

非決定性有限オートマトンと決定性有限 オートマトン

離散数学・オートマトン

2024 年後期

佐賀大学工学部 只木進一

- ① 非決定性有限オートマトン: NFA
- ② NFA から DFA へ: Converting from NFA to DFA
- ③ ϵ -動作のある非決定性有限オートマトン: NFA with ϵ -transitions
- ④ DFA の簡素化: Minimizing DFA

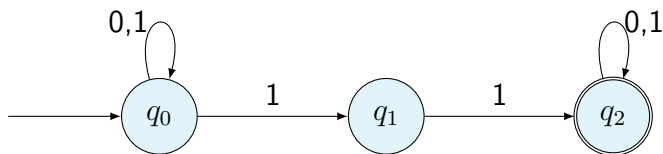
非決定性有限オートマトン: 復習

Non-deterministic Finite Automaton: NFA

$$M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle \quad (1.1)$$

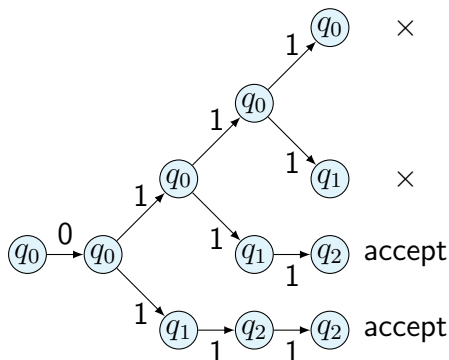
- Q : 内部状態の集合
- Σ : 入力アルファベット
- $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$: 状態遷移関数
 - 遷移先が複数ある: 状態集合
- $q_0 \in Q$: 初期状態
- $F \subseteq Q$: 受理状態

例 1.1:



入力 w を受理するとは、 w によって引き起こされた状態遷移の遷移先のなかに、受理状態 F の要素が含まれていること。

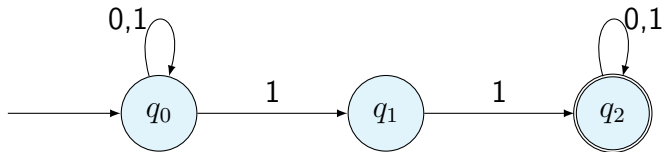
入力 0111 引き起こす状態遷移



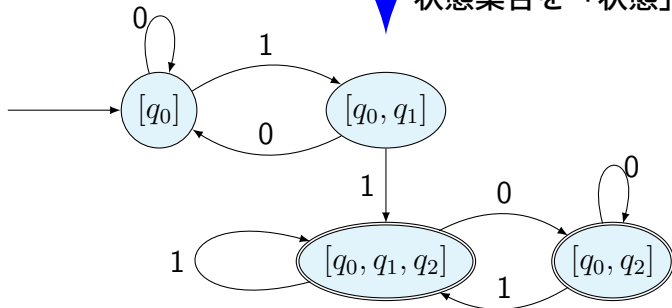
NFA から DFA へ

- NFA に対する DFA が構成できる
- つまり、NFA と DFA はその能力に差が無い
 - 同じ入力を受理する
- 「非決定性」の拡張
 - 入力無しでの動作 (ϵ -動作) を導入
- DFA に対応した NFA を作ることができることは自明

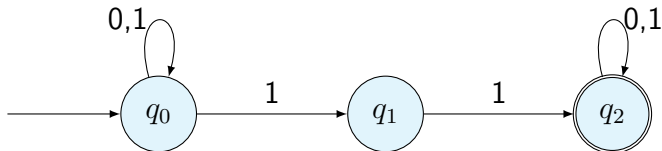
例 2.1: NFA から DFA への変換イメージ



状態集合を「状態」とみなす



$[q_0]$ と $[q_0, q_1]$ の間の遷移を構成



遷移関数の引数を状態集合へ拡張

$$\delta(\{q_0\}, 0) = \{q_0\}$$

$$\delta(\{q_0\}, 1) = \{q_0, q_1\}$$

$$\delta(\{q_0, q_1\}, 0) = \delta(\{q_0\}, 0) \cup \delta(\{q_1\}, 0) = \{q_0\} \cup \emptyset = \{q_0\}$$

$$\begin{aligned}\delta(\{q_0, q_1\}, 1) &= \delta(\{q_0\}, 1) \cup \delta(\{q_1\}, 1) \\ &= \{q_0, q_1\} \cup \{q_2\} = \{q_0, q_1, q_2\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta(\{q_0, q_1, q_2\}, 0) &= \delta(\{q_0, q_1\}, 0) \cup \delta(\{q_2\}, 0) \\ &= \{q_0\} \cup \{q_2\} = \{q_0, q_2\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta(\{q_0, q_1, q_2\}, 1) &= \delta(\{q_0, q_1\}, 1) \cup \delta(\{q_2\}, 1) \\ &= \{q_0, q_1, q_2\} \cup \{q_2\} = \{q_0, q_1, q_2\}\end{aligned}$$

