# Recueil mathématique

## Notes d'un voyage dans l'abstraction

Tiago Piette & Manoa Hamiot

PUBLISHED BY PUBLISHER

BOOK-WEBSITE.COM



*First printing, March 2013*

# Table des matières

# Théorie des ensembles

# 1. Axiomatisation de Zermolo-Fraenkel

## 1.1 Paradoxe de Russel

Jusqu'au début du XX$^{\text{e}}$ siècle, les mathématiciens manipulaient les ensembles de manière dite *naïve*. On les concevait d'abord comme des objets géométriques (points, droites, cercles, etc.), puis comme de simples collections d'objets partageant une propriété commune.

C'est le mathématicien allemand Georg Cantor (1845–1918) qui, à partir de 1874, posa les bases de la *théorie naïve des ensembles*. Cette approche intuitive permit à Cantor de développer la notion de *cardinalité* et d'étudier différents « types d'infini » par des travaux qui révolutionnèrent les fondements des mathématiques modernes. Cependant, cette théorie, bien que féconde, se révéla insuffisamment rigoureuse.

En 1901, le philosophe et logicien britannique Bertrand Russell (1872–1970) mit en évidence une contradiction au cœur même de la théorie naïve : le *paradoxe de Russell*. Considérons l'ensemble suivant :

$$R := \{x \text{ ensemble} \mid x \notin x\}.$$

Autrement dit, $R$ désigne l'ensemble de tous les ensembles qui ne se contiennent pas eux-mêmes. La question est alors : $R$ appartient-il à lui-même ?

Deux cas se présentent :
- Si $R \in R$, alors par définition de $R$, on doit avoir $R \notin R$.
- Si $R \notin R$, alors, toujours par définition, $R$ satisfait la condition pour appartenir à $R$ ; donc $R \in R$.

Dans les deux cas, on aboutit à la contradiction suivante :

$$R \in R \iff R \notin R.$$

Cette impossibilité logique révèle une faille fondamentale de la théorie naïve : certaines définitions « trop générales » engendrent des paradoxes.

Pour surmonter cette difficulté, les mathématiciens entreprirent de fonder la théorie des ensembles sur une base axiomatique rigoureuse. En 1908, Ernst Zermelo (1871–1953) proposa une première axiomatisation visant à éviter les paradoxes. Cette théorie fut ensuite enrichie en 1922 par ABRAHAM FRAENKEL (1891–1965) et, indépendamment, par THORALF SKOLEM (1887–1963). L'ensemble de ces axiomes constitue la théorie des ensembles **ZF** (*Zermelo–Fraenkel*). Lorsqu'on y ajoute l'axiome du choix, on obtient la théorie **ZFC**, aujourd'hui la base de la plupart des mathématiques formelles.

Cependant, même la théorie ZF ne permet pas de manipuler des « collections trop grandes » comme la collection de tous les ensembles car celle-ci n'est pas un ensemble, mais une *classe propre*. Pour traiter de telles collections, d'autres systèmes ont été développés, notamment la théorie **NBG** (*von Neumann–Bernays–Gödel*), qui étend ZF en introduisant une distinction explicite entre ensembles et classes. Dans ce chapitre, nous allons construire la théorie ZF en donnant les différents axiomes ainsi que leurs conséquences qui nous permettrons d'établir nos premières constructions.

## 1.2 Logique élémentaire

L'objectif de cette section est de fournir le minimum logique nécessaire avant de construire la théorie axiomatique ZF. Pour ce faire, nous allons adopter une approche naïve de la théorie du langage.

> « Nous ne discuterons pas de la possibilité d'enseigner les principes du langage formalisé à des êtres ne sachant pas lire ou compter. »

Cette citation, bien qu'elle puisse sembler évidente, met en lumière un point fondamental. Pour pouvoir faire des mathématiques, nous devons nécessairement nous appuyer sur certaines capacités intellectuelles préexistantes. En effet, si nous souhaitons être complètement formels, nous définirions certaines collections comme dénombrables ; mais la notion même de dénombrabilité n'est établie que bien plus tard dans la théorie. Autrement dit, pour définir rigoureusement la dénombrabilité, nous utilisons des bases logiques qui reposent déjà sur elle. Nous sommes donc confrontés à un problème inextricable de circularité. Pour éviter au mieux ce problème, nous faisons reposer la logique sur certaines capacités du lecteur. On suppose que le lecteur a la capacité de distinguer si deux symboles sont identiques ou non, par symboles, on entend des marques visibles sur un support. On suppose également qu'il lui est possible de compter, d'énumérer des objets et de les regrouper dans une liste ou une collection. Enfin, il doit être capable de distinguer si une collection d'objets est finie ou infinie. Nous noterons les collections en listant les objets entre crochets. Pour les termes utilisés mais non définis ici, le lecteur peut considérer qu'ils ont leurs sens usuels. À noter que, sauf mention explicite du contraire, un symbole quelconque n'a aucun sens mathématique intrinsèque. Nous distinguons ici clairement la syntaxe de la sémantique. Commençons par les notions les plus élémentaires de la théorie des langages formels.

**Définition 1.2.1 — Alphabet.** Un **alphabet** $\Sigma$ est une collection finie de symboles. Un symbole d'un alphabet est appelé une **lettre**.

**Définition 1.2.2 — Mot.** Un **mot** sur un alphabet $\Sigma$ est une séquence *finie* de symboles de $\Sigma$. On note $\varepsilon$ le **mot vide**, qui ne contient aucun symbole.

Les mots peuvent être combinés par l'opération de *concaténation*. Si $u$ et $v$ sont deux mots, leur concaténation $uv$ est simplement le mot obtenu en juxtaposant les symboles de $u$ suivi de ceux de $v$.

**Définition 1.2.3 — Clôture de Kleene.** Soit $\Sigma$ un alphabet. La **clôture de Kleene** de $\Sigma$, notée $\Sigma^*$, est la collection de tous les mots finis sur $\Sigma$, y compris le mot vide.

R La clôture de Kleene est fermée par concaténation : si $u, v \in \Sigma^*$, alors $uv \in \Sigma^*$.

**Proposition 1.2.1** Pour tout alphabet $\Sigma$, la collection $\Sigma^*$ est infinie et énumérable.

Cette proposition ne peut être prouvée rigoureusement à ce stade ; nous construirons formellement les outils nécessaires dans les sections dédiées à l'arithmétique et aux cardinaux.

**Définition 1.2.4 — Langage.** Un **langage** (ou dictionnaire) $\mathscr{L}$ sur un alphabet $\Sigma$ est une sous-collection de $\Sigma^*$, ce que l'on note :

$$\mathscr{L} \subseteq \Sigma^*$$

R Il est crucial de comprendre que tous les mots ne sont pas des **formules**. Une formule est un mot qui respecte certaines règles grammaticales spécifiques que nous définirons précisément. Un langage $\mathscr{L}$ spécifie exactement quels mots de $\Sigma^*$ sont considérés comme des formules bien formées selon sa grammaire.

Avant de construire le langage spécifique à la théorie ZF, il convient de définir ce qu'est un langage du premier ordre de manière générale. Cette digression nous permettra de situer ZF dans le cadre plus large de la logique mathématique.

La logique du *premier ordre*, également appelée calcul des prédicats, est un système formel où les quantificateurs $\forall$ (pour tout) et $\exists$ (il existe) ne portent que sur des *individus*, représentés par des variables. Ce qui caractérise fondamentalement le premier ordre est qu'on ne peut pas quantifier sur des propriétés, des relations ou des collections de ces individus.

Par exemple, la formule

$$\forall x \exists y \, (x \in y)$$

est une formule du premier ordre : les quantificateurs portent sur des objets $x$ et $y$. En revanche, une formule hypothétique du type

$$\forall P \, \exists x \, P(x)$$

où $P$ est une variable de propriété, relève de la logique du *second ordre*, qui sort de notre cadre. Dans cette dernière formule, on quantifierait sur toutes les propriétés $P$, ce qui n'est pas autorisé en logique du premier ordre.

Pour comprendre ce qu'est un langage du premier ordre, il faut distinguer deux types de symboles : les symboles logiques, communs à tous les langages du premier ordre, et les symboles non-logiques, qui varient d'un langage à l'autre et caractérisent chaque théorie spécifique.

Un langage du premier ordre est entièrement déterminé par une *signature* qui précise les symboles non logiques disponibles. La définition suivante est naïve mais nous permet de comprendre la structure des langages du premier ordre.

**Définition 1.2.5 — Signature.** Une **signature** $\tau$ consiste en trois types de symboles :

1. Des **symboles de relation** (ou prédicats),
2. Des **symboles de fonction**,
3. Des **symboles de constante**.

Outre la signature, tout alphabet de langage du premier ordre contient des symboles logiques universels :

— Un ensemble infini $\mathscr{V}$ de **variables**, typiquement notées $x, y, z, x', x'', x_1, x_2, \ldots$

— Les **connecteurs logiques** : $\neg$ (négation), $\wedge$ (conjonction), $\vee$ (disjonction), $\Rightarrow$ (implication), $\Leftrightarrow$ (équivalence)

— Les **quantificateurs** : $\forall$ (universel) et $\exists$ (existentiel)

— Les **parenthèses** : ( et )

— Le symbole d'**égalité** : $=$ (souvent inclus par défaut)

A ces cymboles on leur associe dans un second temps leur sens logique usuel. Mais lorsque l'on définit un alphabet contenant ces symboles logiques, il n'ont aucun sens à prioris à moins qu'on le spécifie. On donne la ici la sémantique à la syntaxe.

La construction d'un langage du premier ordre consiste à donner une **grammaire** à un dictionnaire. C'est à dire qu'un mot qui respecte des rêgles grammaticales données appartiendra à notre langage, dans ce cas on dit que ce mot est une formule de notre langage. Cela se fait de manière inductive en plusieurs couches. Nous commençons par définir les expressions les plus simples, les *termes*, qui désignent des objets de la théorie.

**Définition 1.2.6 — Terme.** L'ensemble des **termes** d'un langage du premier ordre de signature $\tau$ est défini inductivement par :

1. Toute variable est un terme
2. Tout symbole de constante de $\tau$ est un terme
3. Si $f$ est un symbole de fonction d'arité $n$, c'est à dire le nombre de parametres que prend notre symbole, dans $\Sigma$ et si $t_1,\dots,t_n$ sont des termes, alors $f(t_1,\dots,t_n)$ est un terme
4. Rien d'autre n'est un terme

Les termes, une fois interprétés, désigneront des éléments d'un ensemble (appelé domaine ou univers). À partir de ces termes, nous construisons les *formules atomiques*, qui sont les assertions les plus élémentaires.

**Définition 1.2.7 — Formule atomique.** Une **formule atomique** est une expression de l'une des formes suivantes :

1. Si $R$ est un symbole de relation d'arité $n$ et si $t_1,\dots,t_n$ sont des termes, alors $R(t_1,\dots,t_n)$ est une formule atomique
2. Si $t_1$ et $t_2$ sont des termes, alors $t_1 = t_2$ est une formule atomique (lorsque l'égalité fait partie du langage)

Nous pouvons maintenant définir l'ensemble complet des formules bien formées en combinant les formules atomiques avec les connecteurs logiques et les quantificateurs.

