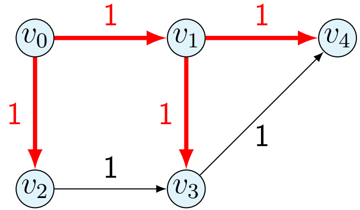
最短経路問題

離散数学・オートマトン
2024 年後期
佐賀大学理工学部　只木進一

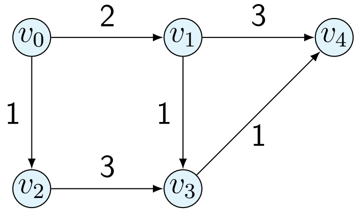
最短経路問題: Shortest Paths

- 有向ネットワーク
  - 各辺に距離・コスト (正の実数)
- 始点から終点までの最短有向道を見つける
  - 辺の向きがそろった道
- 距離・コストの組み合わせ最適化問題

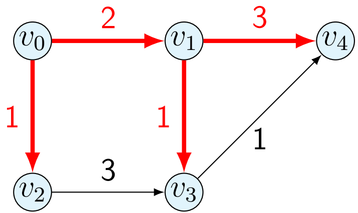
すべての辺の距離が同じ場合
幅優先探索で十分



辺の長さがばらばらな場合



幅優先探索では誤る



- v_4 への経路が $v_0 \to v_1 \to v_4$ となり、距離が 5
- しかし、経路 $v_0 \to v_1 \to v_3 \to v_4$ のほうが距離 4
- 頂点の移動数が多くても、距離の短い道がある

Dijkstra 法: 初期化

$p(v)$: 始点から頂点 v への距離
$q(v)$: 始点から頂点 v への経路の、v の一つ前の頂点
$l(e)$: 辺 e の長さ
U : 始点からの距離が仮に分かった頂点の集合
W : 始点からの距離が確定した頂点の集合

初期値

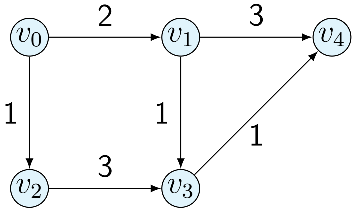
$$U = \{v_0\} \tag{2.1}$$
$$W = \emptyset \tag{2.2}$$
$$p(v_0) = 0 \tag{2.3}$$
$$p(u) = +\infty \quad (\forall u \in V \setminus \{v_0\}) \tag{2.4}$$
$$q(v) = \text{NULL} \quad (\forall v \in V) \tag{2.5}$$

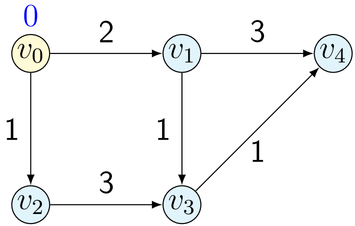
Dijkstra 法: アルゴリズム

Algorithm 1 Dijkstra 法

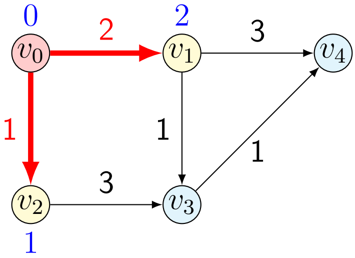
```
while U ≠ ∅ do
    w = U の要素のうち p(w) が最小の要素
    for all e ∈ δ⁺w do
        x = ∂⁻w                                   ▷ w の隣接頂点
        if p(x) > p(w) + l(e) then                ▷ e を使ったほうが近距離
            q(x) ← w
            p(x) ← p(w) + l(e)
        end if
        if x ∉ U then
            U に x を追加
        end if
    end for
    w を W へ追加
end while
```

例 2.1:

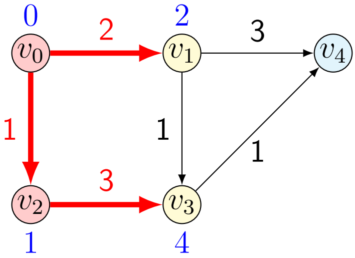




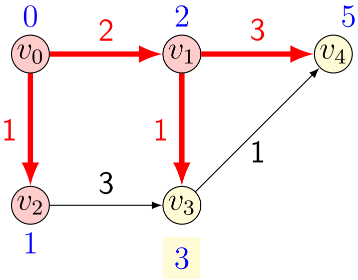
黄色い頂点は U に属する。
頂点近くの青い数字は $p(v)$



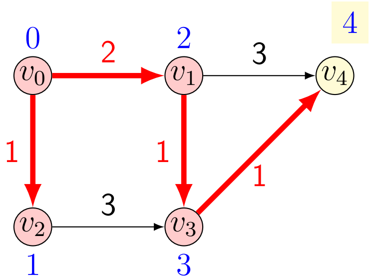
黄色い頂点は U に属する。
赤い頂点は W に属する。
頂点近くの青い数字は $p(v)$



黄色い頂点は U に属する。
赤い頂点は W に属する。
頂点近くの青い数字は $p(v)$

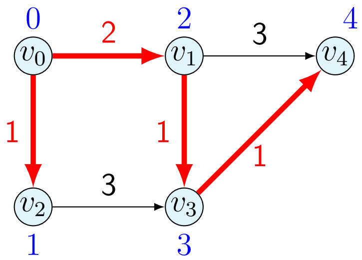


v_3 の距離が変更になった。



v_4 の距離が変更になった。

例 2.1: 結果

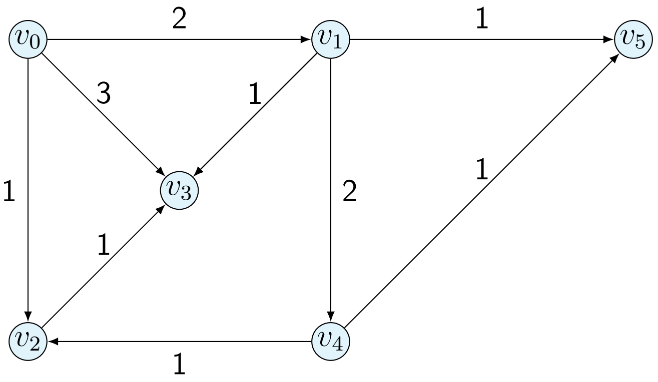


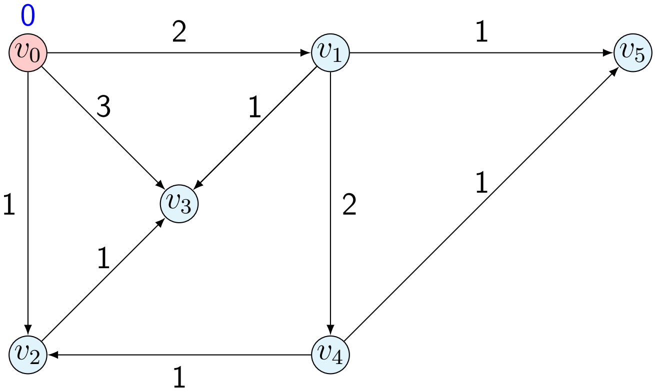
例 2.1: まとめ

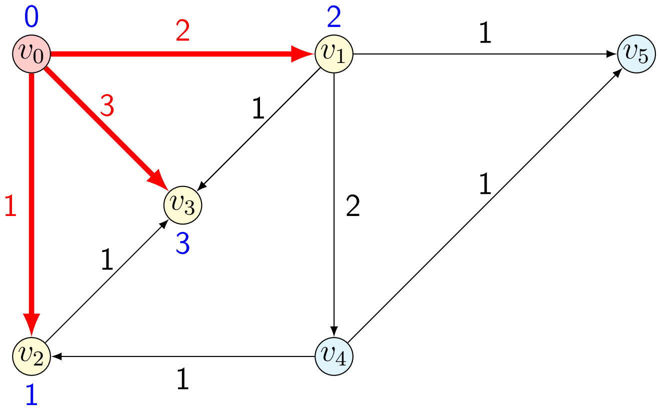
W	U	p	q
$\emptyset$	$\{v_0\}$	$p(v_0) = 0$	
$\{v_0\}$	$\{v_1, v_2\}$	$p(v_1) = 2$ $p(v_2) = 1$	$q(v_1) = v_0$ $q(v_2) = v_0$
$\{v_0, v_2\}$	$\{v_1, v_3\}$	$p(v_3) = 4$	$q(v_3) = v_2$
$\{v_0, v_1, v_2\}$	$\{v_3, v_4\}$	$p(v_3) = 3$ $p(v_4) = 5$	$q(v_3) = v_1$ $q(v_4) = v_1$
$\{v_0, v_1, v_2, v_3\}$	$\{v_4\}$	$p(v_4) = 4$	$q(v_4) = v_3$
$\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$	$\emptyset$		