NFAM $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ に対応した DFA M'

$$M' = \langle Q', \Sigma, \delta', [q_0], F' \rangle \quad (2.1)$$

- $Q' \subseteq 2^Q$: 集合と区別するために別の括弧 $[]$ を使う
- Σ : 入力アルファベット
- $\delta' : Q' \times \Sigma \rightarrow Q'$: 状態遷移関数
- $[q_0] \in Q'$: 初期状態
- $F' = \{A \in Q' \mid A \cap F \neq \emptyset\}$: 受理状態

Algorithm 1 Q' と δ' を構成するアルゴリズム

$D = \emptyset, Q' = \emptyset, Q'_{\text{work}}.\text{push}([q_0])$

▷ D は新しい遷移関数の集合。 Q'_{work} は待ち行列

while $|Q'_{\text{work}}| > 0$ **do**

$Q' = Q'_{\text{work}}.\text{pop}()$

▷ 起点となる状態集合 A'

for all $a \in \Sigma$ **do**

$Q'_{\text{new}} = \emptyset$

for all $q \in Q'$ **do**

for all $p \in \delta(q, a)$ **do**

$Q'_{\text{new}}.\text{append}(\{p\})$

end for

end for

$D = D \cup \{ \delta'(q', a) = q'_{\text{new}} \}$

▷ 新しい遷移関数を追加

if $(Q'_{\text{new}} \not\subseteq Q') \wedge (Q'_{\text{new}} \not\subseteq Q'_{\text{work}})$ **then**

▷ Q'_{new} は新しい状態集合

$(Q'_{\text{work}}.\text{push}(Q'_{\text{new}}))$

end if

end for

$Q'.\text{append}(Q')$

end while

- 初期状態だけの集合 $\{q_0\}$
- 新たに発生した状態集合 S に対して、遷移先の集合を追加
- 新たな状態集合がなくなるまで繰り返す

例 2.1: Q' と δ' の構成

- $[q_0]$ を起点に

$$\begin{array}{ll} \delta(q_0, 0) = \{q_0\} & \\ \delta(q_0, 1) = \{q_0, q_1\} & \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} \delta'([q_0], 0) = [q_0] \\ \delta'([q_0], 1) = [q_0, q_1] \end{array}$$

- $[q_0, q_1]$ を起点に

$$\begin{array}{ll} \delta(q_0, 0) = \{q_0\} & \\ \delta(q_1, 0) = \emptyset & \\ \delta(q_0, 1) = \{q_0, q_1\} & \\ \delta(q_1, 1) = \{q_2\} & \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} \delta'([q_0, q_1], 0) = [q_0] \\ \delta'([q_0, q_1], 1) = [q_0, q_1, q_2] \end{array}$$

