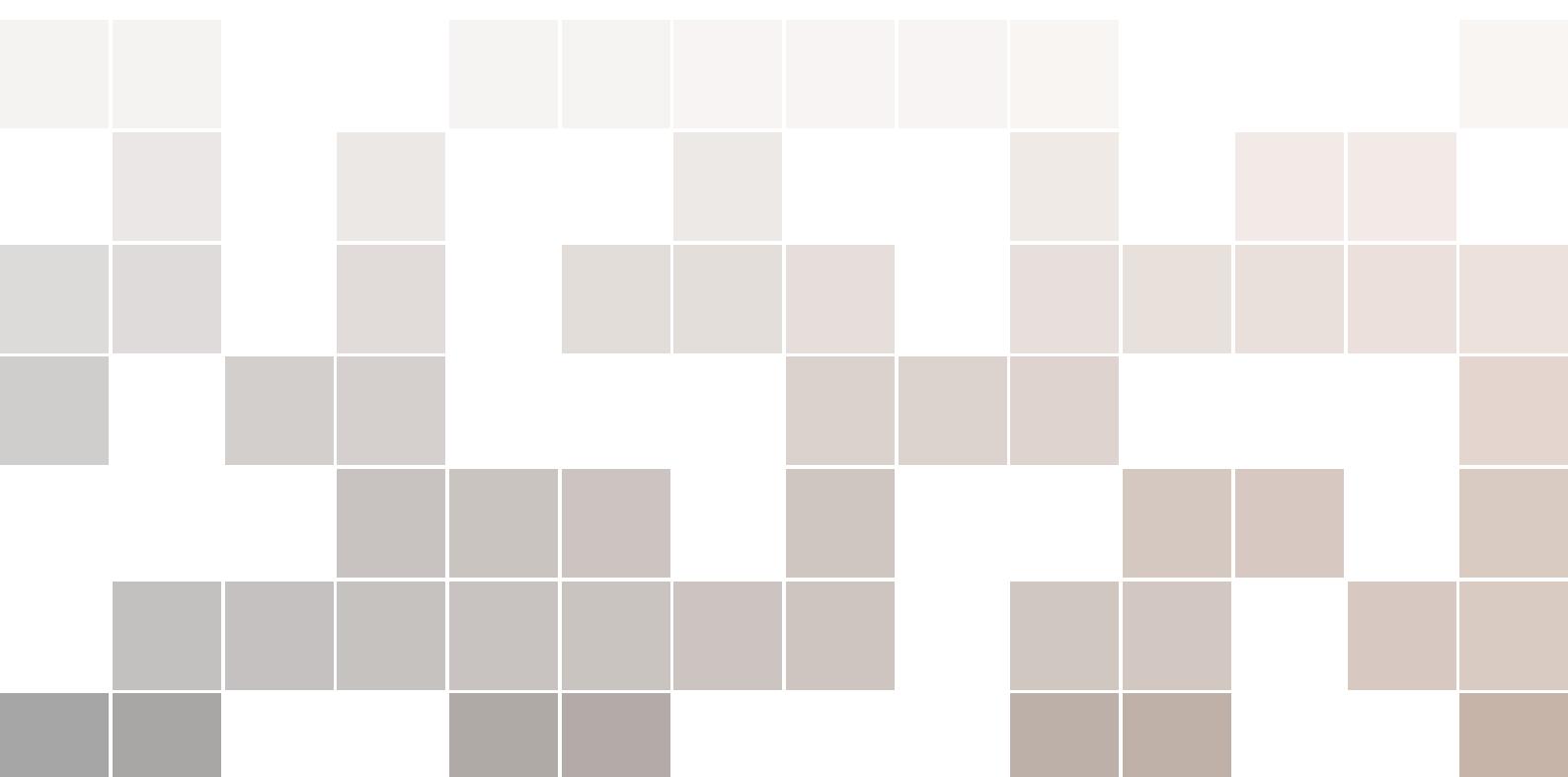


# **Recueil mathématique**

**Notes d'un voyage dans l'abstraction**

**Tiago Piette & Manoa Hamiot**



Copyright © 2013 John Smith

PUBLISHED BY PUBLISHER

BOOK-WEBSITE.COM

Licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial 3.0 Unported License (the "License"). You may not use this file except in compliance with the License. You may obtain a copy of the License at <http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>. Unless required by applicable law or agreed to in writing, software distributed under the License is distributed on an "AS IS" BASIS, WITHOUT WARRANTIES OR CONDITIONS OF ANY KIND, either express or implied. See the License for the specific language governing permissions and limitations under the License.

