情報伝送基礎レポート 6

クワメ・アカー・ボフル　1631133

定理 1: ある信号 $x(t)$ が

$$x(nT) = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

を満たされる重要十分条件は、その信号の Fourier 変換 $X(f)$ が

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} X(f + m/T) = T \tag{1}$$

を満たされることである。

Proof. 一般的に、$x(t)$ は $X(f)$ の逆 Fourier 変換である。

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \mathrm{e}^{j2\pi ft} df$$

$t = nT$ のとき、

$$x(nT) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \mathrm{e}^{j2\pi fnT} df \tag{2}$$

上記の式を 1/T に対して有限範囲に書き換えるといかのようになる。

$$\begin{aligned} x(nT) =& \sum_{-\infty}^{\infty} \int_{(2m-1)/2T}^{(2m+1)/2T} X(f) \mathrm{e}^{j2\pi fnT} df \\ =& \int_{-1/2T}^{1/2T} \left[\sum_{-\infty}^{\infty} X(f + m/T) \right] \mathrm{e}^{j2\pi fnT} df, B(f) = \sum_{-\infty}^{\infty} X(f + m/T) \\ =& \int_{-1/2T}^{1/2T} B(f) \mathrm{e}^{j2\pi fnT} df \end{aligned} \tag{3}$$

$B(f)$ は $1/T$ に対して周期関数なので、フーリエ級数係数 $\{b_n\}$ に従って展開と

$$B(f) = \sum_{-\infty}^{\infty} b_n \mathrm{e}^{j2\pi nfT}, b_n = T \int_{-1/2T}^{1/2T} B(f) \mathrm{e}^{-j2\pi nfT} df \tag{4}$$

式 (4) で定義した b_n と式 (3) を比べると

$$b_n = Tx(-nT)$$

ゆえに、しき (1) が満たされる必要十分条件は

$$x(nT) = \begin{cases} T & , n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

式 (4) で定義した $B(f)$ に入れると

$$B(f) = \sum_{-\infty}^{\infty} X(f + m/T) = T$$

□