Linear Interleaver Design

Kwame Ackah Bohulu

22-06-2017

1 Introduction

ターボ符号は二つの畳み込み符号をインタリーバで並列連結して作られている。ターボ符号の性能は有効自由距離に頼っている [3]。有効自由距離とは、入力重み 2 エラーイベントに関する最低距離である [2]。要素符号の周期の倍数値の入力重み 2 エラーイベントは低い重みをもつ符号語を出力する。なので、そのようなエラーエベントを両方の要素符号に起きることを発生することは目的である。インタリーバの働きは、2 番目の要素符号器に入力する情報系列の順番を並び替えることである。一番目の要素符号器に起きる入力重み 2 エラーイベントを 2 番目の要素符号器に起きらないようなインタリーバを設計すれば、ターボ符号の有効自由距離が増加させ、性能が向上させる。

2 長さ d の入力重み 2 エラーイベントを発生する

入力重み 2 エラーイベントは、二つのビット 1 が入っている情報系列と言うエラーイベントである [2]。ターボ符号の場合、両方の要素符号器にある一つのエラーイベントに対応する。代表的な入力重み 2 エラーイベントは図 1 に描かれている。

一番目の要素符号で、エラーイベントは x から $x+d$ までである。$x \in \mathbb{Z}, d \in \tau \cdot \mathbb{Z} \triangleq \mathbb{C}$。$\tau$ は要素符号器の周期である。エラーイベントの開始と終了は、整数組 $(x, x+d)$ で代表する。それぞれ位置をインタリーバで位置 $\alpha(x)$ と $\alpha(x+d)$ に並び替えて、その距離は $(\alpha(x+d), \alpha(d)) \triangleq \alpha(x+d) - \alpha(d)$ である。$d \in \mathbb{C}$ なので、$a\tau$ に書き換えられる。a は小さい整数値である。

両方の要素符号に周期の小さい倍数値の長さを持つ入力重み 2 (種類 1) エラーイベントがある場合、ターボ符号のビット誤り率 (BER) 性能に与える影響をわかるようになりたいである。最尤復号と AWGN チャネルの場合、畳み込み符号のビット誤り率性能は組合結合技術で上界できる [2]。

$$P_b \leq \sum_{i=1}^{2^N} \frac{w_i}{N} Q\left(\sqrt{d_i \frac{2RE_b}{N_o}}\right) \tag{1}$$

w_i と d_i は i 番目の符号語の組織ビットの重みと合計ハミング重みである。ターボ符号は畳み込み符号から作られているので、(1) でターボ符号のビット誤り率性能の上界が計算できる。

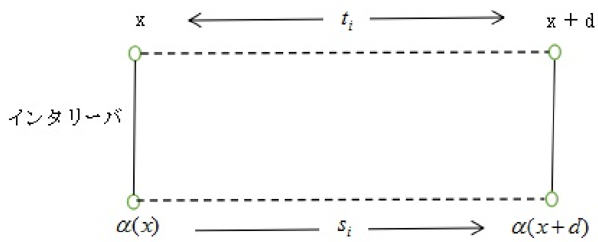

Figure 1: 代表的な入力重み 2 エラーイベント

ターボ符号に関する種類 1 エラーイベントの合計出力重みは以下の式で計算できる [1]

$$w_{(t_i,s_i)} = 6 + \left(\frac{\sum |t_i|}{\tau} + \frac{\sum |s_i|}{\tau}\right) w_o \tag{2}$$

t_i と s_i はそれぞれの要素符号に起きる種類 1 エラーイベントの長さで、w_o は $1 + D^\tau$ の形を持つ入力系列の場合、一番目の要素符号の出力の重みである。t_i と s_i は τ の倍数値なので、$a\tau$ に書き換えることができ、$a = \{1, 2, 3\}$

t_i と s_i を調整するこで、同じ合計ハミング重みを持つ符号語が集められ、符号語あたりの平均組織ビット重みは以下のように定義する [1]。

$$w_d = \frac{W_d}{N_d}$$

W_d は重み d を持つ符号語の合計組織ビットの重みで、N_d は重み d を持つ符号語の数である。。それで、(1) を書き換えると、式 3 が出る。

$$P_b \lessapprox \sum_{d=d_{(a=1)}}^{d_{(a=4)}} \frac{N_d w_d}{N} Q\left(\sqrt{d \frac{2RE_b}{N_o}}\right) \tag{3}$$

3 種類の要素符号を使用するターボ符号のビット誤り率の図が図 2 に描かれている。以下の状況を満足するインタリーバを設計したいです。

$$(\alpha(x+d), \alpha(d)) \notin \mathbb{C} \triangleq \mathbb{E}(\alpha(x+d), \alpha(d)) \; \forall x \in \mathbb{Z}, d \in \mathbb{C}$$