*First printing, March 2013*

# Table des matières

	I	Théorie des ensembles
<b>1</b>		<b>Axiomatisation de Zermolo-Fraenkel .....</b>
1.1		Paradoxe de Russel .....
1.2		Logique élémentaire .....
1.3		Le langage de la théorie ZF .....
1.4		Axiomes élémentaires .....
1.5		Les axiomes techniques .....
1.6		Conséquences .....
		<b>Bibliography .....</b>
		Livres .....
		Documents .....





# Théorie des ensembles

<b>1</b>	<b>Axiomatisation de Zermolo-Fraenkel . . . 1</b>
1.1	Paradoxe de Russel
1.2	Logique élémentaire
1.3	Le langage de la théorie ZF
1.4	Axiomes élémentaires
1.5	Les axiomes techniques
1.6	Conséquences
	<b>Bibliography ..... 11</b>
	Livres
	Documents



# 1. Axiomatisation de Zermolo-Fraenkel

## 1.1 Paradoxe de Russel

Jusqu'au début du XX<sup>e</sup> siècle, les mathématiciens manipulaient les ensembles de manière dite *naïve*. On les concevait d'abord comme des objets géométriques (points, droites, cercles, etc.), puis comme de simples collections d'objets partageant une propriété commune.

C'est le mathématicien allemand GEORG CANTOR (1845–1918) qui, à partir de 1874, posa les bases de la *théorie naïve des ensembles*. Cette approche intuitive permit à Cantor de développer la notion de *cardinalité* et d'étudier différents « types d'infini » par des travaux qui révolutionnèrent les fondements des mathématiques modernes. Cependant, cette théorie, bien que féconde, se révéla insuffisamment rigoureuse.

En 1901, le philosophe et logicien britannique BERTRAND RUSSELL (1872–1970) mit en évidence une contradiction au cœur même de la théorie naïve : le *paradoxe de Russell*. Considérons l'ensemble suivant :

$$R := \{x \text{ ensemble} \mid x \notin x\}.$$

Autrement dit,  $R$  désigne l'ensemble de tous les ensembles qui ne se contiennent pas eux-mêmes. La question est alors :  $R$  appartient-il à lui-même ?

Deux cas se présentent :

- Si  $R \in R$ , alors par définition de  $R$ , on doit avoir  $R \notin R$ .
- Si  $R \notin R$ , alors, toujours par définition,  $R$  satisfait la condition pour appartenir à  $R$ ; donc  $R \in R$ .

Dans les deux cas, on aboutit à la contradiction suivante :

$$R \in R \iff R \notin R.$$

Cette impossibilité logique révèle une faille fondamentale de la théorie naïve : certaines définitions « trop générales » engendrent des paradoxes.

Pour surmonter cette difficulté, les mathématiciens entreprirent de fonder la théorie des ensembles sur une base axiomatique rigoureuse. En 1908, ERNST ZERMELO (1871–1953) proposa une

première axiomatisation visant à éviter les paradoxes. Cette théorie fut ensuite enrichie en 1922 par ABRAHAM FRAENKEL (1891–1965) et, indépendamment, par THORALF SKOLEM (1887–1963). L'ensemble de ces axiomes constitue la théorie des ensembles **ZF** (*Zermelo–Fraenkel*). Lorsqu'on y ajoute l'axiome du choix, on obtient la théorie **ZFC**, aujourd'hui la base de la plupart des mathématiques formelles.

Cependant, même la théorie ZF ne permet pas de manipuler des « collections trop grandes » comme la collection de tous les ensembles car celle-ci n'est pas un ensemble, mais une *classe propre*. Pour traiter de telles collections, d'autres systèmes ont été développés, notamment la théorie **NBG** (*von Neumann–Bernays–Gödel*), qui étend ZF en introduisant une distinction explicite entre ensembles et classes. Dans ce chapitre, nous allons construire la théorie ZF en donnant les différents axiomes ainsi que leurs conséquences qui nous permettront d'établir nos premières constructions.

## 1.2 Logique élémentaire

L'objectif de cette section est de fournir le minimum logique nécessaire avant de construire la théorie axiomatique ZF. Pour ce faire, nous allons adopter une approche naïve de la théorie du langage.