**Définition 1.2.8 — Formule bien formée.** L'ensemble des **formules** (ou formules bien formées) d'un langage du premier ordre est défini inductivement par :

1. Toute formule atomique est une formule
2. Si $\varphi$ est une formule, alors $\neg\varphi$ est une formule
3. Si $\varphi$ et $\psi$ sont des formules, alors $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \Rightarrow \psi)$ et $(\varphi \Leftrightarrow \psi)$ sont des formules
4. Si $\varphi$ est une formule et $x$ est une variable, alors $\forall x\,\varphi$ et $\exists x\,\varphi$ sont des formules
5. Rien d'autre n'est une formule

## 1.3 Le langage de la théorie ZF

Nous sommes maintenant en mesure de construire le langage spécifique dans lequel sera formulée la théorie de Zermelo-Fraenkel, que nous noterons $\mathscr{L}_\in$.

Le langage $\mathscr{L}_\in$ est un langage du premier ordre dont la signature est d'une extrême simplicité.

**Définition 1.3.1 — Signature de ZF.** La signature $\tau_\in$ du langage $\mathscr{L}_\in$ est donnée par :

$$\tau_\in = \{\in, =\}$$

où $\in$ est un symbole de relation binaire (l'appartenance) et $=$ est le symbole d'égalité. Cette signature ne contient **aucun** symbole de fonction et **aucune** constante.

Cette simplicité n'est pas anodine : elle reflète le fait que dans la théorie ZF, tout est ensemble, et la seule structure primitive est la relation d'appartenance. Tous les autres objets mathématiques (fonctions, nombres, relations) seront construits à partir de cette unique notion.

Pour construire concrètement les formules du langage, nous devons spécifier l'alphabet complet. L'alphabet $\Sigma_\in$ est constitué des symboles suivants :

— Les connecteurs logiques : $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$
— Les quantificateurs : $\forall, \exists$
— Les symboles de relation : $=, \in$
— Les parenthèses : $(, )$
— Le symbole prime : $'$
— Les lettres latines et grecques : $a, b, c, \dots, z, \alpha, \beta, \gamma, \dots, \omega$
— Les dix chiffres arabes : $0, 1, 2, \dots, 9$

Les variables dans $\mathscr{L}_\in$ sont construites selon des règles permettant d'en obtenir une infinité dénombrable.

**Définition 1.3.2 — Variables de $\mathscr{L}_\in$.** Les **variables** du langage $\mathscr{L}_\in$ sont définies récursivement par :

1. Toute lettre (latine ou grecque) est une variable
2. Si $x$ est une variable, alors $x'$ est une variable
3. Si $x$ est une variable et si $n$ est un mot formé de chiffres, alors $x_n$ est une variable

Ainsi, $x, y', z_{12}, \alpha, \beta''$ sont toutes des variables de $\mathscr{L}_\in$.

R Bien que nous utilisions les chiffres pour indicer les variables, il est important de comprendre qu'il s'agit d'une convention **métathéorique**. Nous n'avons pas encore défini les nombres entiers dans notre théorie ; les chiffres servent ici uniquement de symboles pour distinguer différentes variables. On pourrait dire que nous empruntons la notation des entiers au métalangage pour faciliter l'écriture, sans présupposer leur existence dans la théorie elle-même.

Nous pouvons maintenant définir précisément les formules de $\mathscr{L}_\in$, c'est-à-dire donner la *grammaire* de notre langage.

Puisque les seuls termes sont les variables et que notre signature ne contient que deux symboles de relation, les formules atomiques sont particulièrement simples.

**Définition 1.3.3 — Formules atomiques de $\mathscr{L}_\in$.** Les **formules atomiques** de $\mathscr{L}_\in$ sont exactement les expressions de la forme :

— $x = y$ où $x$ et $y$ sont des variables
— $x \in y$ où $x$ et $y$ sont des variables

À partir de ces formules atomiques, nous construisons toutes les formules de $\mathscr{L}_\in$ en appliquant les règles de formation des formules du premier ordre.

**Définition 1.3.4 — Formules de $\mathscr{L}_\in$.** L'ensemble des **formules** de $\mathscr{L}_\in$ est défini inductivement par :

1. Toute formule atomique ($x = y$ ou $x \in y$) est une formule
2. Si $\varphi$ est une formule, alors $\neg\varphi$ est une formule
3. Si $\varphi$ et $\psi$ sont des formules, alors les expressions suivantes sont des formules :
   — $(\varphi \wedge \psi)$ — la conjonction : « $\varphi$ et $\psi$ »
   — $(\varphi \vee \psi)$ — la disjonction : « $\varphi$ ou $\psi$ »
   — $(\varphi \Rightarrow \psi)$ — l'implication : « si $\varphi$ alors $\psi$ »
   — $(\varphi \Leftrightarrow \psi)$ — l'équivalence : « $\varphi$ si et seulement si $\psi$ »
4. Si $\varphi$ est une formule et $x$ est une variable, alors :
   — $\forall x\, \varphi$ — la quantification universelle : « pour tout $x$, $\varphi$ »

— $\exists x\, \varphi$ — la quantification existentielle : « il existe $x$ tel que $\varphi$ »

5. Rien d'autre n'est une formule de $\mathscr{L}_\in$

Cette définition inductive nous assure que toute formule de $\mathscr{L}_\in$ peut être construite en un nombre fini d'étapes à partir des formules atomiques.

■ **Exemple 1.1** Voici quelques exemples de formules de $\mathscr{L}_\in$ :

1. $\forall x \exists y\, (x \in y)$ — « Pour tout $x$, il existe $y$ tel que $x$ appartient à $y$ »
2. $\forall x \forall y\, ((\forall z\, (z \in x \Leftrightarrow z \in y)) \Rightarrow x = y)$
3. $\exists x \forall y\, \neg(y \in x)$ — « Il existe un ensemble qui ne contient aucun élément »

■

Les notions de variables libres, variables liées et formules closes se définissent pour $\mathscr{L}_\in$ exactement comme pour tout langage du premier ordre, c'est à dire qu'un varialbe libre est une variables ne dépendant d'aucun quantificateurs. Tandis qu'un variable liée dépend d'un quantificateur.

**Définition 1.3.5 — Énoncé de $\mathscr{L}_\in$.** Un **énoncé** de $\mathscr{L}_\in$ est une formule sans variables libres.

R Les axiomes de la théorie ZF seront tous des énoncés de $\mathscr{L}_\in$. Un axiome ne contient pas de variables libres : il affirme quelque chose d'universel sur tous les ensembles ou l'existence de certains ensembles, sans référence à des ensembles particuliers non spécifiés.

Nous avons maintenant établi le cadre formel dans lequel la théorie de Zermelo-Fraenkel sera développée. Le langage $\mathscr{L}_\in$, malgré sa simplicité apparente ou plutôt grâce à elle, s'avérera suffisamment expressif pour formaliser l'intégralité des mathématiques modernes.

La théorie ZF elle-même consistera en un ensemble d'énoncés de $\mathscr{L}_\in$, appelés axiomes, qui caractériseront le comportement de la relation d'appartenance. Ces axiomes ont été soigneusement choisis pour capturer notre intuition ensembliste tout en évitant les paradoxes qui ont tourmenté la théorie naïve des ensembles au début du XX$^{\text{e}}$ siècle.

Dans la section suivante, nous énoncerons et étudierons en détail ces axiomes fondamentaux.

Commençons par donner cinq axiomes dont les énoncés sont relativement aisés à comprendre et qui sont en accords avec l'intuition commune.

## 1.4 Axiomes élémentaires

**Axiome 1.4.1 — d'extensionnalité.** Deux ensembles possédant les mêmes éléments sont égaux :

$$\forall A, \forall B, \quad [\forall x,\, (x \in A \Leftrightarrow x \in B)] \Rightarrow A = B$$

Tout naturellement, nous pouvons facilement prouver l'implication réciproque. En effet, si on suppose qu'on a deux ensembles $A$ et $B$ égaux alors par définition de l'égalité en prenant un élément $x$ de $A$ et la formule $\varphi(y) \equiv x \in y$ (qui est bien dans le langage de $ZF$). Nous abtenons que

$$\varphi(A) \Leftrightarrow \varphi(B).$$

C'est à dire que $A = B \Rightarrow \forall x\, (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$

**Axiome 1.4.2 — de l'ensemble vide.** Il existe un ensemble qui ne contient aucun éléments :

$$\exists E, \forall x, x \notin E$$

**Proposition 1.4.3** Il n'y a qu'un seul ensemble qui ne possède aucun élément. On l'appelle ensemble vide et on le note $\varnothing$.

*Démonstration.* Cela résulte des deux axiomes précédant ■

**Axiome 1.4.4 — de la paire.** Pour tous ensembles $a$ et $b$, il existe un ensemble, noté $\{a,b\}$ , admettant comme éléments $a$ et $b$ et rien d'autre.

$$\forall a, \forall b, \quad \exists E, \forall x, [x \in E \Leftrightarrow (x = a \vee x = b)]$$

**Axiome 1.4.5 — de la réunion.** Pour tout ensemble $I$, il existe un ensemble $U$ dont les éléments sont les éléments des éléments $I$.

$$\forall I, \exists U, \forall x, [x \in U \Leftrightarrow \exists i, (i \in I \wedge x \in i)]$$

L'ensemble $U$ est appelé la réunion des éléments de $I$

Par exemple, si $I = \{\{a,b\},\{c,d\},\{d\}\}$ alors $U = \{a,b,c,d\}$. Ce qu'on note $\bigcup I$.

**Définition 1.4.1** Soient $A$ et $B$ deux ensembles, on définit l'union de $A$ et $B$ que l'on note $A \cup B$ par l'emsemble $\bigcup I$ où $I = \{A,B\}$.

**Définition 1.4.2** On dit qu'un ensemble $A$ est contenu dans un ensemble $B$, ou que $A$ est une partie de $B$ si tout élément de $A$ est élément de $B$

$$\forall x, [x \in A \Rightarrow x \in B]$$

On écrit alors $A \subseteq B$

**R** De cette définition, il en vient naturellement que deux ensembles $A$ et $B$ sont égaux si et seulement si il sont inclus l'un a l'autre, c'est à dire $A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$

**Axiome 1.4.6 — de l'ensemble des parties.** Pour tout ensemble $A$, il existe un ensemble $P$ dont les éléments sont les ensembles contenus dans $A$.

$$\forall A, \exists P, \forall x, [x \in P \Leftrightarrow \forall y, (y \in x \Rightarrow y \in A)]$$

Cet ensembles est noté $\mathscr{P}(A)$.

**R** Notons que l'ensemble vide, appartient toujours à $\mathscr{P}(A)$ pour tout $A$.

**Axiome 1.4.7 — de l'infini.** Il existe un ensemble $N$ qui vérifie

$$\exists N, (\varnothing \in N \wedge \forall n, (n \in N \Rightarrow n \cup \{n\} \in N))$$

Ce qui veut dire qu'il existe un ensemble $N$ qui admet notamment comme éléments $\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \dots$.

