Recueil Mathématique

Fondations et constructions mathématiques

Tiago Piette & Manoa Hamiot

2025
Version : v1.0

Préface

Ce recueil mathématique est conçu comme un voyage à travers les concepts fondamentaux et avancés des mathématiques. Inspiré par le travail remarquable d'Evan Chen dans *An Infinitely Large Napkin*, ce document vise à offrir une vue d'ensemble cohérente et structurée des mathématiques.

Organisation du document

Ce recueil est divisé en plusieurs parties thématiques, chacune explorant un domaine spécifique des mathématiques :

— **Partie I** : Théorie des ensembles
— **Partie II** : Algèbre
— **Partie III** : Algèbre linéaire
— **Partie IV** : Topologie
— **Partie V** : Analyse

Chaque partie commence par une table des matières locale pour faciliter la navigation.

Comment utiliser ce document

Les concepts sont présentés de manière progressive, avec des définitions rigoureuses, des théorèmes importants et de nombreux exemples. Les démonstrations privilégient l'intuition sans sacrifier la rigueur mathématique.

Bonne lecture !
Les Auteurs

Table des matières

PARTIE I

Théorie des ensembles

1 Axiomatisation de Zermolo-Fraenkel

1.1 Le paradoxe de Russell

Jusqu'au début du XX$^{\text{e}}$ siècle, les mathématiciens manipulaient les ensembles de manière dite *naïve*. On les concevait d'abord comme des objets géométriques (points, droites, cercles, etc.), puis comme de simples collections d'objets partageant une propriété commune.

C'est le mathématicien allemand GEORG CANTOR (1845–1918) qui, à partir de 1874, posa les bases de la *théorie naïve des ensembles*. Cette approche intuitive permit à Cantor de développer la notion de *cardinalité* et d'étudier différents « types d'infini » — travaux qui révolutionnèrent les fondements des mathématiques modernes. Cependant, cette théorie, bien que féconde, se révéla insuffisamment rigoureuse.

En 1901, le philosophe et logicien britannique BERTRAND RUSSELL (1872–1970) mit en évidence une contradiction au cœur même de la théorie naïve : le *paradoxe de Russell*. Considérons l'ensemble suivant :

$$R := \{\, x \text{ ensemble} \mid x \notin x \,\}.$$

Autrement dit, R désigne l'ensemble de tous les ensembles qui ne se contiennent pas eux-mêmes. La question est alors : R appartient-il à lui-même ?

Deux cas se présentent :
- Si $R \in R$, alors par définition de R, on doit avoir $R \notin R$.
- Si $R \notin R$, alors, toujours par définition, R satisfait la condition pour appartenir à R ; donc $R \in R$.

Dans les deux cas, on aboutit à la contradiction suivante :

$$R \in R \iff R \notin R.$$

Cette impossibilité logique révèle une faille fondamentale de la théorie naïve : certaines définitions « trop générales » engendrent des paradoxes.

Pour surmonter cette difficulté, les mathématiciens entreprirent de fonder la théorie des ensembles sur une base axiomatique rigoureuse. En 1908, ERNST ZERMELO (1871–1953) proposa une première axiomatisation visant à éviter les paradoxes. Cette théorie fut ensuite enrichie en 1922 par ABRAHAM FRAENKEL (1891–1965) et, indépendamment, par THORALF SKOLEM (1887–1963). L'ensemble de ces axiomes constitue la théorie des ensembles **ZF** (*Zermelo–Fraenkel*). Lorsqu'on y ajoute l'axiome du choix, on obtient la théorie **ZFC**, aujourd'hui la base de la plupart des mathématiques formelles.

Cependant, même la théorie ZF ne permet pas de manipuler des « collections trop grandes » — comme l'ensemble de tous les ensembles — car celles-ci ne sont pas des ensembles, mais des *classes propres*. Pour traiter de telles collections, d'autres systèmes ont été développés, notamment la théorie **NBG** (*von Neumann–Bernays–Gödel*), qui étend ZF en introduisant une distinction explicite entre ensembles et classes. Dans ce chapitre, nous allons énoncés les différents axiomes ainsi que leurs conséquences qui nous permettrons d'établir nos premières constructions.

Commençons par donner cinq axiomes dont les énoncés sont relativement aisés à comprendre et qui sont en accords avec l'intuition commune.

1.2 Axiomes élémentaires

Axiome 1.2.1 (d'extensionnalité)

Deux ensembles possédant les mêmes éléments sont égaux :

$$\forall A, \forall B, \quad [\forall x, \, (x \in A \Leftrightarrow x \in B)] \ \Rightarrow \ A = B$$

Tout naturellement, nous pouvons facilement prouver l'implication réciproque. En effet, si on suppose qu'on a deux ensembles A et B égaux alors par définition de l'égalité en prenant un élément x de A et la formule $\varphi(y) \equiv x \in y$ (qui est bien dans le langage de ZF). Nous abtenons que

$$\varphi(A) \Leftrightarrow \varphi(B).$$

C'est à dire que $A = B \Rightarrow \forall x \, (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$

Axiome 1.2.2 (de l'ensemble vide)

Il existe un ensemble qui ne contient aucun éléments :

$$\exists E, \, \forall x, \, x \notin E$$

Proposition 1.2.3

Il n'y a qu'un seul ensemble qui ne possède aucun élément. On l'appelle ensemble vide et on le note $\varnothing$.

