	0	1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$
x_2	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{14}{3}$
z	1	·	0	1	-2	0	-10
x'_1	0	·	0	2	-1	1	4
x_2	0	·	1	-1	1	0	2
z	1	·	0	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-12
x_3	0	·	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2
x_2	0	·	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	4

En el primer cuadro fue pivotado x_1 con x'_1 para obtener la base "verdadera".

En el segundo cuadro se obtuvo un cuadro que es primal factible (primal simplex), o sea fue preservada la factibilidad y reoptimizamos el problema usando el método primal simplex.

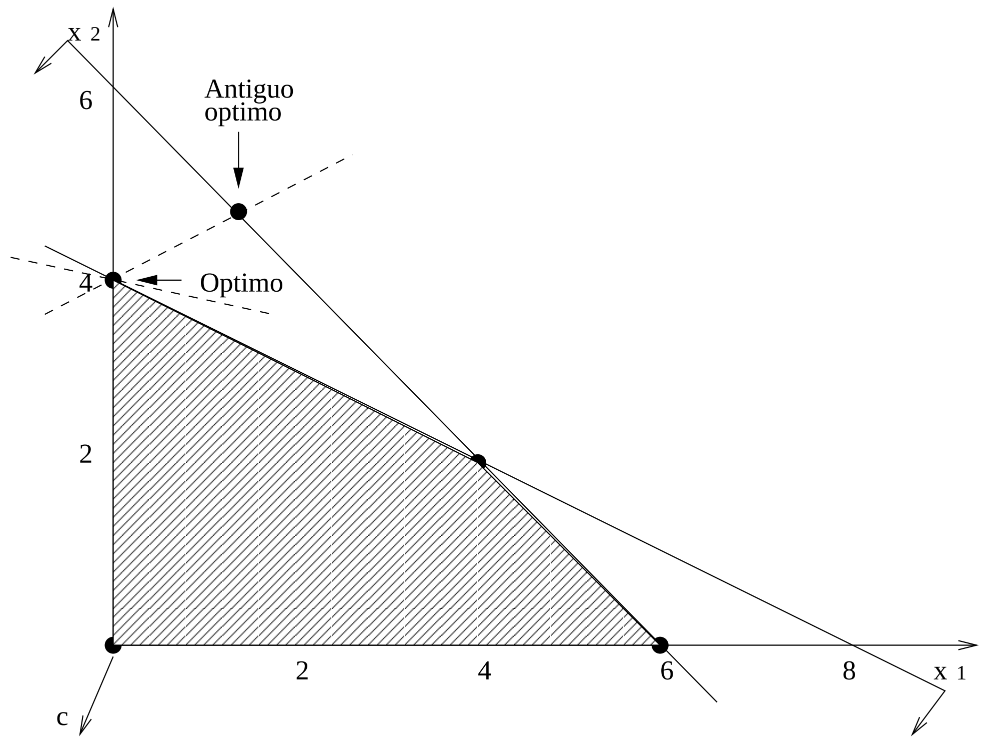


Figura 8.13: Gráfica del ejemplo 19.

En el tercer cuadro se obtuvo el óptimo.

Nuevo óptimo $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 4 \end{cases} \Longrightarrow z(x) = -12$

La figura 8.13 muestra la gráfica de este problema.

Ejemplo 20: En el ejemplo 1, ahora el coeficiente a_{21} = -1 cambia para a'_{21} = -2. Que ocurre con el cuadro óptimo ?

Como x_1 es una variable básica consideremos la variable x'_1 para pivotar x_1.

Actualizamos los parámetros de x'_1:

$$\overline{c}'_1 = wa'_1 - c_1 = \begin{bmatrix} -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} - (-1) = \frac{2}{3} > 0$$

$$y'_1 = B^{-1}a'_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Pivotamos: x'_1 y x_1:

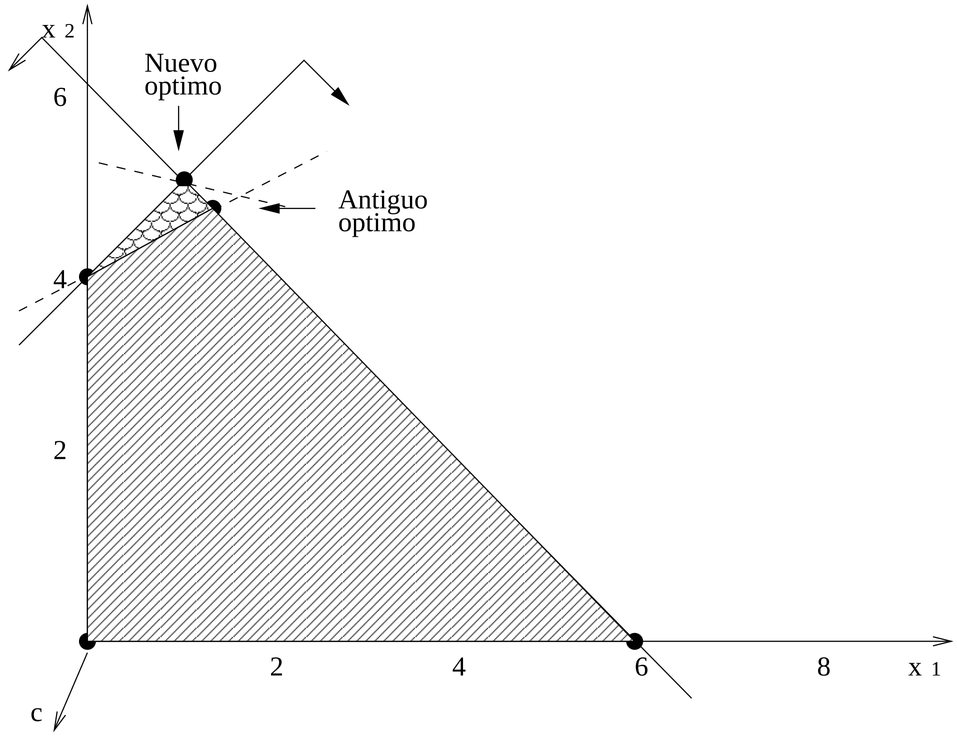


Figura 8.14: Gráfica del ejemplo 20.

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	$x_1^{'}$	RHS
z	1	0	0	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{46}{3}$
x_1	0	1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$
x_2	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{14}{3}$
z	1	$\cdot$	0	-2	$-\frac{1}{2}$	0	-16
$x_1^{'}$	0	$\cdot$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	1	1
x_2	0	$\cdot$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	5

Se puede observar que en el cuadro número 2 preserva la factibilidad y la optimalidad y, por lo tanto, el nuevo cuadro es óptimo.

Nueva solución óptima: $\left\{ \begin{array}{l} x_1^{'} = 1 \\ x_2 = 5 \end{array} \right. \Longrightarrow z(x) = -16$

La figura 8.14 muestra la gráfica de este problema.

Ejemplo 21: En el ejemplo 1, considere ahora que a_{21} = -1 cambia para $a'_{21} = \frac{8}{5}$.

Que ocurre con el cuadro óptimo.

Como x_1 es una variable básica, consideremos la variable x'_1 para pivotar x_1.

Actualizamos los valores de x'_1:

$$\overline{c}'_1 = wa'_1 - c_1 = \begin{bmatrix} -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{8}{5} \end{bmatrix} - (-1) = -\frac{26}{15} < 0$$

$$y'_1 = B^{-1}a'_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{8}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{15} \\ \frac{13}{15} \end{bmatrix}$$

Ahora se pivota x_1 con x'_1.

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x'_1	RHS
z	1	0	0	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{26}{15}$	$-\frac{46}{3}$
x_1	0	1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{3}$
x_2	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{13}{15}$	$\frac{14}{3}$
z	1	·	0	7	-5	0	2
x'_1	0	·	0	5	$-\frac{5}{2}$	1	10
x_2	0	·	1	-4	$\frac{5}{2}$	0	-4

El cuadro perdió la factibilidad y la optimalidad.

Se procede con el **dual-simplex** incorporando la restricción $x_3 + x_4 \leq M$ para montar un cuadro que cumpla con la optimalidad

	z	x_2	x_3	x_4	$x_1^{'}$	x_o	RHS
z	1	0	7	-5	0	0	2
x_0	0	0	1	1	0	1	M
$x_1^{'}$	0	0	5	$-\frac{5}{2}$	1	0	10
x_2	0	1	-4	$\frac{5}{2}$	0	0	-4
z	1	0	0	-12	0	-7	$2-7M$
x_3	0	0	1	1	0	1	M
$x_1^{'}$	0	0	0	$-\frac{15}{2}$	1	-5	$10-5M$
x_2	0	1	0	$\frac{13}{2}$	0	4	$-4+4M$
z	1	0	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{7}{5}$	0	-12
x_3	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	0	2
x_0	0	0	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{5}$	1	$-2+M$
x_2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{5}$	0	4

$$\text{Nueva solución óptima: } \{x_2 = 4 \Longrightarrow z(x) = -12\}$$

Es importante verificar que en el método **dual simplex** empleado, esta metodologia inicialmente “recupera” la optimalidad continuando infactible y en el siguiente paso llega al nuevo óptimo (ver gráfico de la figura 8.15).

Una alternativa a esta metodologia puede ser emplear el **primal-simplex** usando una simple variable artificial x_o y cuyos cuadros simplex son mostrados en una tabla separada.

$$\text{Solución óptima obtenida: } \left\{ \begin{array}{l} x_2 = 4 \\ x_3 = 2 \end{array} \right. \Longrightarrow z(x) = -12$$

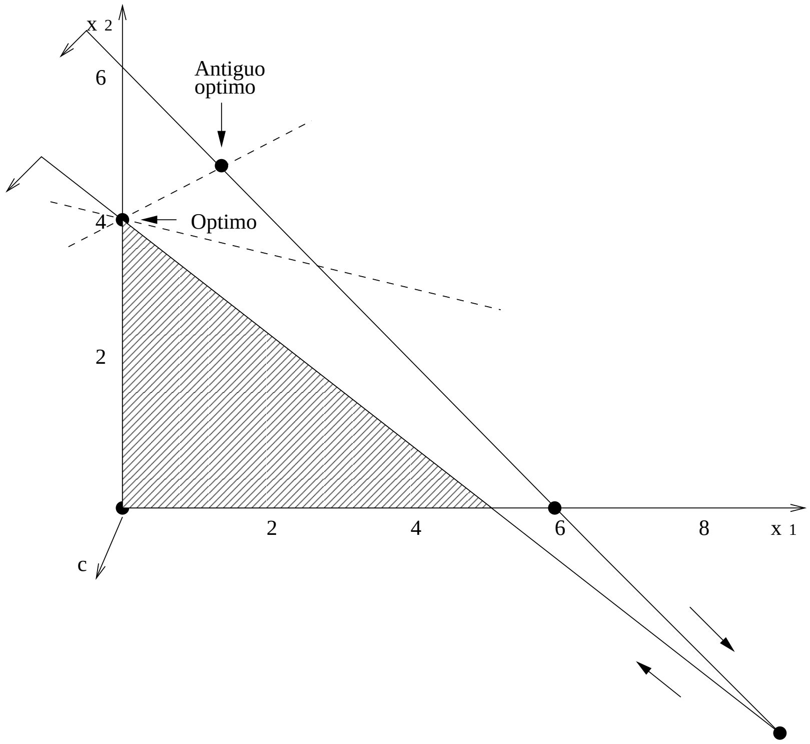


Figura 8.15: Gráfica del ejemplo 21.

	z	x_2	x_3	x_4	$x_1^{'}$	x_o	RHS
z	1	0	7	-5	0	0	2
$x_1^{'}$	0	0	5	$-\frac{5}{2}$	1	0	10
x_2	0	1	-4	$\frac{5}{2}$	0	-1	-4
z	1	0	7	-5	0	0	2
$x_1^{'}$	0	0	5	$-\frac{5}{2}$	1	0	10
x_o	0	-1	4	$-\frac{5}{2}$	0	1	4
z	1	$\frac{7}{4}$	0	$-\frac{5}{8}$	0	$-\frac{7}{4}$	-5
$x_1^{'}$	0	$\frac{5}{4}$	0	$\frac{5}{8}$	1	$-\frac{5}{4}$	5
x_3	0	$-\frac{1}{4}$	1	$-\frac{5}{8}$	0	$\frac{1}{4}$	1
z	1	0	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{7}{5}$	0	-12
x_2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{5}$	-1	4
x_3	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	0	2

Ejemplo 22: Finalmente en el ejemplo 1, considere que a_{21} = -1 cambia para $a'_{21} = 2$.

El cuadro continúa óptimo ?

x_1 es una variable básica entonces consideremos una nueva variable x'_1:

$$\overline{c}'_1 = wa'_1 - c_1 = \begin{bmatrix} -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - (-1) = -3 + 1 = -2 < 0$$

$$y'_1 = B^{-1}a'_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

El nuevo cuadro queda así:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x'_1	RHS	
z	1	0	0	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$	-2	$-\frac{46}{3}$	
x_1	0	1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{4}{3}$	$\leftarrow y'_{11} = 0$. No es posible pivotar x'_1 con x_1
x_2	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{14}{3}$	

Entonces se debe considerar x_1 como variable artificial y proceder al proceso **primal simplex** de 2 fases: $x_o = x_1 \Longleftarrow$ Fase I.

La figura 8.16 muestra el gráfico de este problema.

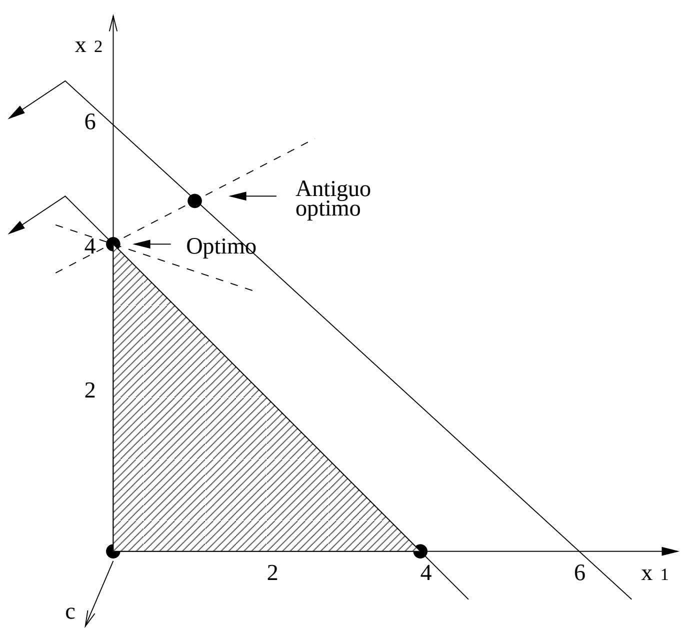


Figura 8.16: Gráfica del ejemplo 22.

	z	x_o	x_1	x_2	x_3	x_4	$x_1^{'}$	RHS
z	1	0	0	0	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$	-2	$-\frac{46}{3}$
x_0	0	1	-1	0	0	0	0	0
x_1	0	0	1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{4}{3}$
x_2	0	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{14}{3}$
z	1	0	0	0	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$	-2	$-\frac{46}{3}$
x_o	0	1	0	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{4}{3}$
x_1	0	0	1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{4}{3}$
x_2	0	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{14}{3}$
z	1	0	$\frac{5}{2}$	0	0	$-\frac{3}{2}$	-2	-12
x_o	0	1	-1	0	0	0	0	0
x_3	0	0	$\frac{3}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	2
x_2	0	0	$-\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	4

Nueva solución óptima: $\{x_2 = 4 \Longrightarrow z(x) = -12$

8.9 Ejercicios Resueltos:

1. Considere el siguiente cuadro óptimo de un problema de maximización con restricciones del tipo $\leq$, siendo x_6, x_7, x_8 las variables de holgura.

   a) Encontrar el valor de θ

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	RHS
z	1	0	0	0	2	0	2	1/10	2	θ
x_1	0	1	0	0	-1	0	1/2	1/5	-1	2
x_2	0	0	1	0	2	1	-1	0	1/2	3
x_3	0	0	0	1	-1	-2	5	$-3/10$	2	1

Recordemos que el problema debe tener la siguiente forma:

$$\begin{array}{rcl} max\ \ z(x) & = & cx \\ s.a. & & \\ & & Ax + Ix_a = b \\ & & x \geq 0;\ \ x_a \geq 0 \end{array}$$

Los coeficientes de costo relativos de las variables de holgura x_a, en cualquier cuadro simplex, asume la siguiente forma:

$$\overline{c}_{xa} = c_B B^{-1} I - c_{xa} = wI - 0 = w$$

Por lo tanto los valores de w para cada cuadro simplex se encuentran en la fila objetivo debajo de las columnas de x_a.