« Nous ne discuterons pas de la possibilité d'enseigner les principes du langage formalisé à des êtres ne sachant pas lire ou compter. »

Cette citation, bien qu'elle puisse sembler évidente, met en lumière un point fondamental. Pour pouvoir faire des mathématiques, nous devons nécessairement nous appuyer sur certaines capacités intellectuelles préexistantes. En effet, si nous souhaitons être complètement formels, nous définirions certaines collections comme dénombrables ; mais la notion même de dénombrabilité n'est établie que bien plus tard dans la théorie. Autrement dit, pour définir rigoureusement la dénombrabilité, nous utilisons des bases logiques qui reposent déjà sur elle. Nous sommes donc confrontés à un problème inextricable de circularité. Pour éviter au mieux ce problème, nous faisons reposer la logique sur certaines capacités du lecteur. On suppose que le lecteur a la capacité de distinguer si deux symboles sont identiques ou non, par symboles, on entend des marques visibles sur un support. On suppose également qu'il lui est possible de compter, d'enumérer des objets et de les regrouper dans une liste ou une collection. Enfin, il doit être capable de distinguer si une collection d'objets est finie ou infinie. Nous noterons les collections en listant les objets entre crochets. Pour les termes utilisés mais non définis ici, le lecteur peut considérer qu'ils ont leurs sens usuels. À noter que, sauf mention explicite du contraire, un symbole quelconque n'a aucun sens mathématique intrinsèque. Nous distinguons ici clairement la syntaxe de la sémantique. Commençons par les notions les plus élémentaires de la théorie des langages formels.

**Définition 1.2.1 — Alphabet.** Un **alphabet**  $\Sigma$  est une collection finie de symboles. Un symbole d'un alphabet est appelé une **lettre**.

**Définition 1.2.2 — Mot.** Un **mot** sur un alphabet  $\Sigma$  est une séquence *finie* de symboles de  $\Sigma$ . On note  $\epsilon$  le **mot vide**, qui ne contient aucun symbole.

Les mots peuvent être combinés par l'opération de *concaténation*. Si  $u$  et  $v$  sont deux mots, leur concaténation  $uv$  est simplement le mot obtenu en juxtaposant les symboles de  $u$  suivis de ceux de  $v$ .

**Définition 1.2.3 — Clôture de Kleene.** Soit  $\Sigma$  un alphabet. La **clôture de Kleene** de  $\Sigma$ , notée  $\Sigma^*$ , est la collection de tous les mots finis sur  $\Sigma$ , y compris le mot vide.

**R** La clôture de Kleene est fermée par concaténation : si  $u, v \in \Sigma^*$ , alors  $uv \in \Sigma^*$ .

**Proposition 1.2.1** Pour tout alphabet  $\Sigma$ , la collection  $\Sigma^*$  est infinie et énumérable.

Cette proposition ne peut être prouvée rigoureusement à ce stade ; nous construirons formellement les outils nécessaires dans les sections dédiées à l'arithmétique et aux cardinaux.

**Définition 1.2.4 — Langage.** Un **langage** (ou dictionnaire)  $\mathcal{L}$  sur un alphabet  $\Sigma$  est une sous-collection de  $\Sigma^*$ , ce que l'on note :

$$\mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$$

**R** Il est crucial de comprendre que tous les mots ne sont pas des **formules**. Une formule est un mot qui respecte certaines règles grammaticales spécifiques que nous définirons précisément. Un langage  $\mathcal{L}$  spécifie exactement quels mots de  $\Sigma^*$  sont considérés comme des formules bien formées selon sa grammaire.

Avant de construire le langage spécifique à la théorie ZF, il convient de définir ce qu'est un langage du premier ordre de manière générale. Cette digression nous permettra de situer ZF dans le cadre plus large de la logique mathématique.

La logique du *premier ordre*, également appelée calcul des prédictats, est un système formel où les quantificateurs  $\forall$  (pour tout) et  $\exists$  (il existe) ne portent que sur des *individus*, représentés par des variables. Ce qui caractérise fondamentalement le premier ordre est qu'on ne peut pas quantifier sur des propriétés, des relations ou des collections de ces individus.

Par exemple, la formule

$$\forall x \exists y (x \in y)$$

est une formule du premier ordre : les quantificateurs portent sur des objets  $x$  et  $y$ . En revanche, une formule hypothétique du type

$$\forall P \exists x P(x)$$

où  $P$  est une variable de propriété, relève de la logique du *second ordre*, qui sort de notre cadre. Dans cette dernière formule, on quantifierait sur toutes les propriétés  $P$ , ce qui n'est pas autorisé en logique du premier ordre.

Pour comprendre ce qu'est un langage du premier ordre, il faut distinguer deux types de symboles : les symboles logiques, communs à tous les langages du premier ordre, et les symboles non-logiques, qui varient d'un langage à l'autre et caractérisent chaque théorie spécifique.