Démonstration. Cela résulte des deux axiomes précédant □

Axiome 1.2.4 (de la paire)

Pour tous ensembles a et b, il existe un ensemble, noté $\{a, b\}$, admettant comme éléments a et b et rien d'autre.

$$\forall a, \forall b, \quad \exists E, \forall x, [x \in E \Leftrightarrow (x = a \vee x = b)]$$

Axiome 1.2.5 (de la réunion)

Pour tout ensemble I, il existe un ensemble U dont les éléments sont les éléments des éléments I.

$$\forall I, \exists U, \forall x, [x \in U \Leftrightarrow \exists i, (i \in I \wedge x \in i)]$$

L'ensemble U est appelé la réunion des éléments de I

Par exemple, si $I = \{\{a, b\}, \{c, d\}, \{d\}\}$ alors $U = \{a, b, c, d\}$. Ce qu'on note $\bigcup I$. De même, pour $I = \{A, B\}$, l'ensemble U est noté $A \cup B$.

Définition 1.2.6

On dit qu'un ensemble A est contenu dans un ensemble B, ou que A est une partie de B si tout élément de A est élément de B

$$\forall x, [x \in A \Rightarrow x \in B]$$

On écrit alors $A \subseteq B$

Remarque 1.2.7

De cette définition, il en vient naturellement que deux ensembles A et B sont égaux si et seulement si il sont inclus l'un a l'autre, c'est à dire

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$$

Axiome 1.2.8 (de l'ensemble des parties)

Pour tout ensemble A, il existe un ensemble P dont les éléments sont les ensembles contenus dans A.

$$\forall A, \exists P, \forall x, [x \in P \Leftrightarrow \forall y, (y \in x \Rightarrow y \in A)]$$

Cet ensembles est noté $\mathcal{P}(A)$.

Axiome 1.2.9 (de l'infini)

Il existe un ensemble N qui vérifie

$$\exists N, (\varnothing \in N \wedge \forall n, (n \in N \Rightarrow n \cup \{n\} \in N))$$

Ce qui veut dire qu'il existe un ensemble N qui admet notamment comme éléments $\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \ldots$

1.3 Les axiomes techniques

D'autres axiomes sont nécessaires pour que la théorie puisse être utilisée. Voici donc, en plus des cinq précédents, les axiomes de séparation (aussi appelé axiomes de compréhension), les axiomes de substitution et l'axiome de fondation. Ces axiomes constituent la théorie ZF, pour Zermolo-Fraenkel. Et lorsque nous ajouterons l'axiome du choix, nous obtiendrons la théorie ZFC. On considère des expression logique $\mathscr{C}(x, x_1, \ldots, x_k)$ en des variables $x, x_1, \ldots, x_k$ et en utilisant les symboles $=, \in, \exists, \vee, \wedge, \neg$, ainsi que ceux qui s'en déduisent comme $\subseteq, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \ldots$ Pour chaque expression de ce type, on a un axiome de séparation.

Axiome 1.3.1 (de séparation ou de compréhension)

Pour chaque expression logique $\mathscr{C}(x, x_1, \ldots, x_k)$, en des variables $x, x_1, \ldots, x_k$, il y a un axiomes de séparation sont voici l'énoncé :

$$\forall x, \forall x_1, \ldots, x_k, \forall X, \exists Z, \quad [x \in Z \Leftrightarrow (x \in X \wedge \mathscr{C}(x, x_1, \ldots, x_k))]$$

L'ensemble Z est appelé l'ensemble des $x \in X$ tels que $\mathscr{C}(x, x_1, \ldots, x_k)$ et il est noté $\{x \in X \mid \mathscr{C}(x, x_1, \ldots, x_k)\}$

Définition 1.3.2

Soit A un ensemble non vide. Dès lors, il existe $a \in A$. On peut donc définir l'ensemble $I(a, A)$ par $\{x \in a \mid \forall b \in A, x \in b\}$. On va montrer que cet ensemble ne dépend pas du choix de a, ce qui nous permettra de l'appeler l'intersection de A, et de le noter $\bigcap A$

Démonstration. Soit $a, a' \in A$. Comme $a' \in A$, il vient $I(a, A) \subseteq I(a', A)$. Par symétrie, $I(a', A) \subseteq I(a, A)$, d'où $I(a, A) = I(a', A)$ □

Remarque 1.3.3

Pour C un ensemble $\bigcap C$ existe par l'axiome de séparation. En particulier si $C = \{A, B\}$, on note cette ensemble $A \cap B$.

Axiome 1.3.4 (de substitution ou de remplacement)

Pour chaque expression logique de type $\mathscr{C}(x, y, x_1, \dots, x_k)$, il y a un axiome de substitution dont voici l'énoncé :

$$\forall X, \quad [(\forall x \in X), \forall y_1, \forall y_2(\mathscr{C}(x, y_1, x_1, \dots, x_k) \wedge \mathscr{C}(x, y_2, x_1, \dots, x_k) \Rightarrow y_2 = y_1) \Rightarrow$$
$$\exists Y, \forall y(y \in Y \Leftrightarrow \exists x \in X, \mathscr{C}(x, y, x_1, \dots, x_k))].$$

cela implique que, et c'est probablement ce qu'il faut en retenir, que si X est un ensemble et f est une expression logique définissant une fonction sur X, alors l'ensemble $\{f(x) \mid x \in X\}$. On obtiendra le résultat en prenant pour l'expression logique $\mathscr{C}(x, y, x_1, \dots, x_k)$ l'expression $y = f(x)$.

