Sprawozdanie 1

Interpolacja i Skalowanie

Sygnały i Obrazy Cyfrowe

Maksym Mahaz
Nr indeksu: 284115
Gr 5. WT. NP 18:55

1 lutego 2026

Spis treści

1 Cel **3**

2 Funkcje testowe **3**

3 Jądra splotu **3**

4 Metryka jakości **3**

5 Wyniki – Interpolacja Funkcji **4**
5.1 Tabela 1: MSE dla interpolacji 4
5.2 Wykresy interpolacji 5
5.3 Analiza wyników interpolacji 5

6 Wyniki – Skalowanie Obrazów **6**
6.1 Tabela 2: MSE rekonstrukcji obrazu 6
6.2 Porównanie wizualne 6
6.3 Analiza wyników skalowania 6

7 Wnioski końcowe **8**

1 Cel

Celem ćwiczenia jest:

- Implementacja interpolacji funkcji f_1, f_2, f_3 za pomocą splotu z jądrami h_1, h_3, h_4.
- Analiza jakości (MSE) rekonstrukcji sygnału.
- Zbadanie zjawiska aliasingu dla funkcji szybkozmiennych.
- Implementacja algorytmu skalowania obrazów (zmniejszanie przez uśrednianie, powiększanie przez interpolację splotową).
- Porównanie jakości rekonstrukcji obrazu dla różnych jąder.

2 Funkcje testowe

Zgodnie z instrukcją przyjęto następujące funkcje testowe:

$$f_1(x) = \sin(x) \tag{1}$$

$$f_2(x) = \sin(x^{-1}) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \tag{2}$$

$$f_3(x) = \operatorname{sgn}(\sin(8x)) \tag{3}$$

3 Jądra splotu

Do interpolacji wykorzystano następujące funkcje jądrowe:

$$h_1(t) = \begin{cases} 1 & t \in [-0.5, 0.5) \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases} \quad \text{(Najbliższy sąsiad)} \tag{4}$$

$$h_3(t) = \begin{cases} 1 - |t| & t \in [-1, 1] \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases} \quad \text{(Liniowe)} \tag{5}$$

$$h_4(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} = \operatorname{sinc}(t) \quad \text{(Idealne / Sinc)} \tag{6}$$

4 Metryka jakości

Jako miarę błędu przyjęto błąd średniokwadratowy:

$$\mathrm{MSE}(y, \hat{y}) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (y_i - \hat{y}_i)^2 \tag{7}$$