Solución: Del cuadro: $w_1 = 2, w_2 = 1/10, w_3 = 2$

$$\theta = c_B B^{-1} b = w.b = \begin{bmatrix} 2 & 1/10 & 2 \end{bmatrix} .b = \begin{bmatrix} 2 & 1/10 & 2 \end{bmatrix} B.\overline{b}$$

$$B = (B^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/5 & -1 \\ -1 & 0 & 1/2 \\ 5 & -3/10 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2/9 & -4/27 & 4/27 \\ 20/3 & 80/9 & 10/9 \\ 4/9 & 46/27 & 8/27 \end{bmatrix}$$

$$\overline{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B\overline{b} = b = \begin{bmatrix} 4/27 \\ 370/9 \\ 170/27 \end{bmatrix}$$

$$z = w.b = \begin{bmatrix} 2 & 1/10 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4/27 \\ \\ 370/9 \\ \\ 170/27 \end{bmatrix} = 17$$

b) Ya que es alterado el óptimo si se adiciona una nueva variable x_9 con $c_9 = 5$ y $a_9 = (2, 0, 3)'$.

Solución:

$$\overline{c_9} = wa_9 - c_9 = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{10} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} - 5$$

$$\overline{c_9} = 10 - 5 = 5$$

Como el problema es de maximización, el óptimo no es afectado.

c) Cuanto puede variar b_1 sin afectar la factibilidad ?

Solución: $B^{-1}b^* \geq 0$ $\qquad b^* = \begin{bmatrix} 4/27 + \Delta_1 \\ \\ 370/9 \\ \\ 170/27 \end{bmatrix}$

$$B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/5 & -1 \\ \\ -1 & 0 & 1/2 \\ \\ 5 & -3/10 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4/27 + \Delta_1 \\ \\ 370/9 \\ \\ 170/27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + \Delta_1/2 \\ \\ 3 - \Delta_1 \\ \\ 1 + 5\Delta_1 \end{bmatrix}$$

$-1/5 \leq \Delta_1 \leq 3$ Variación permitida para no afectar la factibilidad.

d) Si se adiciona la restricción $x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 10$ el nuevo cuadro es óptimo ? Si no, halle el nuevo.

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 1$$

$$2 - 3 + 2(1) = 1 \leq 10$$

$$1 \leq 10$$

El cuadro continúa siendo óptimo.

2. Considere el siguiente PL donde x_5, x_6, x_7 son las variables de holgura. $x_B = (x_1, x_3, x_2)$ es óptima. Elabore el cuadro.

$$PL \quad \begin{cases} min & -2x_1 - 4x_2 - x_3 - x_4 \\ s.a & \\ & x_1 + 3x_2 + x_4 \leq 8 \quad \text{: disponibilidad materia prima 1} \\ & 2x_1 + x_2 \quad\quad \leq 6 \quad \text{: disponibilidad materia prima 2} \\ & x_2 + 4x_3 + x_4 \leq 6 \quad \text{: disponibilidad materia prima 3} \\ & \forall_j, x_1 \geq 0 \end{cases}$$

Solución:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}; \qquad b = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \begin{array}{l} c_B = [-2 \quad -1 \quad -4] \\ c_N = [-1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \end{array}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -1/5 & -6/10 & 0 \\ -1/10 & -1/20 & 1/4 \\ -4/10 & -2/10 & 0 \end{bmatrix}; \qquad N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c_B B^{-1} N - c_N = \left[-7/20 \quad -11/10 \quad -9/20 \quad -1/4 \right]$$

$$c_B B^{-1} b = -13; \qquad B^{-1} b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
Z	1	0	0	0	-7/20	-11/10	-9/20	-1/4	-13
x_1	0	1	0	0	-1/5	-1/5	6/10	0	2
x_3	0	0	1	0	15/100	-1/10	1/20	-1/4	1
x_2	0	0	0	1	4/10	4/10	-1/5	0	2

a) Una disponibilidad de materia prima puede ser alterada. Cuál materia prima debe ser alterada y porqué ?

En el cuadro:

$$\frac{\delta Z}{\delta b_1} = -\frac{11}{10} \quad ; \quad \frac{\delta Z}{\delta b_2} = -\frac{9}{20} \quad ; \quad \frac{\delta Z}{\delta b_3} = -1/4$$

El recurso 1 provoca la mayor reducción de la función objetivo ($\frac{\delta Z}{\delta b}$ más negativo) $\rightarrow$ variar el recurso b_1

b) Para qué intervalo de variación de b_1, B continúa siendo óptima ?
Cuál es el óptimo si $b_1 = 20$?

Solución:

$$B^{-1}b^* = \begin{bmatrix} -1/5 & 6/10 & 0 \\ -1/10 & 1/20 & 1/4 \\ 4/10 & -1/5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8+\Delta_1 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}b^* = \begin{bmatrix} 2-\Delta_1/5 \\ 1-\Delta_1/10 \\ 2+2\Delta_1/5 \end{bmatrix} \begin{array}{cccc} \rightarrow & \Delta_1 & \leq & 10 \\ \rightarrow & \Delta_1 & \leq & 10 \\ \rightarrow & \Delta_1 & \geq & -5 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} -5 & \leq & \Delta_1 & \leq & 10 \end{bmatrix}$$

Si b = 20 cuál es el óptimo ?

Solución: Si $b_1 = 20$, $\Delta_1 = 12$

El cuadro pierde factibilidad.

$$B^{-1}b = \begin{bmatrix} -2/5 \\ \\ -1/5 \\ \\ 34/5 \end{bmatrix} ; \; Z = c_B B^{-1} b = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2/5 \\ \\ -1/5 \\ \\ 34/5 \end{bmatrix} = Z = -131/5$$

	Z	x_1	x_3	x_2	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
Z	1	0	0	0	-7/20	-11/10	-9/20	-1/4	-131/5
$\Leftarrow x_1$	0	1	0	0	-1/5	-1/5	3/5	0	-2/5
x_3	0	0	1	0	15/100	-1/10	1/20	1/4	-1/5
x_2	0	0	0	1	2/5	2/5	-1/5	0	34/5

Optimizamos usando Dual Simplex

	z	X_1	X_3	X_2	X_4	X_5	X_6	X_7	RHS
z	1	-7/4	0	0	0	-3/4	-3/2	-1/4	-51/2
X_4	0	-5	0	0	1	1	-3	0	2
X_3	0	3/4	1	0	0	-1/4	1/2	1/4	-1/2
X_2	0	2	0	1	0	0	1	0	6
Z	1	-4	-3	0	0	0	-3	-1	-24
X_4	0	-2	4	0	1	0	-1	1	0
X_5	0	-3	-4	0	0	1	-2	-1	2
X_2	0	2	0	1	0	0	1	0	6

El cuadro es óptimo y factible

Solución:

$$\begin{array}{lll} x_4 = 0 & x_3 = 0 & x_5 = 2 \\ x_1 = 0 & x_2 = 6 & x_6 = 0 \\ x_7 = 0 & & \end{array}$$

$$z^* = -24$$

c) Si existe materia prima 1 adicional disponible cual es el valor máximo que pagaría por ella ? Porque ?

$$z = w.b \qquad \frac{\delta z}{\delta b_1} = w_1$$

w_1 representa la variación de la función objetivo por unidad del recurso b_1. En relación al ejemplo, $w_1 = -\frac{11}{10}$ representa la variación de la función objetivo por unidad de aumento del recurso b_1. Así, el máximo valor que se puede pagar por unidad de materia prima 1 es igual a $\frac{11}{10}$ \$/Kg.

3. Considerese el siguiente problema de la dieta:

$$PL \left\{ \begin{array}{lll} min & 50x_1 + 100x_2 + 51x_3 & (\$/\text{kg}) \\ s.a. & & \\ & 10x_1 + x_2 + 9x_3 \geq 5 & \text{U. nutriente A} \\ & 10x_1 + 10x_2 + 10x_3 \geq 50 & \text{U. nutriente B} \\ & 10x_1 + 11x_2 + 11x_3 \geq 10 & \text{U. nutriente C} \\ & x_j \geq 0 \ ; \ \forall_j & \end{array} \right.$$

donde: x_1 : kg de verdura; x_2 : kg de papa; x_3 : kg de maiz

Si x_4, x_5, x_6 son variables de holgura, entonces (x_4, x_1, x_6) es una base óptima. Construya el cuadro.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{array} \\ A = & \left[\begin{array}{cccccc} 10 & 1 & 9 & -1 & 0 & 0 \\ 10 & 10 & 10 & 0 & -1 & 0 \\ 10 & 11 & 11 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]; \end{array} \qquad b = \left[\begin{array}{c} 5 \\ 50 \\ 10 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} a_4 & a_1 & a_6 \end{array} \\ B = & \left[\begin{array}{ccc} -1 & 10 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 10 & -1 \end{array}\right]; \end{array} \qquad \begin{array}{rl} c_B = & [0 \quad 50 \quad 0] \\ c_N = & [100 \quad 51 \quad 0] \end{array}$$

$$B^{-1} = \left[\begin{array}{ccc} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1/10 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right]; \qquad N = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 9 & 0 \\ 10 & 10 & -1 \\ 11 & 11 & 0 \end{array}\right]$$

$$B^{-1}N = \left[\begin{array}{ccc} 9 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1/10 \\ -1 & -1 & -1 \end{array}\right]; \qquad c_B B^{-1} N - c_N = \left[\begin{array}{ccc} -50 & -1 & -5 \end{array}\right]$$

$$c_B B^{-1} b = 250; \qquad B^{-1} b = \left[\begin{array}{c} 45 \\ 6 \\ 40 \end{array}\right]$$

	z	x_4	x_1	x_6	x_2	x_3	x_5	RHS
z	1	0	0	0	-50	-1	-5	250
x_1	0	1	0	0	9	1	-1	45
x_3	0	0	1	0	1	1	-1/10	5
x_2	0	0	0	1	-1	-1	-1	40

a) Encontrar las soluciones óptimas dual y primal asociadas a este problema.

Como el óptimo es finito: $z(x) = v(w) = 250$

$$w = c_B B^{-1} \quad \Rightarrow \quad w = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 50 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc} -1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \quad \Rightarrow \quad w = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 50 & 0 \end{array}\right]$$

$$w_1 = 0; \quad w_2 = 5; \quad w_3 = 0$$

Recordando que en este caso w está en el cuadro con signo cambiado.

Solución: se debe usar 5 kg de verduras con valor de $ 250 para la dieta.

b) Un nuevo producto: leche está disponible, contiene 0, 10 y 20 unidades de vitamina A,C y D y cuesta 40 $/lt. Debe incluirse la leche en la dieta ? Cuál será el mayor valor que se puede pagar para incluirla en la dieta ?

Leche: Variable x_7.

$$\overline{c_7} = \omega a_7 - c_7 = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix} - 40 = 10$$

El cuadro ya no es óptimo, lo que indica que se puede optimizar y mejorar la función objetivo.

$\Rightarrow$ <u>Se recomienda incluirla en la dieta</u>.

Para incluir la leche se puede pagar <u>hasta 50 $/lt</u> ya que a partir de allí el cuadro continuaría siendo óptimo y el producto no es atractivo porque no disminuye el precio de la dieta. Así tenemos:

$$\bar{c}_7 = wa_7 - c_7 = \begin{bmatrix} 0 & 50 = \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix} - c_7 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_7 = 50$$

c) En el cuadro original, la recomendación de RMD de vitamina es:

$$\begin{array}{lcl} \text{Vitamina A} & \geq & 5 \\ \text{Vitamina C} & \geq & 50 + 10\alpha \\ \text{Vitamina D} & \geq & 10 + 15\alpha; \alpha \geq 0 \end{array}$$

Que valor de α permite que (x_4, x_1, x_6) siga siendo óptima ?

$$B^{-1}b^* \geq 0$$

$$B^{-1}b^* = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1/10 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 50 + 10\alpha \\ 10 + 15\alpha \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} 45 + 10\alpha \\ 5 + \alpha \\ 40 - 5\alpha \end{bmatrix} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -4.5 & \leq & \alpha & \leq & 8 \end{bmatrix}$$

Cual es la solución óptima si $\alpha = \overline{\alpha} + 1$

$\overline{\alpha}$: límite superior de α para factibilidad.

$\Rightarrow \overline{\alpha} = 8$

$\Rightarrow \alpha = \overline{\alpha} + 1 = 8 + 1 = 9$

Nuevo cuadro:

	z	x_4	x_1	x_6	x_2	x_3	x_5	RHS
z	1	0	0	0	-50	-1	-5	700
x_4	0	1	0	0	9	1	-1	135
x_1	0	0	1	0	1	1	-1/10	14
$\Leftarrow x_6$	0	0	0	1	-1	-1	-1	-5
z	1	0	0	-1	-49	0	-4	705
x_4	0	1	0	1	8	0	-2	130
x_1	0	0	1	1	0	0	-1	9
x_3	0	0	0	-1	1	1	1	5

El cuadro es reoptimizado usando Dual Simplex.

Para $\alpha = \overline{\alpha} + 1$ la solución es:

$$\begin{cases} X_1 = 9 & X_4 = 130 \\ X_2 = 0 & X_5 = 0 \\ X_3 = 5 & X_6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad Z^* = \$705$$

CAPÍTULO 9

MÉTODO SIMPLEX CON VARIABLES CANALIZADAS

9.1 Introducción

Sea el PL:

$$\begin{array}{rcl} min\ \ z(x) & = & cx \\ s.a. & & \\ & & Ax = b \\ & & l \leq x \leq u \end{array} \tag{9.1}$$

Donde el tamaño de la matriz A es : $A_{m \times n}$

La manera más simple, sin embargo la que exige más trabajo para resolver (9.1) es considerar las restricciones sobre las variables x como si fuesen restricciones tradicionales e incluirlas en la matriz A, como se muestra a continuación:

$$x + x_1 = u$$

$$x - x_2 = l$$

Sin embargo, el número de restricciones pasa de m a m + 2n y el número de variables pasa de n a 3n.

Además de lo anterior se puede transformar el problema para $x^{'} = x - l$ y así resolver el problema transformado: $x = x^{'} + l$

$$\begin{array}{rcl} min\ \ z(x) & = & cx^{'} + c\,l \\ s.a. & & \\ & & Ax^{'} + Al = b \\ & & 0 \leq x^{'} \leq u - l \end{array} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} min\ \ z(x) & = & cx^{'} \\ s.a. & & \\ & & Ax^{'} = b - A\,l \\ & & 0 \leq x^{'} \leq u - l \end{array} \right. \tag{9.2}$$

Resolver (9.2) implica una disminución del tamaño del problema, a pesar de esto el problema continua siendo grande.

Por lo tanto, la manera <u>más eficiente</u> de resolver (9.1) es tener en cuenta las restricciones canalizadas solamente en forma implícita, esto es, el tamaño de la base es determinado por el rank (A). Por lo tanto, las restricciones sobre las variables $l \leq x \leq u$ son consideradas en forma implícita, de manera parecida como son llevadas en cuenta las restricciones de no negatividad $\{x \geq 0\}$ en el simplex tradicional.

Sea $\overline{x}$ una SBF de (9.1) con base B, entonces:

$$A = \begin{bmatrix} B & N_1 & N_2 \end{bmatrix} \quad \text{En este caso el tamaño de B} \quad \Longrightarrow \quad B_{m \times m}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_{N_1} \\ x_{N_2} \end{bmatrix}; \qquad c = \begin{bmatrix} c_B & c_{N_1} & c_{N_2} \end{bmatrix}$$

$x_{N_1} = l_{N_1} \Longrightarrow$ variables que están en su L.I.

$x_{N_2} = u_{N_2} \Longrightarrow$ variables que están en su L.S.

Entonces del conjunto de restricciones principales del problema tenemos:

$$Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad Bx_B + N_1 x_{N_1} + N_2 x_{N_2} = b$$

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}N_1 x_{N_1} - B^{-1}N_2 x_{N_2} \tag{9.3}$$

$$z = cx = c_B x_B + c_{N_1} x_{N_1} + c_{N_2} x_{N_2} \tag{9.4}$$

Reemplazando (9.3) en (9.4):

$$z = c_B \left[B^{-1}b - B^{-1}N_1 x_{N_1} - B^{-1}N_2 x_{N_2} \right] + c_{N_1} x_{N_1} + c_{N_2} x_{N_2}$$

$$z(x) = c_B B^{-1} b + \left[c_{N_1} - c_B B^{-1} N_1 \right] x_{N_1} + \left[c_{N_2} - c_B B^{-1} N_2 \right] x_{N_2} \tag{9.5}$$

Las relaciones (9.3) y (9.5) permiten construir el cuadro simplex:

	z	x_B	x_{N_1}	x_{N_2}	RHS
z	1	0	$c_B B^{-1} N_1$ - c_{N_1}	$c_B B^{-1} N_2 - c_{N_2}$	$\overline{z}$
x_B	0	I	$B^{-1} N_1$	$B^{-1} N_2$	$\overline{b}$

Donde:

$\overline{b} = B^{-1}b - B^{-1}N_1 l_{N_1} - B^{-1}N_2 u_{N_2}$

$\overline{z} = c_B B^{-1}b + [c_{N_1} - c_B B^{-1}N_1]\, l_{N_1} + [c_{N_2} - c_B B^{-1}N_2]\, u_{N_2}$

De (9.5), se puede observar que la función objetivo asume la siguiente forma:

$$z = c_B B^{-1}b - \sum_{j \in R_1} (z_j - c_j)x_j - \sum_{j \in R_2} (z_j - c_j)x_j \tag{9.6}$$

Donde:

$R_1 \Longrightarrow$ conjunto de índices de las variables no básicas que están en su L.I.