Axiome 1.3.5 (de fondation)

Tout ensemble non vide A possède un élément a tel que $a \cap A = \varnothing$

L'axiome de fondation assure que la relation d'appartenance est bien fondée, excluant toute boucle du type $A \in A$ ou chaînes infinies d'appartenance. Il garantit ainsi une hiérarchie claire des ensembles et permet les raisonnements par récurrence sur leur structure.

1.4 Conséquences

Proposition 1.4.1

Pour tout ensemble a, il existe un ensemble et un seul dont a est le seul élément. Cet ensemble est noté $\{a\}$

Démonstration. Il s'agit d'un cas particulier de l'axiome de la paire avec $a = b$. □

Proposition 1.4.2

Si on a un nombre fini d'ensemble $x_1, \dots, x_k$, il existe un ensemble et un seul sont les éléments sont $x_1, \dots, x_k$, et eux seulement. Cet ensemble est noté $\{x_1, \dots, x_k\}$

Démonstration. Le résultat se construit par itération finie à l'aide des axiomes de la paire et de la réunion.

En effet, l'axiome de la paire assure que, pour tout couple d'ensembles x, y, l'ensemble $\{x, y\}$ existe. En supposant construit un ensemble $Y = \{x_1, \dots, x_{k-1}\}$, on applique l'axiome de la paire à Y et x_k, ce qui donne $\{Y, x_k\}$. L'axiome de la réunion fournit alors

$$\bigcup\{Y, x_k\} = Y \cup \{x_k\} = \{x_1, \dots, x_k\}.$$

L'unicité découle de l'axiome d'extensionnalité. □

Proposition 1.4.3

Il n'existe pas d'ensemble A tel que $A \in A$.

Démonstration. Si un tel ensemble existait, l'axiome de fondation appliqué à $\{A\}$ fournirait un élément $a \in A$ tel que $a \cap \{A\} = \varnothing$, ce qui contredit $A \in A$. □

Définition 1.4.4 (Complémentaire)

Soit E un ensemble et $A \subseteq E$. On appelle *complémentaire de A dans E* l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A, noté $\complement_E A$ ou $E \setminus A$:

$$\complement_E A = \{x \in E \mid x \notin A\}.$$

Proposition 1.4.5 (Lois de De Morgan)

Soient $A, B \subseteq E$. On a les égalités suivantes :

$$\complement_E(A \cup B) = (\complement_E A) \cap (\complement_E B) \quad \text{et} \quad \complement_E(A \cap B) = (\complement_E A) \cup (\complement_E B).$$

Démonstration. Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned} x \in \complement_E(A \cup B) &\Leftrightarrow x \notin A \cup B \\ &\Leftrightarrow (x \notin A) \wedge (x \notin B) \\ &\Leftrightarrow x \in (\complement_E A) \cap (\complement_E B), \end{aligned}$$

ce qui prouve la première égalité. La seconde s'obtient de façon analogue en remplaçant $\vee$ par $\wedge$ dans les équivalences logiques. □

Remarque 1.4.6

Ces lois traduisent en langage ensembliste les lois de De Morgan de la logique propositionnelle :

$$\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P) \wedge (\neg Q), \quad \neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q).$$

Elles illustrent le parallèle étroit entre logique et théorie des ensembles. Lorsque le contexte est clair, on note A^C le complémentaire de A dans E

Dans ce chapitre, nous avons donc énoncé les axiomes qui constituent la théorie ZF et qui nous permettent, de plusieurs manière, de construire des ensembles de manière formelle. Par la suite nous avons établit les opérations ensemblistes basiques qui sont l'intersection, l'union, la complémentarité, l'appartenance et l'inclusion. A partir de cela nous allons maintenant entamer les constructions qui formeront des concepts fondamentaux en mathématique.

2 Relations, fonctions et produits cartésiens

Dans ce chapitre, nous formaliserons les notions de relations, fonctions et de produits cartésiens quelconques. Ces notions nous sont essentiel afin de d'aborder l'axiome du choix et les différentes constructions des nombres usuels.

2.1 Produit Cartésien de deux ensembles

Définition 2.1.1 (couple)

Soient a et b deux ensembles, on définit le couple de a et b comme

$$(a,b) := \{\{a\},\{a,b\}\}$$

Proposition 2.1.2

Le couple de a et b existe.

Démonstration. Par 1.4, $\{a\}$ existe. Dés lors, on applique l'axiome de la paire sur a et b, ce qui nous garantit l'existence de $\{a,b\}$. Et enfin, on applique une nouvelle fois l'axiome de la paire sur $\{a\}$ et $\{a,b\}$ ce qui nous donne l'existence de (a,b) □

Remarque 2.1.3

Remarquons que cette définition permet la non commutativité. C'est à dire que $(a,b) \neq (b,a)$. Cette manière de définir les couples est due à Kazimierz Kuratowski en 1921.