Un langage du premier ordre est entièrement déterminé par une *signature* qui précise les symboles non logiques disponibles. La définition suivante est naïve mais nous permet de comprendre la structure des langages du premier ordre.

**Définition 1.2.5 — Signature.** Une **signature**  $\tau$  consiste en trois types de symboles :

1. Des **symboles de relation** (ou prédictats),
2. Des **symboles de fonction**,
3. Des **symboles de constante**.

Outre la signature, tout alphabet de langage du premier ordre contient des symboles logiques universels :

- Un ensemble infini  $\mathcal{V}$  de **variables**, typiquement notées  $x, y, z, x', x'', x_1, x_2, \dots$
- Les **connecteurs logiques** :  $\neg$  (négation),  $\wedge$  (conjonction),  $\vee$  (disjonction),  $\Rightarrow$  (implication),  $\Leftrightarrow$  (équivalence)
- Les **quantificateurs** :  $\forall$  (universel) et  $\exists$  (existential)
- Les **parenthèses** : ( et )
- Le symbole d'**égalité** :  $=$  (souvent inclus par défaut)

A ces symboles on leur associe dans un second temps leur sens logique usuel. Mais lorsque l'on définit un alphabet contenant ces symboles logiques, il n'ont aucun sens à priori à moins qu'on le spécifie. On donne la ici la sémantique à la syntaxe.

La construction d'un langage du premier ordre consiste à donner une **grammaire** à un dictionnaire. C'est à dire qu'un mot qui respecte des règles grammaticales données appartiendra à notre langage, dans ce cas on dit que ce mot est une formule de notre langage. Cela se fait de manière inductive en plusieurs couches. Nous commençons par définir les expressions les plus simples, les *termes*, qui désignent des objets de la théorie.

**Définition 1.2.6 — Terme.** L'ensemble des **termes** d'un langage du premier ordre de signature  $\tau$  est défini inductivement par :

1. Toute variable est un terme
2. Tout symbole de constante de  $\tau$  est un terme
3. Si  $f$  est un symbole de fonction d'arité  $n$ , c'est à dire le nombre de paramètres que prend notre symbole, dans  $\Sigma$  et si  $t_1, \dots, t_n$  sont des termes, alors  $f(t_1, \dots, t_n)$  est un terme
4. Rien d'autre n'est un terme

Les termes, une fois interprétés, désigneront des éléments d'un ensemble (appelé domaine ou univers). À partir de ces termes, nous construisons les *formules atomiques*, qui sont les assertions les plus élémentaires.

**Définition 1.2.7 — Formule atomique.** Une **formule atomique** est une expression de l'une des formes suivantes :

1. Si  $R$  est un symbole de relation d'arité  $n$  et si  $t_1, \dots, t_n$  sont des termes, alors  $R(t_1, \dots, t_n)$  est une formule atomique
2. Si  $t_1$  et  $t_2$  sont des termes, alors  $t_1 = t_2$  est une formule atomique (lorsque l'égalité fait partie du langage)

Nous pouvons maintenant définir l'ensemble complet des formules bien formées en combinant les formules atomiques avec les connecteurs logiques et les quantificateurs.

**Définition 1.2.8 — Formule bien formée.** L'ensemble des **formules** (ou formules bien formées) d'un langage du premier ordre est défini inductivement par :

1. Toute formule atomique est une formule
2. Si  $\varphi$  est une formule, alors  $\neg\varphi$  est une formule
3. Si  $\varphi$  et  $\psi$  sont des formules, alors  $(\varphi \wedge \psi)$ ,  $(\varphi \vee \psi)$ ,  $(\varphi \Rightarrow \psi)$  et  $(\varphi \Leftrightarrow \psi)$  sont des formules
4. Si  $\varphi$  est une formule et  $x$  est une variable, alors  $\forall x \varphi$  et  $\exists x \varphi$  sont des formules
5. Rien d'autre n'est une formule

### 1.3 Le langage de la théorie ZF

Nous sommes maintenant en mesure de construire le langage spécifique dans lequel sera formulée la théorie de Zermelo-Fraenkel, que nous noterons  $\mathcal{L}_\in$ .

Le langage  $\mathcal{L}_\in$  est un langage du premier ordre dont la signature est d'une extrême simplicité.

**Définition 1.3.1 — Signature de ZF.** La signature  $\tau_\in$  du langage  $\mathcal{L}_\in$  est donnée par :

$$\tau_\in = \{\in, =\}$$

où  $\in$  est un symbole de relation binaire (l'appartenance) et  $=$  est le symbole d'égalité. Cette signature ne contient **aucun** symbole de fonction et **aucune** constante.

