



酔歩のシミュレーション:理論的解析

オブジェクト指向プログラミング特論

只木進一:工学系研究科

酔歩 (RANDOM WALK)

- 確率過程 (Stochastic Process)
 - 系の時間発展が非決定的なもの
- 酔歩
 - 確率過程の標準モデル
 - 一次元格子
 - 各時刻で、確率 p で右に、 $1-p$ で左に移動



理論的解析

- 原点から出発した粒子の位置 x
- 時刻 t で位置 x に居るためには $m = \frac{t+x}{2}$ 回右に移動
 - 左右の移動順序の可能な組み合わせに注意
- 時刻 t で位置 x に居る確率

$$P(x) = \binom{t}{\frac{t+x}{2}} p^{(t+x)/2} (1-p)^{(t-x)/2}$$



- 位置の平均

$$\langle x \rangle = \sum_{m=0}^t (2m - t) \binom{t}{m} p^m (1-p)^{t-m} = t(2p - 1)$$

- 位置の分散

$$\sigma^2 = \sum_{m=0}^t (2m - t)^2 \binom{t}{m} p^m (1-p)^{t-m} - \langle x \rangle^2 = 4pt(1-p)$$

- 分布の形 $t \rightarrow \infty$

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x + t - 2pt)^2}{2\sigma^2}\right)$$



母関数: GENERATING FUNCTION

○ 確率

x に対する確率から m に対するものへ

$$P(x): x = 2m - t, m \in [0, t]$$

⇓

$$Q(m): m = \frac{x+t}{2}, m \in [0, t]$$

○ 母関数

$$G(z) = \sum_{m=0}^t Q(m) z^m$$



$$G(1) = \sum_{m=0}^t Q(m) = 1$$

$$G'(z) = \sum_{m=1}^t mQ(m) z^{m-1}$$

$$G'(1) = \sum_{x=0}^t mQ(m) = \langle m \rangle$$

$$G''(z) = \sum_{m=2}^t m(m-1)Q(m) z^{m-2}$$

$$G''(1) = \sum_{m=0}^t m(m-1)Q(x) = \langle m^2 \rangle - \langle m \rangle$$



二項分布 $Q(m) = \binom{t}{m} p^m (1-p)^{t-m}$ に対して

$$G(z) = \sum_{m=0}^t \binom{t}{m} p^m (1-p)^{t-m} z^m = (zp + 1 - p)^t$$

$$G(1) = 1$$

母関数の具体的表式が得られることが重要

$$G'(z) = tp(zp + 1 - p)^{t-1} = \frac{tp}{zp + 1 - p} G(z)$$

$$G'(1) = tp$$

$$\langle m \rangle = tp$$

$$\langle x \rangle = \langle 2m - t \rangle = 2tp - t = t(2p - 1)$$



$$\begin{aligned}
 G''(z) &= \frac{-tp^2}{(zp+1-p)^2} G(z) + \frac{tp}{zp+1-p} G'(z) \\
 &= \frac{-tp^2}{(zp+1-p)^2} G(z) + \frac{t^2 p^2}{(zp+1-p)^2} G(z) = \frac{tp^2(-1+t)}{(zp+1-p)^2} G(z)
 \end{aligned}$$

$$G''(1) = tp^2(-1+t)$$

$$\begin{aligned}
 \sigma^2 &= \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \langle 4m^2 - 4mt + t^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \\
 &= 4(\langle m^2 \rangle - \langle m \rangle) + 4\langle m \rangle(1-t) + t^2 - \langle x \rangle^2 \\
 &= 4G''(1) + 4\langle m \rangle(1-t) + t^2 - \langle x \rangle^2 \\
 &= 4tp^2(t-1) + 4tp(1-t) + t^2 - t^2(4p^2 - 4p + 1) = 4tp(1-p)
 \end{aligned}$$