Proposition 2.1.4

Soient (a,b) et (c,d) deux couples. On a

$$(a,b) = (c,d) \iff (a = c) \wedge (b = d)$$

Démonstration. Si $a = c$ et $b = d$, alors on a trivialement que $(a,b) = (c,d)$. Supposons maintenant que $(a,b) = (c,d)$ et montrons que $a = c$ et que $b = d$. On a $\{a\} \in \{\{c\},\{c,d\}\}$ si $\{a\} = \{c\}$ alors $a = c$. Si $\{a\} = \{c,d\}$, nous devons distinguer deux cas. D'abord si $c = d$, alors $\{a\} = \{c\}$ et donc $a = c$. Maintenant si $c \neq d$, alors $\{c,d\}$ contient deux éléments distincts. Il ne peut donc pas être égal à $\{a\}$ qui ne contient qu'un élément. Cela contredit donc notre hypothèse. Ainsi, si $\{a\} = \{c,d\}$ alors $d = c$ et donc $a = c$ dans tous les cas. Il reste à montrer que $b = d$. on a $\{a,b\} \in \{\{c\},\{c,d\}\}$ donc $\{a,b\} = \{c\}$ ou $\{a,b\} = \{c,d\}$. Si $\{a,b\} = \{c,d\}$ alors $b = c$ ou $b = d$. Et si $c = b$ on a $b = c = a$ et donc $c = d$ sinon on aurait $\{a,b\} \neq \{c,d\}$ ainsi $b = d$. Et enfin, si $\{a,b\} = \{c\}$ alors $b = a = c$. Et $\{a\} = \{c,d\}$ donc $c = d$ et on trouve bien $b = d$. □

Définition 2.1.5 (Produit cartésien)

Soient A et B deux ensembles, on définit le produit cartésien de A et B par

$$A \times B := \{z \in \mathscr{P}(\mathscr{P}(A \cup B)) \mid \exists a \in A, \exists b \in B\, z = (a,b)\}$$

Proposition 2.1.6

Le produit $A \times B$ existe

Démonstration. On sait par l'axiome de la réunion que $A \cup B$ existe et en appliquant deux fois l'axiome des parties, on déduit l'existence de $\mathscr{P}(\mathscr{P}(A \cup B))$. Cette argument combiné à l'existence des couples nous conduit à affirmer que la formule suivante est une formule du langage de ZF :

$$\mathscr{C}(z, A, B) \equiv \exists a \in A, \exists b \in B\, z = (a, b)$$

Ainsi, par l'axiome de séparation $A \times B$ existe. □

Remarque 2.1.7

Le lecteur pourrait se questionner quant à la raison d'une telle définition de $A \times B$. En effet, il peut sembler naturel de plutôt tenter de définir ce produit comme

$$A \times B = \{(a, b) \in \mathscr{P}(\mathscr{P}(A \cup B)) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Cependant cette définition est trop informel pour pouvoir démontrer que cet ensemble existe à partir des axiomes. Il s'agit d'une définition naïve, on peut néanmoins, une fois après l'avoir définit formellement, utiliser cette approche comme une notation de l'ensemble $A \times B$.

2.2 Relations et fonctions

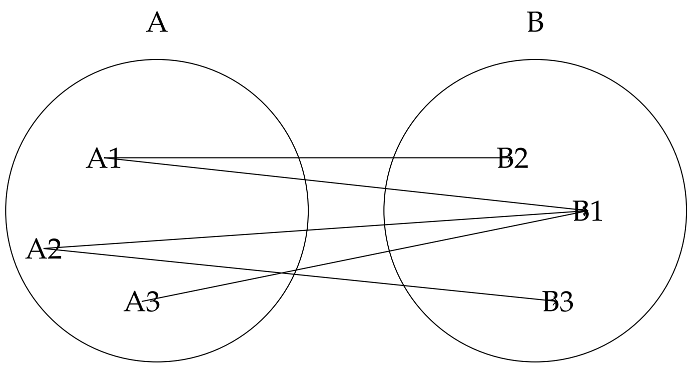
Définition 2.2.1

Une relation binaire (ou d'arité 2) entre deux ensembles A et B est un sous ensemble

$$R \subseteq A \times B.$$

Remarque 2.2.2

une relation binaire entre A et B peut être représenté par un ensemble de flèches reliant les éléments de A aux éléments de B.



Notation: *On écrit souvent xRy au lieu de $(x, y) \in R$.*

Définition 2.2.3

Soit $R \subseteq A \times B$ une relation binaire,
- Le **domaine** de R est : $\mathrm{dom}(R) := \{a \in R \mid \exists b \in B,\ (a,b) \in R\}$
- L' **image** de R est : $\mathrm{Im}(R) := \{b \in B \mid \exists a \in A,\ (a,b) \in R\}$

Par les même arguments que nous avons utilisés précédemment, il est facile de vérifier que ces ensembles existent.

