

有限オートマトン

離散数学・オートマトン

2024 年後期

佐賀大学工学部 只木進一

- 1 序論: Introduction
- 2 決定性有限オートマトン: Deterministic Finite State Automata
- 3 受理言語: Accepted Languages
- 4 非決定性有限オートマトン: Non-deterministic FA
- 5 疑問: Questions

オートマトンと形式言語: Automata and Formal Languages

- オートマトン (Automaton)
 - 計算の抽象モデル
 - テープからの入力による状態遷移
 - 「計算する」とは何かを考える
 - automata は複数形
- 形式言語 (Formal Language)
 - オートマトンが受理する言語
入力を正しく処理できるか
 - 文法を数学的に分析

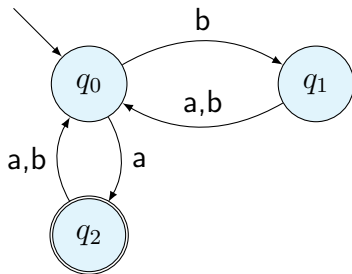
決定性有限オートマトン

Deterministic Finite State Automata: DFA

$$M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle \quad (2.1)$$

- Q : 内部状態の有限集合
- Σ : 入力アルファベット、つまり入力記号の有限集合
- $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$: 状態遷移関数
 - ある状態 q で文字 a を読むと、状態が p に遷移する
- $q_0 \in Q$: 初期状態
- $F \subseteq Q$: 受理状態の集合
 - $q \in F$ に到達する入力を受理する

例 2.1:



$$Q = \{q_0, q_1, q_2\}$$

$$\Sigma = \{a, b\}$$

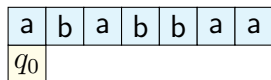
$$F = \{q_2\}$$

遷移関数 δ

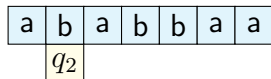
	a	b
q_0	q_2	q_1
q_1	q_0	q_0
q_2	q_0	q_0

動作イメージ

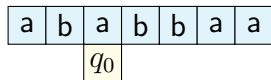
テープヘッドが移動して、テープ上の文字を読み取る。



$$(q_0, ababbaa) \vdash_M (q_2, babbaa)$$



$$(q_2, babbaa) \vdash_M (q_0, abbaa)$$



$$(q_0, ababbaa) \vdash_M (q_2, babbaa)$$

$$\vdash_M (q_0, abbaa)$$

$$\vdash_M (q_2, bbaa)$$

$$\vdash_M (q_0, baa)$$

$$\vdash_M (q_1, aa)$$

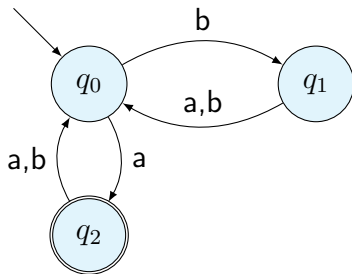
$$\vdash_M (q_0, a)$$

$$\vdash_M (q_2, \epsilon)$$

遷移関数 δ

	a	b
q_0	q_2	q_1
q_1	q_0	q_0
q_2	q_0	q_0

例:2.1 への入力 bbaba



\vdash_M の推移的閉包と受理言語

- 入力 $w \in \Sigma^*$ (Σ^* は Σ の要素の 0 個以上の列) によって、初期状態 q_0 から状態 q へ遷移し、テープに残っている文字列が w'

$$(q_0, w) \vdash_M^* (q, w') \quad (3.1)$$

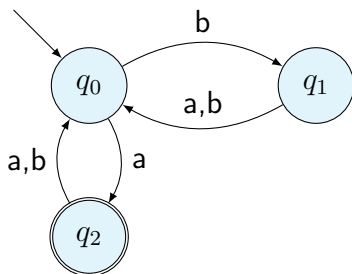
- 入力 w を受理

$$(q_0, w) \vdash_M^* (q_F, \epsilon), \quad q_F \in F \quad (3.2)$$

- 受理言語

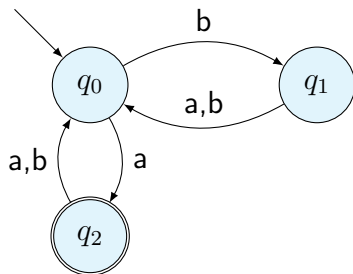
$$L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid (q_0, w) \vdash_M^* (q_F, \epsilon), \quad q_F \in F\} \quad (3.3)$$

例:2.1 の場合



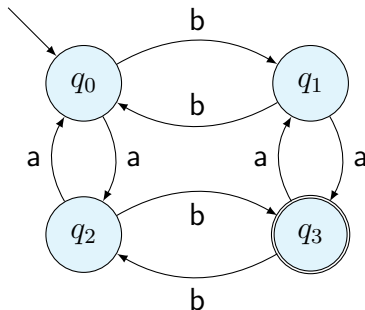
$$\begin{aligned}
 (q_0, aaaba) &\vdash (q_2, aaba) \vdash (q_0, aba) \\
 &\vdash (q_2, ba) \vdash (q_0, a) \vdash (q_2, \epsilon) \\
 (q_0, babaa) &\vdash (q_1, abaa) \vdash (q_0, baa) \\
 &\vdash (q_1, aa) \vdash (q_0, a) \vdash (q_2, \epsilon)
 \end{aligned}$$