Nous recommandons grandement au lecteur de bien prendre note de la première section avant de continuer. Sans ces notions élémentaires, il ne sera pas possible de comprendre pleinement les axiomes suivants et donc de prouver l'existence de certains ensembles.

## 1.5 Les axiomes techniques

D'autres axiomes sont donc nécessaires pour que la théorie puisse être utilisée. Voici donc, en plus des cinq précédents, les axiomes de séparation (aussi appelé axiomes de compréhension), les axiomes de substitution et l'axiome de fondation. Ces axiomes constituent la théorie ZF, pour Zermolo-Fraenkel. Et lorsque nous ajouterons l'axiome du choix, nous obtiendrons la théorie ZFC. On considère des expression logique $\mathscr{C}(x,x_1,\dots,x_k)$ en des variables $x,x_1,\dots,x_k$ dans le language de ZF. Pour chaque expression de ce type, on a un axiome de séparation.

**Axiome 1.5.1 — de séparation ou de compréhension.** Pour chaque expression logique $\mathscr{C}(x,x_1,\dots,x_k)$, en des variables $x,x_1,\dots,x_k$, il y a un axiomes de séparation sont voici l'énoncé :

$$\forall x, \forall x_1,\dots,x_k, \forall X, \exists Z, \quad [x \in Z \Leftrightarrow (x \in X \wedge \mathscr{C}(x,x_1,\dots,x_k))]$$

L'ensemble $Z$ est appelé l'ensemble des $x \in X$ tels que $\mathscr{C}(x,x_1,\dots,x_k)$ et il est noté $\{x \in X \mid \mathscr{C}(x,x_1,\dots,x_k)\}$

Nous pouvons donc séparer les éléments d'un ensemble existant avec une formule dans le langage de ZF.

**Définition 1.5.1** Soit $A$ un ensemble non vide. Dès lors, il existe $a \in A$. On peut donc définir l'ensemble $I(a,A)$ par $\{x \in a \mid \forall b \in A, x \in b\}$.

On va montrer que cet ensemble ne dépend pas du choix de $a$, ce qui nous permettra de l'appeler l'intersection de $A$, et de le noter $\bigcap A$

*Démonstration.* Soit $a,a' \in A$. Comme $a' \in A$, il vient $I(a,A) \subseteq I(a',A)$. Par symétrie, $I(a',A) \subseteq I(a,A)$, d'où $I(a,A) = I(a',A)$ ■

**Définition 1.5.2** Soient $A$ et $B$ deux ensembles on note $A \cap B$ l'intersection entre $A$ et $B$ qui est l'ensembles $\bigcap C$ où $C = \{A,B\}$

**Axiome 1.5.2 — de substitution ou de remplacement.** Pour chaque expression logique de type $\mathscr{C}(x,y,x_1,\dots,x_k)$, il y a un axiome de substitution dont voici l'énoncé :

$$\forall X, \quad [(\forall x \in X), \forall y_1, \forall y_2 (\mathscr{C}(x,y_1,x_1,\dots,x_k) \wedge \mathscr{C}(x,y_2,x_1,\dots,x_k) \Rightarrow y_2 = y_1) \Rightarrow \exists Y, \forall y (y \in Y \Leftrightarrow \exists x \in X, \mathscr{C}(x,y,x_1,\dots,x_k))].$$

cela implique que, et c'est probablement ce qu'il faut en retenir, que si $X$ est un ensemble et $f$ est une expression logique définissant une fonction sur $X$, alors l'ensemble $\{f(x) \mid x \in X\}$. On obtiendra le résultat en prenant pour l'expression logique $\mathscr{C}(x,y,x_1,\dots,x_k)$ l'expression $y = f(x)$.

**Axiome 1.5.3 — de fondation.** Tout ensemble non vide $A$ possède un élément $a$ tel que $a \cap A = \varnothing$

L'axiome de fondation assure que la relation d'appartenance est bien fondée, excluant toute boucle du type $A \in A$ ou chaînes infinies d'appartenance. Il garantit ainsi une hiérarchie claire des ensembles et permet les raisonnements par récurrence sur leur structure.

## 1.6 Conséquences

**Proposition 1.6.1** Pour tout ensemble $a$, il existe un ensemble et un seul dont $a$ est le seul élément. Cet ensemble est noté $\{a\}$

*Démonstration.* Il s'agit d'un cas particulier de l'axiome de la paire avec $a = b$. ■

**Proposition 1.6.2** Si on a un nombre fini d'ensemble $x_1,\dots,x_k$, il existe un ensemble et un seul sont les éléments sont $x_1,\dots,x_k$, et eux seulement. Cet ensemble est noté $\{x_1,\dots,x_k\}$

*Démonstration.* Le résultat se construit par itération finie à l'aide des axiomes de la paire et de la réunion.

En effet, l'axiome de la paire assure que, pour tout couple d'ensembles $x,y$, l'ensemble $\{x,y\}$ existe. En supposant construit un ensemble $Y = \{x_1,\dots,x_{k-1}\}$, on applique l'axiome de la paire à $Y$ et $x_k$, ce qui donne $\{Y,x_k\}$. L'axiome de la réunion fournit alors

$$\bigcup\{Y,x_k\} = Y \cup \{x_k\} = \{x_1,\dots,x_k\}.$$

L'unicité découle de l'axiome d'extensionnalité. ■

**Proposition 1.6.3** Il n'existe pas d'ensemble $A$ tel que $A \in A$.

*Démonstration.* Si un tel ensemble existait, l'axiome de fondation appliqué à $\{A\}$ fournirait un élément $a \in A$ tel que $a \cap \{A\} = \varnothing$, ce qui contredit $A \in A$. ■

**Définition 1.6.1 — Complémentaire.** Soit $E$ un ensemble et $A \subseteq E$. On appelle *complémentaire de $A$ dans $E$* l'ensemble des éléments de $E$ qui n'appartiennent pas à $A$, noté $\complement_E A$ ou $E \setminus A$ :

$$\complement_E A = \{x \in E \mid x \notin A\}.$$

**Proposition 1.6.4 — Lois de De Morgan.** Soient $A,B \subseteq E$. On a les égalités suivantes :

$$\complement_E(A \cup B) = (\complement_E A) \cap (\complement_E B) \quad \text{et} \quad \complement_E(A \cap B) = (\complement_E A) \cup (\complement_E B).$$

*Démonstration.* Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned} x \in \complement_E(A \cup B) &\Leftrightarrow x \notin A \cup B \\ &\Leftrightarrow (x \notin A) \wedge (x \notin B) \\ &\Leftrightarrow x \in (\complement_E A) \cap (\complement_E B), \end{aligned}$$

ce qui prouve la première égalité. La seconde s'obtient de façon analogue en remplaçant $\vee$ par $\wedge$ dans les équivalences logiques. ■

**R** Ces lois traduisent en langage ensembliste les lois de De Morgan de la logique propositionnelle :

$$\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P) \wedge (\neg Q), \quad \neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q).$$

Elles illustrent le parallèle étroit entre logique et théorie des ensembles. Lorsque le contexte est clair, on note $A^C$ le complémentaire de $A$ dans $E$

Dans ce chapitre, nous avons donc énoncé les axiomes qui constituent la théorie ZF et qui nous permettent, de plusieurs manière, de construire des ensembles de manière formelle. Par la suite nous avons établit les opérations ensemblistes basiques qui sont l'intersection, l'union, la complémentarité, l'appartenance et l'inclusion. A partir de cela nous allons maintenant entamer les constructions qui formeront des concepts fondamentaux en mathématique.

# II Algèbre

# 2. Groupes

## 2.1 Structures algébriques

La théorie des groupes trouve son origine au début du XIX siècle, principalement dans les travaux d'Évariste Galois et de Niels Henrik Abel, qui étudiaient les conditions de résolubilité des équations polynomiales. Galois a introduit la notion de groupe pour formaliser les symétries des racines d'un polynôme, posant ainsi les bases d'une théorie devenue centrale en algèbre et dans de nombreuses branches des mathématiques. Dans le chapitre précédent, la théorie des ensembles ZFC (Zermelo–Fraenkel avec l'axiome du choix) nous a fourni un cadre logique solide pour définir rigoureusement les objets mathématiques. La théorie des groupes s'inscrit dans cette continuité : un groupe peut être vu comme un ensemble muni d'une loi de composition interne satisfaisant certaines propriétés (associativité, existence d'un élément neutre et d'inverses). L'intérêt de cette théorie est de permettre l'étude abstraite des symétries et des transformations, qu'elles soient géométriques, algébriques ou analytiques. Elle constitue ainsi une première étape vers une compréhension structurelle et unificatrice des mathématiques modernes.

**Définition 2.1.1** Soit $E$ un ensemble. On appelle loi de composition sur E une application f de $E \times E$ dans $E$. La valeur $f(x,y)$ de $f$ pour un couple $(x,y) \in E \times E$ s'appelle le composé de x et de y pour cette loi. Un ensemble muni d'une loi de composition est appelé un **magma**.

III

# Topologie

# 3. Espaces topologiques

Dans ce chapitre, nous allons considérer plusieurs façons d'associer à un ensemble ce qu'on appelle un espace topologique.

## 3.1 Filtres et voisinages

**Définition 3.1.1** Soit $X \neq \varnothing$. Soit $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(X)$ non vide. $\mathscr{F}$ est un filtre sur $X$ si $\mathscr{F}$ vérifie les propriétés suivantes

1. $\varnothing \notin \mathscr{F}$
2. $\forall A, B \in \mathscr{F} \quad A \cap B \in \mathscr{F}$
3. $\forall A \in \mathscr{F}, \forall B \in \mathscr{P}(X) \quad (A \subseteq B) \Rightarrow (B \in \mathscr{F})$

R Dans un filtre $\mathscr{F}$, on a toujours $X \in \mathscr{F}$ car $\mathscr{F} \neq \varnothing$. Il vient l'existence d'un $A \in \mathscr{F}$, d'où $X \in \mathscr{F}$ car $A \subseteq X \in \mathscr{P}(X)$

**Notation 3.1.** *Soit $\varnothing \neq Y \subseteq X$. On note par $\mathscr{F}_Y := \{Z \in \mathscr{P}X \mid Y \subseteq Z\}$ le filtre engendré par $Y$. Il s'agit d'un filtre sur $X$*

*Démonstration.*
1. Soit $A \in \mathscr{F}_Y$ Clairement, $A \neq \varnothing$, car sinon, on aurait $Y \subseteq \varnothing$ d'où $Y = \varnothing$.
2. Clairement, si $Y \subseteq A, B \subseteq X$, on a $Y \subseteq A \cap B \subseteq X$.
3. Si $Y \subseteq A \subseteq X$ et $B \subseteq X$, on a, par transitivité, $Y \subseteq B \subseteq X$.

■

**Notation 3.2.** *Lorsque le contexte est clair (par exemple si il est certain que $\forall a \in X$, $\neg(a \subseteq X)$), on simplifie l'écriture de $\mathscr{F}_{\{a\}}$ en notant $\mathscr{F}_a$.*

**Proposition 3.1.1** Si $\mathscr{G}$ est un filtre étendant $\mathscr{F}_a$ *i.e* $\mathscr{G}$ est un filtre tel que $\mathscr{F}_a \subseteq \mathscr{G}$ alors $\mathscr{G} = \mathscr{F}_a$.