$R_2 \Longrightarrow$ conjunto de índices de las variables no básicas que están en su L.S.

Como mejorar el valor actual de la función objetivo ? Analizamos el problema de minimización.

Es posible mejorar el valor de $z(x)$ si:

- $\exists$ algún $(z_j - c_j) > 0$ para $j \in R_1$, o si
- $\exists$ algún $(z_j - c_j) < 0$ para $j \in R_2$

Así, es posible mejorar el valor actual de z, incrementando el valor actual de una variable no básica que se encuentra en su límite inferior (L.I.) con $(z_j - c_j) > 0$, o disminuyendo el valor actual de una variable no básica que está en su límite superior (L.S.) con $(z_j - c_j) < 0$

Por lo tanto:

$$\text{si} \begin{cases} (z_j - c_j) \leq 0 \;\; \forall_j \in R_1 \\ \text{y} \\ (z_j - c_j) \geq 0 \;\; \forall_j \in R_2 \end{cases} \tag{9.7}$$

No es posible mejorar z y esta situación identifica una solución óptima.

Si la SBF actual no es óptima, entonces se puede seleccionar una variable no básica para entrar en la base. El criterio usual es el de seleccionar la variable x_k determinada por la relación:

$$k \Longrightarrow max\,\{(z_j - c_j) : j \in R_1; -(z_j - c_j) : j \in R_2\} \tag{9.8}$$

Definida la variable candidata a entrar en la base, esa variable x_k puede ser :

- Una variable no básica que está en su límite inferior (L.I.)
- Una variable no básica que está en su límite superior (L.S.)

Analizamos los dos casos separadamente:

1. **Una variable no básica en su L.I. es candidata a entrar en la base:**
   Sea x_k esa variable: $k \in R_1 \Longrightarrow (z_k - c_k) > 0$
   Al cambiar el valor de x_k lentamente puede ocurrir primero que:

   - Una variable básica llegue a su L.S.
   - Una variable básica llegue a su L.I.
   - La propia variable no básica x_k llegue a su L.S.

   Sea Δ_k el máximo incremento posible para x_k, entonces: $x_k = l_k + \Delta_k$ donde $\Delta_k \geq 0$
   De (9.3) se obtiene:

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}N_1 x_{N_1} - B^{-1}N_2 x_{N_2}$$

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}N_1 \begin{bmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_k + \Delta_k \\ \vdots \\ l_{N_1} \end{bmatrix} - B^{-1}N_2 u_{N_2}$$

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}\left[N_1 (l_{N_1} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \Delta_k \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}) \right] - B^{-1}N_2 u_{N_2}$$

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}N_1 l_{N_1} - B^{-1}N_2 u_{N_2} - B^{-1}a_k \Delta_k$$

Haciendo $\overline{b} = B^{-1}b - B^{-1}N_1 l_{N_1} - B^{-1}N_2 u_{N_2}$ tenemos:

$$x_B = \overline{b} - y_k \Delta_k \tag{9.9}$$

De (9.5) se obtiene que:

$$z = c_B B^{-1} b - \sum_{j \in R_1} (z_j - c_j) l_j - \sum_{j \in R_2} (z_j - c_j) u_j - (z_k - c_k)\Delta_k$$

Haciendo $\overline{z} = c_B B^{-1} b - \sum_{j \in R_1} (z_j - c_j) l_j - \sum_{j \in R_2} (z_j - c_j) u_j$ tenemos:

$$z = \overline{z} - (z_k - c_k)\Delta_k \tag{9.10}$$

Las relaciones (9.9) y (9.10) representan los nuevos valores de las variables básicas y de la función objetivo, para una variación Δ_k de la variable no básica x_k que está en su límite inferior.

Las variables básicas x_{B_i} varían de la siguiente forma:

$$x_{B_i} = \overline{b}_i - y_{ik}\Delta_k \tag{9.11}$$

Analizamos los 3 tipos de casos que pueden suceder con los valores de las variables básicas cuando x_k aumenta de valor.

La variable básica puede llegar a su límite inferior: $y_{ik} > 0$

De (9.11) una variable básica x_{B_i} puede llegar a su L.I. si $y_{ik} > 0$. En este caso el valor de Δ_k que lleva x_{B_i} a su L.I. es determinado por:

$$l_{B_i} = \overline{b}_i - y_{ik}\Delta_k \Longrightarrow \begin{cases} \Delta_k = \frac{\overline{b}_i - l_{B_i}}{y_{ik}} \\ \\ y_{ik} > 0 \end{cases} \tag{9.12}$$

La variable básica puede llegar a su límite superior: $y_{ik} < 0$

$$u_{B_i} = \overline{b}_i - y_{ik}\Delta_k \Longrightarrow \begin{cases} \Delta_k = \frac{u_{B_i} - \overline{b}_i}{-y_{ik}} \\ \\ y_{ik} < 0 \end{cases} \tag{9.13}$$

La propia variable no básica x_k puede llegar a su límite superior:

$$\Delta_k = u_k - l_k \tag{9.14}$$

Así, la máxima variación de Δ_k para x_k es obtenida de la siguiente relación:

$$\Delta_k = \begin{matrix} min \\ i=1,m \end{matrix} \left\{ \frac{\overline{b}_i - l_{B_i}}{y_{ik}} \ : \ y_{ik} > 0 \ ; \ \frac{u_{B_i} - \overline{b}_i}{-y_{ik}} \ : \ y_{ik} < 0 \ ; \ (u_k - l_k) \ ; \ \infty \right\} \tag{9.15}$$

Si $\Delta_k \Longrightarrow \infty$ entonces el problema es ilimitado.

Si $\Delta_k \Longrightarrow$ finito, entonces de (9.15) existen 3 alternativas posibles:

- La variable básica llega a su L.I.: Existe cambio de base.

  Sea r la línea de la variable básica seleccionada para salir de la base: La línea pivot del cuadro simplex es pivotada con y_{rk} como elemento pivot.
  Sin embargo, la columna independiente es actualizada separadamente empleando (9.9) y (9.10), excepto para x_{B_r}:

$$\begin{cases} x_{B_i} = \overline{b}_i - y_{ik}\Delta_k \quad i \neq r \\ \\ x_{B_r} = l_k + \Delta_k \qquad \leftarrow x_k \\ \\ z = \overline{z} - (z_k - c_k)\Delta_k \end{cases} \tag{9.16}$$

  Donde Δ_k es obtenido de (9.12). La variable x_{B_r} sale de la base y se transforma en no básica en su LI, $r \in R_1$.

- Variable básica llega a su L.S.: Existe cambio de base.

  Sea r la línea pivot de la variable básica x_{B_r} seleccionada para salir de la base. El cuadro simplex es pivotado empleando $y_{rk} < 0$ como elemento pivot. Sin embargo, la columna independiente no participa del pivotaje y debe ser actualizada separadamente empleando (9.9) y (9.10):

$$\begin{cases} x_{B_i} = \overline{b}_i - y_{ik}\Delta_k \quad i \neq r \\ \\ x_{B_r} = l_k + \Delta_k \qquad \leftarrow x_k \\ \\ z = \overline{z} - (z_k - c_k)\Delta_k \end{cases} \tag{9.17}$$

  Donde Δ_k es obtenido de (9.13). La variable x_{B_r} sale de la base y se transforma en no básica en su LS, $r \in R_2$.

- La propia variable no básica x_k llega a su L.S.: No existe cambio de base.

  La base no cambia y no existe pivotaje. Sin embargo, la columna independiente debe ser actualizada empleando (9.9) y (9.10):

$$\begin{cases} x_k = u_k = l_k + \Delta_k \\ x_{B_i} = \overline{b}_i - y_{ik}\Delta_k \quad \forall_i \\ z = \overline{z} - (z_k - c_k)\Delta_k \end{cases} \tag{9.18}$$

2. **Una variable no básica en su L.S. es candidata a entrar en la base**.

   Sea x_k esa variable: $k \in R_2 \Longrightarrow (z_k - c_k) < 0$
   Al cambiar el valor de x_k lentamente, puede ocurrir lo siguiente:

   - Una variable básica llega a su L.S.
   - Una variable básica llega a su L.I.
   - La propia variable no básica x_k llega a su L.I.

   Sea Δ_k la máxima <u>disminución</u> posible de x_k, $\Delta_k \geq 0$, a partir de su límite superior:

$$x_k = u_k - \Delta_k$$

   De (9.3) se obtiene:

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}N_1 l_{N_1} - B^{-1}N_2 u_{N_2} + B^{-1}a_k\Delta_k$$

   Haciendo $\overline{b} = B^{-1}b - B^{-1}N_1 l_{N_1} - B^{-1}N_2 u_{N_2}$ tenemos:

$$x_B = \overline{b} + y_k\Delta_k \tag{9.19}$$

   De (9.5) se obtiene:

$$z = c_B B^{-1}b - \sum_{j\in R_1}(z_j - c_j)l_j - \sum_{j\in R_2}(z_j - c_j)u_j + (z_k - c_k)\Delta_k$$

   Haciendo:

$$\overline{z} = c_B B^{-1}b - \sum_{j\in R_1}(z_j - c_j)l_j - \sum_{j\in R_2}(z_j - c_j)u_j$$

   tenemos:

$$z = \overline{z} + (z_k - c_k)\Delta_k \tag{9.20}$$

   Las relaciones (9.19) y (9.20) representan los nuevos valores de las variables básicas y de la función objetivo para una variación de Δ_k de la variable no básica x_k que está en su L.S.

De (9.19) una variable básica x_{B_i} asume la siguiente forma:

$$x_{B_i} = \bar{b}_i + y_{ik}\Delta_k \tag{9.21}$$

Analizamos los 3 tipos de variación de las variables básicas cuando la variable no básica x_k disminuye de valor:

Variable básica puede llegar a su límite inferior: $y_{ik} < 0$.

De (9.21) x_{B_i} llega a su límite inferior si $y_{ik} < 0$ y en este caso :

$$l_{B_i} = \bar{b}_i + y_{ik}\Delta_k \Longrightarrow \begin{cases} \Delta_k = \frac{\bar{b}_i - l_{B_i}}{-y_{ik}} \\ \\ y_{ik} < 0 \end{cases} \tag{9.22}$$

La variable básica puede llegar a su límite superior: $y_{ik} > 0$

De (9.21) se obtiene que:

$$u_{B_i} = \bar{b}_i + y_{ik}\Delta_k \Longrightarrow \begin{cases} \Delta_k = \frac{u_{B_i} - \bar{b}_i}{y_{ik}} \\ \\ y_{ik} > 0 \end{cases} \tag{9.23}$$

La propia variable no básica x_k puede llegar a su límite inferior:

$$x_k = u_k - l_k \tag{9.24}$$

Así, la máxima variación de Δ_k permitida para x_k es obtenida de la siguiente relación:

$$\Delta_k = \begin{array}{c} min \\ i = 1, m \end{array} \left\{ \frac{\bar{b}_i - l_{B_i}}{-y_{ik}} \; : \; y_{ik} < 0 \; ; \; \frac{u_{B_i} - \bar{b}_i}{y_{ik}} \; : \; y_{ik} > 0 \; ; \; (u_k - l_k) \; ; \; \infty \right\} \tag{9.25}$$

Si $\Delta_k \Longrightarrow \infty$ entonces el problema es ilimitado.

Si $\Delta_k \Longrightarrow$ finito, entonces de (9.25) existen 3 alternativas posibles:

- La variable básica llega a su L.I.: Existe cambio de base.
  Sea r la línea pivot. El cuadro simplex es pivotado empleando $y_{rk} < 0$ como pivot.
  Sin embargo, la columna independiente no es pivotada de la forma tradicional y debe ser actualizada empleando (9.19) y (9.20):

$$\begin{cases} x_{B_r} = u_k - \Delta_k \quad \leftarrow x_k \\ x_{B_i} = \overline{b}_i + y_{ik}\Delta_k \quad i \neq r \\ z = \overline{z} + (z_k - c_k)\Delta_k \end{cases} \tag{9.26}$$

- Variable básica llega a su L.S.: Existe cambio de base.

  Sea r la línea pivot, el cuadro simplex es pivotado empleando $y_{rk} > 0$ como pivot. Sin embargo, la columna independiente debe ser actualizada separadamente empleando (9.19) y (9.20):

$$\begin{cases} x_{B_r} = u_k - \Delta_k \quad \leftarrow x_k \\ x_{B_i} = \overline{b}_i + y_{ik}\Delta_k \quad i \neq r \\ z = \overline{z} + (z_k - c_k)\Delta_k \end{cases} \tag{9.27}$$

- La propia variable no básica x_k llega a su L.I.: No existe cambio de base.

  La base no cambia y no existe pivotaje. La columna independiente debe ser actualizada empleando (9.19) y (9.20):

$$\begin{cases} x_k = u_k - \Delta_k = l_k \\ x_{B_i} = \overline{b}_i + y_{ik}\Delta_k \quad \forall_i \\ z = \overline{z} + (z_k - c_k)\Delta_k \end{cases} \tag{9.28}$$

9.2 Algoritmo Primal Simplex Canalizado

La teoría presentada anteriormente puede ser sistematizada en un algoritmo (primal) simplex canalizado. Este algoritmo es resumido en la siguiente forma:

Algoritmo (primal) simplex canalizado:

Paso inicial:

Encontrar una SBF inicial (empleando variables artificiales si fuese necesario). Obtener:

$$\overline{z} = c_B B^{-1} b + [c_{N_1} - c_B B^{-1} N_1] l_{N_1} + [c_{N_2} - c_B B^{-1} N_2] u_{N_2}$$

$$\overline{b} = B^{-1} b - B^{-1} N_1 l_{N_1} - B^{-1} N_2 u_{N_2}$$

Si no existe una SBF evidente entrar en un proceso de fase I del primal simplex canalizado.

El cuadro inicial tiene la siguiente forma:

	z	x_B	x_{N_1}	x_{N_2}	RHS
z	1	0	$c_B B^{-1} N_1 - c_{N_1}$	$c_B B^{-1} N_2 - c_{N_2}$	$\overline{z}$
x_B	0	I	$B^{-1} N_1$	$B^{-1} N_2$	$\overline{b}$

Paso principal:

1. **Verificar optimalidad**:

   Si $(z_j - c_j) \leq 0 \ \ \forall_j \in R_1$ y $(z_j - c_j) \geq 0 \ \ \forall_j \in R_2 \Longrightarrow$ *pare* $\Longrightarrow$ solución óptima.

   En caso contrario seleccionar la variable no básica x_k como candidata a entrar en la base usando (9.29). Sea x_k esa variable:

   $$Si \ \ k \in R_1 \quad \text{va para el paso 2}$$

   $$Si \ \ k \in R_2 \quad \text{va para el paso 3}$$

2. **Una variable no básica x_k que está en su LI es candidata a entrar en la base**:

   Encontrar Δ_k usando (9.30). Si $\Delta_k \to \infty$ stop porque el problema es ilimitado.

   En caso contrario verificar si existe cambio de base con la variable x_{B_r} saliendo de la base o puede suceder que x_k simplemente pasa a su LS.

   - Si existe cambio de base, implementar pivotaje del cuadro simplex excepto la columna RHS que debe ser actualizada separadamente usando (9.31). Actualizar R_1 y R_2.
   - Si no existe cambio de base, entonces no es necesario implementar pivotaje del cuadro simplex mas debemos actualizar la columna RHS usando (9.32). Actualizar R_1 y R_2.

   Volver al paso (1).

3. **Una variable no básica x_k que está en su LS es candidata a entrar en la base**:

   Encontrar Δ_k usando (9.33). Si $\Delta_k \to \infty$ pare porque el problema es ilimitado.

   En caso contrario verificar si existe cambio de base con la variable x_{B_r} saliendo de la base o puede suceder que x_k simplemente pasa a su LI.

- Si existe cambio de base, implementar pivotaje del cuadro simplex excepto la columna RHS que debe ser actualizada separadamente usando (9.34). Actualizar R_1 y R_2.
- Si no existe cambio de base, entonces no es necesario implementar pivotaje del cuadro simplex excepto la columna RHS que debe ser actualizada usando (9.35). Actualizar R_1 y R_2.