受理する入力の実例



a, aaa, aba, baa, bba,
aaaaa, aaaba, abaaa,
babaa, babba, bbbba,
bbbba

例 3.1:



$$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$$

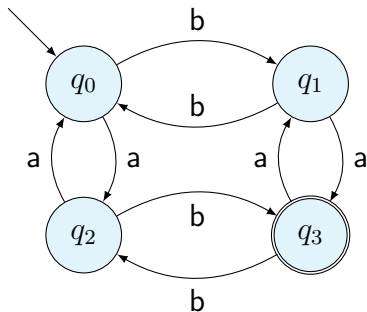
$$\Sigma = \{a, b\}$$

$$F = \{q_3\}$$

遷移関数 δ

	a	b
q_0	q_2	q_1
q_1	q_3	q_0
q_2	q_0	q_3
q_3	q_1	q_2

例 3.1: 動作例

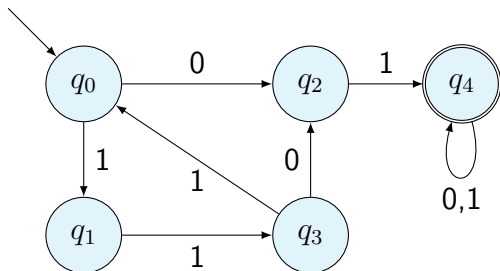


$$\begin{aligned}
 (q_0, aaaaab) \vdash (q_2, aaaab) \vdash (q_0, aaab) \vdash (q_2, aab) \\
 \vdash (q_0, ab) \vdash (q_2, b) \vdash (q_3, \epsilon) \\
 (q_0, abbaba) \vdash (q_2, bbaba) \vdash (q_3, baba) \vdash (q_2, aba) \\
 \vdash (q_0, ba) \vdash (q_1, a) \vdash (q_3, \epsilon)
 \end{aligned}$$

例 3.1: 受理する文字列例 (長さ 5 まで)

ab ba aaab aaba abaa abbb baaa babb bbab bbba

例 3.2:



$$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$$

$$\Sigma = \{0, 1\}$$

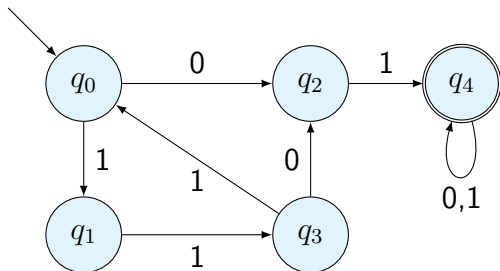
$$F = \{q_4\}$$

遷移関数 δ

	0	1
q_0	q_2	q_1
q_1		q_3
q_2		q_4
q_3	q_2	q_0
q_4	q_4	q_4

空欄に注意

例 3.2: 動作例



$$\begin{aligned}
 &(q_0, 1110101) \vdash (q_1, 110101) \vdash (q_3, 10101) \vdash (q_0, 0101) \\
 &\quad \vdash (q_2, 101) \vdash (q_4, 01) \vdash (q_4, 1) \vdash (q_4, \epsilon) \\
 &(q_0, 1101010) \vdash (q_1, 101010) \vdash (q_3, 01010) \vdash (q_2, 1010) \\
 &\quad \vdash (q_4, 010) \vdash (q_4, 10) \vdash (q_4, 0) \vdash (q_4, \epsilon)
 \end{aligned}$$

例 3.2: 受理する文字列例 (長さ 5 まで)

01, 010, 011, 0100, 0101, 0110, 0111, 1101, 01000, 01001, 01010,
01011, 01100, 01101, 01110, 01111, 11010, 11011, 11101

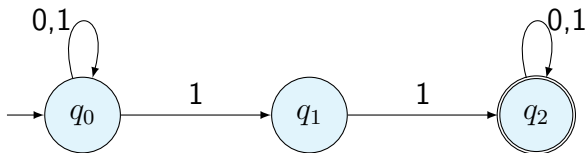
非決定性有限オートマトン

Non-deterministic Finite State Automata: NFA

$$M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle \quad (4.1)$$

- Q : 内部状態の集合
- Σ : 入力アルファベット
- $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$: 状態遷移関数。
 2^Q は、 Q のべき集合、つまり Q の部分集合の族。遷移先が複数であることを許容することに注意。
- $q_0 \in Q$: 初期状態
- $F \subseteq Q$: 受理状態

例 4.1:

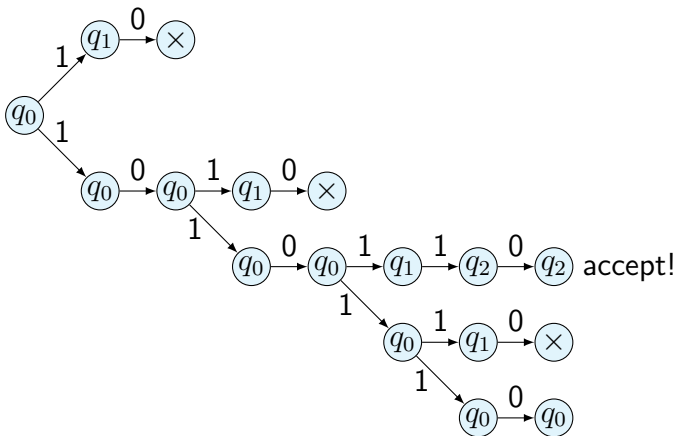


$$Q = \{q_0, q_1, q_2\}, \quad \Sigma = \{0, 1\}, \quad F = \{q_2\}$$

遷移関数 δ

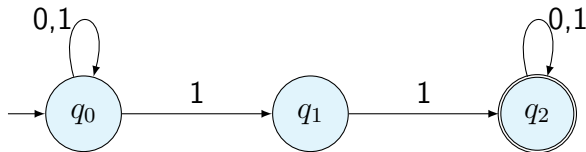
	0	1
q_0	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$
q_1	\emptyset	$\{q_2\}$
q_2	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$

動作例: 入力 1010110



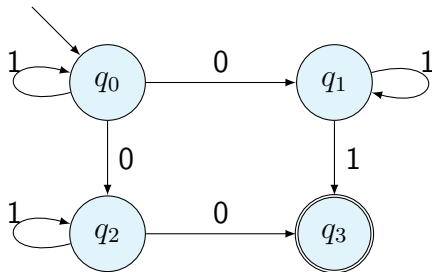
入力が引き起こす状態遷移のうちで、受理状態に至る場合が一つでもあれば、その入力を受理する。

長さ 5 以下の受理入力



11, 011, 110, 111, 0011, 0110, 0111, 1011, 1100, 1110, 1111, 00011,
00110, 00111, 01011, 01100, 01110, 01111, 10011, 10110, 10111,
11000, 11011, 11100, 11110, 11111

例 4.2:



$$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \quad \Sigma = \{0, 1\}, \quad F = \{q_3\}$$

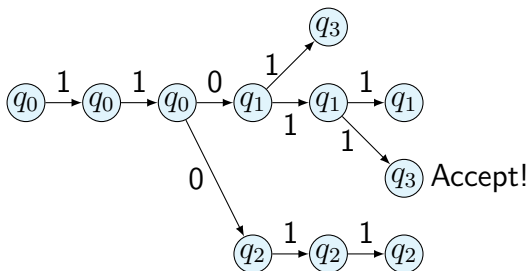
遷移関数 δ

δ	0	1
q_0	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_0\}$
q_1	\emptyset	$\{q_1, q_3\}$
q_2	$\{q_3\}$	$\{q_2\}$
q_3	\emptyset	\emptyset

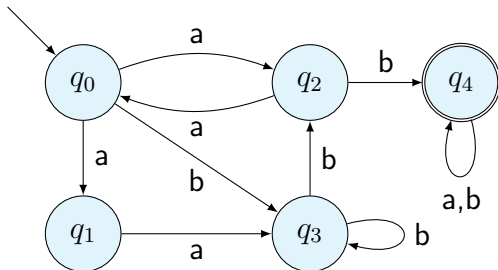
長さ 5 以下の受理入力

00, 01, 010, 011, 100, 101, 0110, 0111, 1010, 1011, 1100, 1101,
01110, 01111, 10110, 10111, 11010, 11011, 11100, 11101

動作例: 入力 11011



例 4.3:

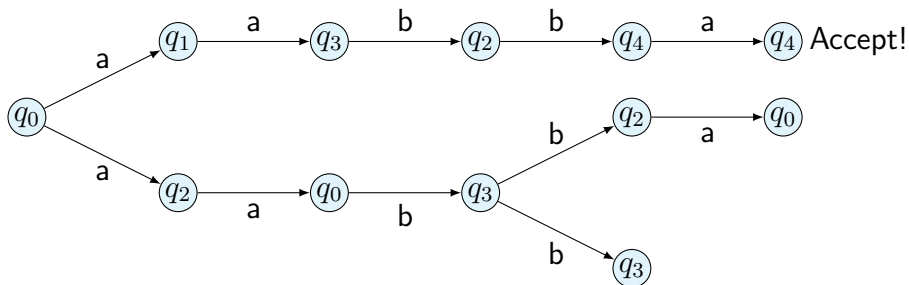


$$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \Sigma = \{a, b\}, F = \{q_4\}$$

遷移関数 δ

	a	b
q_0	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_3\}$
q_1	$\{q_3\}$	\emptyset
q_2	\emptyset	$\{q_4\}$
q_3	\emptyset	$\{q_2, q_3\}$
q_4	$\{q_4\}$	$\{q_4\}$

動作例: 入力 aabba



疑問

- オートマトンが受理する文字列の集合を記述する方法
 - 文字列パターンを記述する方法
- NFA と DFA は本質的に異なるのか
 - 受理する文字列集合は異なるのか
 - 能力は異なるか