*Démonstration.* En effet, pour $B \in \mathscr{G}$. Supposons par l'absurde que $a \notin B$. Alors $\{a\} \cap B = \varnothing$. Or $\{a\} \in \mathscr{G}$ et $B \in \mathscr{G}$, donc par stabilité des filtres par intersection finie, on aurait $\varnothing \in \mathscr{G}$, ce qui est absurde. Ainsi $a \in B$, donc $B \in \mathscr{F}_a$. On conclut que $\mathscr{G} \subseteq \mathscr{F}_a$. On dit que $\mathscr{F}_a$ est un filtre maximal. ■

■ **Exemple 3.1 — Filtre de Frêchet.** On appelle filtre de Frêchet, ou filtre des cofinis de $X$, le filtre $\{A \subseteq X \mid X \setminus A \text{ est fini}\}$ ■

**Proposition 3.1.2** Soit $X \neq \varnothing$ un ensemble fini. Alors, l'ensemble des filtres sur $X$ est $\{\mathscr{F}_Y \mid Y \subseteq X\}$

*Démonstration.* Clairement, les $\mathscr{F}_Y$ sont des filtres sur $X$. Réciproquement, soit $\mathscr{F}$ un filtre sur $X$. Alors, par définition des filtres, $\bigcap_{A \in \mathscr{F}} A \in \mathscr{F}$ car $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(X)$ est fini. En effet, $X$ est fini, donc $\mathscr{P}(X)$ l'est aussi. ■

**Définition 3.1.2** Soit $X \neq \varnothing$. On dit que $\mathscr{V} := (\mathscr{V}_a)_{a \in X}$ est une famille (d'ensemble) de voisinages de points de $X$ si les propriétés suivantes sont vérifiées.

1. $\forall a \in X, \mathscr{V}_a$ est un filtre sur $X$
2. $\forall a \in X, \forall V \in \mathscr{V}_a, a \in V$
3. $\forall a \in X, \forall V \in \mathscr{V}_a$ alors $\exists W \in \mathscr{V}_a \quad W \subseteq V$ et $\forall w \in W,\ V \in \mathscr{V}_w$ (cohérence)

**Notation 3.3.** *Soient $a \in X, V \subseteq X, \mathscr{V}$ une famille (d'ensembles) de voisinages. On dit que $V$ est un voisinage de $a$ si $V \in \mathscr{V}_a$*

**Proposition 3.1.3** De façon équivalente, on peut remplacer la cohérence par :

$$\forall a \in X, \forall V \in \mathscr{V}_a, \exists W \in \mathscr{V}_a, W \subseteq V, \forall w \in W, W \in \mathscr{V}_w$$

*Démonstration.* Montrons l'équivalence :

**($\Leftarrow$) :** Par extension, $W \in \mathscr{V}_w$ implique $V \in \mathscr{V}_w$.

**($\Rightarrow$) :** Soient $a \in X, V \in \mathscr{V}_a$. Prenons $W' = \{x \in V \mid V \in \mathscr{V}_x\}$. Remarquons qu'on a bien $W' \subseteq V$. Soit $x \in W'$. Par définition $V \in \mathscr{V}_x$, on peut donc utiliser 3 pour obtenir $W_y \in \mathscr{V}_y$ tel que $W \subseteq V$ et $\forall w \in W_y, V \in \mathscr{V}_y$ *i.e.* $W_y \in \mathscr{V}_y$ et $W_y \subseteq W'$. Donc $\forall y \in W', W' \in \mathscr{V}_y$. En particulier, on a $W' \in \mathscr{V}_a$ car $a \in W'$.

■

**Définition 3.1.3** Un espace topologique est la donnée d'un ensemble $X$ non vide et d'une famille de voisinages $\mathscr{V}$ sur $X$.

**Définition 3.1.4** On définit les deux concepts suivants :

— Un ouvert de $(X, \mathscr{V})$ est un ensemble qui est un voisinage de tous ses points.
— Un fermé de $(X, \mathscr{V})$ est un ensemble dont le complémentaire est un ouvert.

**Définition 3.1.5** On définit les deux concepts suivants :

— L'adhérence de $A$, notée $\operatorname{adh}(A)$ ou encore $\overline{A}$, est le plus petit fermé $\mathscr{F}$ tel que $A \subseteq \mathscr{F}$.
— L'intérieur de $A$, noté $\operatorname{int}(A)$, est le plus grand ouvert $\mathscr{O}$ tel que $\mathscr{O} \subseteq A$.

■ **Exemple 3.2 — Topologie discrète.** Pour chaque $a \in X$, prenons $\mathscr{V}_a = \mathscr{F}_a$. Montrons que ce choix du filtre $\mathscr{F}_a$ pour chaque point $a \in X$ vérifie l'axiome de cohérence. ■

*Démonstration.* Soit $V \in \mathscr{V}_a$, il faut trouver $W \in \mathscr{V}_a$, $W \subseteq V$ tel que $V$ soit un voisinage de tous les points de $W$. On prend $W = \{a\}$ car $\{a\} \subseteq V$ et $\{a\}$ appartiennent à $\mathscr{V}_a$. On peut aussi prendre $W = V$ car tous les voisinages sont ouverts pour la topologie discrète. On a que l'ensemble des ouverts pour la topologie discrète est $\mathscr{P}(X)$. ■

## 3.2 Ouverts

**Définition 3.2.1** Soit $\mathscr{T} \subseteq \mathscr{P}(X)$. On dit que c'est une famille d'ouverts de $X$ ssi

1. $\varnothing, X \in \mathscr{T}$
2. Si $(\mathscr{O}_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de $\mathscr{T}$ alors $\bigcup_{i\in I} \mathscr{O}_i \in \mathscr{T}$
3. Si $\mathscr{O}_1$ et $\mathscr{O}_2 \in \mathscr{T}$, alors $\mathscr{O}_1 \cap \mathscr{O}_2 \in \mathscr{T}$

Dans ce cas, on dira que $\mathscr{T}$ est une topologie.

**Proposition 3.2.1** Une intersection quelconque de topologies est une topologie.

*Démonstration.* Soit $(\mathscr{T}_i)_{i\in I}$ une famille de topologies. Montrons que $\bigcap_{i\in I} \mathscr{T}_i$ est une topologie. Vérifions que les trois axiomes sont respectés.

1. Comme pour tout $i \in I \quad \mathscr{T}_i$ est une topologie, on a $\varnothing, X \in \mathscr{T}_i$. Donc on a bien
$$\varnothing, X \in \bigcap_{i\in I} \mathscr{T}_i$$
2. Soit $(\mathscr{O}_j)_{j\in J}$ une famille d'éléments de $\bigcap_{i\in I} \mathscr{T}_i$ alors montrons que
$$\bigcup_{j\in J} \mathscr{O}_j \in \bigcap_{i\in I} \mathscr{T}_i$$
Cette appartenance est vraie puisque pour tout $j \in J$ $\mathscr{O}_j \in \bigcap_{i\in I} \mathscr{T}_i$ donc l'union appartient également à $\bigcap_{i\in I} \mathscr{T}_i$ car les $\mathscr{T}_i$ sont des topologies.
3. Soit $\mathscr{O}_1, \mathscr{O}_2 \in \bigcap_{i\in I} \mathscr{T}_i$, montrons que $\mathscr{O}_1 \cap \mathscr{O}_2 \in \bigcap_{i\in I} \mathscr{T}_i$. De même que au point 2), puisque $\mathscr{O}_1$ et $\mathscr{O}_2$ appartiennent tous deux à chacune des topologies $\mathscr{T}_i$, leur intersection appartiennent donc également à chacune des topologies et donc $\mathscr{O}_1 \cap \mathscr{O}_2$ appartient bien à l'intersections des $\mathscr{T}_i$.

■

**Définition 3.2.2** On définit les deux applications suivantes :

$$\mathscr{V} : \begin{cases} \{\text{ Topologie sur } X\} \to \{\text{ Famille de voisinage sur } X\} \\ \mathscr{T} \mapsto (\mathscr{V}_a)_{a\in X} \text{ avec } \mathscr{V}_a := \{V \subseteq X \mid \exists \mathscr{O} \in \mathscr{T}, a \in \mathscr{O} \subseteq V\} \end{cases}$$

$$\mathscr{T} : \begin{cases} \{\text{ Famille de voisinage sur } X\} \to \{\text{ Topologie sur } X\} \\ \mathscr{V} \mapsto \{\varnothing\} \cup \{V \in \mathscr{P}(X) \mid \forall x \in \mathscr{O},\ \mathscr{O} \in \mathscr{V}_x\} \end{cases}$$

Montrons que nos applications sont bien définies, càd que l'image de ces fonctions est bien incluse à leur ensemble d'arrivée respectif.

*Démonstration.* Montrons que nos applications sont bien définies :

**Bonne définition de $\mathscr{V}$ :** Soit $\mathscr{T}$ une topologie sur $X$. Montrons que $\{(\mathscr{V}_a)_{a\in X} \mid \mathscr{V}_a := \{V \subseteq X \mid \exists \mathscr{O} \in \mathscr{T}, a \in \mathscr{O} \subseteq V\}\}$ est une famille de voisinages. Commençons par montrer que $\forall a, \mathscr{V}_a$ est un filtre. Vérifions chaque axiome des filtres :

1. D'abord, on a $\forall V \in \mathscr{V}_a, a \in V$ par définition, d'où $\varnothing \notin \mathscr{V}_a$.
2. Soient $V_1, V_2 \in \mathscr{V}_a$. On veut montrer que $V_1 \cap V_2 \in \mathscr{V}_a$. Par définition, il existe $\mathscr{O}_1, \mathscr{O}_2 \in \mathscr{T}$ tels que $a \in \mathscr{O}_1 \subseteq V_1, a \in \mathscr{O}_2 \subseteq V_2$. On a alors $a \in \mathscr{O}_1 \cap \mathscr{O}_2, \mathscr{O}_1 \cap \mathscr{O}_2 \in \mathscr{T}$ et $\mathscr{O}_1 \cap \mathscr{O}_2 \subseteq V_1 \cap V_2$. Il vient $V_1 \cap V_2 \in \mathscr{V}_a$.
3. Montrons que $\mathscr{V}_a$ est stable par extension. Soient $V \in \mathscr{V}_a, W \in \mathscr{P}(X)$. Supposons que $V \subseteq W$. Il vient l'existence de $\mathscr{O} \in \mathscr{T}$ tel que $a \in \mathscr{O} \subseteq V \subseteq W$, d'où $W \in \mathscr{V}_a$.

On a bien $\forall V \in \mathscr{V}_a, a \in V$ par définition. Il reste à montrer la cohérence. Soit $V \in \mathscr{V}_a$. Soit $\mathscr{O} \in \mathscr{T}$ tel que $\mathscr{O} \subseteq V$. Prenons $W = \mathscr{O}$. Soit $w \in W$. On a bien $V \in \mathscr{V}_w$ car $w \in W \subseteq V$.