Volver al paso (1).

$$x_k \Longrightarrow \quad max\,\{(z_j - c_j): \quad j \in R_1; \quad -(z_j - c_j): \quad j \in R_2\} \tag{9.29}$$

$$\Delta_k = \begin{array}{c} min \\ i = 1, m \end{array} \left\{ \frac{\overline{b}_i - l_{B_i}}{y_{ik}} \; : \; y_{ik} > 0 \; ; \quad \frac{u_{B_i} - \overline{b}_i}{-y_{ik}} \; : \; y_{ik} < 0 \; ; \; (u_k - l_k) \; ; \; \infty \right\} \tag{9.30}$$

$$\begin{cases} x_{B_i} = \overline{b}_i - y_{ik}\Delta_k \qquad i \neq r \\ x_{B_r} = l_k + \Delta_k \qquad \Leftarrow x_k \\ z = \overline{z} - (z_k - c_k)\Delta_k \end{cases} \tag{9.31}$$

$$\begin{cases} x_k = u_k = l_k + \Delta_k \\ x_{B_i} = \overline{b}_i - y_{ik}\Delta_k \qquad \forall_i \\ z = \overline{z} - (z_k - c_k)\Delta_k \end{cases} \tag{9.32}$$

$$\Delta_k = \begin{array}{c} min \\ i = 1, m \end{array} \left\{ \frac{\overline{b}_i - l_{B_i}}{-y_{ik}} \; : \; y_{ik} < 0 \; ; \quad \frac{u_{B_i} - \overline{b}_i}{y_{ik}} \; : \; y_{ik} > 0 \; ; \; (u_k - l_k) \; ; \; \infty \right\} \tag{9.33}$$

$$\begin{cases} x_{B_r} = u_k - \Delta_k \\ x_{B_i} = \overline{b}_i + y_{ik}\Delta_k \qquad i \neq r \\ z = \overline{z} + (z_k - c_k)\Delta_k \end{cases} \tag{9.34}$$

$$\begin{cases} x_k = u_k - \Delta_k = l_k \\ x_{B_i} = \overline{b}_i + y_{ik}\Delta_k \qquad \forall_i \\ z = \overline{z} + (z_k - c_k)\Delta_k \end{cases} \tag{9.35}$$

Ejemplo 1: Resolver el siguiente ejemplo:

$$\begin{array}{rcl} min \;\; z(x) & = & -2x_1 - 4x_2 - x_3 \\ s.a. & & \\ & & 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 10 \\ & & x_1 + x_2 - x_3 \leq 4 \\ & & 0 \leq x_1 \leq 4 \\ & & 0 \leq x_2 \leq 6 \\ & & 1 \leq x_3 \leq 4 \end{array}$$

Adicionando las variables de holgura tenemos el siguiente PL:

$$\begin{array}{rcl} min\ \ z(x) & = & -2x_1 - 4x_2 - x_3 \\ s.a. & & \\ & & 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ & & x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 4 \\ & & 0 \leq x_1 \leq 4 \\ & & 0 \leq x_2 \leq 6 \\ & & 1 \leq x_3 \leq 4 \\ & & 0 \leq x_4 < \infty \\ & & 0 \leq x_5 < \infty \end{array}$$

Una base inicial es formada por $x_B = (x_4, x_5)$ y $x_N = (x_1, x_2, x_3)$ con todas las variables no básicas en su LI. Verificamos la factibilidad de ese cuadro:

$$2(0) + 1(0) + 1 + x_4 = 10 \Rightarrow x_4 = 9$$

$$1(0) + 1(0) - 1 + x_5 = 4 \Rightarrow x_5 = 5$$

Con función objetivo z = -2(0) - 4 (0) - (1) = -1

Como $B = I = B^{-1}$ el cuadro inicial se monta de forma trivial.

Los principales pasos del proceso iterativo son los siguientes:

1. x_2 es candidata a entrar a la base porque tiene el mayor coeficiente de costo relativo. $R_1 = \{1, 2, 3\}$

2. Usando (9.30) identificamos la variable que debe salir de la base:

   $\Delta_2 = min\left\{\frac{(9-0)}{1}; \frac{(5-0)}{1}; (6-0); \infty\right\} = 5 \rightarrow x_5$ debe salir de la base y pasar a su LI.

   Pivotamos el cuadro y actualizamos la columna RHS usando (9.31) de la siguiente forma:

   $x_2 = 0 + 5 = 5$

   $x_4 = 9 - (1)(5) = 4$

   z = -1 - (4)(5) = -21

   $R_1 = \{1, 3, 5\}\quad R_2 = \phi$

1. x_3 es el único candidato a entrar a la base.

2. Usando (9.30) identificamos la variable que debe salir de la base:

   $\Delta_3 = min\left\{\frac{(4-0)}{2}; \frac{(6-5)}{-(-1)}; (4-1); \infty\right\} = 1 \Rightarrow x_2$ debe salir de la base y pasar a su LS. Pivotamos el cuadro y actualizamos la columna RHS usando (9.31) de la siguiente forma:

   $x_3 = 1 + 1 = 2$

$x_4 = 4 - 2(1) = 2$

z = -21 - (5)(1) = -26

$R_1 = \{1, 5\} \quad R_2 = \{2\}$

1. x_1 es el candidato a entrar a la base.

2. Usando (9.30) identificamos la variable que debe salir de la base:

   $\Delta_1 = min\left\{\frac{(2-0)}{3}; \frac{(4-2)}{-(-1)}; (4-0); \infty\right\} = \frac{2}{3} \Rightarrow x_4$ debe salir de la base y pasar a su LI. Pivotamos el cuadro y actualizamos la columna RHS usando (9.31) de la siguiente forma:

   $x_1 = 0 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

   $x_3 = 2 - (-1)\frac{2}{3} = \frac{8}{3}$

   z = -26 - 3 $\left(\frac{2}{3}\right)$ = -28

   El cuadro es óptimo.

Cuadro simplex canalizado

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS	
z	1	2	4	1	0	0	-1	$R_1 = \{1, 2, 3\}$
x_4	0	2	1	1	1	0	9	$R_2 = \phi$
x_5	0	1	1	-1	0	1	5	
z	1	-2	0	5	0	-4	-21	$R_1 = \{1, 3, 5\}$
x_4	0	1	0	2	1	-1	4	$R_2 = \phi$
x_2	0	1	1	-1	0	1	5	
z	1	3	5	0	0	1	-26	$R_1 = \{1, 5\}$
x_4	0	3	2	0	1	1	2	$R_2 = \{2\}$
x_3	0	-1	-1	1	0	-1	2	
z	1	0	3	0	-1	0	-28	$R_1 = \{4, 5\}$
x_1	0	1	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$R_2 = \{2\}$
x_3	0	0	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{8}{3}$	

Solución óptima obtenida en el cuadro anterior:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{3} \\ x_2 = 6 \\ x_3 = \frac{8}{3} \end{cases} \Longrightarrow z(x)^* = -28$$

Ejemplo 2 Resolver el siguiente ejemplo:

$$\begin{array}{rcr} min \;\; z(x) & = & 6x_1 + 2x_2 \\ s.a. & & \\ & & x_1 + x_2 \geq 4 \\ & & x_1 - 2x_2 \leq 0 \\ & & x_1 \geq 2 \\ & & x_2 \geq 1 \end{array}$$

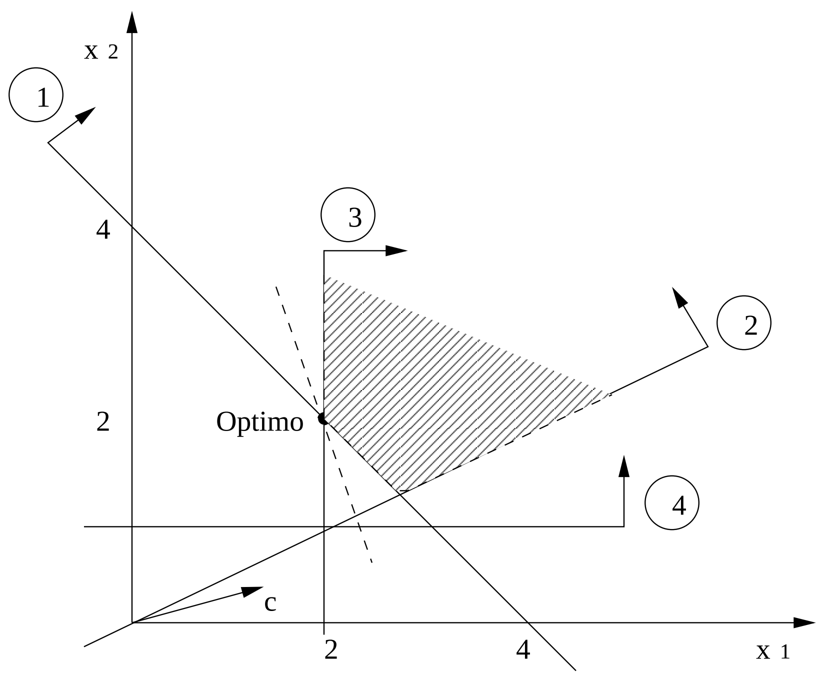


Figura 9.1: Gráfica del ejemplo 2.

El computo de restricciones asume la siguiente forma:

$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \\ 2 \leq x_1 < \infty \\ 1 \leq x_2 < \infty \\ 0 \leq x_3 < \infty \\ 0 \leq x_4 < \infty \end{array}$$

Siendo las variables definidas en los siguientes intervalos:

$$x_1 \in \Big[\ 2, \quad \infty > \ ; \quad x_2 \in \Big[\ 1, \quad \infty > \ ; \quad x_3 \in \Big[\ 0, \quad \infty > \ ; \quad x_4 \in \Big[\ 0, \quad \infty >$$

No existe una base evidente por que no tenemos una base B = I evidente y, mismo en ese caso, debemos todavía garantizar de que todas las variables básicas son ≥ 0. Por lo tanto vamos a escoger una base artificial B = I y debemos colocar las variables no básicas en sus límites inferiores y superiores de manera que todas las variables básicas sean ≥ 0. Por lo tanto, procedemos de la siguiente forma:

1. Colocamos todas las variables originales en su límite inferior.
2. Calculamos los valores de la columna independiente RHS: $\overline{b} = b - A\overline{x}$

$$\overline{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3. Todos los elementos de $\overline{b}$ son ≥ 0. (que viabiliza una base artificial).
4. Colocamos las variables artificiales x_5 y x_6 para formar la base artificial inicial.

$$\begin{aligned} min \ \ z(x) \ &= \ 6x_1 + 2x_2 \\ s.a. \quad & \\ & \quad x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 4 \\ & \quad x_1 - 2x_2 + x_4 + x_6 = 0 \\ & \quad x_1 \geq 2 \\ & \quad x_2 \geq 1 \\ & \quad x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{aligned}$$

Fase I: $min \ \ x_o = x_5 + x_6$

Implementación del cuadro inicial: $R_1 = \{1, 2, 3, 4\}; \ \ R_2 = 0$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}; \ x_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} c_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} & c_N = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \\ c_B^{'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} & c_N^{'} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$B = I = \begin{bmatrix} a_5 & a_6 \end{bmatrix}$$

$$\overline{c}'_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overline{x}_o = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 4 - (3) = 1$$

$$\overline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{c}_N = 0 - c_N = -c_N = \begin{bmatrix} -6 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{z} = 0 - \begin{bmatrix} -6 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 14$$

Ahora es posible implementar el cuadro inicial y emplear el algoritmo simplex canalizado.

1. x_1 es candidata a entrar en la base. x_1 está en su L.I.
2. $\Delta_1 = min\left\{\frac{1-0}{1};\ \frac{0-0}{1};\ \infty;\ \infty\right\} = 0 \Longrightarrow x_6$ Sale de la base y pasa a su L.I.

   Pivotar el cuadro y actualizar la columna RHS usando (9.31):

   $x_1 = l_1 + \Delta_1 = 2 + 0 = 2$
   $x_5 = 1 - 1(0) = 1$
   $\overline{z} = 14 - (-16)(0) = 14$
   $\overline{x}_o = 1 - 2(0) = 1$
   $R_1 = \{2, 3, 4, 6\} \quad R_2 = \phi$

1. x_2 es candidata a entrar en la base. x_2 está en su L.I.

2. $\Delta_2 = min\left\{\frac{1-0}{3};\ \frac{\infty-0}{-(-2)};\ (\infty-1);\ \infty\right\} = \frac{1}{3} \Longrightarrow x_5$ Sale de la base y pasa a su L.I.

Pivotar el cuadro y actualizar la columna RHS usando (9.31):

$x_2 = l_2 + \Delta_2 = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$
$x_1 = 2 - (-2)(\frac{1}{3}) = \frac{8}{3}$
$\overline{z} = 14 - (-14)(\frac{1}{3}) = \frac{56}{3}$
$\overline{x}_o = 1 - 3(\frac{1}{3}) = 0 \Longrightarrow$ Fin de la Fase I
$R_1 = \{3,4,5,6\} \quad R_2 = \phi$

1. Inicio de la Fase II. x_4 es candidata a entrar en la base. $R_1 = \{3,4\} \quad R_2 = \phi$.

2. x_4 está en el L.I.
$\Delta_4 = min\left\{\frac{\frac{8}{3}-2}{\frac{1}{3}};\ \frac{\infty-\frac{4}{3}}{-(-\frac{1}{3})};\ (\infty-0);\ \infty\right\} = 2 \Longrightarrow x_1$ Sale de la base y pasa a su L.I.

Pivotar el cuadro y actualizar la columna RHS usando (9.31):

$x_4 = l_4 + \Delta_4 = 0 + 2 = 2$
$x_2 = \frac{4}{3} - (-\frac{1}{3})(2) = 2$
$\overline{z} = \frac{56}{3} - (\frac{4}{3})(2) = 16$
$R_1 = \{1,3\} \quad R_2 = \phi$

1. El cuadro óptimo es:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow z(x)^* = 16$$

Cuadro primal simplex canalizado

	z	x_o	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS	
z	1	0	-6	-2	0	0	0	0	14	
x_o	0	1	2	-1	-1	1	0	0	1	$R_1 = \{1,2,3,4\}$
x_5	0	0	1	1	-1	0	1	0	1	$R_2 = \phi$
x_6	0	0	1	-2	0	1	0	1	0	
z	1	0	0	-14	0	6	0	6	14	
x_o	0	1	0	3	-1	-1	0	-2	1	$R_1 = \{2,3,4,6\}$
x_5	0	0	0	3	-1	-1	1	-1	1	$R_2 = \phi$
x_1	0	0	1	-2	0	1	0	1	2	
z	1	0	0	0	$-\frac{14}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{14}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{56}{3}$	
x_o	0	1	0	0	0	0	-1	-1	0	Fin de la Fase I
x_2	0	0	0	1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	$R_1 = \{3,4\}$
x_1	0	0	1	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$	$R_2 = \phi$
z	1	$\cdot$	-4	0	-2	0	$\cdot$	$\cdot$	16	$R_1 = \{1,3\}$
x_2	0	$\cdot$	1	1	-1	0	$\cdot$	$\cdot$	2	óptimo
x_4	0	$\cdot$	3	0	-2	1	$\cdot$	$\cdot$	2	

9.3 Ejercicios Resueltos:

1. Resolver el siguiente PL usando simplex canalizado:

$$PL \begin{cases} max \;\; f(x) = x_1 - x_2 \\ \quad s.a. \\ \qquad -x_1 - x_2 \leq 1 \\ \qquad 2x_1 - x_2 \leq 1 \\ \qquad -2 \leq x_1 \leq 1 \\ \qquad x_2 \leq 2 \end{cases}$$

Resolvemos el siguiente PL equivalente:

$$PLE \begin{cases} -min \;\; z(x) = -x_1 + x_2 \\ \quad s.a. \\ \qquad -x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ \qquad 2x_1 - x_2 + x_4 = 1 \\ \qquad -2 \leq x_1 \leq 1 \\ \qquad x_2 \leq 2 \\ \qquad x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Asumimos inicialmente: $x_1 = -2, x_2 = 2 : R_1 = \{1\}, R_2 = \{2\}$

Chequeo de factibilidad:
$-(-2) - 2 + x_3 = 1 \Rightarrow x_3 = 1$: factible
$2(-2) - 2 + x_4 = 1 \Rightarrow x_4 = 7$: factible

Entonces: $x_B = (x_3, x_4)$; $x_{N_1} = (x_1)$ $x_{N_2} = (x_2)$

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}; \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad B = B^{-1} = I$$

$$c_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad c_{N_1} = \begin{array}{c} c_1 \\ [\; -1 \;] \end{array} \quad ; \quad c_{N_2} = \begin{array}{c} c_2 \\ [1] \end{array}$$

$$N_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}; \qquad N_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}; \qquad B^{-1}N_1 = N_1; \quad B^{-1}N_2 = N_2$$

$$c_B B^{-1} N_1 - c_{N1} = -c_{N1} = [1]; \qquad c_B B^{-1} N_2 - c_{N2} = -c_{N2} = -1$$

z = - (-2) + 2 = 4

Con los datos procesados es posible montar el cuadro inicial:

1. x_1 y x_2 son candidatos a entrar a la base y con la misma prioridad. Escogemos x_2 para entrar a la base (el lector está invitado a resolver nuevamente el ejemplo escogiendo x_1). x_2 está en su LS.
3. Usando (9.33) tenemos:

   $\Delta_2 = min\left\{\frac{(1-0)}{-(-1)};\ \frac{(7-0)}{-(-1)};\ (2-(-\infty));\ \infty\right\} = 1 \rightarrow x_3$ debe salir de la base y pasa a su LI. Pivotar el cuadro y actualizar la columna RHS usando (9.34):

   $x_2 = 2 - 1 = 1$
   $x_4 = 7 + (-1)(1) = 6$
   z = 4 + (-1)(1) = 3
   $R_1 = \{1, 3\} \quad R_2 = \phi$