- $[q_0, q_1, q_2]$ を起点に

$$\delta(q_0, 0) = \{q_0\}$$

$$\delta(q_1, 0) = \emptyset$$

$$\delta(q_2, 0) = \{q_2\}$$

$$\delta(q_0, 1) = \{q_0, q_1\}$$

$$\delta(q_1, 1) = \{q_2\}$$

$$\delta(q_2, 1) = \{q_2\}$$

 \rightarrow

$$\delta'([q_0, q_1, q_2], 0) = [q_0, q_2]$$

$$\delta'([q_0, q_1, q_2], 1) = [q_0, q_1, q_2]$$

- $[q_0, q_2]$ を起点に

$$\delta(q_0, 0) = \{q_0\}$$

$$\delta(q_2, 0) = \{q_2\}$$

$$\delta(q_0, 1) = \{q_0, q_1\}$$

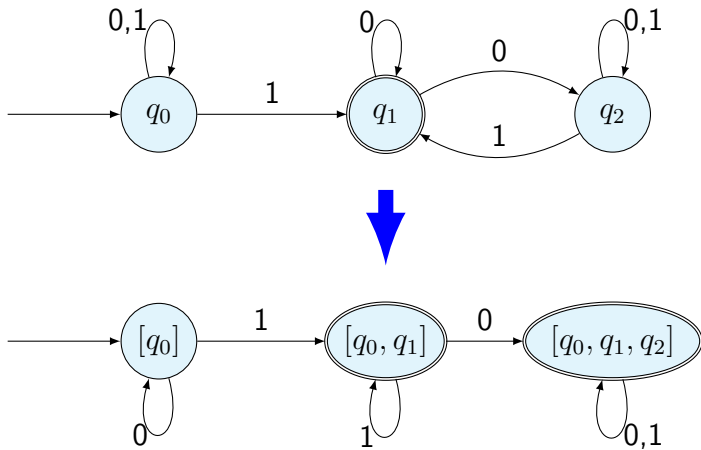
$$\delta(q_2, 1) = \{q_2\}$$

 \rightarrow

$$\delta'([q_0, q_2], 0) = [q_0, q_2]$$

$$\delta'([q_0, q_2], 1) = [q_0, q_1, q_2]$$

例 2.2:



- $[q_0]$ を起点に

$$\begin{array}{lcl} \delta(q_0, 0) = \{q_0\} & \rightarrow & \delta'([q_0], 0) = [q_0] \\ \delta(q_0, 1) = \{q_0, q_1\} & & \delta'([q_0], 1) = [q_0, q_1] \end{array}$$

- $[q_0, q_1]$ を起点に

$$\begin{array}{lcl} \delta(q_0, 0) = \{q_0\} & & \\ \delta(q_1, 0) = \{q_1, q_2\} & \rightarrow & \delta'([q_0, q_1], 0) = [q_0, q_1, q_2] \\ \delta(q_0, 1) = \{q_0, q_1\} & & \delta'([q_0, q_1], 1) = [q_0, q_1] \\ \delta(q_1, 1) = \emptyset & & \end{array}$$

- $[q_0, q_1, q_2]$ を起点に

$$\delta(q_0, 0) = \{q_0\}$$

$$\delta(q_1, 0) = \{q_0, q_2\}$$

$$\delta(q_2, 0) = \{q_2\}$$

$$\delta(q_0, 1) = \{q_0, q_1\}$$

$$\delta(q_1, 1) = \emptyset$$

$$\delta(q_2, 1) = \{q_2\}$$

 \rightarrow

$$\delta'([q_0, q_1, q_2], 0) = [q_0, q_1, q_2]$$

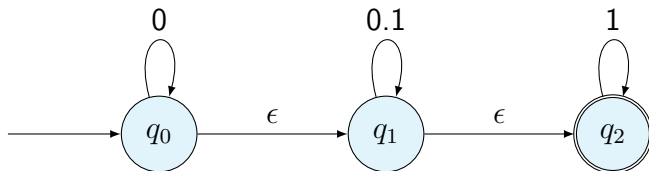
$$\delta'([q_0, q_1, q_2], 1) = [q_0, q_1, q_2]$$

ϵ 動作のある非決定性有限オートマトン: NFA with ϵ -transitions

$$M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle \quad (3.1)$$

- Q : 内部状態の集合
- Σ : 入力アルファベット
- $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \rightarrow 2^Q$: 状態遷移関数
文字を読まずに遷移する (ϵ 動作) ことがある
- $q_0 \in Q$: 初期状態
- $F \subseteq Q$: 受理状態

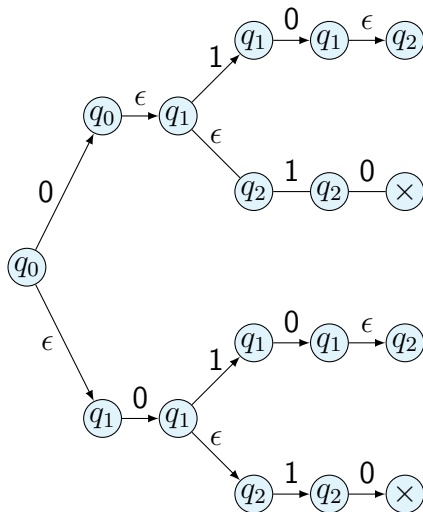
例 3.1:



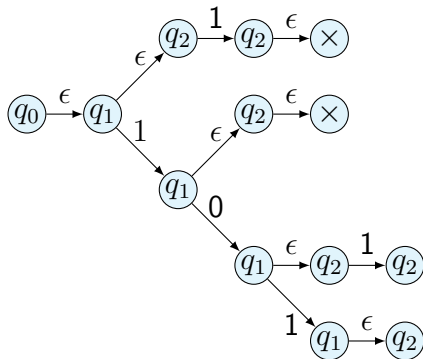
$$Q = \{q_0, q_1, q_2\}, \Sigma = \{0, 1\}, F = \{q_2\}$$

| δ | 0 | 1 | ϵ |
|----------|-------------|-------------|-------------|
| q_0 | $\{q_0\}$ | \emptyset | $\{q_1\}$ |
| q_1 | $\{q_1\}$ | $\{q_1\}$ | $\{q_2\}$ |
| q_2 | \emptyset | $\{q_2\}$ | \emptyset |

動作例: 入力 010



動作例: 入力 101



ϵ -閉包: ϵ -closure

- M の状態集合 $Q' \subseteq Q$ の各要素から ϵ -動作のみで到達可能な状態の集合 $\epsilon\text{-CL}(Q')$

$$\epsilon\text{-CL}(\{q_0\}) = \{q_0, q_1, q_2\}$$

$$\epsilon\text{-CL}(\{q_1\}) = \{q_1, q_2\}$$

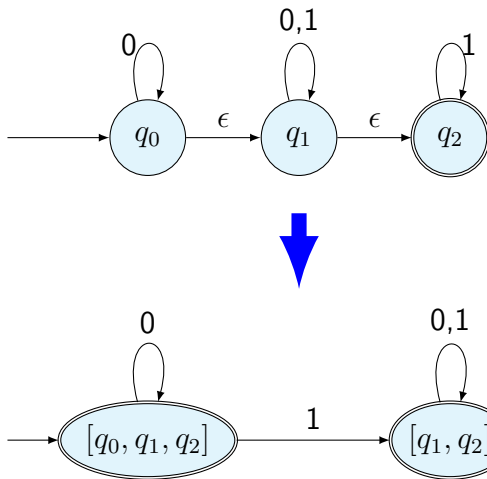
$$\epsilon\text{-CL}(\{q_2\}) = \{q_2\}$$

ϵ -NFA $M = \langle Q', \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ に対応した DFAM M'

$$M' = \langle Q, \Sigma, \delta', q'_0, F' \rangle \quad (3.2)$$

- $Q' \subseteq 2^Q$
- Σ : 入力アルファベット
- $\delta' : Q' \times \Sigma \rightarrow Q'$: 状態遷移関数
 $\delta' : (Q', a) = \epsilon\text{-CL} \left(\bigcup_{q \in \epsilon\text{-CL}(Q')} \delta(q, a) \right), Q' \in Q'$
- $Q'_0 = \epsilon\text{-CL}(\{q_0\})$: 初期状態
- $F' = \{A \in Q' \mid A \cap F \neq \emptyset\}$: 受理状態
- 一文字読んだ遷移後の ϵ 動作を考慮して、遷移先を求める

例 3.2:



- 始状態

$$\epsilon\text{-CL}(q_0) \{q_0, q_1, q_2\} \quad \rightarrow \quad [q_0, q_1, q_2] \text{ が始状態}$$