赤文字は、変更箇所

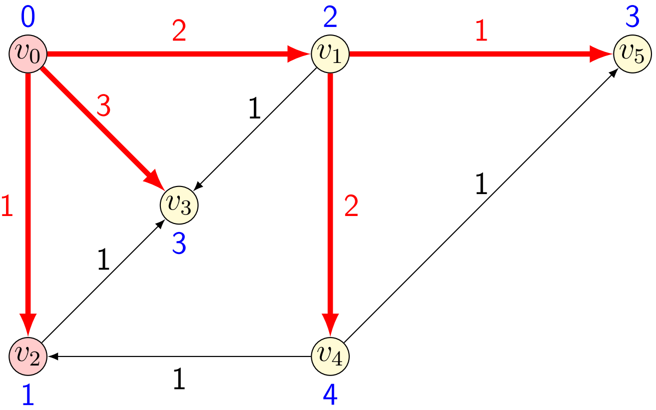
例 2.2:



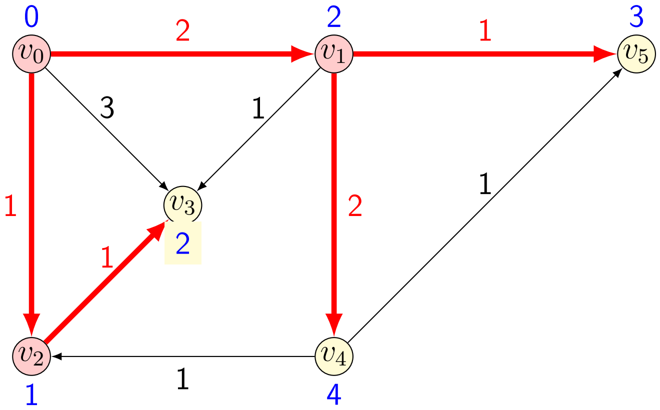

0
v_0
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
2
1
3
1
1
2
1
1
1

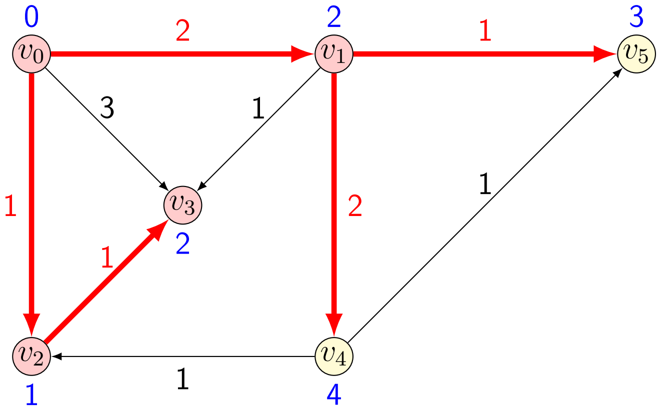


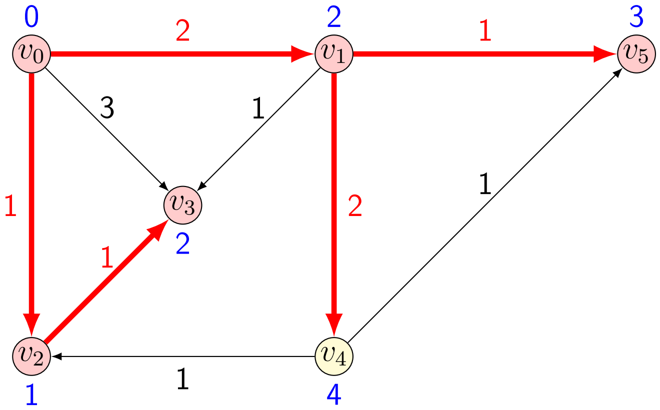
0
2
2
1
v_0
v_1
v_5
3
1
1
2
1
v_3
3
1
v_2
v_4
1
1