1. x_1 está en su LI y es el único candidato a entrar en la base.
2. Usando (9.30) calculamos la variación de x_1:
   $\Delta_1 = min\left\{\frac{(1-(-\infty))}{1};\ \frac{(6-0)}{3};\ (1-(-2));\ \infty\right\} = 2 \rightarrow x_4$ debe salir de la base y pasa a su LI. Pivotar el cuadro y actualizar la columna RHS usando (9.31):
   $x_1 = -2 + 2 = 0$
   $x_2 = 1 - (1)(2) = -1$
   z = 3 - (2)(2) = -1

1. El cuadro es óptimo con la siguiente solución óptima:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -1 \\ z(x) = -1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f(x) = 1$$

	z	x_3	x_4	x_1	x_2	RHS
z	1	0	0	1	-1	4
x_3	0	1	0	-1	-1	1
x_4	0	0	1	2	-1	7
z	1	-1	0	2	0	3
x_2	0	-1	0	1	1	1
x_4	0	-1	1	3	0	6
z	1	$-1/3$	$-2/3$	0	0	-1
x_2	0	$-2/3$	$-1/3$	0	1	-1
x_1	0	$-1/3$	$1/3$	1	0	0

2. Resolver el siguiente PL usando PL canalizado:

$$PL \left[\begin{array}{lcl} -min \;\; z(x) & = & -2x_1 - 3x_2 + 2x_3 \\ s.a. & & \\ & & x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 8 \\ & & 2x_1 + x_2 - x_3 \geq 3 \\ & & x_1 \qquad \leq 4 \\ & & -2 \leq x_2 \leq 3 \\ & & x_3 \geq 2 \\ & & x_j \geq 0, \forall_j \end{array} \right.$$

Estandarizando el modelo anterior se tiene:

$$PL \left[\begin{array}{lcl} -min \;\; z(x) & = & -2x_1 - 3x_2 + 2x_3 \\ s.a. & & \\ & & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 8 \\ & & 2x_1 + x_2 - x_3 - x_5 = 3 \\ & & -\infty < x_1 \leq 4 \\ & & -2 \leq x_2 \leq 3 \\ & & 2 \leq x_3 < \infty \\ & & 0 \leq x_4 < \infty \\ & & 0 \leq x_5 < \infty \end{array} \right.$$

Buscamos inicialmente factibilidad:

Proceso de solución:

$$\begin{array}{lll} x_1 = 4 & (LS) & R_1 = \{2,3\} \\ x_2 = -2 & (LI) & R_2 = \{1\} \\ x_3 = 2 & (LI) & \end{array}$$

Chequeamos:

$$\begin{array}{rl} 4 + 2(-2) + 2 + x_4 = 8 & \Rightarrow x_4 = 6 \\ 2(4) + (-2) - 2 - x_5 = 3 & \Rightarrow x_5 = 1 \end{array}$$

Factible !

$$PLE \left[\begin{array}{lcl} -min \;\; f(x) & = & -2x_1 - 3x_2 + 2x_3 \\ s.a. & & \\ & & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 8 \\ & & -2x_1 - x_2 + x_3 + x_5 = -3 \\ & & x_1 \leq 4 \\ & & -2 \leq x_2 \leq 3 \\ & & x_3 \geq 2 \\ & & x_4, x_5 \geq 0 \end{array} \right.$$

En el cual: $x_1 = 4, x_2 = -2, x_3 = 2 \quad \Rightarrow \quad x_4 = 6$ y $x_5 = 1$: factible

$$\overline{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad = \qquad \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}; \quad b = \begin{bmatrix} 8 \\ -3 \end{bmatrix}; \quad B = B^{-1} = I$$

$$N_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} a_2 & a_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \quad ; \quad N_2 = \begin{array}{c} a_1 \\ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$c_B = [0 \quad 0], \qquad c_{N_1} = [-3 \ \ 2], \quad c_{N_2} = -2$$

$$c_B B^{-1} N_1 - c_{N_1} = -c_{N_1}; \quad c_B B^{-1} N_2 - c_{N_2} = -c_{N_2}$$

$$z = 0 + [c_{N_1} - 0] x_{N_1} + [c_{N_2} - 0] x_{N_2}$$

$$[-3 \quad 2] \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} + [-2] \ [4] = 2$$

$$\overline{b} = B^{-1} b - B^{-1} N_1 x_{N_1} - B^{-1} N_2 x_{N_2} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

				N_1	N_1	N_2	
	z	x_4	x_5	x_2	x_3	x_1	RHS
z	1	0	0	3	-2	2	2
$\Leftarrow$ x_4	0	1	0	2	1	1	6
x_5	0	0	1	-1	1	-2	1

x_2: Variable en el límite inferior con costo relativo positivo $\rightarrow$ candidata a entrar a la base.

Sale: $\Delta_2 = min \left\{ \frac{6-0}{2} \ , \ \frac{\infty - 1}{-(-1)}, (3 - (-2)) \ , \ \infty \right\}$

$\Delta_2 = min \{3 \ , \ \infty \ , \ 5 \ , \ \infty\}$

$\Delta_2 = 3 \ \rightarrow$ corresponde a x_4 que se va a su límite inferior.

$R_1 = \{3, 4\} \ , \ R_2 = \{1\}$

Se pivota el cuadro y se calcula RHS.

	z	x_4	x_5	x_2	x_3	x_1	RHS
z	1	-3/2	0	0	-1/2	1/2	-7
x_2	0	1/2	0	1	1/2	1/2	1
x_5	0	1/2	1	0	3/2	-3/2	4

Cálculo de RHS:

$$\overline{b} = x_B = B^{-1}b - B^{-1}N_1 x_{N_1} - B^{-1}N_2 x_{N_2}$$

$$\overline{b} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 3/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/2 \\ -3/2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\overline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$Z = -12 + \left\{ [2 \;\; 0] - [-\tfrac{3}{2} \;\; \tfrac{3}{2}] \right\} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \{-2 - (-3/2)\} \;\; 4$$

Z = -12 + 7 - 2 = - 7

El nuevo cuadro es óptimo.

El lector está invitado a calcular los elmentos de la columna RHS usando (9.31).

Solución:

$$\begin{array}{ll} x_1 = 4 & x_4 = 0 \\ x_2 = 1 & x_5 = 4 \quad \Rightarrow \quad -z(x) = 7 \;\; \text{(maximizar)} \\ x_3 = 2 & \end{array}$$

3. Resolver el PL usando simplex canalizado:

$$PLE \left[\begin{array}{lcl} min \;\; f(x) & = & 2x_1 + 6x_2 - x_3 - 4x_4 + x_5 \\ \quad s.a. & & \\ & & 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 + x_5 = 10 \\ & & 3x_1 + 8x_2 - 3x_3 + x_4 = 7 \\ & & 0 \leq x_1 \leq 3 \\ & & 1 \leq x_2 \leq 4 \\ & & 0 \leq x_3 \leq 8 \\ & & 1 \leq x_4 \leq 2 \\ & & 0 \leq x_5 \leq 20 \end{array} \right.$$

Solución:

Escogemos una base inicial arbitraria factible.

Luego de probar distintas opciones se encuentra una:

$x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2/3$, $x_4 = 1$, $x_5 = 16/3$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{array} \\ A = & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 8 & -3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}; \qquad b = \begin{bmatrix} 10 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$x_B = (x_3, x_5)$; $x_{N_1} = (x_1, x_2, x_4)$; $x_{N_2} = \phi$

$c_B = [-1 \quad 1]$; $c_{N_1} = [2 \quad 6 \quad -4]$; $c_{N_2} = 0$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \ , \ N_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \end{bmatrix} \ , \ B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1/3 \\ 1 & 4/3 \end{bmatrix}$$

$$c_B B^{-1} N_1 - c_{N_1} = \begin{bmatrix} 5 & 25/3 & 20/3 \end{bmatrix}$$

$$c_B B^{-1} N_2 - c_{N_2} = 0 \ ; \ \bar{b} = x_B = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 16/3 \end{bmatrix} \ ;$$

$$B^{-1} N_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1/3 \\ 1 & 4/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -8/3 & -1/3 \\ 6 & 35/3 & 7/3 \end{bmatrix}$$

$z = 20/3$

	z	x_3	x_5	N_1 x_1	↓ N_1 x_2	N_1 x_4	RHS
z	1	0	0	5	25/3	20/3	20/3
x_3	0	1	0	-1	-8/3	-1/3	2/3
⇐ x_5	0	0	1	6	35/3	7/3	16/3

Entra x_2: tiene mayor coeficiente de costo relativo en N_1

Sale:

$\Delta_2 = min\left\{ \frac{16/3-0}{35/3} \ , \ \frac{8-2/3}{-(-8/3)} \ , \ (4-1) \ , \ \infty \right\}$

$\Delta_2 = 16/35 \ \Rightarrow \ sale \ \ x_5$ y pasa para su LI.

Pivotamos el cuadro y calculamos RHS:

			N_1	N_1		N_1	
	z	x_3	x_5	x_1	x_2	x_4	RHS
z	1	0	-5/7	13/35	0	5	20/7
x_3	0	1	8/35	13/35	0	1/5	66/35
x_2	0	0	3/35	18/35	1	1/5	51/35

$R_1 = \{5, 1, 4\}$
$R_2 = \phi$

$$\begin{aligned} x_3 =& \quad 2/3 - (-8/3)\ \ (16/35) = 66/35 \\ x_2 =& \quad 1 + 16/35 = 51/35 \\ z =& \quad 20/3 - (25/3)(16/35) = 20/7 \end{aligned}$$

En el nuevo cuadro:

Entra x_4 (variable de R_1 con el coeficiente de costo relativo mayor)

Candidato a salir:

$\Delta_4 = \min\left\{\frac{66/35-0}{1/5}\ ,\ \frac{51/35-1}{1/5}\ , (2-1), \infty\right\}$

$\Delta_4 = 1$: correspondiente a $\quad x_4$

$\Rightarrow$ Nadie sale de la base pero x_4 pasa a su límite superior.

$\Rightarrow R_1 = \{5, 1\}\quad ,\quad R_2 = \{4\}$

La base no cambia, no existe pivotaje pero cambia la columna RHS de la siguiente forma:

$x_3 = \frac{66}{35} - \frac{1}{5}(1) = \frac{59}{35}$

$x_2 = \frac{51}{35} - \frac{1}{5}(1) = \frac{44}{35}$

$z = \frac{20}{7} - (5)(1) = -\frac{45}{21} = -\frac{15}{7}$

				N_1		N_2	
	z	x_3	x_5	x_1	x_2	x_4	RHS
z	1	0	-5/7	5/7	0	5	-15/7
x_3	0	1	8/35	13/35	0	1/5	59/35
x_2	0	0	3/35	18/35	1	1/5	44/35

$R_1 = \{1, 5\}$
$R_2 = \{4\}$

En el nuevo cuadro x_1 es candidata a entrar en la base:

$\Delta_1 = min\left\{(\frac{59}{35} - 0)/(\frac{13}{35});\quad (\frac{44}{35} - 1)/\frac{18}{35};\quad (3-0);\quad \infty\ \right\} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \quad x_2$ debe salir de la base. Pivotamos el cuadro simplex y actualizamos la columna RHS usando (9.31):

$x_3 = \frac{59}{35} - \frac{13}{35}(\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$

$x_1 = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$z = -\frac{15}{7} - (\frac{5}{7})(\frac{1}{2}) = -\frac{5}{2}$

			N_1		N_1	N_2	
	z	x_3	x_5	x_1	x_2	x_4	RHS
z	1	0	-95/42	0	-25/18	85/18	-5/2
x_3	0	1	1/6	0	-13/18	1/18	3/2
x_1	0	0	1/6	1	35/18	7/18	1/2

El cuadro es óptimo con la siguiente solución óptima:

$$\begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{2} \\ x_2 = 1 \\ x_3 = \frac{3}{2} \\ x_4 = 2 \\ x_5 = 0 \end{array} \qquad z(x) = -\frac{5}{2}$$

Problemas Propuestos de Programación lineal

Problemas del Capítulo 1

1. Una fábrica produce 3 tipos de barras metálicas, A-B-C, que son prensadas y esmaltadas. La prensa dispone de 2000 minutos mensuales y cada barra A o B lleva un minuto para ser prensada, mientras que la barra C lleva 2 minutos. El esmaltado en esta última lleva apenas 1 minuto, mientras que las barras A y B exigen 3 y 4, 5 minutos respectivamente. La disponibilidad de esmaltado es de 8.000 minutos mensuales. La demanda absorbe toda la producción y la ganancia por barra, en el orden A-B-C, es de 5, 7 y 8 unidades monetarias. Formular un modelo para la producción óptima de barras.

2. El sector de transporte de carga de ACES operando en Cali dispone de 8 aviones B-727, 15 aviones B-700 y 12 aviones ATR. Existen cargas para enviar mañana a Bogotá (150 ton) y Medellín (100 ton). Los costos operacionales de cada avión y sus capacidades son:

	B-727	B-700	ATR
Cali - Bogotá	23	5	1,4
Cali - Medellín	58	10	3,8
Tonelaje	45	7	4

   Cuántos y cuáles aviones deben ser enviados para Bogotá y Medellín para satisfacer la demanda y minimizar los costos? Formule el PL.

3. Una corporación tiene \$ 30 millones disponibles para invertir en 3 filiales. Para mantener la planilla de sueldos se debe tener un mínimo de inversión en cada filial: \$ 3M, \$ 5M y \$ 8M respectivamente. La filial II puede recibir una inversión máxima de \$ 17M. Cada filial puede ejecutar varios proyectos, cada uno caracterizado por un techo máximo y una tasa de retorno, dados en la tabla siguiente.

Filial	Projecto	Techo Máximo	Tasa de Retorno
	1	\$ 6M	8%
I	2	\$ 5M	6%
	3	\$ 9M	7%
	4	\$ 7M	5%
II	5	\$ 10M	8%
	6	\$ 4M	9%
III	7	\$ 6M	10%
	8	\$ 3M	6%

   Presente la formulación matemática del problema.

4. Avianca necesita decidir la cantidad de querosene para combustible de sus aviones que adquire de 3 compañias vendedoras. Sus aviones son regularmente abastecidos en los aeropuertos Matecaña, Palmaseca, Rionegro y El Dorado. Las compañias vendedoras podrán entregar en el próximo mes las siguientes cantidades de combustible:

Compañia	Galones
1	250.000
2	500.000
3	600.000

Las necesidades de la Avianca en los diferentes aeropuertos son:

Matecaña	100.000
Palmaseca	200.000
Rionegro	300.000
El Dorado	400.000

El costo por galón, incluyendo el precio del transporte de cada vendedor para cada aeropuerto es el siguiente:

	Cia 1	Cia 2	Cia 3
Matecaña	12	9	10
Palmaseca	10	11	14
Rionegro	8	11	13
El Dorado	11	13	9

Formule este problema como un modelo de programación lineal.

5. Una refineria capaz de procesar 100.000 barriles por día de petróleo en gás, gasolina, querosene, aceite diesel y residuo necesita determinar su programa de producción.

   Todos los productos pueden ser vendidos directamente, excepto el residuo que necesita ser combinado con querosene para producir aceite pesado (10% de querosene y 90% de residuo) y el aceite liviano (20% de querosene y 80% de residuo).

   La refineria necesita satisfacer un mínimo de contratos de venta y un máximo de producción establecido por el gobierno (tabla 1).

   La refineria puede comprar petróleo de 3 diferentes paises, cuyas disponibilidades diarias están en la tabla 2. Se sabe aún que ella se comprometió a comprar por lo menos 10.000 barriles por día de Arabia Saudita.

   Formule el modelo de PL.

Tabla 1

Producto	Precio de venta	Producción Máxima	Producción Mínima
Gás	2,10	10.000	5.000
Gasolina	3,50	20.000	13.000
Querosene	3,30	20.000	15.000
Aceite dissel	3,10	25.000	10.000
Aceite pesado	2,50	20.000	10.000
Aceite liviano	2,80	20.000	12.000

Tabla 2

Origen	costo por	porcentaje de los componentes					Máximo
del aceite	barril	Gas	gasolina	Querosene	Diesel	Residuo	Disponible
Kwait	2,0	10	10	10	10	60	70.000
Arabia S.	2,5	10	15	15	15	45	100.000
Libia	3,0	10	20	20	20	30	50.000

6. Dos barras metálicas A y B son hechas de cuatro metales distintos, I , II, III y IV de acuerdo con la siguiente especificación:

Barras	Especificación	Precio de venta ($/ton)
A	tiene como máximo 80% del metal tipo I tiene como máximo 30% del metal tipo II tiene como mínimo 50% del metal tipo IV	200.000
B	entre 40% y 60% del metal tipo II tiene como mínimo 30% del metal tipo III tiene como máximo 70% del metal tipo IV	300.000

Los cuatro metales son extraídos de tres minas diferentes, cuyo porcentaje en peso, cantidad máxima de los minerales y costos por tonelada son presentados en la siguiente tabla:

Mina	cantidad Máxima (ton)	Componentes(%) I	II	III	IV	Otros	Precio de Compra ($ /ton)
1	1.000	20	10	30	30	10	30
2	2.000	10	20	30	30	10	40
3	3.000	5	5	70	20	0	50

Formule el PL escogiendo la función objetivo apropiada y usando adecuadamente la información dada.