**Bonne définition de** $\mathscr{T}$ Soit $\mathscr{V}$ une famille de voisinages sur $X$. Montrons que $\{V \in \mathscr{V}_a \mid a \in X, V \text{ est ouvert}\}$ est une topologie.

1. On a bien $\varnothing \in \mathscr{T}_{\mathscr{V}}$ et $X \in \mathscr{T}_{\mathscr{V}}$ car $\forall a \in X, X \in \mathscr{V}_a$ par propriété des filtres.
2. Soit $(\mathscr{O}_i)_i \in I$ une famille d'éléments de $\mathscr{T}_{\mathscr{V}}$. Montrons que $\bigcup_{i\in I} \mathscr{O}_i \in \mathscr{T}_{\mathscr{V}}$. Soit $x \in \bigcup_{i\in I} \mathscr{O}_i$. Alors $\exists j \in I, x \in \mathscr{O}_i$. Comme $\mathscr{O}_j \subseteq \bigcup_{i\in I} \mathscr{O}_i$ et que $\mathscr{O}_j \in \mathscr{V}_x$, on a que $\bigcup_{i\in I} \mathscr{O}_i \in \mathscr{V}_x$
3. Soit $\mathscr{O}_1, \mathscr{O}_2 \in \mathscr{T}_{\mathscr{V}}$. Soit $x \in \mathscr{O}_1 \cap \mathscr{O}_2$. Comme $\mathscr{O}_1, \mathscr{O}_2 \in \mathscr{V}_x$, par définition d'un filtre $\mathscr{O}_1 \cap \mathscr{O}_2 \in \mathscr{V}_x$

■

**Proposition 3.2.2** $\mathscr{V}$ et $\mathscr{T}$ sont bijectives, et inverses l'une de l'autre.

*Démonstration.* — Soit $\mathscr{V}$ une famille de voisinages. Montrons que $\mathscr{V}(\mathscr{T}(\mathscr{V})) = \mathscr{V}$. Soit $a \in X$. On a $\mathscr{V}_a = \{V \in \mathscr{V}_a\} = \{V \in \mathscr{V}_a \mid \exists \mathscr{O} \in \mathscr{V}_a, \mathscr{O} \subseteq V, \mathscr{O} \text{ est ouvert }\}$ par propriété des voisinage. Or, avec $\mathscr{O} \in \mathscr{P}(X)$, on a que ($\mathscr{O} \in \mathscr{V}_a, \mathscr{O}$ est ouvert) et ($\mathscr{O} \in \mathscr{T}_{\mathscr{V}}, a \in \mathscr{O}$) sont équivalentes par construction. Il vient $\mathscr{V} = (\{V \in \mathscr{V}_a \mid \exists \mathscr{O} \in \mathscr{T}(\mathscr{V}), a \in \mathscr{O} \in V\})_{a\in X} = \mathscr{V}(\mathscr{T}(\mathscr{V}))$

— Soit $\mathscr{T}$ une topologie. Montrons que $\mathscr{T}(\mathscr{V}(\mathscr{T})) = \mathscr{T}$. On a :

$$\begin{aligned}\mathscr{T}(\mathscr{V}(\mathscr{T})) &= \{\mathscr{O} \subseteq X \mid \forall x \in \mathscr{O},\ \mathscr{O} \in \{V \subseteq X \mid \exists \mathscr{O}_x \in \mathscr{T},\ x \in \mathscr{O}_x \subseteq V\}\} \\ &= \{\mathscr{O} \subseteq X \mid \forall x \in \mathscr{O},\ \exists \mathscr{O}_x \in \mathscr{T},\ x \in \mathscr{O}_x \subseteq \mathscr{O}\} \\ &\supseteq \mathscr{T} \text{ en prenant } \mathscr{O}_x = \mathscr{O}\end{aligned}$$

Réciproquement soit $\mathscr{O} \in \mathscr{T}(\mathscr{V}(\mathscr{T}))$. Considérons $\bigcup_{x\in\mathscr{O}} \mathscr{O}_x$. On a $\forall x \in \mathscr{O},\ x \in \bigcup_{x\in\mathscr{O}} \mathscr{O}_x$ d'où $\mathscr{O} \subseteq \bigcup_{x\in\mathscr{O}} \mathscr{O}_x \subseteq \mathscr{O}$. Or $\mathscr{T}$ est stable par union quelconque, donc $\mathscr{O} = \bigcup_{x\in\mathscr{O}} \mathscr{O}_x \in \mathscr{T}$

■

Cela signifie que la notion de topologie et celle d'ouverts pour une famille de voisinages sont identiques. On peut donc définir de façon équivalente un espace topologique par une famille de voisinages ou par une topologie.

## 3.3 Fermés

**Définition 3.3.1** Soit $\overline{\mathscr{T}} \subseteq \mathscr{P}(X)$. On dit que c'est une famille de fermés de $X$ ssi

1. $\varnothing, X \in \overline{\mathscr{T}}$
2. Si $(\mathscr{F}_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de $\mathscr{R}$ alors $\bigcap_{i\in I} \mathscr{F}_i \in \overline{\mathscr{T}}$
3. Si $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2 \in \overline{\mathscr{T}}$, alors $\mathscr{F}_1 \cup \mathscr{F}_2 \in \overline{\mathscr{T}}$

**R** La notation $\overline{\mathscr{T}}$ n'est pas innocente ; on peut définir l'application

$$\overline{\phantom{x}} : \begin{cases} \mathscr{P}\mathscr{P}X \to \mathscr{P}\mathscr{P}X \\ S \mapsto \{X \setminus A \mid A \in S\} \end{cases}$$

Il est facile de montrer qu'elle est involutive *i.e.* $\forall S \in \mathscr{P}^2 X,\ \overline{\overline{S}} = S$ et qu'elle envoie une famille d'ouvert sur une famille de fermé, et réciproquement. Au vu de **??**, c'est évident. Forcément, les fermés pour un voisinage définisse une famille de fermés, et réciproquement, au vu de l'équivalence entre la définition d'un espace topologique par voisinages ou par ouverts.

## 3.4 Opérateur de clôture

**Définition 3.4.1 — Topologie par opérateur de clôture.** Un opérateur de clôture est une application $C : \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(X)$ qui vérifie les propriétés suivantes :

1. $\forall A \subseteq X,\ A \subseteq C(A)$
2. $\forall A \subseteq X,\ C^2(A) = C(A)$

3. $C(\varnothing)=\varnothing$
4. $\forall A,B\subseteq X,\ C(A\cup B)=C(A)\cup C(B)$

**Proposition 3.4.1** Soit $(X,\overline{\mathscr{T}})$ un espace topologique défini par ses fermés. Alors

$$\mathrm{adh}\colon \begin{cases} \mathscr{P}X \to \mathscr{P}X \\ A \mapsto \bigcap_{\mathscr{F}\in\overline{\mathscr{T}},A\subseteq\mathscr{F}}\mathscr{F} \end{cases}$$

est un opérateur de clôture.

*Démonstration.* 1. On a bien $A\subseteq\bigcap_{\mathscr{F}\in\overline{\mathscr{T}},A\subseteq\mathscr{F}}\mathscr{F}=\mathrm{adh}(A)$

2. Par le point précédent, $\mathrm{adh}(A)\subseteq\mathrm{adh}^2(A)$. Remarquons que $\bigcap_{\mathscr{F}\in\overline{\mathscr{T}},A\subseteq\mathscr{F}}\mathscr{F}$ est fermé, car c'est une intersection de fermés. On en déduit $\mathrm{adh}(A)\in\{\mathscr{F}\in\overline{\mathscr{T}}\mid A\subseteq\mathscr{F}\}$, d'où $\mathrm{adh}^2(A)=\bigcap_{\mathscr{F}\in\overline{\mathscr{T}},A\subseteq\mathscr{F}}\mathscr{F}\subseteq\mathrm{adh}(A)$
3. $\varnothing\subseteq\mathrm{adh}(\varnothing)\subseteq\varnothing$ comme le vide est un fermé étendant le vide.
4. On a $\{\mathscr{F}\in\overline{\mathscr{T}}\mid A\cup B\subseteq\mathscr{F}\}=\{\mathscr{F}_1\cup\mathscr{F}_2\mid\mathscr{F}_1,\mathscr{F}_2\in\overline{\mathscr{T}},A\subseteq\mathscr{F}_1,B\subseteq\mathscr{F}_2\}$. En effet, pour $\supseteq$, $\mathscr{F}_1\cup\mathscr{F}_2\in\overline{\mathscr{T}}$ par définition de $\overline{\mathscr{T}}$ et $A\cup B\subseteq\mathscr{F}_1\cup\mathscr{F}_2$. De plus, on a $\subseteq$ en prenant $\mathscr{F}=\mathscr{F}_1=\mathscr{F}_2$. Ainsi

$$\begin{aligned}\mathrm{adh}(A\cup B)=\bigcap_{\mathscr{F}\in\overline{\mathscr{T}},A\cup B\subseteq\mathscr{F}}\mathscr{F}&=\bigcap_{\mathscr{F}_1,\mathscr{F}_2\in\overline{\mathscr{T}},A\subseteq\mathscr{F}_1,B\subseteq\mathscr{F}_2}\mathscr{F}_1\cup\mathscr{F}_2\\&=\left(\bigcap_{\mathscr{F}_1\in\overline{\mathscr{T}},A\subseteq\mathscr{F}_1}\mathscr{F}_1\right)\cup\left(\bigcap_{\mathscr{F}_2\in\overline{\mathscr{T}},B\subseteq\mathscr{F}_2}\mathscr{F}_2\right)=\mathrm{adh}(A)\cup\mathrm{adh}(B)\end{aligned}$$

par **??**

■

**Proposition 3.4.2** Soit $C$ un opérateur de clôture sur $X$. Les points fixes de $C$, càd les sous-ensembles $A$ de $X$ tels que $A=C(A)$, forment une famille de fermés.