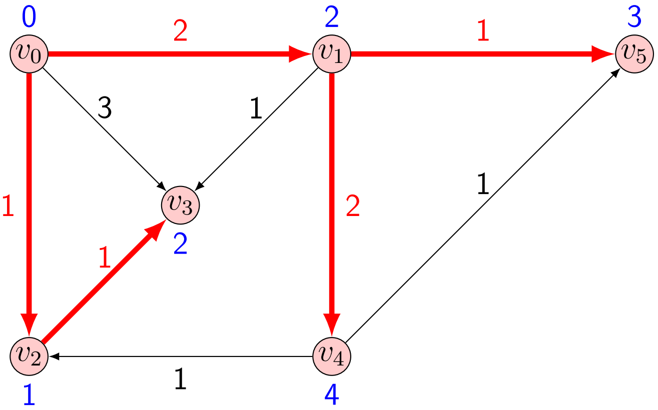


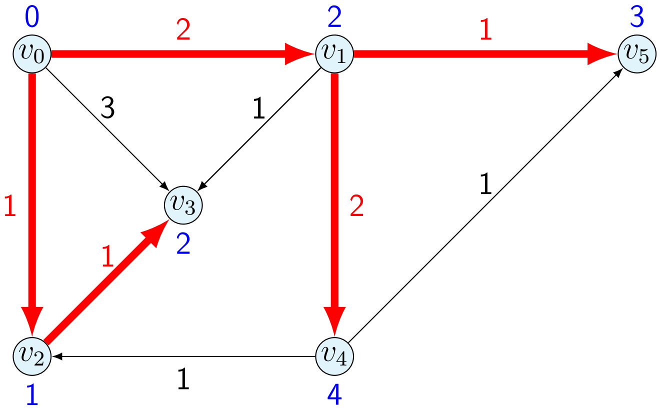
0
2
3
v_0
v_1
v_5
2
1
3
1
1
2
1
v_3
3
1
v_2
v_4
1
1
4