7. Un fabricante de alimento concentrado quiere determinar la fórmula más económica de un tipo de alimento. La composición nutritiva de los ingredientes disponibles en el mercado y sus costos son los siguintes:

	Ingredientes		
Nutriente	Soya	Maíz	Caña
Calcio	0,2%	1%	3%
Proteina	50%	9%	0%
Carbohidratos	0,8%	2%	2%
Costo/Kg.	15,00	20,0	8,00

El fabricante debe entregar 1000 Kg. de alimento concentrado por día, garantizando las siguientes especificaciones:

Máximo	Mínimo	De
1,2%	0,8%	Calcio
-	22,0%	Proteina
20,0%	-	Carbohidratos

Formule el PL.

8. Una industria necesita producir un cierto producto en cantidad suficiente para atender contratos de venta en los próximos 4 meses. Los recursos que entran en la composición de este producto limitan en cantidades diferentes la producción en los meses referidos. El costo de la unidad producida también varía en esos meses. Se sabe aún que la producción de un mes puede ser vendida en los meses siguientes, sin embargo, sujeta a un costo de almacenamiento. Actualmente no existe producto en almacenamiento y al fin del cuarto mes se desea que también no exista. A continuación se presenta la tabla de datos, formule el PL que permite encontrar la programación de la producción de los 4 meses capaz de minimizar el costo total de la industria.

Mes	Ventas Contratadas	Producción Máxima	Costo por unidad producida	Costo por unidad almacenada por mes
1	40	50	18	3
2	30	20	17	2
3	10	30	23	3
4	35	35	17	4

9. Un individuo es forzado hacer una dieta alimenticia que entregue diariamente las siguientes cantidades de vitamina A, B, C y D:

Vitamina	cantidad mínima (mg)
A	80
B	70
C	100
D	60

La dieta deberá incluir: leche, arroz, frijol y carne que contienen las siguientes miligramos de vitaminas en cada una de sus unidades de medida:

Vitamina	Leche (Kg)	Arroz (Kg)	Frijol (Kg)	Carne (Kg)
A	10	5	9	10
B	8	7	6	6
C	15	3	4	7
D	20	2	3	9

Los costos unitarios de estos alimentos son los siguientes:

Leche - 1200, Arroz - 1000, Frijol - 1500 y Carne - 8000.

Formule el problema de programación lineal correspondiente.

10. Una fabrica de TV produce 2 tipos de productos: TV a color y TV blanco y negro. Una investigación de mercado indica que pueden ser vendidos a lo máximo 1000 unidades de TV a color y 4000 unidades de TV-BN por mes. El máximo de horas/hombre disponibles por mes es de 50000. Un TV a color requiere de 20 horas/hombre y un TV-BN 15 horas/hombre. El lucro por cada unidad vendida de TV a color es $ 60 y por una unidad de TV-BN $ 30. Cuántas TV's de cada tipo deben ser producidos por mes para maximizar el lucro ?

11. Un analista de sistemas planea producir 3 tipos de productos usando 4 máquinas. Cualquier producto puede ser producido por cualquier máquina. Los costos unitarios de producción de cada unidad de producto en cada máquina son mostradas en la tabla 1 y las horas requeridas para producir cada unidad de producto en cada máquina en la tabla 2.

Tabla I

Producto	Máquina 1	2	3	4
1	4	4	5	7
2	6	7	5	6
3	12	10	8	11

Tabla II

Producto	Máquina 1	2	3	4
1	0.3	0.25	0.2	0.2
2	0.2	0.3	0.2	0.25
3	0.8	0.6	0.6	0.5

Suponer que son necesarios 4000, 5000 y 3000 unidades de los productos y las disponibilidades de horas-máquina son de 1500, 1200, 1500 y 2000 respectivamente. Formule el problema como un PL para minimizar los costos de producción.

12. Una empresa fabrica 4 productos llamados P_1, P_2, P_3 y P_4. El producto P_1 es vendido con un lucro de $ 10 por tonelada hasta 10 toneladas. Arriba de 10 ton. y hasta 25 ton. son vendidos con un lucro de $ 7 por tonelada. Arriba de 25 ton. produce un lucro de solamente $ 5 por ton.

El producto P_2 produce una ganancia de $ 8 por ton. hasta 7 ton. Arriba de 7 ton. la ganancia es de solamente $ 4 por ton. Además de eso, quien compra P_2 es obligado a comprar P_4 en la forma especificada después. Los productos P_1 y P_2 pueden ser vendidos en cantidades ilimitadas.

P_3 es un subproducto obtenido en la producción de P_1. Ventas hasta 10 ton. de P_3 producen una ganancia de $ 2 por ton. No existe mercado para una producción de P_3 arriba de 10 ton. y como no pueden ser almacenadas, el excedente debe ser destruido a un costo de $ 3 por ton.

P_4 es un subproducto obtenido en la producción de P_2 pero P_4 también puede ser producido en forma independente. Por exigencias de uso, cada comprador de θ ton. del producto P_2 tiene que comprar $\frac{\theta}{2}$ ton. del producto P_4. Además de eso, P_4 tiene un mercado independente y ilimitado. Una ton. de P_4 produce una ganancia de $ 3 por ton. si el es vendido junto con P_2 y $ 2,5 si el es vendido independientemente.

La producción de una ton. de P_1 requiere de 1 hr. de la máquina 1 y 2 hr. de la máquina 2. Una ton. de P_2 requiere de 2 hr. de máquina 1 y 3 hr. de máquina 2. Cada ton. de P_1 producido libera automáticamente 3/2 ton. de P_3 como subproducto sin trabajo adicional. Cada ton. de P_2 producido libera 1/4 ton. de P_4 como subproducto sin trabajo adicional. Para producir 1 ton. de P_4 independientemente es necesario 3 hr. de máquina 3.

La empresa tiene disponibles 96 hr. de máquina 1, 120 hr. de máquina 2 y 240 hr. de máquina 3. La empresa desea tener lucro máximo. Formule este problema como un PL.

13. Un producto puede ser fabricado en 3 tamaños, grande, medio y pequeño, que producen ganancias unitarias de $ 12, 10 y 9 respectivamente. La empresa tiene 3 centros de producción con capacidades de producción de 550, 750 y 275 unidades de producción por día, independentemente del tamaño y la combinación de los productos fabricados.

    Producir este producto requiere de agua para enfriamiento y una unidad de producto grande, medio y pequeño requiere de 21, 17 y 9 galones de agua respectivamente. La disponibilidad diaria de agua fria en los centros de producción 1, 2 y 3 son de 10000, 7000 y 4200 galones respectivamente. Estudios de mercado indican que existe mercado diario para 700, 900 y 450 unidades de producto de los tamaños grande, medio y pequeño respectivamente. Es política de la empresa que la fracción [producción programada/capacidad del centro] debe ser el mismo para todos los centros de producción. Cuántas unidades de cada tamaño de producto deben ser producidas en los centros de producción para maximizar la ganancia?

14. Una ama de casa desea preparar un pastel, rico en vitaminas, mezclando frutas. Los datos de las frutas disponibles son mostradas en la tabla. Para que el pastel sea gustoso, la ama de casa debe usar cada fruta dentro de los límites mínimo y máximo permitidos para cada fruta como es mostrado en la tabla. Formule el problema para encontrar el costo mínimo en la preparación del pastel.

	No. de unid. de nutr./Kg. de fruta		Costo de la	Restr. en el uso de la fruta	
Tipo de fruta	Vitamina A	Vitamina C	fruta ($/Kg.)	Min	Max
1	2	0	0,25	2	10
2	0	3	0,31	3	6
3	2	4	0,48	0	7
4	1	2	0,21	5	20
5	3	2	0,19	0	5
Requerim. min. de nutriente (unid.)	41	80			

15. Una empresa desea producir un compuesto preparado con la mezcla de 2 productos químicos, 1 y 2, mezclados en la relación 5:2 por peso. los productos químicos son fabricados de 3 formas diferentes usando 2 materias primas y un combustible. Los datos de producción son mostradas en la tabla. Cuánto tiempo debe operar cada proceso para maximizar la cantidad total de compuesto producido?

	Requerimento por unid. de tiempo			Producción por unid. de tiempo	
Proceso	Materia prima 1 (unidades)	Materia prima 2 (unidades)	Combustible (unidades)	Químico 1 (unidades)	Químico 2 (unidades)
1	9	5	50	9	6
2	6	8	75	7	10
3	4	11	100	10	6
cantidad disponibles	200	400	1850		

16. Resolver graficamente los siguientes PL's:

(a)
$$\begin{array}{lll} max & 30x_1 + 20x_2 & \\ s.a. & x_1 + x_2 & \geq 1 \\ & x_1 - x_2 & \geq -1 \\ & 3x_1 + 2x_2 & \leq 6 \\ & x_1 - 2x_2 & \leq 1 \\ & x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0 & \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{lll} min & 2x_1 - x_2 & \\ s.a. & x_1 + x_2 & \geq 10 \\ & -10x_1 + x_2 & \leq 10 \\ & -4x_1 + x_2 & \leq 20 \\ & x_1 + 4x_2 & \geq 20 \\ & x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0 & \end{array}$$

(c)
$$\begin{array}{lll} min & x_1 + 3x_2 & \\ s.a. & 2x_1 + x_2 & \geq 10 \\ & -x_1 + x_2 & \leq 20 \\ & x_1 - 2x_2 & \leq 10 \\ & x_1 + x_2 & \leq 30 \\ & x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0 & \end{array}$$

(d)
$$\begin{array}{lll} min & 10x_1 + 3x_2 & \\ s.a. & x_1 + x_2 & \geq 20 \\ & x_1 & \leq 6 \\ & x_1 & \geq 2 \\ & x_2 & \leq 12 \\ & x_2 & \geq 1 \\ & x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0 & \end{array}$$

(e)
$$\begin{array}{lll} max & 2x_1 - 2x_2 & \\ s.a. & -2x_1 + x_2 & \leq 2 \\ & x_1 - x_2 & \leq 1 \\ & x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0 & \end{array}$$

Problemas del Capítulo 2

17. Dado $Ax = b$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 10 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & 8 & -1 & 2 \\ 20 & 26 & 2 & 40 & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 34 \end{bmatrix}$$

sea la matriz B constituída por las columnas $\{6, 1, 3\}$. Hacer todas las operaciones necesarias para determinar la inversa de B.

18. Coloque en la forma padronizada los siguientes problemas de PL:

(a)

$$\begin{array}{ll} \max & -2x_1 - 3x_2 + 5x_3 \\ \text{s.a.} & \\ & x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \geq 5 \\ & 2x_1 \quad + x_3 \leq 4 \\ & x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ & x_1 \leq 0; \quad x_2 \geq 0; \quad x_3 \geq 0; \quad x_4 \geq 0 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{ll} min & 3x_1 - 3x_2 + 7x_3 \\ \text{s.a.} & \\ & x_1 + x_2 - x_3 \leq 40 \\ & x_1 + 9x_2 - 7x_3 \geq 50 \\ & 5x_1 + 3x_2 \quad = 20 \\ & |5x_1 + 8x_2| \quad \leq 100 \\ & x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0; \quad x_3 \leq 0 \end{array}$$

19. Dibuje las regiones factibles del conjunto $\{x : Ax \leq b\}$ donde A y b son datos mostrados abajo. La región es vacía o limitada ?

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(b)

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \\ 5 \end{bmatrix}$$

(c)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 4 \\ -12 \\ 0 \end{bmatrix}$$

20. Muestre como resolver un sistema de m ecuaciones y m incognitas. Evidencie la identificación de los siguientes casos:

a) Inconsistencia del sistema. b) Redundancia de las ecuaciones. c) Solución única.

d) Explique como en el caso (c) Se puede calcular la inversa de la matriz. Ejemplifique con el siguiente sistema:

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$$

$$2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 9$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 6$$

21. B es una matriz regular dadas por sus columnas, su inversa A es conocida por sus líneas:

$$B = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ B^1 & B^2 & B^3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} \leftarrow & A_1 & \rightarrow \\ \leftarrow & A_2 & \rightarrow \\ \leftarrow & A_3 & \rightarrow \end{bmatrix}$$

En términos de A_1, A_2 y A_3 encuentre las inversas de C y D definidas abajo:

$$C = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ B^1 & B^2 & \alpha B^3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ B^1 + B^2 & B^2 & B^3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix}$$

22. Demuestre, usando técnicas de PL, que:

$$\left.\begin{array}{r} 2x_1 + 3x_2 \leq 7 \\ x_1 - x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow 8x_1 + 3x_2 \leq 19$$

23. Es posible resolver el problema abajo con técnicas de PL? Explique.

$$\begin{array}{rcl} \max \; f(x) & = & -x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ \text{s.a.} & & \\ & & x_1 + x_2 + x_3 \leq 15 \\ & & |-2x_1 + 3x_3| \geq 12 \\ & & x_1 - x_2 + x_3 \geq 2 \\ & & x \geq 0 \end{array}$$

24. Coloque los problemas abajo en la forma padronizada de un PL y determine sus soluciones a través de interpretación geométrica.

(a)

$$\begin{array}{rcl} \max \; f(x) & = & -3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a.} & & \\ & & x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ & & |x_1 + x_2 + 2| \leq 3 \\ & & x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rcl} \max \; z(x) & = & -3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a.} & & \\ & & x_1 + x_2 \geq 4 \\ & & x_1 + x_2 \leq 3 \\ & & x_1 \geq 0; \quad x_2 \quad \text{irrestricto} \end{array}$$

25. Para los casos siguientes es dada una base $B = [e_1, e_2, e_3, e_4]$. Cuál de esos vectores pueden ser substituído por el vector d, una sustitución en cada operación, para que el sistema resultante aún continúe siendo una base? explique.

(a)

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$e_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(b)

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$e_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

26. Pruebe que el conjunto:

$S = \{x \in R^n |\ Ax = b;\ \ x \geq 0\}$ donde $A \in R^{m \times n}$ y $b \in R^m$ es convexo.

27. Resuelva por inspección y justifique:

max $\quad f(x) = 8x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 2x_4$

s.a.

$$0 \leq x_1 \leq 3;\ \ 0 \leq x_2 \leq 5;\ \ 0 \leq x_3 \leq 20;\ \ 0 \leq x_4 \leq 2$$

28. Cuál de los siguientes vectores forman una base en E^3?

(a)

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad a_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(b)

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

(c)

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad a_4 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

29. Sean los vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} \quad a_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Mostrar que los vectores a_1, a_2 y a_3 forman una base. Si a_2 es cambiado por a_4 los vectores aún forman una base ?

30. Encontrar el rango de las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 5 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

31. Cuál es la solución general del siguiente sistema?

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$$

$$-x_1 + 3x_2 + x_3 = 6$$

32. Encontrar todas las soluciones básicas del siguiente sistema:

$$-x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 4$$

$$x_1 - 2x_2 \qquad + 2x_4 - x_5 = 3$$

33. Cuales de los siguientes conjuntos son convexos?

(a) $\{(x_1, x_2) : \;\; x_1^2 + x_2^2 \geq 1\}$
(b) $\{(x_1, x_2, x_3) : \;\; x_1 + 2x_2 \leq 1; \quad x_1 - x_3 \leq 2\}$
(c) $\{(x_1, x_2) : \;\; x_1 = 1; \quad |x_2| \leq 4\}$

34. Cuales de las siguientes funciones son convexas, concavas o ninguna ?

(a) $f(x) = x^2$.
(b) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 + x_2$

35. Encontrar los puntos extremos de la región definida por las siguientes desigualdades:

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 5$$

$$-x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 6$$

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3 \geq 0$$

Sugerencia: Considere las intersecciones definidas por 3 hiperplanos cada vez (n=3).

36. Porqué el siguiente conjunto tiene direcciones ? Encontrar todas las direcciones extremas:

$$-x_1 + x_2 \qquad = 4$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 6$$

$$x_3 \geq 1$$

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3 \geq 0$$

Sugerencia: Encontrar todos los puntos extremos del conjunto de direcciones D del conjunto convexo.

37. Sea $A = (a_1, a_2, ..., a_j, ..., a_m)$ una matriz de dimensión $m \times m$ y que tiene inversa. Mostrar que $A^{-1}a_j = e_j$, donde e_j es un vector de ceros excepto en la posición j donde vale 1.

38. Muestre si el siguiente sistema: (a) tiene solución, (b) tiene solución única, (c) tiene muchas soluciones:

$$x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 1$$

$$5x_2 - 6x_3 + x_4 = 0$$

$$x_1 - 2x_2 + 4x_3 \qquad = 1$$

39. Considere el conjunto:

$$\{(x_1, x_2) : -x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0\}$$

Cuál es la distancia mínima de (-2,3) para ese conjunto? Cuál punto de ese conjunto está más cerca de (-2,3)?.

40. Encontrar todos los puntos extremos del siguiente conjunto poliedral:

$$
\begin{aligned}
X = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 - x_2 + x_3 &\leq 1 \\
-x_1 + 2x_2 \qquad &\leq 4 \\
x_1,\ x_2,\ x_3 &\geq 0\}
\end{aligned}
$$

El conjunto X tiene direcciones? Porque?