*Démonstration.* Posons $R:=\{A\subseteq X\mid A=C(A)\}$

1. On a $\varnothing=C(\varnothing)$ par définition et $X\subseteq C(X)\subseteq X$ d'où $\varnothing,X\in R$
2. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $R$. On a $\bigcup A_i\subseteq C(\bigcap A_i)$. Soit $j\in I$. Comme $A_j\cup(\bigcap A_i)$, on a $C(A_j)=C(A_j\cup(\bigcap A_i))=C(A_j)\cup C(\bigcap A_i)$ d'où $C(\bigcap A_i)\subseteq A_j$, ce qui implique $C(\bigcap A_i)\subseteq\bigcap A_j$.
3. On a $\mathrm{adh}(\mathscr{F}_1\cup\mathscr{F}_2)=\mathrm{adh}(\mathscr{F}_1)\cup\mathrm{adh}(\mathscr{F}_2)=\mathscr{F}_1\cup\mathscr{F}_2$

■

**Notation 3.4.** *On note $c$ la fonction envoyant une topologie sur $X$ définie par les fermés sur l'adhérence associée, et $f$ la fonction envoyant un opérateur de clôture sur la topologie associée*

**Proposition 3.4.3** Soit $\overline{\mathscr{T}}$ une topologie par les fermés. On a $f(c(\overline{\mathscr{T}}))=\overline{\mathscr{T}}$

*Démonstration.* ■

**Proposition 3.4.4** Soit $C$ un opérateur de clôture. On a $c(f(C))=C$

*Démonstration.* ■

## 3.5 Continuité

**Définition 3.5.1** Soient $(X,\mathscr{T}_X)$ et $(Y,\mathscr{T}_Y)$ deux espaces topologiques et $F : X \to Y$ une fonction. Soit $a \in X \cap \operatorname{dom} F$. On dit que $F$ est continue en $a$ si $\forall V$ au voisinage de $F(a)$ pour $\mathscr{T}_Y$, $\exists W$ au voisinage de $a$ pour la topologie $\mathscr{T}_X$ tel que $\forall x \in \operatorname{dom} F$ , si $x \in W$ alors $F(x) \in V$

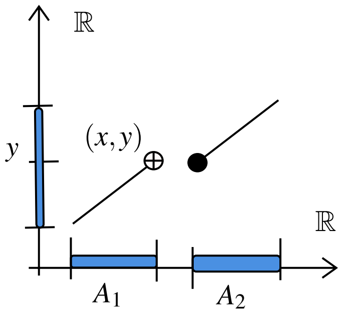
■ **Exemple 3.3** Soit $X$ avec la topologie discrète. Considérons $F : X \to X$. Alors $F$ est continue. ■

*Démonstration.* Soit $V \in \mathscr{V}_{F(a)}$. On prend $W := F^{-1}(V) \in \mathscr{V}_a$ puisque $a \in W$ et que $W \in \mathscr{P}(X)$. Soit $x \in \operatorname{dom} F \cap W$, on a par définition $F(x) \in V$. On conclut que $F$ est continue en $a$. ■

**Définition 3.5.2 — Homéomorphisme.** et $(B,\mathscr{T}_B)$ deux espaces topologiques. Un homéomorphisme (isomorphisme d'espace topologique) $\sigma : A \to B$ est une bijection $\sigma$ qui est bicontinue, càd que $\sigma$ et $\sigma^{-1}$ sont continues.

R La réciproque d'une bijection continue de $A \to B$ n'est pas toujours continue.

■ **Exemple 3.4** Prenons $A_1 = [a,b], A_2 = ]c,d]$ où $b < c$. Posons $A := A_1 \cup A_2$. Prenons $\mathscr{T}_A := \{\mathscr{O}' \subseteq A \mid \exists \mathscr{O} \in \mathscr{T}_{\mathbb{R}}, \mathscr{O}' = \mathscr{O} \cap A$ la topologie sur $A$ induite par la topologie sur $\mathbb{R}$. Prenons $\sigma(t)$ qui parcourt $A$ quand $t$ parcourt $[0,1]$ ■




**Exercice 3.1** Quelle est la topologie induite sur $\mathscr{C}$ le tryadique de Cantor ? ■

## 3.6 Sous-base de topologie

**Définition 3.6.1 — Sous-base de topologie.** Soit $\mathscr{T}$ une topologie et soit $S \subseteq \mathscr{P}(X)$. On dit que $S$ est une sous-base de $\mathscr{T}$ si $S \subseteq \mathscr{T}$ et que pour toute topologie $\mathscr{U}$ sur $X$ étendant $S$, on a $\mathscr{T} \subseteq \mathscr{U}$.

**Proposition 3.6.1** Soit $S \subseteq \mathscr{P}(X)$. Alors il existe une et une seule topologie $\langle S \rangle$ telle que $S$ soit une sous-base de $\langle S \rangle$. De plus, $\langle S \rangle = \bigcap_{\mathscr{T} \in (S)} \mathscr{T}$ avec $(S)$ l'ensemble des topologies étendant $S$. On appelle $\langle S \rangle$ la topologie engendrée par $S$

*Démonstration.* Montrons l'unicité, puis l'existence

**Unicité** Soit $\mathscr{T}_1, \mathscr{T}_2$ dont $S$ est une sous-base. Alors $\mathscr{T}_1, \mathscr{T}_2$ sont des topologies étendant $S$, donc $\mathscr{T}_1 \subseteq \mathscr{T}_2$, et réciproquement.

**Existence** Prenons $\langle S \rangle = \bigcap_{\mathscr{T} \in (S)} \mathscr{T}$. L'ensemble comprend $\mathscr{P}(\mathscr{P}(X))$ la topologie discrète donc l'intersection existe. Comme l'intersection de topologie est une topologie, $\langle S \rangle$ est une topologie. On a bien $S \subseteq \langle S \rangle$ car c'est l'intersection d'extension de $S$.

■

**Proposition 3.6.2** On a $\langle S \rangle = \langle S \cup \{\emptyset, X\} \rangle$

*Démonstration.* Montrons que $\bigcap_{\mathscr{T} \in (S)} \mathscr{T} = \bigcap_{\mathscr{T} \in (S \cup \{\varnothing, X\})} \mathscr{T}$. Pour cela, il suffit de montrer que $(S) = (S \cup \{\varnothing, X\})$.

$(\subseteq)$ **:** Soit $\mathscr{T} \in (S)$ une topologie étendant $S$ (*i.e* $S \subseteq \mathscr{T}$) Comme $\mathscr{T}$ est une topologie, par définition on a $\varnothing, X \in \mathscr{T}$ donc $S \cup \{\varnothing, X\} \subseteq \mathscr{T}$. C'est à dire que $\mathscr{T} \in (S \cup \{\varnothing, X\})$.

$(\supseteq)$ **:** Soit $\mathscr{T} \in (S \cup \{\varnothing, X\})$ une topologie tel que $S \cup \{\varnothing, X\} \subseteq \mathscr{T}$. Puisque $S \subseteq S \cup \{\varnothing, X\}$, on obtient $\mathscr{T} \in (S)$.

■

**Proposition 3.6.3** Soit $S \subseteq \mathscr{P}(X)$ tel que $\varnothing, X \in S$. Alors

$$\langle S \rangle = \{A \subseteq X \mid A \text{ est union quelconque d'intersections finies d'éléments de } S\} =: \hat{S}$$

*Démonstration.* Démontrons l'égalité $\langle S \rangle = \widehat{S}$ par double inclusion.

$(\subseteq)$ Il suffit de montrer que $\widehat{S}$ est une topologie contenant $S$.
D'abord, $S \subseteq \widehat{S}$ car tout $U \in S$ s'écrit comme intersection finie d'un seul élément.
Ensuite, $\widehat{S}$ est une topologie :

- $\emptyset, X \in S \subseteq \widehat{S}$ par hypothèse.
- *Union quelconque :* Si $A_i = \bigcup_{j \in J_i} (\bigcap_{k \in K_{i,j}} S_{i,j,k})$ avec $S_{i,j,k} \in S$, alors

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I, j \in J_i} \left( \bigcap_{k \in K_{i,j}} S_{i,j,k} \right) \in \widehat{S}$$

- *Intersection finie :* Pour $A = \bigcup_{j \in J} (\bigcap_{k \in K_j} S_{j,k})$ et $B = \bigcup_{\ell \in L} (\bigcap_{m \in M_\ell} T_{\ell,m})$, on a

$$A \cap B = \left( \bigcup_{j \in J} ( \bigcap_{k \in K_j} S_{j,k}) \right) \cap \left( \bigcup_{\ell \in L} ( \bigcap_{m \in M_\ell} T_{\ell,m}) \right) = \bigcup_{j \in J, \ell \in L} \left( \bigcap_{k \in K_j} S_{j,k} \cap \bigcap_{m \in M_\ell} T_{\ell,m} \right)$$

  Comme on l'a démontré dans la section sur les familles.

Donc $\widehat{S}$ est une topologie contenant $S$, d'où $\langle S \rangle \subseteq \widehat{S}$.

$(\supseteq)$ Soit $A \in \widehat{S}$, alors $A = \bigcup_{i \in I} (\bigcap_{j \in J_i} S_{i,j})$ avec $S_{i,j} \in S$.
Puisque $\langle S \rangle$ est une topologie contenant $S$, elle est stable par intersections finies et unions quelconques. Donc $A \in \langle S \rangle$.

■

**Définition 3.6.2 — Base de topologie.** Soient $S \subseteq \mathscr{P}(X)$ et $\mathscr{T}$ une topologie sur $X$. On dit que $S$ est une base de $\mathscr{T}$ si

$$\forall \mathscr{O} \in \mathscr{T}, \mathscr{O} = \bigcup_{i \in I} S_i \text{ avec } (S_i)_{i \in I} \text{ une famille d'éléments de } S$$

**Proposition 3.6.4** Soient $S \subseteq \mathscr{P}(X)$ et $\mathscr{T}$ une topologie sur $X$. $S$ est une base de $\mathscr{T}$ ssi

- $\mathscr{T} = \langle S \rangle$
- $\bigcup_{A \in S} A = X$
- Toute intersection finie d'éléments de $S$ peut s'écrire comme une union quelconque d'éléments de $S$

*Démonstration.* Flemme ■

## 3.7 Topologie métrique

**Définition 3.7.1 — Distance.** Soit $E$ un ensemble, une distance $d$ est une fonction de $E \times E$ dans $[0, +\infty[$ vérifiant :
1. $\forall x, y \in E,\ d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $\forall x, y \in E,\ d(x,y) = d(y,x)$
3. $\forall x, y, z \in E,\ d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

■ **Exemple 3.5** Sur $\mathbb{R}$, l'application $d(x,y) = |x-y|$ est une distance. Sur $E$ un ensemble non vide, on peut définir la distance discrète :

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y, \\ 0 & \text{si } x = y. \end{cases}$$

■

**Définition 3.7.2** Soit $x \in X, \varnothing \neq A \subseteq X$. On définit la distance $d(x,A)$ par $d(x,A) = \inf_{y \in A} d(x,y)$. Comme $\{d(x,y) \mid y \in A\} \subseteq \mathbb{R}^{\geq 0}$ est non vide, donc l'infimum existe.

R $d$ est continue.

**Définition 3.7.3 — Norme.** Soit $E$ un $\mathbb{K}-$espace vectoriel. Une norme $\|\cdot\|$ est une application de $E$ dans $[0, +\infty[$ qui vérifie :
1. $\forall x \in E,\ \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in E,\ \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$
3. $\forall x, y \in E,\ \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

**Définition 3.7.4** Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et une norme $\|\cdot\|$. On dit que le couple $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé (EVN).

■ **Exemple 3.6** Voyons quelques exemples d'EVN.
— $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est un EVN.
— $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ est un EVN.
— Sur $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$) on peut définir les normes suivantes :
  1. $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$
  2. $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$
  3. Soit $p > 1$, $\|x\|_= (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$
  4. $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

■

R Une norme $\|\cdot\|$ induit une distance $d$ définie par $d(x,y) = \|x-y\|$

**Définition 3.7.5 — Boule ouverte.** Soit $(X,d)$ un espace métrique, *i.e.* $d$ est une distance sur $X$. La boule ouverte centrée en $a \in X$ de rayon $r > 0$ est définie par $B(a,r) := \{x \in X \mid d(x,a) < r\}$

**Définition 3.7.6** Soit $(X,d)$ un espace métrique. La topologie sur $X$ associée à $d$ est la topologie engendrée par les boules ouvertes pour la distance $d$.