Cette simplicité n'est pas anodine : elle reflète le fait que dans la théorie ZF, tout est ensemble,

et la seule structure primitive est la relation d'appartenance. Tous les autres objets mathématiques (fonctions, nombres, relations) seront construits à partir de cette unique notion.

Pour construire concrètement les formules du langage, nous devons spécifier l'alphabet complet. L'alphabet  $\Sigma_{\in}$  est constitué des symboles suivants :

- Les connecteurs logiques :  $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$
- Les quantificateurs :  $\forall, \exists$
- Les symboles de relation :  $=, \in$
- Les parenthèses :  $(, )$
- Le symbole prime :  $'$
- Les lettres latines et grecques :  $a, b, c, \dots, z, \alpha, \beta, \gamma, \dots, \omega$
- Les dix chiffres arabes :  $0, 1, 2, \dots, 9$

Les variables dans  $\mathcal{L}_{\in}$  sont construites selon des règles permettant d'en obtenir une infinité dénombrable.

**Définition 1.3.2 — Variables de  $\mathcal{L}_{\in}$ .** Les **variables** du langage  $\mathcal{L}_{\in}$  sont définies récursivement par :

1. Toute lettre (latine ou grecque) est une variable
2. Si  $x$  est une variable, alors  $x'$  est une variable
3. Si  $x$  est une variable et si  $n$  est un mot formé de chiffres, alors  $x_n$  est une variable

Ainsi,  $x, y', z_{12}, \alpha, \beta''$  sont toutes des variables de  $\mathcal{L}_{\in}$ .

**R** Bien que nous utilisions les chiffres pour indiquer les variables, il est important de comprendre qu'il s'agit d'une convention **métathéorique**. Nous n'avons pas encore défini les nombres entiers dans notre théorie ; les chiffres servent ici uniquement de symboles pour distinguer différentes variables. On pourrait dire que nous empruntons la notation des entiers au métalangage pour faciliter l'écriture, sans présupposer leur existence dans la théorie elle-même.

Nous pouvons maintenant définir précisément les formules de  $\mathcal{L}_{\in}$ , c'est-à-dire donner la *grammaire* de notre langage.

Puisque les seuls termes sont les variables et que notre signature ne contient que deux symboles de relation, les formules atomiques sont particulièrement simples.

**Définition 1.3.3 — Formules atomiques de  $\mathcal{L}_{\in}$ .** Les **formules atomiques** de  $\mathcal{L}_{\in}$  sont exactement les expressions de la forme :

- $x = y$  où  $x$  et  $y$  sont des variables
- $x \in y$  où  $x$  et  $y$  sont des variables

À partir de ces formules atomiques, nous construisons toutes les formules de  $\mathcal{L}_{\in}$  en appliquant les règles de formation des formules du premier ordre.

**Définition 1.3.4 — Formules de  $\mathcal{L}_{\in}$ .** L'ensemble des **formules** de  $\mathcal{L}_{\in}$  est défini inductivement par :

1. Toute formule atomique ( $x = y$  ou  $x \in y$ ) est une formule
2. Si  $\varphi$  est une formule, alors  $\neg\varphi$  est une formule
3. Si  $\varphi$  et  $\psi$  sont des formules, alors les expressions suivantes sont des formules :
  - $(\varphi \wedge \psi)$  — la conjonction : «  $\varphi$  et  $\psi$  »
  - $(\varphi \vee \psi)$  — la disjonction : «  $\varphi$  ou  $\psi$  »
  - $(\varphi \Rightarrow \psi)$  — l'implication : « si  $\varphi$  alors  $\psi$  »
  - $(\varphi \Leftrightarrow \psi)$  — l'équivalence : «  $\varphi$  si et seulement si  $\psi$  »
4. Si  $\varphi$  est une formule et  $x$  est une variable, alors :
  - $\forall x \varphi$  — la quantification universelle : « pour tout  $x$ ,  $\varphi$  »

—  $\exists x \varphi$  — la quantification existentielle : « il existe  $x$  tel que  $\varphi$  »

5. Rien d'autre n'est une formule de  $\mathcal{L}_\in$

Cette définition inductive nous assure que toute formule de  $\mathcal{L}_\in$  peut être construite en un nombre fini d'étapes à partir des formules atomiques.