41. Sea el conjunto:

$$
\begin{aligned}
X = \{(x_1, x_2) : x_1 - x_2 &\leq 3 \\
2x_1 + x_2 &\leq 4 \\
x_1 \qquad &\geq -3\}
\end{aligned}
$$

Encontrar todos los puntos extremos de X y representar $x = (0, 1)$ como una combinación convexa de esos puntos extremos.

42. Encontrar todos los puntos extremos y direcciones extremas del siguiente conjunto poliedral:

$$
\begin{aligned}
X = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) &: \\
-x_1 + x_2 - 2x_3 &\leq 1 \\
-2x_1 - x_3 + 2x_4 &\leq 2 \\
x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 &\geq 0\}
\end{aligned}
$$

Representar $x = (1, 1, 1, 2)$ como una combinación convexa de los puntos extremos de X más una combinación negativa de las direcciones extremas de X.

43. Represente gráficamente las soluciones del problema 41.

Problemas del Capítulo 3

44. Considere el siguiente PL:

$$
\begin{aligned}
\max \quad f(x) \quad &= \quad x_1 + 3x_2 \\
\text{s.a.} \quad & \\
& x_1 - 3x_2 \leq 3 \\
& -2x_1 + x_2 \leq 2 \\
& -3x_1 + 4x_2 \leq 12 \\
& 3x_1 + x_2 \leq 9 \\
& x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

(a) Resuelva el problema gráficamente; (b) Identifique todos los puntos extremos y reformule el problema en términos de combinaciones de puntos extremos. Resolver el problema resultante; (c) Elimine la 4a. restricción. Identifique los puntos extremos y rayos extremos y reformule el problema en términos de combinación convexa de los puntos extremos y combinación lineal no negativa de las direcciones extremas. Resolver el problema resultante.

45. Considere el PL:

$$\begin{array}{ll} max & 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 5x_3 + x_6 \\ \text{s.a.} & \\ & 3x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 3x_5 + 4x_6 \leq 60 \\ & x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4, \quad x_5, \quad x_6 \geq 0 \end{array}$$

Este problema que tiene una restricción y generalmente muchas variables es conocido como el *problema de la mochila*. Encontrar todas las SBF del problema y encontrar el óptimo comparando esas SBF.

46. Considere el siguiente sistema:

$$x_1 + \quad x_2 + \quad x_3 \leq 2$$

$$-x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 3$$

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0; \quad x_3 \geq 0$$

El punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ es factible. Verificar si ella es básica, en caso contrario, a partir de ese punto encontrar una solución básica factible.

47. Resolver el PL:

$$\begin{array}{ll} max & 5x_1 + 4x_2 \\ \text{s.a.} & \\ & x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & -2x_1 + x_2 \leq 4 \\ & 5x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ & x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0 \end{array}$$

(a) Gráficamente, (b) Por el método simplex.

48. Resolver el PL mostrado, identificando en cada iteración B y B^{-1}.

$$\begin{array}{ll} max & 3x_1 + 2x_2 + x_3 \\ \text{s.a.} & \\ & 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 \leq 3 \\ & -x_1 + x_2 + x_3 \leq 5 \\ & x_1, \quad x_2, \quad x_3 \geq 0 \end{array}$$

49. Resuelva el siguiente problema usando el método simplex a partir de la SBF $(x_1, x_2) = (4, 0)$. Presente la región factible en el espacio de las variables no básicas:

$$\begin{array}{ll} max & -x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a.} & \\ & 3x_1 + 4x_2 = 12 \\ & 2x_1 - x_2 \leq 12 \\ & x_1, \ \ x_2 \geq 0 \end{array}$$

Sugerencia: Identifique la base inicial y encuentre su inversa.

50. Resolver por el método simplex el PL:

$$\begin{array}{ll} max & x_1 - 2x_2 + x_3 \\ \text{s.a.} & \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 12 \\ & 2x_1 + x_2 - x_3 \leq 6 \\ & -x_1 + 3x_2 \qquad \leq 9 \\ & x_1, \ \ x_2, \ \ x_3 \geq 0 \end{array}$$

51. En el PL:

$$\begin{array}{ll} max & 2x_1 + x_2 + 5x_3 - 3x_4 \\ \text{s.a.} & \\ & x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 \leq 6 \\ & 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \leq 12 \\ & x_1 \qquad + x_3 + x_4 \leq 4 \\ & x_1, \ \ x_2, \ \ x_3, \ \ x_4 \geq 0 \end{array}$$

Encontrar una SBF con las variables básicas x_1, x_2 e x_4. Esta solución es óptima?. Si no fuera entonces encontrar la solución óptima a partir de esta SBF.

52. Use el método simplex para resolver el PL:

$$\begin{array}{ll} min & 3x_1 - x_2 \\ \text{s.a.} & \\ & x_1 - 3x_2 \geq -3 \\ & 2x_1 + x_2 \geq -2 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ & 4x_1 - x_2 \leq 16 \end{array}$$

Note que las variables no tienen restricción de signo (positivo o negativo)

53. En el PL:

$$
\begin{array}{ll}
max & -3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \\
\text{s.a.} & \\
 & 2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 \leq 8 \\
 & -x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 \leq 10 \\
 & -x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 \leq 3 \\
 & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0
\end{array}
$$

Use el método simplex para verificar que el problema es ilimitado. Use el cuadro simplex final para construir una solución factible con objetivo por lo menos igual a 3000. Use el cuadro final para construir una dirección d tal que $cd > 0$.

54. Mostrar que en el método simplex si la variable x_j sale de la base, entonces ella no puede regresar para la base en la siguiente iteración.

55. En el siguiente PL:

$$
\begin{array}{ll}
\max & 10x_1 + 15x_2 + 5x_3 \\
\text{s.a.} & \\
 & 2x_1 + x_2 \qquad\quad \leq 6000 \\
 & 3x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 9000 \\
 & x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 4000 \\
 & x_1, \quad x_2, \quad x_3 \geq 0
\end{array}
$$

(a) Sin usar el método simplex, verifique se (x_4, x_1, x_2) forman una base óptima, siendo x_4 la variable de holgura de la 1a. restricción; (b) Usando la información de (a) monte el cuadro óptimo del simplex; (c) ahora se adiciona una nueva variable al problema, x_7, siendo $c_7 = 12$ y su columna correspondiente $[2, 4, 1]^t$. La inclusión de esta variable altera la solución óptima del problema? Cuál es el nuevo óptimo del problema?

56. Considere el siguiente PL:

$$
\begin{array}{ll}
min & -x_1 - 2x_2 + x_3 \\
\text{s.a.} & \\
 & 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 6 \\
 & \qquad 2x_2 - x_3 \leq 3 \\
 & x_1, \quad x_2, \quad x_3 \geq 0
\end{array}
$$

(a) Encontrar la solución óptima por el simplex. En cada iteración identifique B, N, B^{-1}, $B^{-1}N$, $c_B B^{-1}$ y los $(z_j - c_j)$;

(b) En el cuadro óptimo, encontrar $\frac{\partial x_1}{\partial x_3}, \frac{\partial x_2}{\partial x_4}, \frac{\partial z}{\partial x_5}, \frac{\partial x_B}{\partial x_N}$, donde x_4 y x_5 son las variables de holgura;

(c) Suponer que c_1 es cambiado de -1 para $-1 + \Delta_1$ y c_2 de -2 para $-2 + \Delta_2$. Encontrar la región, en el espacio (Δ_1, Δ_2) para el cual el cuadro simplex encontrado en (a) aún es óptimo;

(d) Ahora la nueva variable x_6 es incluída, con $c_6 = -3$, $a_{16} = 3$ y $a_{26} = 3$. Esta variable adicionada altera la solución óptima ? Cual sería esa solución óptima?;

(e) Suponer que b_1 varía de 6 para $6 + \Delta$. Cual es la variación permitida para Δ para que el cuadro encontrado en (a) continúe siendo óptimo ?;

(f) Use el cuadro óptimo de (a) para representar la columna a_3 como una combinación lineal de las columnas a_1 y a_2.

57. Considere el siguiente PL:

$$\begin{array}{rl} max & 2x_1 + 12x_2 + 7x_3 \\ \text{s.a.} & \\ & x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 10000 \\ & 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 4000 \\ & x_1, \;\; x_2, \;\; x_3 \geq 0 \end{array}$$

El cuadro óptimo, con x_4 y x_5 siendo variables de holgura, es el siguiente:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
z	1	12	2	0	0	7	28000
x_4	0	-3	-1	0	1	-2	2000
x_3	0	2	2	1	0	1	4000

(a) Cuál la tasa de incremento de z como una función de b_1 y b_2; (b) Suponer que b_2 cambia de 4000 para $4000 + \Delta$. Cuál es la variación permitida para Δ para que la base óptima del cuadro continúe siendo óptima? (c) Encontrar explicitamente el valor óptimo de z en función de Δ.

58. A continuación son mostrados el cuadro inicial y el cuadro actual de un PL. Encontrar los valores desconocidos de a hasta l.

Cuadro inicial

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
1	a	1	-3	0	0	0
0	b	c	d	1	0	6
0	-1	2	y	0	1	1

Cuadro actual (corriente)

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
1	0	$-\frac{1}{3}$	j	k	l	-4
0	g	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	f
0	h	i	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	3

59. El siguiente cuadro corriente corresponde a un problema de maximización. EL objetivo es $2x_1 - 3x_2$, y las variables de holgura son x_3 y x_4. Las restricciones son del tipo $\leq$.

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
z	1	b	1	f	g	6
x_3	0	c	0	1	$\frac{1}{5}$	4
x_1	0	d	y	0	2	a

(a) Encontrar los valores desconocidos de a hasta g.

(b) Encontrar B^{-1}

(c) Encontrar $\dfrac{\partial x_3}{\partial x_2}, \dfrac{\partial z}{\partial b_1}, \dfrac{\partial z}{\partial x_4}, \dfrac{\partial x_1}{\partial b_2}$

(d) El cuadro es óptimo?

60. Sea el PL:

$$\begin{array}{ll} max & 3x_1 + x_2 \\ \text{s.a.} & \\ & |x_1 + 2x_2 - 10| \leq 4 \\ & x_1 - x_2 \qquad\quad \leq 5 \\ & x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0 \end{array}$$

(a) Resuelva usando el método Simplex; (b) Efectue la interpretación geométrica en el plano x_1, x_2.

61. $x = (5, 4, 5, 0, 0)$ es una solución factible del problema:

$$\begin{array}{rcl} \max\ f(x) & = & \begin{pmatrix} 10 & 24 & 20 & 20 & 25 \end{pmatrix} x \\ \text{s.a.} & & \\ & & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} 19 \\ 52 \end{bmatrix}; \qquad x \geq 0 \end{array}$$

A partir de ella determine una solución básica factible.

62. Coloque el problema en la forma preparada en relación a la base (x_2, x_4, x_1), donde x_4 es una variable de holgura y resuelva el problema.

$$\begin{array}{ll} max & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a.} & \\ & x_1 - 2x_2 \leq 4 \\ & -x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1 - x_2 \leq 5 \\ & x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0 \end{array}$$

63. Considere la maximización de un PL con puntos extremos x_1, x_2, x_3 y x_4, y direcciones extremas d_1, d_2 y d_3 y con un gradiente de la función objetivo c tal que $c\,x_1 = 5$, $c\,x_2 = 7$, $c\,x_3 = 4$, $c\,x_4 = 7$, $c\,d_1 = 0$; $c\,d_2 = -3$ e $c\,d_3 = 0$. Caracterice el conjunto de soluciones óptimas alternativas de este problema.

Problemas del Capítulo 4

64. Usar el método de las dos fases (con múltiples variables artificiales y con una única variable artificial) y el método big-M con múltiples variables artificiales para resolver los siguientes PLs:

(a)

$$\begin{array}{rl} max & 2x_1 - x_2 + x_3 \\ \text{s.a.} & \\ & 2x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 8 \\ & 4x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 2 \\ & 2x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 4 \\ & x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0; \quad x_3 \geq 0 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rl} max & -x_1 + 8x_2 \\ \text{s.a.} & \\ & x_1 + x_2 \geq 1 \\ & -x_1 + 6x_2 \leq 3 \\ & x_2 \leq 2 \\ & x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rl} min & x_1 + 3x_2 - x_3 \\ \text{s.a.} & \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 \geq 3 \\ & -x_1 + x_2 \geq 2 \\ & -x_1 + 5x_2 + x_3 \leq 4 \\ & x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0; \quad x_3 \geq 0 \end{array}$$

(d)

$$\begin{array}{rl} max & -x_1 - 2x_2 \\ \text{s.a.} & \\ & 3x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ & 2x_1 - x_2 \geq 2 \\ & x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0 \end{array}$$

(e)

$$\begin{array}{ll} max & 4x_1 + 5x_2 - 3x_3 \\ \text{s.a.} & \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ & x_1 - x_2 \geq 1 \\ & x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 14 \\ & x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0; \quad x_3 \geq 0 \end{array}$$

(f)

$$\begin{array}{ll} min & -2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \\ \text{s.a.} & \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \leq 2 \\ & x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \geq 3 \\ & 2x_1 - x_2 + x_3 \geq 2 \\ & x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0; \\ & x_3 \geq 0; \quad x_4 \geq 0 \end{array}$$

(g)

$$\begin{array}{ll} min & -x_1 - 2x_2 + x_3 \\ \text{s.a.} & \\ & x_1 + x_2 + x_3 \geq 4 \\ & 2x_1 - x_3 \geq 3 \\ & x_2 + x_3 \leq 2 \\ & x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0; \quad x_3 \geq 0 \end{array}$$

(h)

$$\begin{array}{ll} max & x_1 - 2x_2 + x_3 \\ \text{s.a.} & \\ & x_1 + x_2 - x_3 \geq 4 \\ & x_1 - 4x_2 + x_3 \leq 2 \\ & x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0; \quad x_3 \geq 0 \end{array}$$

(i)

$$\begin{array}{ll} min & x_1 + 4x_2 - x_4 \\ \text{s.a.} & \\ & -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \leq 2 \\ & 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4 \\ & x_1 - 3x_3 + x_4 \geq 2 \\ & x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0; \quad x_4 \geq 0 \\ & x_3 \text{ irrestrito} \end{array}$$

(j)

$$\begin{array}{ll} max & 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 3x_4 \\ \text{s.a.} & \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 \qquad = 4 \\ & x_1 + 4x_2 \qquad + 4x_4 = 8 \\ & x_1 \geq 0; \;\; x_2 \geq 0; \;\; x_3 \geq 0; \;\; x_4 \geq 0 \end{array}$$

(k)

$$\begin{array}{ll} min & 3x_1 - 3x_2 + x_3 \\ \text{s.a.} & \\ & x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 5 \\ & -3x_1 - x_2 + x_3 \leq 4 \\ & x_1 \geq 0; \;\; x_2 \geq 0; \;\; x_3 \geq 0 \end{array}$$

(l)

$$\begin{array}{ll} max & 2x_1 - x_2 \\ \text{s.a.} & \\ & x_1 + x_2 \leq 3 \\ & -x_1 + x_2 \geq 1 \\ & x_1 \geq 0; \;\; x_2 \geq 0; \end{array}$$

65. Use la Fase I del PL para resolver:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$$

$$-x_1 - x_2 + 2x_3 = 3$$

$$3x_1 + 5x_2 \qquad = 5$$

Problemas del Capítulo 5

66. Resolver los problemas anterioriores, formulados algebráicamente, usando el método simplex revisado.

67. Resolver usando simplex revisado:

$$\begin{array}{ll} max & -2x_2 + x_3 \\ \text{s.a.} & \\ & x_1 - 2x_2 + x_3 \geq -4 \\ & x_1 + x_2 + x_3 \leq 9 \\ & 2x_1 - x_2 - x_3 \leq 5 \\ & x_1, \;\; x_2, \;\; x_3 \geq 0 \end{array}$$

68. Resolver usando simplex revisado:

$$
\begin{array}{rl}
max & 3x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 \\
\text{s.a.} & \\
& 8x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 \leq 7 \\
& 2x_1 + 6x_2 + x_3 + 5x_4 \leq 3 \\
& x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 \leq 8 \\
& x_1, \;\; x_2, \;\; x_3, \;\; x_4 \geq 0
\end{array}
$$

Problemas del Capítulo 6

69. En el PL:

$$
\begin{array}{rl}
max & -x_1 + 3x_2 \\
\text{s.a.} & \\
& 2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\
& x_1 - 2x_2 \geq -2 \\
& x_1 \geq 0; \;\; x_2 \geq 0
\end{array}
$$

a) resolver el problema gráficamente, b) formular el dual y resolver gráficamente, y usar los valores óptimos del dual para encontrar las variables óptimas del primal.

70. En el PL:

$$
\begin{array}{rl}
Min & 2x_1 + 15x_2 + 5x_3 + 6x_4 \\
\text{s.a.} & \\
& x_1 + 6x_2 + 3x_3 + x_4 \geq 2 \\
& -2x_1 + 5x_2 - x_3 + 3x_4 \leq -3 \\
& x_1, \;\; x_2, \;\; x_3, \;\; x_4 \geq 0
\end{array}
$$

a) obtener el dual, b) resolver el dual gráficamente, y c) usar los valores óptimos del dual para encontrar las variables óptimas del primal.