**Proposition 3.7.1** Soit $\mathbb{R}^2$ avec la distance $d_2$. Soit $S$ l'ensemble des boules ouvertes pour $d_2$ Soit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^2$ $r_1 r_2 \in \mathbb{R}^{>0}$ Soient $B_1 = B(c_1, r_1)$ et $B_2 = B(c_2, r_2)$ Soit $x_0 \in B_1 \cap B_2$, donner explicitement en fonction de la position de $x_0$ une boule ouverte de rayon $\varepsilon$ telle que $B(x_0, \varepsilon) \subseteq B_1 \cap B_2$

*Démonstration.* Prenons $\varepsilon := \min\{r_1 - d_2(c_1,x_0), r_2 - d_2(c_2,x_0)\} > 0$. Et montrons que $B(x_0,\varepsilon) \subseteq B_1 \cap B_2$. Soit $x \in B(x_0,\varepsilon)$. Montrons que $x \in B_1 \cap B_2$.
$(x \in B_1)$ **:** On a les inégalités suivantes :

$$d_2(c_1,x) \leq d_2(c_1,x_0) + d_2(x_0,x) < d_2(c_1,x_0) + \varepsilon \leq d_2(c_1,x_0) + r_1 - d_2(c_1,x_0) = r_1$$

$(x \in B_2)$ **:** On utilise le même raisonnement qu'au point précédent.

■

on en conclut que $B_1 \cap B_2 = \bigcup_{x \in B_1 \cap B_2} B(x,\varepsilon_x)$ et donc, on a que les intersections finies de boules ouvertes sont des unions quelconques de boules ouvertes et donc les boules forment une base de topologie. La topologie engendrée par les boules est dite associée à la norme $\|\cdot\|_2$ est notée $\mathscr{T}_2$. Idem pour $\mathscr{T}_1$, $\mathscr{T}_\infty$.

## 3.8 Densité

Soit $(X,\mathscr{T})$ un espace topologique, on dit que $Y$ est ($\mathscr{T}-$)dense dans $X$ si pour tout $\mathscr{O} \in \mathscr{T}$, $\mathscr{O} \cap Y \neq \varnothing$, (ce qui est équivalent, en acceptant l'axiome du choix, à pour tout $\mathscr{O} \in \mathscr{T}$, il existe $y_o \in \mathscr{O} \cap Y$). De façon équivalente, on peut dire $Y$ est dense dans $X$ ssi pour tout voisinage $V$, il existe $y \in V \cap Y$.Si $\mathscr{T}$ admet une base $S$ alors c'est équivalent à ce que $\forall B \in S$, $B \cap Y \neq \varnothing$.

■ **Exemple 3.7** $\mathbb{Q}$ est $\mathscr{T}_2-$dense dans $\mathbb{R}$. On utilise le fait que tout ouvert est une union de boules ouvertes ; donc il suffit de prouver que si $B(x,r)$ est une boule ouverte, j'y trouve un rationnel. Ici $B(x,r) = ]x-r, x+r[$, il faut trouver $q \in ]x-r, x+r[$ Comment placer un rationnel $r-$proche de $x$ ? Si on admet que les réels sont des limites de suites de Cauchy de rationnels, on prend une telle suite $q_n$ convergeant vers $x$ et on sait qu'il existe $n_0$ tel que pour tout $n \geq n_0 \quad |q_n - x| \leq \frac{r}{2}$ Considérons l'écriture décimale de $x$, càd prenons $z \in \mathbb{Z}, \forall i \in \mathbb{N}_0, d_i \in \{0,1,\ldots,9\}$ tels que $x = \overline{z, d_1 d_2 \ldots d_k \ldots}_{10}$ ou autrement dit $x = z + \sum_{i=1}^{\infty} d_i 10^{-i}$ Et clairement $x_k = z + \sum_{i=1}^{k} d_i 10^{-i}$ vérifie que

$$|x - x_k| = \sum_{i=k+1}^{\infty} d_i 10^{-i} \leq g \sum_{i=k+1}^{\infty} 10^{-i} = g \cdot 10^{-(k+1)} \sum_{i=0}^{\infty} 10^{-i} = g \cdot 10^{-(k+1)} \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 10^{-k}$$

On cherche $q \in ]x-r, x+r[$. On peut pour cela prendre $x_k$ tel que $|x - x_k| \leq \frac{r}{2}$ càd tel que $10^{-k} \leq \frac{r}{2}$.
■

**R** Tout cela est possible car $\mathbb{R}$ est un groupe archimédien (dont l'ordre est en plus compatible avec $\cdot$)

$$\mathbb{R}^{\geq 0} = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} [n, n+1[$$

**Définition 3.8.1** Un groupe ordonné $(G,+,\leq)$ est dit archimédien si $\leq$ est total, compatible avec plus et tel que $\forall a \in G^{>0}, \forall b \in G^{\geq 0}$, $\exists n \in \mathbb{N}, an \geq b$

**Proposition 3.8.1** Soit une boule ouverte $B(x,r)$ non vide de $\mathbb{R}^2$, alors $B(x,r) \cap \mathbb{Q}^2 \neq \emptyset$.

*Démonstration.* on a que $x = (x_1,x_2)$ où $x_1,x_2 \in \mathbb{R}$. Par définition de $\mathbb{R}$. Il existe $(q_{1_n})_{n \in I} \subseteq \mathbb{Q}$ et $(q_{2_n})_{n \in J} \subseteq \mathbb{Q}$ convergeant respectivement vers $x_1$ et $x_2$. On considère donc la suite $(q_n)_{n \in I \cap J} \subseteq \mathbb{Q}^2$ où $q_n = (q_{1_n}, q_{2_n})$. Puisque la convergence des suites dans $\mathbb{R}^n$ revient à la convergence coordonnée par coordonnée. On a donc trouvé une suite $(q_n) \subseteq \mathbb{Q}^2$ convergeant vers $x \in \mathbb{R}$. Nous avons donc :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in I \cap J, \forall n \geq n_0 \quad \|q_n - x\| < \varepsilon$$

On utilise l'équation avec $\varepsilon = r$, il existe donc $n_0 \in I \cap J$ tel que $\|q_{n_0} - x\| < r$. On a donc $q_{n_0} \in B(x,r) \cap \mathbb{Q}^2$. Autrement dit, on vient de montrer que

$$B(x,r) \cap \mathbb{Q}^2 \neq \varnothing$$

■

Avec ce résultat, prouvons que l'intersection de 2 boules ouvertes de $\mathbb{R}^2$ est une union dénombrable de boules ouvertes.

$$B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$$

On considère $\mathbb{Q}^2 \cap (B_1 \cap B_2) \neq \emptyset$ En fait, il existe $S$ dénombrable tel que $\mathscr{T}_2 = (S)$.

**Proposition 3.8.2** Toute $B(x,r)$ est une union dénombrable de $B\left(x, \frac{1}{n}\right)$ avec $x \in \mathbb{Q}^2$

*Démonstration.* Montrons que $B(x,r) = \bigcup_{(q,\varepsilon)\in Q} B(q,\varepsilon)$ avec $Q := \{(q,\varepsilon) \in \mathbb{Q}^2 \times \mathbb{Q} \mid \exists n \in \mathbb{N},\ \varepsilon = \frac{1}{n},\ B(q,\varepsilon) \subseteq B(x,r)\}$.

$\supseteq$ **:** Trivial car tous les éléments de l'union sont $\subseteq B(x,r)$

$\subseteq$ **:** Soit $y \in B(x,r)$. Comme $r' := r - d(y,x) > 0$, il existe par le point précédent $q_y \in \mathbb{Q}^2, \varepsilon_y \in \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ tels que $B(q_y,\varepsilon_y) \subseteq B(y,r')$. Soit $z \in B(y,r')$. On a $d(z,r) \leq d(y,z) + d(y,x) < r - d(y,x) + d(y,x) = r$ d'où $B(q_y,\varepsilon_y) \subseteq B(y,r') \subseteq B(x,r)$ et donc $y \in B(q_y,\varepsilon_y) \subseteq \bigcup_{(q,\varepsilon)\in Q} B(q,\varepsilon)$

■

# 4. Topologie induite et topologie produit

**Définition 4.0.1** Soit $(X, \mathscr{T})$ un espace topologique, soit $Y \subset X$. La topologie induite par $\mathscr{T}$ sur $Y$ est $\{\mathscr{O} \cap Y \mid \mathscr{O} \in \mathscr{T}\}$

Les ouverts de base de $\mathscr{C}$ sont les points correspondants à un ensemble de branches infinies partageant un même segment initial.

## 4.1 Topologie produit

### 4.1.1 Fonctions projections

Soit $(X_i, \mathscr{T}_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces $X \neq \varnothing$. On voudrait construire une topologie sur $\prod_{i\in I} X_i \neq \varnothing$. Les bébés considèrent les fonctions de projection $p_{i_0} : \prod_{i\in I} X_i \to X_{i_0}$. La topologie produit est la topologie la plus gorssière sur $\prod_{i\in I} X_i$ qui rend toutes les projections continues ?

**Définition 4.1.1** Sur un espace $X$, on dit que $\mathscr{T}_1$ est plus grossière que $\mathscr{T}_2$ ou que $\mathscr{T}_2$ est plus fine que $\mathscr{T}_1$ si $\mathscr{T}_1 \subseteq \mathscr{T}_2 \subseteq \mathscr{P}X$

**Définition 4.1.2** Soit $f$ une fonction entre deux ensembles munis d'une distance. $f$ est lipschitzien de constante $k \geq 0$ sur $I$ si $\forall x, y \in I$

$$d_{\operatorname{Im} f}(f(x), f(y)) \leq k d_{\operatorname{dom} f}(x, y)$$

**Définition 4.1.3 — Rappel.** Soit $f : (X, \mathscr{T}_X) \to (Y, \mathscr{T}_Y)$. $f$ est continue si pour tout ouvert $\mathscr{O} \in \mathscr{T}_Y$, $f^{-1}(\mathscr{O}) \in \mathscr{T}_X$. Si $\mathscr{T}_Y$ admet une base $B$, on peut se limiter aux ouverts de la base, car tout ouvert de $\mathscr{T}_Y$ est une union d'ouverts de base.