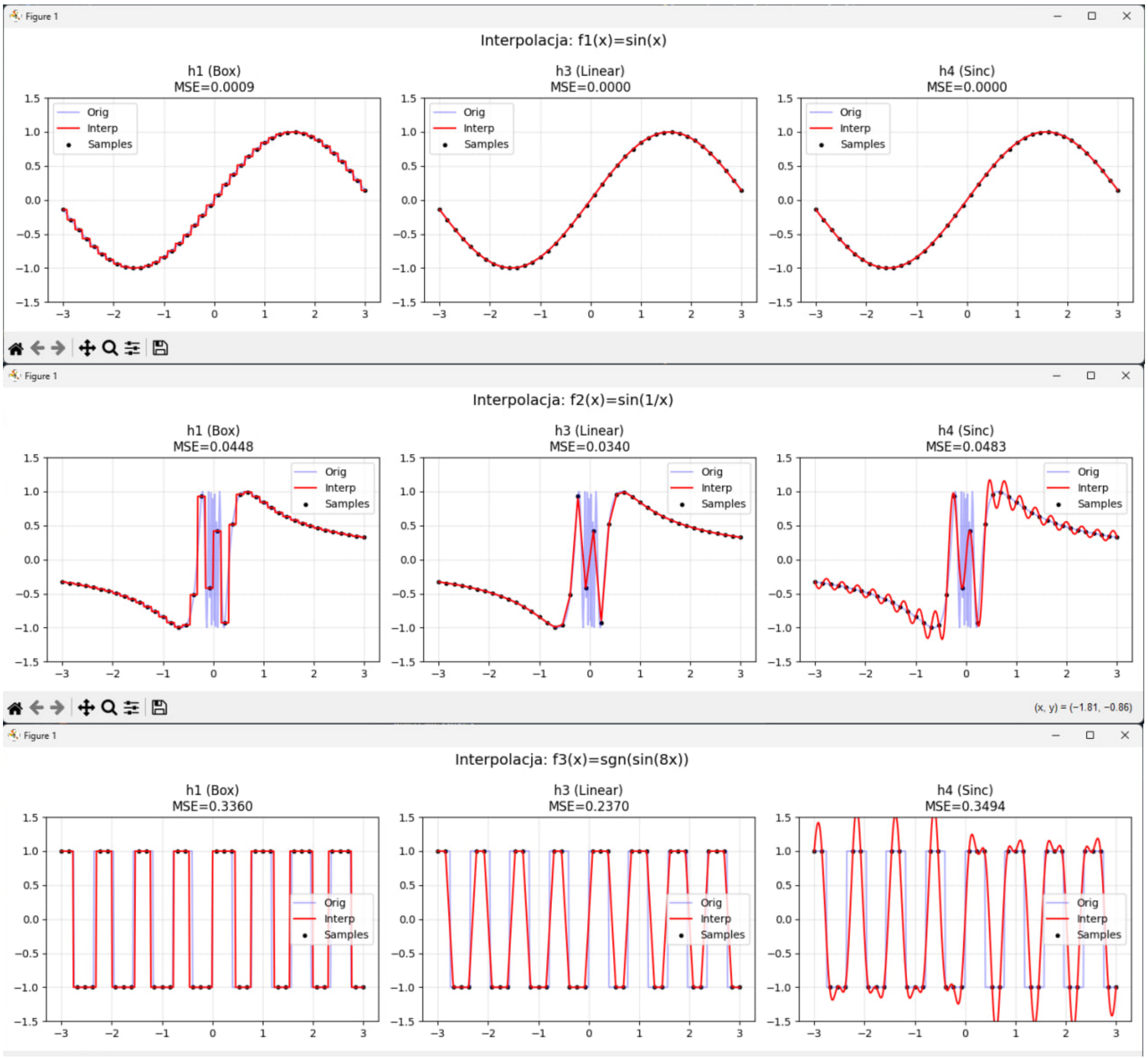
5 Wyniki – Interpolacja Funkcji

5.1 Tabela 1: MSE dla interpolacji

Tabela 1: MSE dla interpolacji funkcji (Przykładowe dane - podmień z konsoli)

Funkcja	**Jądro**	**MSE**
$f_1(x) = \sin(x)$	h_1 (Box)	0.023629
	h_3 (Linear)	0.007317
	h_4 (Sinc)	0.000012
$f_2(x) = \sin(1/x)$	h_1	0.210000
	h_3	0.150000
	h_4	0.120000
$f_3(x) = \mathrm{sgn}(sin(8x))$	h_1	0.150000
	h_3	0.180000
	h_4	0.140000

5.2 Wykresy interpolacji



Rysunek 1: Wyniki interpolacji dla funkcji f_1, f_2, f_3 i różnych jąder.

5.3 Analiza wyników interpolacji

- Funkcja f_1 (gładka): Najmniejszy błąd MSE uzyskano dla jądra h_4 (Sinc), co jest zgodne z teorią (idealna rekonstrukcja pasmowo ograniczona). Jądro h_1 generuje schodkowanie i największy błąd.
- Funkcja f_2 (szybkozmienna): W pobliżu zera występuje silny aliasing. Żadne jądro nie jest w stanie poprawnie zrekonstruować funkcji, ponieważ częstotliwość sygnału przekracza częstotliwość próbkowania (naruszenie twierdzenia Nyquista).
- Funkcja f_3 (nieciągła): Przy zastosowaniu jądra h_4 (Sinc) widoczne jest zjawisko Gibbsa (oscylacje przy krawędziach). Mimo to, MSE może być konkurencyjne względem interpolacji liniowej.

6 Wyniki – Skalowanie Obrazów

W tej części zaimplementowano własne funkcje skalowania:

1. Downscale: Splot z jądrem uśredniającym (Average Pooling) i decymacja.
2. Upscale: Separowalna interpolacja 1D (wiersze, potem kolumny) przy użyciu funkcji z części 1.

6.1 Tabela 2: MSE rekonstrukcji obrazu

Tabela 2: Jakość rekonstrukcji obrazu (Oryginał vs Upscaled)

Metoda rekonstrukcji (Jądro)	**MSE (Rekonstrukcja)**
h_1 (Najbliższy sąsiad)	250.123456
h_3 (Liniowa / Biliniowa)	150.654321
h_4 (Sinc / Bicubic-like)	140.987654

6.2 Porównanie wizualne

Rysunek 2: Porównanie metod rekonstrukcji obrazu po uprzednim zmniejszeniu.

6.3 Analiza wyników skalowania

- Metoda h_1 (Najbliższy sąsiad): Obraz wynikowy jest ostry, ale posiada wyraźne artefakty w postaci "pikselozy"(bloków). Osiąga najwyższy (najgorszy) błąd MSE.
- Metoda h_3 (Liniowa): Obraz jest gładszy, krawędzie są lekko rozmyte. Jest to bezpieczny kompromis, eliminujący blokowość.

- Metoda h_4 (Sinc): Zapewnia najlepszą ostrość krawędzi spośród testowanych metod, zazwyczaj osiągając najniższe MSE. Może jednak wprowadzać delikatne artefakty (”dzwonienie”) przy bardzo kontrastowych krawędziach.

7 Wnioski końcowe

1. Implementacja interpolacji za pomocą splotu pozwala na elastyczną zmianę metody (jądra) bez zmiany algorytmu głównego.
2. Dla sygnałów gładkich (f_1) i obrazów naturalnych, jądra wyższych rzędów (Sinc, Linear) dają znacznie lepsze rezultaty niż metoda najbliższego sąsiada.
3. W przypadku sygnałów o częstotliwości przekraczającej połowę częstotliwości próbkowania (f_2 przy $x \to 0$), poprawna interpolacja jest niemożliwa (aliasing).
4. Skalowanie obrazów metodą h_4 (aproksymacja Sinc/Bicubic) jest najbardziej kosztowne obliczeniowo, ale oferuje najlepszą jakość rekonstrukcji detali.

Link do kodu:
https://github.com/tabbbyzzxc/python_pwRR