71. Resolver el PL gráficamente (use el dual):

$$
\begin{array}{rl}
max & 3x_1 + 3x_2 + 21x_3 \\
\text{s.a.} & \\
& 6x_1 + 9x_2 + 25x_3 \leq 25 \\
& 3x_1 + 2x_2 + 25x_3 \leq 20 \\
& x_1, \;\; x_2, \;\; x_3 \geq 0
\end{array}
$$

72. Encontrar el dual del siguiente problema:

$$\begin{array}{rl} min & -2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ \text{s.a.} & \\ & -2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \geq 5 \\ & 2x_1 \quad\;\; + x_3 \quad\;\; \leq 4 \\ & \quad\;\; 2x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ & x_1 \leq 0 \\ & x_2, \;\; x_3 \geq 0 \\ & x_4 \quad \text{irrestricto} \end{array}$$

73. En el PL:

$$\begin{array}{rl} max & 10x_1 + 24x_2 + 20x_3 + 20x_4 + 25x_5 \\ \text{s.a.} & \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 \leq 19 \\ & 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 \leq 57 \\ & x_1, \;\; x_2, \;\; x_3, \;\; x_4, \;\; x_5 \geq 0 \end{array}$$

a) escriba el dual y verifique que $(w_1, w_2) = (4, 5)$ es una solución factible, b) use la información de (a) para encontrar la solución óptima de ambos problemas.

74. En el siguiente problema:

$$\begin{array}{rl} max & 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 \\ \text{s.a.} & \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 10 \\ & x_1 - 2x_2 + 2x_3 \leq 6 \\ & x_1, \;\; x_2, \;\; x_3 \geq 0 \end{array}$$

a) Escriba el dual, b) resuelva el problema original por el método simplex y en cada iteración identifique las variables duales y muestre que las restricciones del dual son violadas, y c) verifique que, al final, los valores objetivos del primal y del dual son iguales.

Problemas del Capítulo 7

75. Resolver los siguientes ejercicios usando el método dual simplex:

a)

$$\begin{array}{rl} max & 2x_1 - 3x_2 \\ \text{s.a.} & \\ & x_1 + x_2 \geq 3 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1 \geq 0; \;\; x_2 \geq 0 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{ll} min & 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 \\ \text{s.a.} & \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \geq 2 \\ & -x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 \leq -3 \\ & x_j \geq 0; \quad \forall\, j \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{ll} min & 3x_1 - 5x_2 - x_3 + 2x_4 - 4x_5 \\ \text{s.a.} & \\ & x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 \leq 6 \\ & -x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 \geq 3 \\ & x_j \geq 0; \quad \forall\, j \end{array}$$

d)

$$\begin{array}{ll} min & x_3 \\ \text{s.a.} & \\ & -\frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{2}x_2 \leq -\frac{3}{4} \\ & 8x_1 + 12x_2 \leq 20 \\ & x_1 + \frac{1}{2}x_2 - x_3 \leq -\frac{1}{2} \\ & -9x_1 - 3x_2 \qquad \leq 6 \\ & x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0; \quad x_3 \geq 0 \end{array}$$

e)

$$\begin{array}{ll} min & 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 \\ \text{s.a.} & \\ & x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 \leq -3 \\ & -x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 \leq -2 \\ & x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 3x_5 \leq 4 \\ & x_j \geq 0 \quad \forall\, j \end{array}$$

f)

$$\begin{array}{ll} min & -2x_1 - x_2 - 8x_4 + 2x_5 - 3x_7 \\ \text{s.a.} & \\ & 3x_1 + x_3 + 16x_4 - 2x_5 + 5x_6 + 4x_7 = 18 \\ & 2x_1 + x_3 + 11x_4 - x_5 + 3x_6 + 3x_7 = 11 \\ & x_1 - x_2 + x_3 + 7x_4 - 2x_5 + 2x_6 + x_7 = 6 \\ & x_j \geq 0 \quad \forall\, j \end{array}$$

76. Use (x_1, x_2, x_3) como base inicial y resuelva usando el método dual simlex:

$$\begin{array}{ll} Min & -2x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 + 6x_5 + 8x_6 - 9x_7 - 5x_8 \\ \text{s.a.} & \\ & x_1 + x_4 - 2x_5 + x_6 + x_7 - 2x_8 = -3 \\ & x_2 - x_4 + x_5 + x_6 - 3x_7 - x_8 = -14 \\ & x_3 + x_4 - x_5 - 2x_6 - x_7 + x_8 = -5 \\ & x_j \geq 0 \quad \forall\, j \end{array}$$

77. Use (x_1, x_2, x_3) como base inicial y resuelva usando el método dual simlex:

$$\begin{array}{ll} Min & -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 - 4x_5 - 10x_6 \\ \text{s.a.} & \\ & 5x_2 + 2x_3 + x_4 - 3x_5 - 9x_6 - 4x_7 = -8 \\ & x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 + 2x_5 + 8x_6 = 7 \\ & -2x_1 - x_3 + x_4 - 5x_6 + 6x_7 = -3 \\ & x_j \geq 0 \quad \forall\, j \end{array}$$

Problemas del Capítulo 8

78. Considere el siguiente PL y su cuadro óptimo:

$$\begin{array}{ll} Max & 2x_1 + x_2 - x_3 \\ \text{s.a.} & \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 8 \\ & -x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 4 \\ & x_j \geq 0; \quad \forall\, j \end{array}$$

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
z	1	0	3	3	2	0	16
x_1	0	1	2	1	1	0	8
x_5	0	0	3	-1	1	1	12

(a) Escriba el problema dual y encuentre el valor de las variables duales óptimas del cuadro anterior.

(b) Usando análisis de sensibilidad, encuentre la nueva solución óptima si el coeficiente de x_2 en la función objetivo es cambiado de 1 para 6.

(c) Suponer que el coeficiente de x_2 en la 1a. restricción es cambiada de 2 para $\frac{1}{4}$. Encuentre el nuevo óptimo.

(d) Suponer que la siguiente restricción es adicionada: $x_2 + x_3 = 3$. Encuentre el nuevo óptimo.

(e) Si usted tuviera que escoger entre incrementar b_1 y b_2, cual de ellas escogería ? Por qué ? Cuál es el efecto de este incremento en la función objetivo?

(f) Suponer que es adicionada una nueva variable x_6 con $c_6 = 4$ y vector $a_6 = (1, 2)^t$. Encontrar el nuevo óptimo.

79. Considere el siguiente cuadro óptimo de un problema de maximización con restricciones del tipo $\leq$, siendo que x_6, x_7 y x_8 son variables de holgura:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	RHS
z	1	0	0	0	2	0	2	$\frac{1}{10}$	2	θ
x_1	0	1	0	0	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	-1	2
x_2	0	0	1	0	2	1	-1	0	$\frac{1}{2}$	3
x_3	0	0	0	1	-1	-2	5	$-\frac{3}{10}$	2	1

(a) Encontrar el objetivo θ.

(b) Cómo es alterado el óptimo si es adicionada al problema una nueva variable x_9 con costo $c_9 = 5$ y coeficientes $a_9 = (2, 0, 3)^t$?

(c) Cuánto puede variar b_1 sin violar la factibilidad?

(d) Suponer la adición de la restricción: $x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 10$ al problema. El nuevo cuadro continúa siendo óptimo? En caso contrario, encuentre el nuevo óptimo.

80. Una familia desea preparar una dieta de costo mínimo usando 6 productos primarios. La dieta debe tener al menos 9 unidades de vitamina A y 19 unidades de vitamina C. los datos son los siguientes:

	Unidades de nutriente por Kg. de producto primario						Requerimento mínimo diario de nutrientes (RMD)
Nutriente	1	2	3	4	5	6	
Vitamina A	1	0	2	2	1	2	9
Vitamina C	0	1	3	1	3	2	19
costo (\$/Kg)	35	30	60	50	27	22	

Sea x_j los Kg de producto primario j usada en la dieta; $j = 1, 6$. Entonces el problema de costo mínimo de la dieta de la familia asume la siguiente forma:

$$
\begin{array}{ll}
min & z(x) = 35x_1 + 30x_2 + 60x_3 + 50x_4 + 27x_5 + 22x_6 \\
\text{s.a.} & \\
 & x_1 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 + 2x_6 \geq 9 \\
 & x_2 + 3x_3 + x_4 + 3x_5 + 2x_6 \geq 19 \\
 & x_j \geq 0; \quad \forall\, j
\end{array}
$$

En este problema considere que x_7 y x_8 son las correspondientes variables de holgura. Se sabe también que $x_B = (x_5, x_6)$ es una base óptima para este problema.

(a) Monte el cuadro óptimo de este problema y determine los valores óptimos.

(b) Suponer que existe disponibles en el mercado otro alimento primario, producto 7 a 88 \$/Kg. Un Kg. de este producto contiene 2 unid. de vitamina A y 4 unid. de vitamina C. La familia incluiría este nuevo producto en su dieta ? Si no, cuánto debe disminuir el precio de este producto para que la familia lo considere como parte de su dieta. En este nuevo costo límite existe una solución óptima que incluye el producto 7 en la dieta y otro que no lo incluye. Cuál sería la dieta óptima si el producto 7 existe en el mercado a 32 \$/Kg. ?

(c) Considere el problema original de la dieta. La familia cree que necesita de otra vitamina, la vitamina E, en su dieta. El contenido de vitamina E en los 6 productos primarios son: 2, 3, 5, 2, 1 y 1 unid/Kg respectivamente. El RMD de vitamina E es de 10 unidades. La familia va a colocar esta nueva exigencia en su dieta. Cómo varía la solución óptima del problema ?

(d) Regresando al problema original, además del RMD de vitamina A y C a familia decide tener una dieta consistente de exactamente 2000 calorias. El contenido de calorias de los 6 productos primarios son: 160, 20, 500, 280, 300 y 360 calorias/Kg respectivamente. Esta exigencia adicional cambia la dieta de la familia?

(e) Cuál es el efecto marginal de incrementar el RMD de vitamina C en el costo óptimo de la dieta en el problema original ? Cuánto puede variar el RMD de la vitamina C antes que la base óptima B se transforme en óptima ? Cuál es el óptimo del problema cuando este requerimento es de 39 unidads?

(f) En el problema original, suponer que cada exceso de vitamina A consumida por la familia produce 10 centavos de gastos médicos. Esta nueva exigencia altera la solución óptima del problema?

(g) Para qué intervalo de variación de los costos/Kg de los productos 4 y 5 la base B permanece óptima en el problema original?

(h) Qué cambios acontecen en el problema original si el contenido de vitamina C en el producto 4 varía? Para qué intervalo de variación la base B continúa óptima? Suponer que existe en el mercado una versión rica del producto 4 que contiene $(1+\alpha)$ unid. de vitamina C por Kg. a un costo de $(50+4\alpha)$ \$/Kg para algún $\alpha \geq 0$. Cuál es el valor mínimo de α para el cual este producto se vuelve atractivo para que la familia lo considere en su dieta?

81. Considere el siguiente PL donde x_5, x_6 y x_7 son variables de holgura. La base B correspondiente a $x_B = (x_1, x_3, x_2)$ es óptima. Construya el cuadro óptimo.

$$\begin{array}{rcll}
min\ \ z(x) & = & -2x_1 - 4x_2 - x_3 - x_4 & \\
\text{s.a.} & & & \\
& & x_1 + 3x_2 + x_4 \leq 8 & \text{Disponibilidad de materia prima 1} \\
& & 2x_1 + x_2 \leq 6 & \text{Disponibilidad de materia prima 2} \\
& & x_2 + 4x_3 + x_4 \leq 6 & \text{Disponibilidad de materia prima 3} \\
& & x_j \geq 0; \quad \forall j &
\end{array}$$

(a) La disponibilidad de solamente una materia prima puede ser alterada. Cuál materia prima debe ser alterada ? Por qué ?

(b) Para qué intervalo de variación de b_1 la base B continua óptima? Cuál es la solución óptima del problema si $b_1 = 20$?

(c) Si existe materia prima 1 adicional disponible, cuál es el máximo valor que pagaría por el ? Por qué ?

82. Considere el siguiente problema de la dieta.

Nutriente	Unidades de nutriente por Kg. de producto primario			Requerimiento mínimo diario de nutrientes (RMD)
	verdura	papa	maíz	
Vitamina A	10	1	9	5
Vitamina C	10	10	10	50
Vitamina D	10	11	11	10
costo (c/Kg)	50	100	51	

x_1, x_2 y x_3 son las cantidades de verdura, papa y maíz incluida en la dieta; x_4, x_5 y x_6 son las respectivas variables de holgura. La base B de $x_B = (x_4, x_1, x_6)$ es óptima para este problema. Construya el cuadro óptimo.

(a) Encontrar las soluciones óptimas dual y primal asociados a este problema.

(b) Un nuevo producto, leche, está disponible. Un litro de leche contiene 0, 10 y 20 unidades de vitamina A, C y D respectivamente y cuesta 40 \$/lt. Usted recomendaría incluir leche en la dieta ? Por qué ? Cuál es el mayor precio del litro de leche que aún permitiría incluir leche en la dieta ?

(c) Considere el problema original nuevamente. Una nutricionista recomienda un RMD de vitamina para la familia de vitamina A, C y D de 5, $(50 + 10\alpha)$ y $(10 + 15\alpha)$; $\alpha \geq 0$. Así, es propuesto un experimento para determinar un $\overline{\alpha}$. Cuál es el máximo valor de ese $\overline{\alpha}$ que permite que B sea aún una base óptima ? Cuál es la solución óptima para $\alpha = \overline{\alpha} + 1$.

83. Considere el siguiente PL donde x_5, x_6 y x_7 son variables de holgura. La base B correspondiente a $x_B = (x_1, x_2, x_7)$ es óptima. Monte el cuadro óptimo.

$$
\begin{array}{rcll}
\text{minimizar costo } z(x) & = & 28x_1 + 67x_2 + 12x_3 + 35x_4 & \\
\text{s.a.} & & & \\
& & \text{Prod. de producto 1:} & x_1 + 2x_2 + \qquad x_4 \geq 17 \\
& & \text{Prod. de producto 2:} & 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 \geq 36 \\
& & \text{Prod. de producto 3:} & x_1 + x_2 + \qquad 3x_4 \geq 8 \\
& & x_j \geq 0; \quad \forall\, j &
\end{array}
$$

(1) Cuál es el producto más crítico para la empresa ? Por qué ? (2) Determine el intervalo de optimalidad de c_1 para la base presente (3) Determine el intervalo de optimalidad de b_3 para la base presente (4) Encontrar el nuevo óptimo cuando b_3 varía de 16 para 8.

Problemas del Capítulo 9

84. Resolver los siguientes ejercicios usando PL canalizado:

a)

$$\begin{array}{ll} max & 2x_1 + x_2 + 3x_3 \\ \text{s.a.} & \\ & 3x_1 + x_2 + x_3 \leq 12 \\ & -x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_2 + 2x_3 \leq 8 \\ & 0 \leq x_1 \leq 3 \\ & 0 \leq x_2 \leq 6 \\ & 0 \leq x_3 \leq 4 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{ll} min & x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 \\ \text{s.a.} & \\ & 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 \leq 6 \\ & -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \leq 8 \\ & 2x_1 + x_2 - x_3 \geq 2 \\ & 0 \leq x_1 \leq 3 \\ & 1 \leq x_2 \leq 4 \\ & 0 \leq x_3 \leq 10 \\ & 2 \leq x_4 \leq 5 \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{ll} max & z(x) = x_1 - x_2 \\ \text{s.a.} & \\ & -x_1 - x_2 \leq 1 \\ & 2x_1 - x_2 \leq 1 \\ & -2 \leq x_1 \leq 1 \\ & x_2 \leq 2 \end{array}$$

d)

$$\begin{array}{ll} max & 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 \\ \text{s.a.} & \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 8 \\ & 2x_1 + x_2 - x_3 \geq 3 \\ & x_1 \leq 4 \\ & -2 \leq x_2 \leq 3 \\ & x_3 \geq 2 \end{array}$$

e)

$$\begin{array}{ll} min & 2x_1 + 6x_2 - x_3 - 4x_4 + x_5 \\ \text{s.a.} & \\ & 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 + x_5 = 10 \\ & 3x_1 + 8x_2 - 3x_3 + x_4 \qquad = 7 \\ & 0 \leq x_1 \leq 3 \\ & 1 \leq x_2 \leq 4 \\ & 0 \leq x_3 \leq 8 \\ & 1 \leq x_4 \leq 2 \\ & 0 \leq x_5 \leq 20 \end{array}$$

f)

$$\begin{array}{ll} max & 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 \\ \text{s.a.} & \\ & 4x_1 - 3x_2 + x_3 \leq 8 \\ & 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 10 \\ & 0 \leq x_1 \leq 3 \\ & 0 \leq x_2 \leq 2 \\ & 0 \leq x_3 \end{array}$$

g)

$$\begin{array}{ll} max & 6x_1 + 4x_2 \\ \text{s.a.} & \\ & x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & 2x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ & 0 \leq x_1 \leq 3 \\ & 0 \leq x_2 \leq 4 \end{array}$$