Cash machine

Dễ dàng nhận thấy công thức quy hoạch động như sau:

- Gọi $m[b]$ là số tiền nhỏ nhất mà phải trả nhiều tờ tiền nhất
- Gọi $dp[b]$ là số lượng tờ tiền dùng để trả $m[b]$
- Gọi $c(b)$ là mệnh giá tiền lớn nhất mà không vượt quá b
- Dễ dàng thấy được công thức quy hoạch động như sau:

$$dp[b] = \max(dp[b-1], dp[b-c(b)]+1)$$

- Nếu $b - c(b) - c(b) > c(b)$ thì

$$dp[b] = \max(dp[b-1-2\times c(b)]+1, dp[b-2\times c(b)]+2)$$

- Gọi t là số lớn nhất mà $b - t \times c(b) > c(b)$ thì ta có công thức sau:

$$dp[b] = \max(dp[b-1-t\times c(b)]+t, dp[b-t\times c(b)]+t)$$

- do đó ta gọi $b^{'} = b - t \times c(b)$
- lúc này $b^{'} - c(b) \le c(b)$ ta có thể viết lại công thức thành:

$$dp[b] = \max(dp[b^{'}-1], dp[b^{'}]) + t$$

- lúc này:

$$dp[b^{'}] = \max(\max_{j=c(b)}^{b^{'}}(dp[j-c(b)]+1), dp[c(b)-1])$$

- Vì $dp[i] \ge dp[j]$ với $i > j$ do đó:

$$\max_{j=c(b)}^{b^{'}}(dp[j-c(b)]) \le dp[b-c(b)]$$

$$=> dp[b^{'}] = \max(dp[b^{'}-c(b)]+1, dp[c(b)-1])$$

- Từ các công thức trên ta có thể viết lại công thức như sau:

$$dp[b] = \max(dp[b^{'}-c(b)]+t+1, dp[c(b)-1]+t)$$

Vì $b - t \times c(b) < \frac{b}{2}$, do đó số lượng mệnh giá tiền sử dụng để trả b sẽ không vượt quá $\log b$. Do đó ta có thể tính được $dp[b]$ trong $\mathrm{O}(\log b)$ khi đã chuẩn bị trước được $dp[a_i - 1]$.