On veut donc que $\mathscr{T}_{\prod X_i}$comprennent $P_{i_0}^{-1}(\mathscr{O})$ où $\mathscr{O} \in \mathscr{T}_{i_0}$

$$\mathscr{T}_{\prod X_i} = \{p_{i_O}^{-1} \mid \mathscr{O} \in \mathscr{T}_{i_0} \wedge i_0 \in I\} = \{(\prod_{i \neq i_0} X_i) \times \mathscr{O}\}$$

**Exercice 4.1** Une fonction continue sur son domaine (en tout point) ssi $\forall \mathscr{O}$ de $\operatorname{Im} f$ $f^{-1}(\mathscr{O})$ ouvert de $\operatorname{dom} f$ ■

R On a $P_1^{-1}(\mathscr{O}) \cap P_2^{-1}(\mathscr{O}) \neq \varnothing$

C'est en fait, on obtient la topologie usuels. En effet, une base de la topologie produit est fournie par

$$\{P_{i_1}^{-1}(\mathscr{O}_{i_1}) \cap P_{i_k}^{-1}(\mathscr{O}_{i_k}) \mid i_{1,\dots,k} \in I,\ \mathscr{O}_{i_j} \in \mathscr{T}_{i_j}\}$$

R $(X, \mathscr{T})$ et $Y$ en bijection avec $X$. Comment définir une topologie $\mathscr{T}_Y$ sur $Y$ qui copie celle de $X$ ? telle que ces deux espaces soient homéomorphes c'est à dire, il eciste une bijection bicontinue entre $X$ et $Y$. Par hypothèse, on a $F$ bijection de $X \to Y$, on veut construire $\mathscr{T}_Y$ de telle sorte quue $F$ et $F^{-1}$ sont continues. Je veux que $F$ soit d'abord continue, c'est à dire que $\forall \mathscr{O} \in \mathscr{T}_X$, il faut $F^{-1}(\mathscr{O}) \in \mathscr{T}$ Pour $\mathscr{T}_Y$, on prend la topologie engendrée par les $F^{-1}(\mathscr{O})$ tel que $\mathscr{O} \in \mathscr{T}_X$. De plus, $F^{-1}(\mathscr{O}_1) \cap F^{-1}(\mathscr{O}_2) = F^{-1}(\mathscr{O}_1 \cap \mathscr{O}_2)$

### 4.1.2 Lien avec triadique de Cantor

On sait que $\mathscr{C} \simeq 2^{\mathbb{N}}$ Une suite est une branche d'arbre binaire. Il faut choisir la topologie qu'on met sur $2^{\mathbb{N}}$ (il y en a 4). On choisit la topologie discrète sur chaque fibre. Ainsi la topologie produit qui est l'union finie des segments initiaux. (C'est la même ttopologie sur les algèbres de bool) Cette topologie est compact. Voyons ce que cela signifie.

## 4.2 Continuité, convergence, compacité, séparation

**Définition 4.2.1** Une topologie $\mathscr{T}$ est dite $T_2$ sur l'espace $X$, si $\forall x_1, x_2 \in X_1, \exists \mathscr{O}_1$ qui comprend $x_1 \exists \mathscr{O}_2$qui comprend $x$ tel que $\mathscr{O}_1 \cap \mathscr{O}_2 \neq \varnothing$

Soit $d$ une distance sur $X$, soit $\mathscr{T}_d$ la topologie engendrée par les boules pour $d$, $\mathscr{T}_d$ séparée.

**Définition 4.2.2** On dit qu'une topologie $\mathscr{T}$ sur $X$ est métrisable s'il existe $d$ une distance sur $X$ tel que $\mathscr{T}_d = \mathscr{T}$

**Proposition 4.2.1** Soient $(X, \mathscr{T}_X)$ et $(Y, \mathscr{T}_Y)$ deux espaces topologique. $F : X \to Y$ est continue en $a \in \operatorname{dom} F$ si

$$\forall W \text{ voisinage pour } \mathscr{T}_Y \text{ de } F(a), \exists V \text{ voisinage pour } \mathscr{T}_X \text{ de } a \text{ tel que } F(V) \subseteq W$$

Cela est équivalent à

$$\forall \mathscr{O} \in \mathscr{T}_Y F(a) \in \mathscr{O}, \exists \mathscr{O}' \in \mathscr{T}_X, a \in \mathscr{O}' \text{ tel que } F(\mathscr{O}') \subseteq \mathscr{O}$$

*Démonstration.* Je l'ai faite dans ma tête, wallah c'est facile. ■

**Rappel : Convergence dans $\mathbb{R}$**

$$(r_n) \to r \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon, \forall n \geq N_\varepsilon \quad |r_n - a| \leq \varepsilon$$

On remarque que converger c'est dire qu'on est continu, mais pas n'importe comment, pas n'importe où, pas pour n'importe quel topologie. En effet, on peut montrer que la définition précédente est équivalente à

$\forall W \in V(r), \exists$ un voisinage pour la topologie où les voisinages de $+\infty$ sont les cofinis $V, F(V) \subseteq W$

*Démonstration.* Observer ■

**Définition 4.2.3** Une fonction $F : \mathbb{N} \to X$, on dit qu'elle converge en $+\infty$, si $W$ voisinage au sens de $\mathscr{T}_X$, $\exists$ un cofini $V$ de $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ tel que $F(V) \subseteq W$ C'est à dire on a la continuité de $F$ en $+\infty$, avec la bonne topologie $\mathscr{T}_{\mathbb{N}\cup\{+\infty\}}$.

**Définition 4.2.4** On dit que $(X, \mathscr{T})$ est précompact si toute famille de fermés de $\mathscr{T}$. qui à la *P.I.F* à une intersection non vide. *i.e* $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \varnothing$

**Exercice 4.2** Soit $I$ un ensemble non vide, soit $A \subseteq \mathscr{P}(I)$ tel que $A$ à la pif. c'est à dire que $\forall x_1, \dots x_k \in A \bigcap_{i=1}^{k} x_i \neq \varnothing$ alors $\langle A \rangle = \{U \subseteq I \mid \text{une intersection finie d'élements de } A \subseteq U\}$ ■

**Exercice 4.3** Un espace $(X, \mathscr{T})$ est précompact si pour toute famille $(\mathscr{O}_i)_{i\in I}$ d'ouvert de $\mathscr{T}$ qui recouvre $X$, il existe $I_0 \subseteq I$ fini tel que $\cup \mathscr{O}_i = X$. Autrement dit, de toute recouvrementt ouvert de $X$, on peut extraire un sous-recouvrement fini de $X$. ■

**Proposition 4.2.2** Soit $(\mathscr{F}_i)$ un famille de fermés de $X$. Soit $(\mathscr{F}_i^c)$ la famille d'ouverts associés. Supposons que $(\mathscr{F}_i)$ aient la PIF

R $(F_i^c)$ est un recouvrement de $X$ ssi $\bigcup \mathscr{F}_i^c = X$ ssi $\bigcap \mathscr{F}_i = \varnothing$

R $(\mathscr{F}_i)_{i\in I}$ a la pif ssi

$$\forall I_0 \subseteq I, \text{ si } I_0 \text{ est fini alors } \bigcap_{i\in I_0} \mathscr{F}_i \neq \varnothing$$

ssi $\bigcup_{i\in I_0} \mathscr{F}_i^c \neq X$

Par conséquent, chaque fois que j'ai une famille d'ouverts dont toutes les unions finies ne sont pas des recouvrement, alor la famille globale n'est pas un recouvrement. Donc, si j'ai (1), on a (1') et donc on a saussi la contraposée de (1') ui nous dit que si j'ai un recouvrement, alors il y avait un recouvrement fini de $X$.

**Définition 4.2.5** Un espace $(X, \mathscr{T})$ est dit compact s'il est précompact et $T_2$.

■ **Exemple 4.1** Soit $X$ avec la topologie discrète . $X$ est précompact ssi $X$ est fini. ■

*Démonstration.* Les singletons sont ouverts. ■

■ **Exemple 4.2** Considérons $\mathbb{N} \cup \{\omega\}$ muni de la topologie discrète sur $\mathbb{N}$ avec $\mathscr{V}_\omega$ le filtre des cofinis sur $\mathbb{N} \cup \{\omega\}$. C'est le compactifié de $(\mathbb{N}, \mathscr{T}_{\text{disc}}$. Montrons que c'est un compact. ■

*Démonstration.* Un recouvrement ouvert de $\mathbb{N} \cup \{\omega\}$ doit contenir $\omega$ donc prenons un cofini. Il ne reste qu'un nombre fini de points, donc ils peuvent être recouvert par un nombre fini d'ouverts. De plus cette topologie est $T_2$. ■

**Définition 4.2.6** $X$ un espace métrique est dit séquentiellement compact ssi toute suite possède une sous-suite convergente.

**Exercice 4.4** Soit $X$ un espace métrique. Montrer que $X$ est séquentiellement compact ssi il est précompact. ■

**Définition 4.2.7** Soit $(X, \mathscr{T})$ un espace topologique. On dit que $K \subseteq X$ est (pré)compact ssi $K$ muni de la topologie induite par $\mathscr{T}$ est (pré)compact.

**Proposition 4.2.3** L'image d'un compact $K$ par une fonction continue est un compact.

*Démonstration.* Soit $(\mathscr{O}_i)$ une famille d'ouverts recouvrant $F(K)$. Alors la famille $(F^{-1}(\mathscr{O}_i))$ est une famille d'ouverts ∎

**Définition 4.2.8** Un espace topologique $(X\mathscr{T})$ est connexe ssi les seuls ouverts fermés de $X$ sont $\varnothing$ et $X$.

**Proposition 4.2.4** Soit $(X,d)$ séquentiellement compact. Soit $Y$ muni d'un ordre. Soit $f : X \to Y$ une application continue. Alors si $a \in Y$ est la borne supérieure de $\operatorname{Im} f$, alors $a \in \operatorname{Im} f$.

*Démonstration.* Donc, on utilise le fait que l'image d'un précompact et compact ∎

**Définition 4.2.9** Un espace métrique $(X,d)$ est complet ssi toute suite de Cauchy d'éléments de $X$ converge dans $X$.

R Considérons $\mathbb{Q}$ muni de la topologie induite par la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$. Condidérons $\left]-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right[ \cap \mathbb{Q} = \left[-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right] \cap \mathbb{Q}$

Soit $X$ complet. Considérons $\mathscr{F}$ fermé. Alors $\mathscr{F}$ est compact pour la topologie induite.

**Théorème 4.2.5 — Tychonoff.** Le produit d'espace compact d'une famille $(X_i, \mathscr{T}_i)_{i\in I}$, *i.e.* $\prod_{i\in I} X_i$ muni de la topologie produit, est compact.

**Définition 4.2.10** Soit $V$ un $K$-espace vectoriel. Soit $A \subseteq V$. $A$ est libre si toute partie $A_0 \subseteq A$ de cardinal $r \in \mathbb{N}$ est libre càd, en posant $A_0 := \{a_1, \dots, a_r\}$ et $f : K^r \to A : (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \mapsto \sum_{i=1}^{r} \lambda_i a_i$, $f$ est injective

**Définition 4.2.11** $A \subseteq V$ est une partie génératrice de $V$ si $\langle A \rangle = V$ avec $\langle A \rangle := \{\sum_{a_i \in A_0} \lambda_i a_i \mid A_0 \subseteq A \text{ est fini}, \lambda_i \in K\}$

**Définition 4.2.12** $A$ est une base de $V$ si $A \subseteq V$ et $A$ est générateur et libre.

**Proposition 4.2.6** Tout espace vectoriel a une base.

*Démonstration.* On regarde $E := \{A \subseteq V \mid A \text{ est libre}\}$ muni de $\subseteq$, on montre que si $V \neq \{0\}$ alors $E$ est inductif ∎

# Bibliographie