- $[q_0, q_1, q_2]$ を始点に

$$\delta(q_0, 0) = \epsilon\text{-CL}(q_0) = \{q_0, q_1, q_2\}$$

$$\delta(q_1, 0) = \epsilon\text{-CL}(q_1) = \{q_1, q_2\}$$

$$\delta(q_2, 0) = \emptyset$$

$$\delta(q_0, 1) = \emptyset$$

$$\delta(q_1, 1) = \epsilon\text{-CL}(q_1) = \{q_1, q_2\}$$

$$\delta(q_2, 1) = \{q_2\}$$

$$\Downarrow$$

$$\delta'([q_0, q_1, q_2], 0) = [q_0, q_1, q_2]$$

$$\delta'([q_0, q_1, q_2], 1) = [q_1, q_2]$$

- $[q_1, q_2]$ を始点に

$$\delta(q_1, 0) = \epsilon\text{-CL}(q_1) = \{q_1, q_2\}$$

$$\delta(q_2, 0) = \emptyset$$

$$\delta(q_1, 1) = \epsilon\text{-CL}(q_1) = \{q_1, q_2\}$$

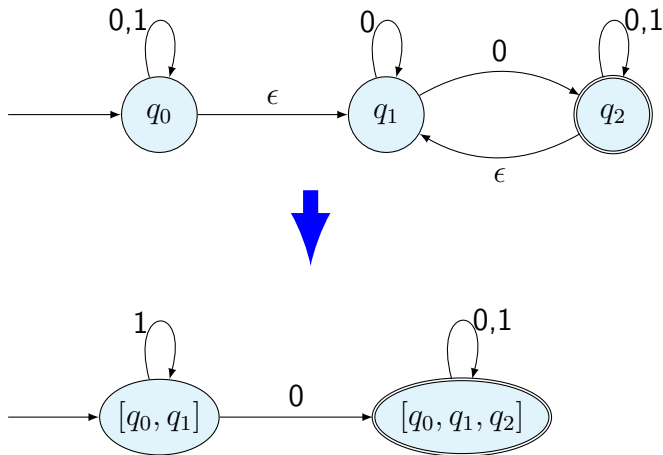
$$\delta(q_2, 1) = \{q_2\}$$

\Downarrow

$$\delta'([q_1, q_2], 0) = [q_1, q_2]$$

$$\delta'([q_1, q_2], 1) = [q_1, q_2]$$

例 3.3:



- 始状態

$$\epsilon\text{-CL}(q_0) = \{q_0, q_1\} \quad \rightarrow \quad [q_0, q_1] \text{ が始状態}$$

- $[q_0, q_1]$ を起点に

$$\delta(q_0, 0) = \epsilon\text{-CL}(q_0) = \{q_0, q_1\}$$

$$\delta(q_1, 0) = \epsilon\text{-CL}(q_1) \cup \epsilon\text{-CL}(q_2) = \{q_1, q_2\}$$

$$\delta(q_0, 1) = \epsilon\text{-CL}(q_0) = \{q_0, q_1\}$$

$$\delta(q_1, 1) = \emptyset$$

\Downarrow

$$\delta'([q_0, q_1], 0) = [q_0, q_1, q_2]$$

$$\delta'([q_0, q_1], 1) = [q_0, q_1]$$

● $[q_0, q_1, q_2]$ を起点に

$$\delta(q_0, 0) = \{q_0, q_1\}$$

$$\delta(q_1, 0) = \{q_1, q_2\}$$

$$\delta(q_2, 0) = \epsilon\text{-CL}(q_0) = \{q_1, q_2\}$$

$$\delta(q_0, 1) = \{q_0, q_1\}$$

$$\delta(q_1, 1) = \emptyset$$

$$\delta(q_2, 1) = \epsilon\text{-CL}(q_2) = \{q_1, q_2\}$$

\Downarrow

$$\delta'([q_0, q_1, q_2], 0) = [q_0, q_1, q_2]$$

$$\delta'([q_0, q_1, q_2], 1) = [q_0, q_1, q_2]$$

DFA の簡素化: Minimizing DFA

- 同じ文字列を受理する DFA のうちで、状態数の最小の DFA への変換
- 状態の集合から入力による遷移先の集合に注目する

最小化アルゴリズム概要: Minimization Algorithm

- 受理状態の集合とそれ以外の状態集合に分ける
- 各状態集合について、各入力に対する遷移先が異なるならば、遷移先に応じて状態集合を分割する
- すべての状態集合が分割できなくなるまで上記を繰り返す
- 各状態集合を状態と定義しなおす