0
2
2
1
3
v_0
v_1
v_5
3
1
1
1
2
v_3
2
1
v_2
v_4
1
1
4


0
2
3
2
1
v_0
v_1
v_5
3
1
1
v_3
2
1
1
v_2
v_4
1
1
4

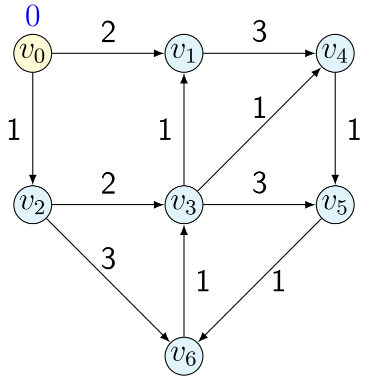

0
2
3
2
1
v_0
v_1
v_5
3
1
1
1
2
v_3
1
2
v_2
v_4
1
1
4

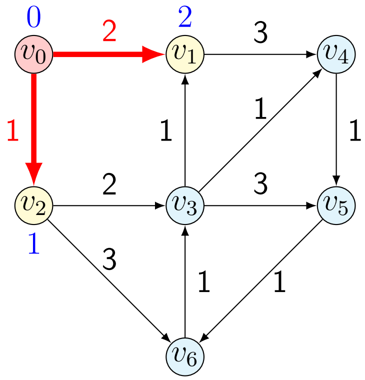

0
2
2
3
1
v_0
v_1
v_5
3
1
1
1
2
v_3
1
2
v_2
v_4
1
1
4

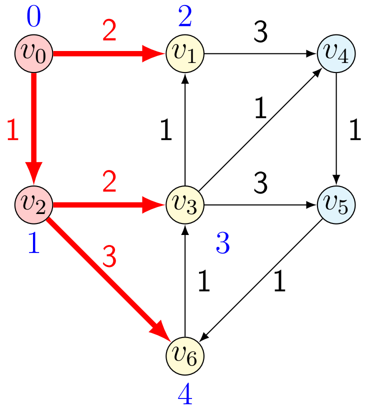

0
2
3
2
1
v_0
v_1
v_5
3
1
1
v_3
2
2
1
1
v_2
v_4
1
1
4

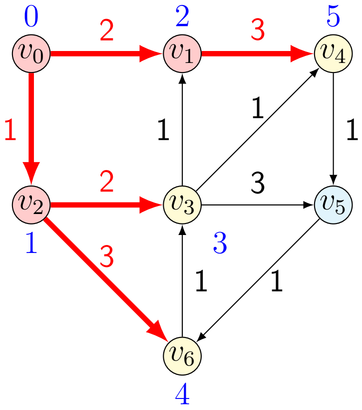
W	U	p	q
$\emptyset$	$\{v_0\}$	$p(v_0) = 0$	
$\{\color{red}{v_0}\}$	$\{v_1, v_2, v_3\}$	$p(v_1) = 2$ $p(v_2) = 1$ $p(v_3) = 3$	$q(v_1) = v_0$ $q(v_2) = v_0$ $q(v_3) = v_0$
$\{v_0, \color{red}{v_2}\}$	$\{v_1, v_3\}$	$\color{red}{p(v_3) = 2}$	$\color{red}{q(v_3) = v_2}$
$\{v_0, \color{red}{v_1}, v_2\}$	$\{v_3, v_4, v_5\}$	$p(v_4) = 3$ $p(v_5) = 4$	$q(v_4) = v_1$ $q(v_5) = v_1$
$\{v_0, v_1, v_2, \color{red}{v_3}\}$	$\{v_4, v_5\}$		
$\{v_0, v_1, v_2, v_3, \color{red}{v_4}\}$	$\{v_5\}$		
$\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, \color{red}{v_5}\}$	$\emptyset$		

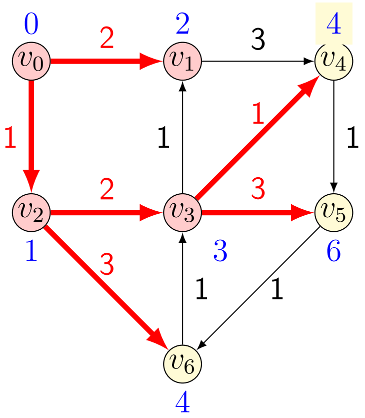
例 2.3:

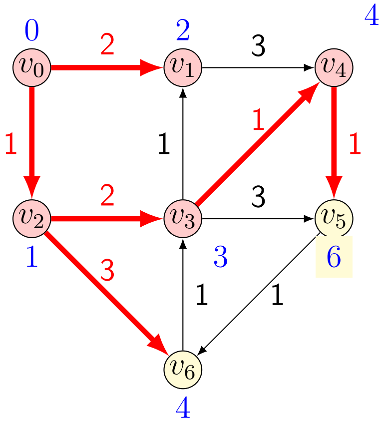


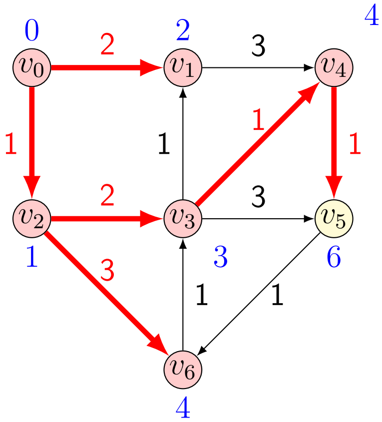

0
2
2
3
v_0
v_1
v_4
1
1
1
1
2
3
v_2
v_3
v_5
1
3
1
1
v_6


0
2
3
2
v_0
v_1
v_4
1
1
1
1
2
3
v_2
v_3
v_5
1
3
3
1
1
v_6
4

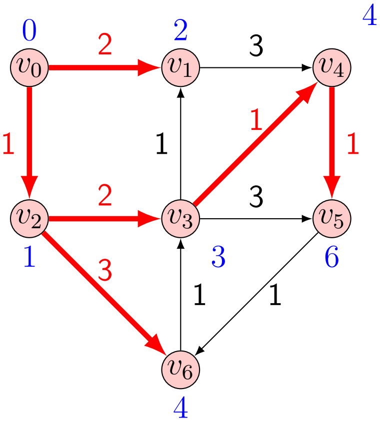

0
2
5
v_0
2
v_1
3
v_4
1
1
1
1
v_2
2
v_3
3
v_5
1
3
3
1
1
v_6
4


0
2
4
2
3
v_0
v_1
v_4
1
1
1
1
2
3
v_2
v_3
v_5
1
3
6
3
1
1
v_6
4


0
2
4
v_0
v_1
v_4
2
3
1
1
1
1
v_2
v_3
v_5
2
3
1
3
6
3
1
1
v_6
4

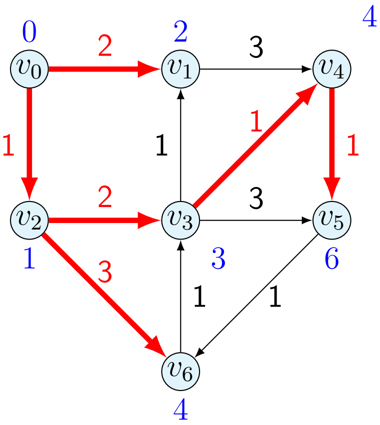


0
2
4
2
3
v_0
v_1
v_4
1
1
1
1
2
3
v_2
v_3
v_5
1
3
3
6
1
1
v_6
4



0
2
4
v_0
v_1
v_4
2
3
1
1
1
1
v_2
v_3
v_5
2
3
1
3
6
3
1
1
v_6
4

例 2.3：結果



証明概要

補題 1 頂点は、始点からの距離が短い順に W に入る。また、W に入った頂点の距離を更新することはない

補題 2 U 及び W に属する頂点には、始点からの経路があり、その時点で最短である。

補題 1

- Dijkstra 法の実行に伴って、頂点が v_0、v_1、v_2 という順に集合 W に追加されるとする。頂点名は、元のネットワークの頂点名でないことに注意

$$0 \leq p(v_0) \leq p(v_1) \leq \cdots \leq p(v_i) \leq \cdots \tag{3.1}$$

- つまり W には、距離の小さい頂点から順に追加されていく。従って、W に入った頂点 v に対する $p(v)$ が後から更新されることはない。

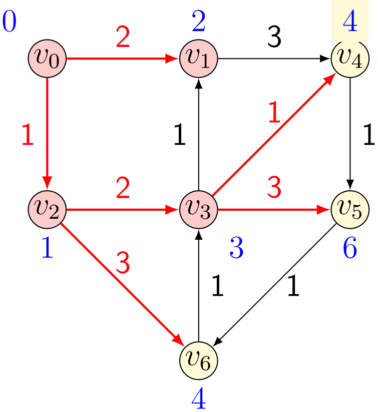
補題 1 が正しいこと

- Dijkstra 法の実行中に、以下が常に成り立つことを示す
  - W の要素である頂点への距離は、W の要素でない任意の頂点への距離より大きいことはない

$$\max\{p(u) \mid u \in W\} \le \min\{p(u) \mid u \in V \setminus W\} \tag{3.2}$$

- $p(v)$ を更新することはない

$$\begin{aligned} &\forall v \in U \subseteq V \setminus W, \quad \forall u \in W \\ &\Rightarrow p(v) \ge p(u) \end{aligned} \tag{3.3}$$



次のステップとして、v_3 を起点に隣接頂点の距離を計算する。このとき、v_1 の距離を更新することはない。更新したのは、v_4 の距離である。

補題 2

- U 及び W に属する頂点には、始点からの最短経路がある

補題2が正しいこと

- U 及び W に属する頂点には、始点からの最短経路がある: 構成方法から
- U に属する頂点は、より短い経路が見つかる度に更新 $\Rightarrow$ やがて W に入り、距離確定