■ **Exemple 1.1** Voici quelques exemples de formules de  $\mathcal{L}_\in$  :

1.  $\forall x \exists y (x \in y)$  — « Pour tout  $x$ , il existe  $y$  tel que  $x$  appartient à  $y$  »
2.  $\forall x \forall y ((\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y)) \Rightarrow x = y)$
3.  $\exists x \forall y \neg(y \in x)$  — « Il existe un ensemble qui ne contient aucun élément »

Les notions de variables libres, variables liées et formules closes se définissent pour  $\mathcal{L}_\in$  exactement comme pour tout langage du premier ordre, c'est à dire qu'un variable libre est une variables ne dépendant d'aucun quantificateurs. Tandis qu'un variable liée dépend d'un quantificateur.

■ **Définition 1.3.5 — Énoncé de  $\mathcal{L}_\in$ .** Un énoncé de  $\mathcal{L}_\in$  est une formule sans variables libres.



Les axiomes de la théorie ZF seront tous des énoncés de  $\mathcal{L}_\in$ . Un axiome ne contient pas de variables libres : il affirme quelque chose d'universel sur tous les ensembles ou l'existence de certains ensembles, sans référence à des ensembles particuliers non spécifiés.

Nous avons maintenant établi le cadre formel dans lequel la théorie de Zermelo-Fraenkel sera développée. Le langage  $\mathcal{L}_\in$ , malgré sa simplicité apparente ou plutôt grâce à elle, s'avérera suffisamment expressif pour formaliser l'intégralité des mathématiques modernes.

La théorie ZF elle-même consistera en un ensemble d'énoncés de  $\mathcal{L}_\in$ , appelés axiomes, qui caractériseront le comportement de la relation d'appartenance. Ces axiomes ont été soigneusement choisis pour capturer notre intuition ensembliste tout en évitant les paradoxes qui ont tourmenté la théorie naïve des ensembles au début du XX<sup>e</sup> siècle.

Dans la section suivante, nous énoncerons et étudierons en détail ces axiomes fondamentaux.

Commençons par donner cinq axiomes dont les énoncés sont relativement aisés à comprendre et qui sont en accords avec l'intuition commune.

## 1.4 Axiomes élémentaires

**Axiome 1.4.1 — d'extensionnalité.** Deux ensembles possédant les mêmes éléments sont égaux :

$$\forall A, \forall B, [\forall x, (x \in A \leftrightarrow x \in B)] \Rightarrow A = B$$

Tout naturellement, nous pouvons facilement prouver l'implication réciproque. En effet, si on suppose qu'on a deux ensembles  $A$  et  $B$  égaux alors par définition de l'égalité en prenant un élément  $x$  de  $A$  et la formule  $\varphi(y) \equiv x \in y$  (qui est bien dans le langage de ZF). Nous obtenons que

$$\varphi(A) \Leftrightarrow \varphi(B).$$

C'est à dire que  $A = B \Rightarrow \forall x (x \in A \leftrightarrow x \in B)$

**Axiome 1.4.2 — de l'ensemble vide.** Il existe un ensemble qui ne contient aucun éléments :

$$\exists E, \forall x, x \notin E$$

**Proposition 1.4.3** Il n'y a qu'un seul ensemble qui ne possède aucun élément. On l'appelle ensemble vide et on le note  $\emptyset$ .

*Démonstration.* Cela résulte des deux axiomes précédant ■

**Axiome 1.4.4 — de la paire.** Pour tous ensembles  $a$  et  $b$ , il existe un ensemble, noté  $\{a, b\}$ , admettant comme éléments  $a$  et  $b$  et rien d'autre.

$$\forall a, \forall b, \exists E, \forall x, [x \in E \Leftrightarrow (x = a \vee x = b)]$$

**Axiome 1.4.5 — de la réunion.** Pour tout ensemble  $I$ , il existe un ensemble  $U$  dont les éléments sont les éléments des éléments de  $I$ .

$$\forall I, \exists U, \forall x, [x \in U \Leftrightarrow \exists i, (i \in I \wedge x \in i)]$$

L'ensemble  $U$  est appelé la réunion des éléments de  $I$

Par exemple, si  $I = \{\{a, b\}, \{c, d\}, \{d\}\}$  alors  $U = \{a, b, c, d\}$ . Ce qu'on note  $\bigcup I$ .

**Définition 1.4.1** Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles, on définit l'union de  $A$  et  $B$  que l'on note  $A \cup B$  par l'ensemble  $\bigcup I$  où  $I = \{A, B\}$ .