最小化アルゴリズム

```

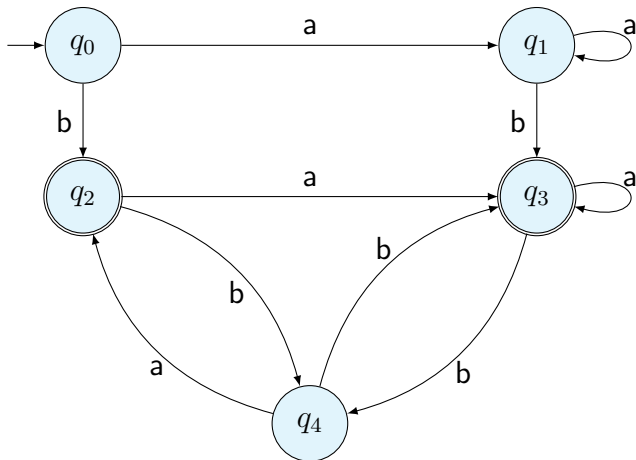
 $\mathcal{Q} = \{Q \setminus F, F\}$ 
while T do
   $\mathcal{Q}_{\text{new}} = \mathcal{Q}$ 
  for all  $Q' \in \mathcal{Q}$  do
    for all  $a \in \Sigma$  do
       $Q'' = \{q \in Q \mid q = \delta(p, a), \forall p \in Q'\}$ 
      if  $Q''$  は  $\mathcal{Q}$  の要素の部分集合ではない then
         $\mathcal{D} = \{Q'' \cap \tilde{Q} \mid \tilde{Q} \in \mathcal{Q}\}$ 
        for all  $D \in \mathcal{D}$  do
           $O = \{q \mid d = \delta(q, a), \forall q \in Q', d \in D\}$ 
           $\mathcal{Q}_{\text{new}} = (\mathcal{Q}_{\text{new}} \setminus \{Q''\}) \cup \{O\}$ 
        end for
      end if
    end for
  end for
end for
if  $\mathcal{Q} \neq \mathcal{Q}_{\text{new}}$  then
  break
end if
end while

```

状態集合を新たな「集合」に
 元の初期状態を含む状態集合を新たな初期状態に、元の受理状態のみを含む状態集合を新たな受理集合に

▷ Q' からの遷移先
 ▷ Q'' を \mathcal{Q} の要素で分割
 ▷ 遷移先に対応した遷移元

例 4.1:



- $\{q_2, q_3\}$

$$\{q_2, q_3\} \xrightarrow{a} \{q_3\} \subset \{q_2, q_3\}$$

$$\{q_2, q_3\} \xrightarrow{b} \{q_4\} \subset \{q_0, q_1, q_4\}$$

- 分割の必要なし

- $\{q_0, q_1, q_4\}$

$$\{q_0, q_1\} \xrightarrow{a} \{q_1\} \subset \{q_0, q_1\}$$

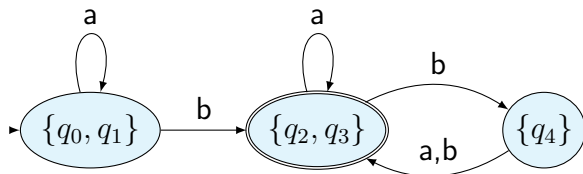
$$\{q_4\} \xrightarrow{a} \{q_2\} \subset \{q_2, q_3\}$$

$$\{q_0, q_1\} \xrightarrow{b} \{q_2, q_3\}$$

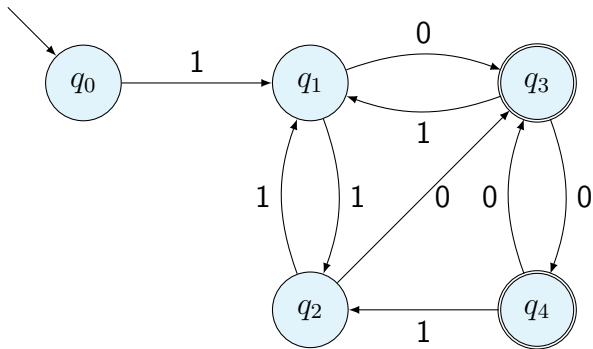
$$\{q_4\} \xrightarrow{b} \{q_3\} \subset \{q_2, q_3\}$$

- $\{q_0, q_1\}$ と $\{q_4\}$ の二つに分割

- 再度全ての状態集合に確認し、新たな分割は無い



例 4.2:



- $\{q_0, q_1, q_2\}$

$$\{q_0\} \xrightarrow{1} \{q_1\} \subset \{q_1, q_2\}$$

$$\{q_1, q_2\} \xrightarrow{0} \{q_3\} \subset \{q_3, q_4\}$$

$$\{q_1, q_2\} \xrightarrow{1} \{q_1, q_2\}$$

- $\{q_1\}$ と $\{q_1, q_2\}$ に分割
- $\{q_3, q_4\}$

$$\{q_3, q_4\} \xrightarrow{0} \{q_3, q_4\}$$

$$\{q_3, q_4\} \xrightarrow{1} \{q_1, q_2\}$$

- 分割の必要なし