Définition 2.2.4

Soit R une relation binaire entre deux ensembles A et B. La relation inverse R^{-1} est définie comme suit :

$$R^{-1} \subseteq B \times A$$

Plus précisément, si $(a,b) \in R$, alors $(b,a) \in R^{-1}$. En d'autres termes, la relation inverse consiste à inverser chaque paire de la relation R.
Formellement, si $R \subseteq A \times B$, alors la relation inverse $R^{-1} \subseteq B \times A$ est donnée par :

$$R^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b) \in R\}$$

On dit alors que R^{-1} est l'inverse de R

Définition 2.2.5

un graphe fonctionnelle F de A dans B est une relation entre A et B vérifiant

$$\forall x \in A, \forall y_1, y_2 \in B, [(x,y_1) \in F \wedge (x,y_2) \in F \Rightarrow y_2 = y_2]$$

Notation: *Pour* $(x,y) \in F$, *on note généralement* $F(x) = y$

Définition 2.2.6

Soit F un graphe fonctionnel de A dans B, on dit que
- F est une **application** si $\mathrm{dom}(F) = A$
- F est **injectif** si $\forall x_1, x_2 \in \mathrm{dom}(F), [F(x_1) = F(x_2) \Rightarrow x_1 = x_1]$.
- F est **surjectif** si $\forall y \in B, \exists x \in A, f(x) = y$ *i.e* $\mathrm{Im}(F) = B$.
- F est **bijectif** s'il est une application injective et surjective.

La notion d'injectivité est nous donne la propriété que F est une correspondance "one to one". En terme de flèches, chaque éléments de $\mathrm{dom}(F)$ est relié à un seul élément de $Im(F)$.

Proposition 2.2.7

Si F est un graphe fonctionnel injectif alors F^{-1} est un graphe fonctionnel.

Démonstration. Soit $F \subseteq A \times B$ injectif. Soient $y \in B$ et $x_1, x_2 \in A$ tels que $(y,x_1),(y,x_2) \in F^{-1}$. Par définition de F^{-1}, on a $(x_1,y),(x_2,y) \in F$. L'injectivité de F implique $x_1 = x_2$. Donc F^{-1} est fonctionnel. □

Corollaire 2.2.8

Si F est un graphe fonctionnel bijectif alors F^{-1} l'est aussi.

Démonstration. Soit $F \subseteq A \times B$ bijectif, c'est-à-dire fonctionnel, injectif, avec $\mathrm{dom}(F) = A$ et $\mathrm{im}(F) = B$.

Par la proposition, F^{-1} est fonctionnel. Montrons qu'il est aussi bijectif.

Injectivité de F^{-1}**.** Soient $y_1, y_2 \in B$ et $x \in A$ tels que $(y_1, x), (y_2, x) \in F^{-1}$. Alors $(x, y_1), (x, y_2) \in F$. Puisque F est fonctionnel, $y_1 = y_2$.

Domaine et image. On a

$$\mathrm{dom}(F^{-1}) = \{y : \exists x, (x,y) \in F\} = \mathrm{im}(F) = B,$$
$$\mathrm{im}(F^{-1}) = \{x : \exists y, (x,y) \in F\} = \mathrm{dom}(F) = A.$$

Donc F^{-1} est bijectif. □

Définition 2.2.9

Soient a, b et c trois ensembles, on définit le triplet de a, b et c par

$$(a,b,c) := ((a,b),c) = \{\{\{\{a\},\{a,b\}\}\},\{\{\{a\},\{a,b\}\},c\}\}.$$

Remarque 2.2.10

Notons que, en général, $((a,b),c) \neq (a,(b,c))$ *C'est pourquoi nous devons décider de la convention de* (a,b,c)*. Bien que* $(a,b,c) := (a,(b,c))$ *soit valable, nous suivrons la convention standard qui est celle ci-dessus.*

Proposition 2.2.11

Soient a, b, c, a', b'et c' six ensembles. on a

$$(a,b,c) = (a',b',c') \iff (a = a') \wedge (b = b') \wedge (c = c')$$

Démonstration. On a que $(a,b,c) = (a',b',c')$ est équivalent à $((a,b),c) = ((a',b'),c')$. Par 2.1, c'est équivalent à $((a,b) = (a',b')) \wedge (c = c')$. De même par 2.1, c'est équivalent à $(a = a') \wedge (b = b') \wedge (c = c')$. □

Définition 2.2.12

Une fonction f de A dans B est un triplet (F, A, B), où A et B sont des ensembles et F est un graphe fonctionnel de A dans B. On dit que A est l'ensemble de départ de la fonction et que B est l'ensemble d'arrivé.

Notation: *On note une fonction de* f *de* A *dans* B *par* $f : A \to B$

Cette définition nous permet d'établir que deux fonctions sont différentes si leur ensemble de départ ou d'arriver diffère et ce, même si leur graphe est identique.

Définition 2.2.13

Soit $f = (F, A, B)$ une fonction.
- Le **domaine** de f est : $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(F)$.
- L' **image** de f est : $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(F)$.
- f est **application** si F l'est.
- f est **injective** si F l'est.
- f est **surjective** si F l'est.
- f est une **bijection** si F l'est.

Remarque 2.2.14

D'un point de vue pratique, il est commode d'identifier une fonction à son graphe lorsqu'il n'y a pas de confusion possible. On pourrait définir $f(x) = y$ comme l'unique élément y de B tel que $(x, y) \in F$, cependant, il peut paraître un bonne chose de séparer les concepts d'"évaluation" et de fonction. Cette approche est également pratique pour certaine preuve, c'est donc l'approche que nous allons adopter.