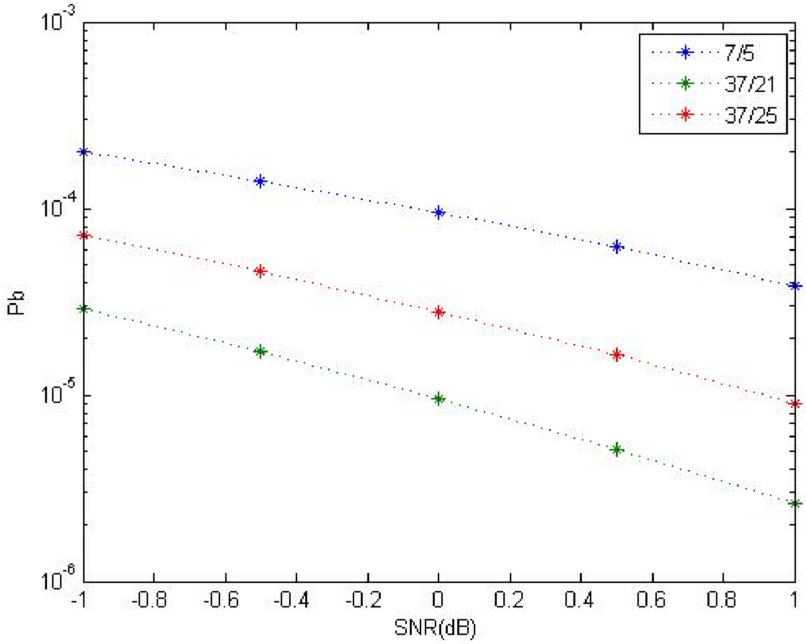

Figure 2: 3 種類の要素符号を使用するターボ符号のビット誤り率、N=1024

2.1 線形インタリーバの設計

提案されたインタリーバのマッピング関数は式 4 で定義されている。

$$\alpha(x)_{\mathfrak{L}_N} = x(\tau^2 - z\tau + 1) \mod N \tag{4}$$

$N = 2^n, n \in \mathbb{R}$ インタリーバの大きさで、z は範囲 1 から $\sqrt{2N}$ までの最大奇数値である。

n の値が 3 から 10 まで、τ の値が 2 から 7 まで、そして a の値がは 1 から 3 までの場合、$(\alpha(x+d), \alpha(d))$ の値が表 1 から 3 に書かれている。

$N = 2^n$, $(\alpha(x+d), \alpha(x))$								
n=3	n=4	n=5	n=6	n=7	n=8	n=9	n=10	τ
6	6	6	30	70	174	390	854	2
1	1	13	59	5	79	245	649	3
4	4	20	20	52	212	52	372	4
5	5	1	47	89	67	329	29	5
2	10	26	18	122	162	58	650	6
1	9	5	3	29	247	269	193	7

Table 1: $(\alpha(x+d), \alpha(x))$ の値, a=1

$N = 2^n$, $(\alpha(x+d), \alpha(x))$								
n=3	n=4	n=5	n=6	n=7	n=8	n=9	n=10	τ
4	12	12	60	12	92	268	684	2
2	2	26	54	10	158	490	274	3
0	8	8	40	104	168	104	744	4
2	10	2	30	50	134	146	58	5
4	4	20	36	116	68	116	276	6
2	2	10	6	58	238	26	386	7

Table 2: $(\alpha(x+d), \alpha(x))$ の値, a=2

$N = 2^n$, $(\alpha(x+d), \alpha(x))$								
n=3	n=4	n=5	n=6	n=7	n=8	n=9	n=10	τ
2	2	18	26	82	10	146	514	2
3	3	7	49	15	237	223	923	3
4	12	28	60	28	124	156	92	4
7	15	3	13	11	201	475	87	5
6	14	14	54	110	230	174	926	6
3	11	15	9	87	229	295	579	7

Table 3: $(\alpha(x+d), \alpha(x))$ の値, a=3

提案された線形インタリーバをターボ符号器のインタリーバとして、シミュレーションされた。シミュレーションで得られたビット誤り率性能は、図 3 で書かれている。

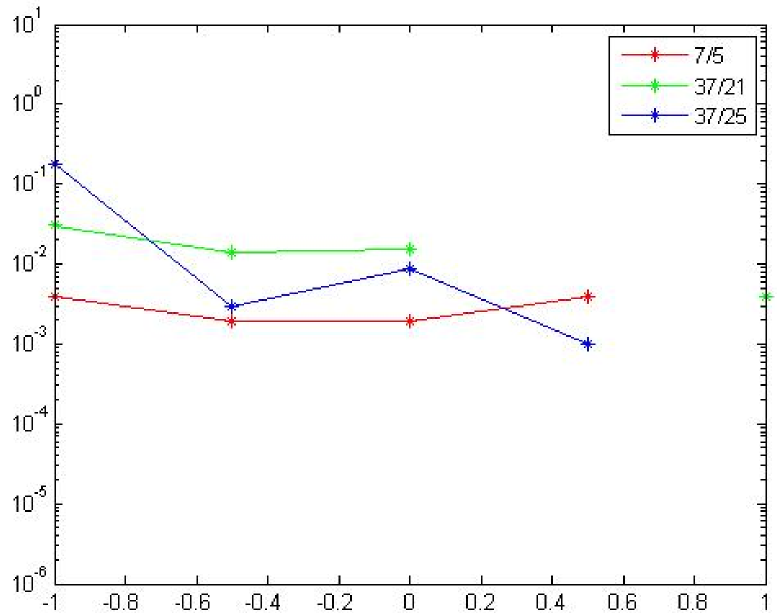

Figure 3: シミュレーションで得られたビット誤り率性能、N=1024

3 References

[1] Oscar Y. Takeshita, Member, IEEE, and Daniel J. Costello ,"New Deterministic Interleaver Designs for Turbo Codes",IEEE Trans. Inform. Theory, vol. 46,pp. 1988-2006,Nov. 2000

[2] L. C. Perez, J. Seghers, D. J. Costello, Jr., "A distance spectrum interpretation of turbo codes", IEEE Trans. Inform. Theory, vol. 42, pp. 1698-1709, Nov. 1996.

[3] Jing Sun, Oscar Y. Takeshita " Interleavers for Turbo Codes Using Permutation Polynomials over Integer Rings" , IEEE Trans. Inform. Theory, vol. 51, pp. 101 - 119 Jan. 2005