**Définition 1.4.2** On dit qu'un ensemble  $A$  est contenu dans un ensemble  $B$ , ou que  $A$  est une partie de  $B$  si tout élément de  $A$  est élément de  $B$

$$\forall x, [x \in A \Rightarrow x \in B]$$

On écrit alors  $A \subseteq B$

**R** De cette définition, il en vient naturellement que deux ensembles  $A$  et  $B$  sont égaux si et seulement si il sont inclus l'un à l'autre, c'est à dire  $A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$

**Axiome 1.4.6 — de l'ensemble des parties.** Pour tout ensemble  $A$ , il existe un ensemble  $P$  dont les éléments sont les ensembles contenus dans  $A$ .

$$\forall A, \exists P, \forall x, [x \in P \Leftrightarrow \forall y, (y \in x \Rightarrow y \in A)]$$

Cet ensemble est noté  $\mathcal{P}(A)$ .

**R** Notons que l'ensemble vide, appartient toujours à  $\mathcal{P}(A)$  pour tout  $A$ .

**Axiome 1.4.7 — de l'infini.** Il existe un ensemble  $N$  qui vérifie

$$\exists N, (\emptyset \in N \wedge \forall n, (n \in N \Rightarrow n \cup \{n\} \in N))$$

Ce qui veut dire qu'il existe un ensemble  $N$  qui admet notamment comme éléments  $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \dots$

Nous recommandons grandement au lecteur de bien prendre note de la première section avant de continuer. Sans ces notions élémentaires, il ne sera pas possible de comprendre pleinement les axiomes suivants et donc de prouver l'existence de certains ensembles.

## 1.5 Les axiomes techniques

D'autres axiomes sont donc nécessaires pour que la théorie puisse être utilisée. Voici donc, en plus des cinq précédents, les axiomes de séparation (aussi appelé axiomes de compréhension), les axiomes de substitution et l'axiome de fondation. Ces axiomes constituent la théorie ZF, pour Zermolo-Fraenkel. Et lorsque nous ajouterons l'axiome du choix, nous obtiendrons la théorie ZFC. On considère des expression logique  $\mathcal{C}(x, x_1, \dots, x_k)$  en des variables  $x, x_1, \dots, x_k$  dans le langage de ZF. Pour chaque expression de ce type, on a un axiome de séparation.

**Axiome 1.5.1 — de séparation ou de compréhension.** Pour chaque expression logique  $\mathcal{C}(x, x_1, \dots, x_k)$ , en des variables  $x, x_1, \dots, x_k$ , il y a un axiome de séparation dont voici l'énoncé :

$$\forall x, \forall x_1, \dots, x_k, \forall X, \exists Z, [x \in Z \Leftrightarrow (x \in X \wedge \mathcal{C}(x, x_1, \dots, x_k))]$$

L'ensemble  $Z$  est appelé l'ensemble des  $x \in X$  tels que  $\mathcal{C}(x, x_1, \dots, x_k)$  et il est noté  $\{x \in X \mid \mathcal{C}(x, x_1, \dots, x_k)\}$

Nous pouvons donc séparer les éléments d'un ensemble existant avec une formule dans le langage de ZF.

**Définition 1.5.1** Soit  $A$  un ensemble non vide. Dès lors, il existe  $a \in A$ . On peut donc définir l'ensemble  $I(a, A)$  par  $\{x \in a \mid \forall b \in A, x \in b\}$ .

On va montrer que cet ensemble ne dépend pas du choix de  $a$ , ce qui nous permettra de l'appeler l'intersection de  $A$ , et de le noter  $\cap A$

*Démonstration.* Soit  $a, a' \in A$ . Comme  $a' \in A$ , il vient  $I(a, A) \subseteq I(a', A)$ . Par symétrie,  $I(a', A) \subseteq I(a, A)$ , d'où  $I(a, A) = I(a', A)$  ■

**Définition 1.5.2** Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles on note  $A \cap B$  l'intersection entre  $A$  et  $B$  qui est l'ensemble  $\cap C$  où  $C = \{A, B\}$

**Axiome 1.5.2 — de substitution ou de remplacement.** Pour chaque expression logique de type  $\mathcal{C}(x, y, x_1, \dots, x_k)$ , il y a un axiome de substitution dont voici l'énoncé :

$$\begin{aligned} \forall X, & [(\forall x \in X), \forall y_1, \forall y_2 (\mathcal{C}(x, y_1, x_1, \dots, x_k) \wedge \mathcal{C}(x, y_2, x_1, \dots, x_k) \Rightarrow y_2 = y_1) \Rightarrow \\ & \exists Y, \forall y (y \in Y \Leftrightarrow \exists x \in X, \mathcal{C}(x, y, x_1, \dots, x_k))]. \end{aligned}$$

cela implique que, et c'est probablement ce qu'il faut en retenir, que si  $X$  est un ensemble et  $f$  est une expression logique définissant une fonction sur  $X$ , alors l'ensemble  $\{f(x) \mid x \in X\}$ . On obtiendra le résultat en prenant pour l'expression logique  $\mathcal{C}(x, y, x_1, \dots, x_k)$  l'expression  $y = f(x)$ .