Définition 2.2.15

On définit

$$B^A := \{F \in \mathcal{P}(A \times B) : F \text{ est un graphe fonctionnel de } A \text{ dans } B\}$$

Proposition 2.2.16

Soient A et B deux ensembles, B^A existe.

Démonstration. On a

1. $A \times B$ existe
2. $\mathcal{P}(A \times B)$ existe (axiome des parties)
3. La formule "$\forall x \in A\, \exists! y \in B\, ((x, y) \in F)$" est une formule de $\mathcal{L}_{ZF}$
4. Par compréhension : $B^A = \{F \in \mathcal{P}(A \times B) \mid \forall x \in A,\ \exists! y \in B,\ (x, y) \in F\}$ existe.

$\square$

Remarque 2.2.17

Comme on identifie une fonction à son graphe, on peut considérer cet ensemble, comme l'ensemble des fonction de A dans B.

Définition 2.2.18 (Fonction d'évaluation)

Soient A et B deux ensembles. On définit la fonction d'évaluation :

$$\mathrm{ev}_{A,B} : A \times B^A \to B$$

par : pour tout $(x, F) \in A \times B^A$,

$$\mathrm{ev}_{A,B}(x, F) := \text{l'unique } y \in B \text{ tel que } (x, y) \in F.$$

Proposition 2.2.19

La fonction $\mathrm{ev}_{A,B}$ est bien définie.

Démonstration. Soit $(x, F) \in A \times B^A$. Par définition de B^A, F est un graphe fonctionnel de A dans B, donc $\mathrm{dom}(F) = A$.

Existence : Puisque $x \in A = \mathrm{dom}(F)$, il existe $y \in B$ tel que $(x, y) \in F$.

Unicité : Si $(x, y_1) \in F$ et $(x, y_2) \in F$, alors par la propriété fonctionnelle de F, on a $y_1 = y_2$.

Donc $\mathrm{ev}_{A,B}(x, F)$ existe et est unique. □

Définition 2.2.20 (Application d'une fonction)

Soit $f = (F, A, B)$ une fonction et $x \in A$. On définit :

$$f(x) := \mathrm{ev}_{A,B}(x, F).$$

Remarque 2.2.21

La notation $f(x)$ est donc une ***abréviation*** *pour $\mathrm{ev}_{A,B}(x, F)$, où F est le graphe de f. Cela sépare formellement le concept de fonction (un triplet) du concept d'évaluation (une opération).*

Proposition 2.2.22 (Caractérisation de l'évaluation)

Soit $f = (F, A, B)$ une fonction, $x \in A$, et $y \in B$. Alors :

$$f(x) = y \iff (x, y) \in F.$$

Démonstration. Découle immédiatement de la définition de $\mathrm{ev}_{A,B}$. □

Proposition 2.2.23 (Extensionnalité)

Soient $f = (F, A, B)$ et $g = (G, A, B)$ deux fonctions de A dans B. Alors :

$$f = g \iff \forall x \in A, f(x) = g(x).$$

Démonstration. ($\Rightarrow$) Si $f = g$, alors $F = G$, donc pour tout $x \in A$, $f(x) = \mathrm{ev}_{A,B}(x, F) = \mathrm{ev}_{A,B}(x, G) = g(x)$.

($\Leftarrow$) Supposons $\forall x \in A, f(x) = g(x)$. Soit $(x, y) \in A \times B$ arbitraire. Par la proposition 2.2 :

$$\begin{aligned}
(x, y) \in F &\iff f(x) = y \\
&\iff g(x) = y \quad \text{(hypothèse)} \\
&\iff (x, y) \in G.
\end{aligned}$$

Donc $F = G$, et par conséquent $f = g$. □

2.3 Courbes de niveau

Définition 2.3.1

Soit F une fonction de $A \to B$ et soit $b \in B$
On appelle **courbes de niveau** de F l'ensemble :

$$C_b(F) = \{a \in A \mid F(a) = b\}$$

Il est facile de vérifier que les courbes de niveaux existent

Remarque 2.3.2

On a

1. *F est **surjective** ssi $\forall b \in B$, $C_b(F) \neq \emptyset$.*
2. *F est **injective** ssi $\forall b \in \operatorname{Im} F$, $C_b(F)$ est un singleton.*

Proposition 2.3.3

Soit $b, b' \in B$ et soient $C_b(F)$ et $C_{b'}(F)$ deux courbes de niveau de F, alors soit elles sont **confondues**, soit elles sont **disjointes**.

Démonstration. Soit $x \in C_b(F) \cap C_{b'}(F)$, c'est-à-dire un élément appartenant à l'intersection des deux courbes de niveau. Par définition de ces ensembles, on a :

$$F(x) = b \quad \text{et} \quad F(x) = b'.$$

En conséquence, on obtient :

$$b = b'.$$

Cela signifie que si l'intersection $C_b(F) \cap C_{b'}(F)$ est non vide, alors nécessairement $b = b'$, ce qui implique que :

$$C_b(F) = C_{b'}(F).$$

Dans le cas contraire, si $b \neq b'$, alors il n'existe aucun $x \in A$ tel que $F(x) = b$ et $F(x) = b'$ simultanément, ce qui entraîne :

$$C_b(F) \cap C_{b'}(F) = \emptyset.$$

□

2.4 Composition

Après avoir, définit formellement les notions de fonction et de relation. Nous allons maintenant munir l'opération de composition à B^A.

Définition 2.4.1

Soient $R \subseteq A \times B$ et $S \subseteq B \times C$ deux relations binaires. On définit la composition $S \circ R$ par

$$S \circ R := \{(x, y) \in A \times C \mid \exists y \in B,\ [(x, y) \in R \wedge (y, z \in S)]\}$$

Proposition 2.4.2

Pour toutes relations $R \subseteq A \times B$ et $S \subseteq B \times C$, l'ensemble $S \circ R$ existe.

Démonstration. Nous avons que

$$\mathscr{C}(x,z,R,S,B) \equiv \exists y \in B, [(x,y) \in R \wedge (y,z) \in S]$$

est une formule du premier ordre dans le langage de ZF, En effet, l'ensemble A × C existe puisque c'est un produit cartésien. Par l'axiome de séparation appliqué à $A \times C$:

$$S \circ R = \{(x,z) \in A \times C \mid \mathscr{C}(x,z,R,S,B)\}$$

existe. □

Proposition 2.4.3

Soient $R \subseteq A \times B$ et $S \subseteq B \times C$ deux relations, alors $S \circ R \subseteq A \times C$ est une relation.

Démonstration. Cela résulte directerment de la définition. □

Proposition 2.4.4

Soient $R \subseteq A \times B$et $S \subseteq B \times C$. Alors :

$$\mathrm{dom}(S \circ R) = \{x \in A \mid \exists y \in \mathrm{Im}(R) \cap \mathrm{dom}(S), (x,y) \in R\}$$

En particulier, si $\mathrm{dom}(S) \supseteq \mathrm{Im}(R)$, alors $\mathrm{dom}(S \circ R) = \mathrm{dom}(R)$.

Démonstration. Soit $x \in A$, on a

$$\begin{aligned}
& x \in \mathrm{dom}(S \circ R) \\
\Leftrightarrow & \exists z \in C, (x,z) \in S \circ R \\
\Leftrightarrow & \exists z \in C, \exists y \in B, [(x,y) \in R \wedge (y,z) \in S] \\
\Leftrightarrow & \exists y \in B, [(x,y) \in R \wedge y \in \mathrm{dom}(S)] \\
\Leftrightarrow & \exists y \in \mathrm{Im}(R) \cap \mathrm{dom}(S), (x,y) \in R
\end{aligned}$$

□

Proposition 2.4.5

Soient $R \subseteq A \times B$ et $S \subseteq B \times C$. Alors :

$$\mathrm{Im}(S \circ R) \subseteq \mathrm{Im}(S)$$

Plus précisément : $\mathrm{Im}(S \circ R) = S(\mathrm{Im}(R))$ où $S(X) = \{z \in C \mid \exists y \in X, (y,z) \in S\}$.

Démonstration. Soit $z \in \mathrm{Im}(S \circ R)$. Alors :

$$\begin{aligned}
& \exists x \in A, (x,z) \in S \circ R \\
\Leftrightarrow & \exists x \in A, \exists y \in B, [(x,y) \in R \wedge (y,z) \in S] \\
\Leftrightarrow & \exists y \in B, (y,z) \in S \\
\Leftrightarrow & z \in \mathrm{Im}(S)
\end{aligned}$$

□

Proposition 2.4.6

Soient $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$ et $T \subseteq C \times D$ trois relations. On a

$$T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R.$$

On dit que $\circ$ est associatif.

Démonstration. Montrons l'égalité par double inclusion.
Soit $(x, w) \in A \times D$.
Supposons $(x, w) \in T \circ (S \circ R)$. Alors :

$$\exists z \in C, [(x, z) \in S \circ R \wedge (z, w) \in T]$$

Puisque $(x, z) \in S \circ R$:

$$\exists y \in B, [(x, y) \in R \wedge (y, z) \in S]$$

Donc :

$$\exists y \in B, \exists z \in C, [(x, y) \in R \wedge (y, z) \in S \wedge (z, w) \in T]$$

Puisque $(y, z) \in S$ et $(z, w) \in T$: $(y, w) \in T \circ S$
Donc :

$$\exists y \in B, [(x, y) \in R \wedge (y, w) \in T \circ S]$$

C'est-à-dire $(x, w) \in (T \circ S) \circ R$.
Supposons mainteant que $(x, w) \in (T \circ S) \circ R$. Alors :

$$\exists y \in B, [(x, y) \in R \wedge (y, w) \in T \circ S]$$

Puisque $(y, w) \in T \circ S$:

$$\exists z \in C, [(y, z) \in S \wedge (z, w) \in T]$$

Donc :

$$\exists y \in B, \exists z \in C, [(x, y) \in R \wedge (y, z) \in S \wedge (z, w) \in T]$$

Puisque $(x, y) \in R$ et $(y, z) \in S$, on a

$$(x, z) \in S \circ R$$

Donc $\exists z \in C, [(x, z) \in S \circ R \wedge (z, w) \in T]$
C'est-à-dire $(x, w) \in T \circ (S \circ R)$. D'où $T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$.

□

On peut alors écrire $T \circ S \circ R$ sans ambiguïté.