**Axiome 1.5.3 — de fondation.** Tout ensemble non vide  $A$  possède un élément  $a$  tel que  $a \cap A = \emptyset$

L'axiome de fondation assure que la relation d'appartenance est bien fondée, excluant toute boucle du type  $A \in A$  ou chaînes infinies d'appartenance. Il garantit ainsi une hiérarchie claire des ensembles et permet les raisonnements par récurrence sur leur structure.

## 1.6 Conséquences

**Proposition 1.6.1** Pour tout ensemble  $a$ , il existe un ensemble et un seul dont  $a$  est le seul élément. Cet ensemble est noté  $\{a\}$

*Démonstration.* Il s'agit d'un cas particulier de l'axiome de la paire avec  $a = b$ . ■

**Proposition 1.6.2** Si on a un nombre fini d'ensemble  $x_1, \dots, x_k$ , il existe un ensemble et un seul dont les éléments sont  $x_1, \dots, x_k$ , et eux seulement. Cet ensemble est noté  $\{x_1, \dots, x_k\}$

*Démonstration.* Le résultat se construit par itération finie à l'aide des axiomes de la paire et de la réunion.

En effet, l'axiome de la paire assure que, pour tout couple d'ensembles  $x, y$ , l'ensemble  $\{x, y\}$  existe. En supposant construit un ensemble  $Y = \{x_1, \dots, x_{k-1}\}$ , on applique l'axiome de la paire à  $Y$  et  $x_k$ , ce qui donne  $\{Y, x_k\}$ . L'axiome de la réunion fournit alors

$$\bigcup\{Y, x_k\} = Y \cup \{x_k\} = \{x_1, \dots, x_k\}.$$

L'unicité découle de l'axiome d'extensionnalité. ■

**Proposition 1.6.3** Il n'existe pas d'ensemble  $A$  tel que  $A \in A$ .

*Démonstration.* Si un tel ensemble existait, l'axiome de fondation appliqué à  $\{A\}$  fournirait un élément  $a \in A$  tel que  $a \cap \{A\} = \emptyset$ , ce qui contredit  $A \in A$ . ■

**Définition 1.6.1 — Complémentaire.** Soit  $E$  un ensemble et  $A \subseteq E$ . On appelle *complémentaire de  $A$  dans  $E$*  l'ensemble des éléments de  $E$  qui n'appartiennent pas à  $A$ , noté  $\complement_E A$  ou  $E \setminus A$  :

$$\complement_E A = \{x \in E \mid x \notin A\}.$$

**Proposition 1.6.4 — Lois de De Morgan.** Soient  $A, B \subseteq E$ . On a les égalités suivantes :

$$\complement_E(A \cup B) = (\complement_E A) \cap (\complement_E B) \quad \text{et} \quad \complement_E(A \cap B) = (\complement_E A) \cup (\complement_E B).$$

*Démonstration.* Soit  $x \in E$ .

$$\begin{aligned} x \in \complement_E(A \cup B) &\Leftrightarrow x \notin A \cup B \\ &\Leftrightarrow (x \notin A) \wedge (x \notin B) \\ &\Leftrightarrow x \in (\complement_E A) \cap (\complement_E B), \end{aligned}$$

ce qui prouve la première égalité. La seconde s'obtient de façon analogue en remplaçant  $\vee$  par  $\wedge$  dans les équivalences logiques. ■

**R** Ces lois traduisent en langage ensembliste les lois de De Morgan de la logique propositionnelle :

$$\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P) \wedge (\neg Q), \quad \neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q).$$

Elles illustrent le parallèle étroit entre logique et théorie des ensembles. Lorsque le contexte est clair, on note  $A^C$  le complémentaire de  $A$  dans  $E$

Dans ce chapitre, nous avons donc énoncé les axiomes qui constituent la théorie ZF et qui nous permettent, de plusieurs manière, de construire des ensembles de manière formelle. Par la suite nous avons établi les opérations ensemblistes basiques qui sont l'intersection, l'union, la complémentarité, l'appartenance et l'inclusion. A partir de cela nous allons maintenant entamer les constructions qui formeront des concepts fondamentaux en mathématique.





## Bibliographie

**Livres**

**Documents**