Définition 2.4.7 (Diagonale)

Pour tout ensemble A, on définit la diagonale de A par :

$$\Delta_A := \{z \in A \times A \mid \exists x \in A,\ z = (x, x)\}$$

Plus simplement on peut adopter la notation $\Delta_A = \{(x, x) \mid x \in A\}$

Proposition 2.4.8

Soit A un ensemble, Δ_A existe.

Démonstration. Cela vient du fait que la formule suivante est de ZF

$$\mathscr{C}(z, A) \equiv \exists x \in A\, z = (x, x)$$

□

Proposition 2.4.9

Soit R une relation entre A et B, nous avons que
— $\Delta_B \circ R = R$
— $R \circ \Delta_A = R$

Démonstration. Flemmemememememem □

Proposition 2.4.10

Soit $R \subseteq A \times B$ une relation, nous avons que
— $R \circ R^{-1} = \Delta_B$
— $R^{-1} \circ R = \Delta_A$

Démonstration. felmememeemlfemlflmeleflm □

Proposition 2.4.11

Soient $F \subseteq A \times B$ et $G \subseteq B \times C$ deux graphes fonctionnels, $F \circ G$ est un graphe fonctionnel.

Démonstration. flemme □

Définition 2.4.12

Soient $f = (F, A, B)$ et $g = (G, B, C)$ deux fonctions, on définit la composition de f et g par $g \circ f := (G \circ F, A, C)$.

Proposition 2.4.13

Soient $f = (F, A, B)$ et $g = (G, B, C)$ deux fonctions, $g \circ f$ est une fonction.

Proposition 2.4.14

Soient $f = (F, A, B) : A \to B$ et $g = (G, B, C) : B \to C$ deux fonctions. Alors pour tout $x \in A$:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Démonstration. Notons $h = g \circ f = (G \circ F, A, C)$. Par définition de l'évaluation, on a

$$h(x) = \mathrm{ev}_{A,C}(x, G \circ F),$$

c'est-à-dire l'unique $z \in C$ tel que $(x, z) \in G \circ F$.

Or, par définition de la composition de graphes,

$$(x, z) \in G \circ F \iff \exists y \in B, [(x, y) \in F \land (y, z) \in G].$$

Ainsi, z est l'unique élément de C pour lequel il existe $y \in B$ vérifiant $(x, y) \in F$ et $(y, z) \in G$.

Puisque F est un graphe fonctionnel avec $\mathrm{dom}(F) = A$ et que $x \in A$, il existe un unique $y \in B$ tel que $(x, y) \in F$. Par définition de l'évaluation, cet élément y n'est autre que $f(x)$.

Par conséquent, z est l'unique élément de C tel que $(f(x), z) \in G$. Par définition de l'évaluation, ceci signifie que

$$z = \mathrm{ev}_{B,C}(f(x), G) = g(f(x)).$$

On a donc bien $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. □

Définition 2.4.15

Pour tout ensemble A, on définit la **fonction identité** $\mathrm{id}_A : A \to A$ par :

$$\mathrm{id}_A := (\Delta_A, A, A)$$

Proposition 2.4.16

Pour tout ensemble A, id_A existe et est une fonction.

Démonstration. Cela résulte du fait que Δ_A est un graphe fonctionnel. □

Proposition 2.4.17

Pour toute fonction $f : A \to B$:

1. $\mathrm{id}_B \circ f = f$
2. $f \circ \mathrm{id}_A = f$

Proposition 2.4.18

Soient $f : A \to B$ et $g : B \to C$ deux fonctions,

1. Si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective.
2. Si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.
3. Si f et g sont bijectives alors $g \circ f$ est bijective.

Avec cette construction par l'évaluation on peut maintenant aborder la curryfication.

2.5 Familles et produits cartésiens quelconques

Définition 2.5.1

Soit I un ensemble, une famille indexée par I est une couple (E, A) où E est un ensemble et A une fonction de I dans E. Pour tout $i \in I$, on note A_i l'unique élément tel que $(i, A_i) \in A$, c'est-à-dire $A_i := A(i)$. On note souvent une telle famille $(A_i)_{i \in I}$.

Par abus de langage, on identifie souvent la famille avec la fonction A elle-même, mais formellement c'est le couple (E, A).

Définition 2.5.2

Soit I un ensemble non vide et (E, A) une famille indexée par I. On définit le produit cartésien de cette famille par :

$$\prod_{i \in I} A_i := \{f \in E^I \mid \forall i \in I, f(i) \in A_i\}$$

Proposition 2.5.3

Pour tout ensemble I non vide et toute famille (E, A) d'ensembles indexée par I, l'ensemble $\prod_{i \in I} A_i$ existe.

Démonstration. Vu ce qui précède E^I existe. De plus, Formule de compréhension : La formule

$$\mathcal{C}(f, I, A) := \forall i \in I, (i, f(i)) \in f \wedge (i, A(i)) \in A \wedge f(i) \in A(i)$$

est une formule du langage de ZF.

Application de l'axiome de séparation : Par l'axiome de compréhension, l'ensemble

$$\prod_{i \in I} A_i = \{f \in E^I \mid \mathcal{C}(f, I, A)\}$$

existe. □

Remarque 2.5.4

*On dira qu'une famille $(a_i)_{i \in I}$ est une **suite** si I est un ensemble de la forme $\mathbb{N}^{\geq k}$*

test tes test test