「離散数学・オートマトン」演習問題 02 (解答例)

2023/10/16

1　命題

課題 1　以下の演算に対する真理値表を作成しなさい。

1. $\neg p \vee \neg q$
2. $\neg(\neg p \vee q)$
3. $\neg(p \wedge \neg q)$

解答例

p	q	$\neg p \vee \neg q$	$\neg(\neg p \vee q)$	$\neg(p \wedge \neg q)$
F	F	T	F	T
F	T	T	F	T
T	F	T	T	F
T	T	F	F	T

参考までに、Python での実行例を示す。

```python
pd = [False, True]
qd = [False, True]
for p in pd:
    for q in qd:
        x = (not p) or (not q)
        y = not ( (not p) or q)
        z = not ( p and (not q))
        m = f'{p}:{q}:{x}:{y}:{z}'
        print(m)
```

```
False:False:True:False:True
False:True:True:False:True
True:False:True:True:False
True:True:False:False:True
```

このコードは、以下の Github から取得できます。

https://github.com/discrete-math-saga/PropositionsAndPredicates/

課題 2　$\sqrt{3}$ が無理数であることを、背理法を用いて証明せよ。
解答例　$\sqrt{3}$ が有理数であると仮定し、$\sqrt{3} = q/p$ とおく。ここで p と q は、互いに素である自然数である。両辺を二乗して以下を得る。

$$3p^2 = q^2$$

左辺は 3 の倍数であることから、q は 3 の倍数である。右辺は q^2 であるから、9 の倍数であり、つまり、p も 3 の倍数である。これは、p と q が互いに素という仮定に反する。

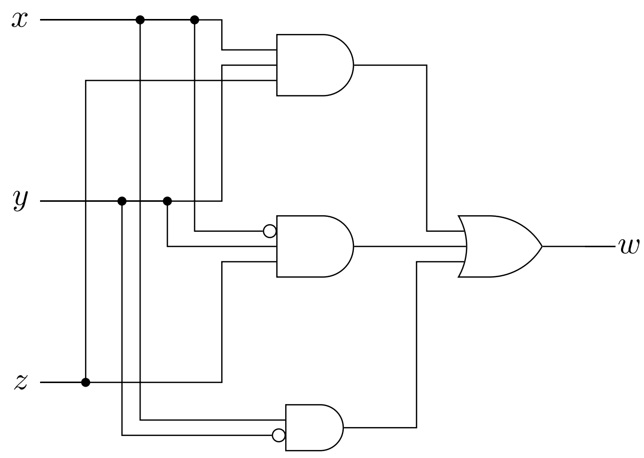
　このことから、$\sqrt{3}$ が有理数であるという仮定が誤りである。つまり、$\sqrt{3}$ は無理数である。

2　述語

課題 3　N^3 上の述語 $P(x, y, z) : x = yz$ は、x が $y \times z$ であるとき真である。このとき $Q(x, y) : \exists z P(x, y, z)$ が真となるのは、どのような (x, y) に対してか、答えなさい。
解答例　$Q(x, y)$ が真となるのは、「x は y で割り切れる」場合である。

3　論理回路

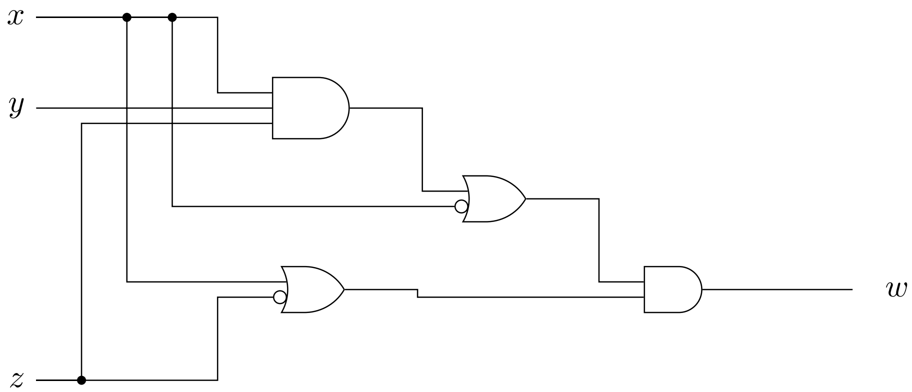
課題 4　以下の論理回路に相当する論理式を求めよ。



解答例

$$w = xyz + \bar{x}yz + x\bar{y}$$

課題 5　以下の論理回路に相当する論理式を求めよ。また、その論理式を簡素化しなさい。



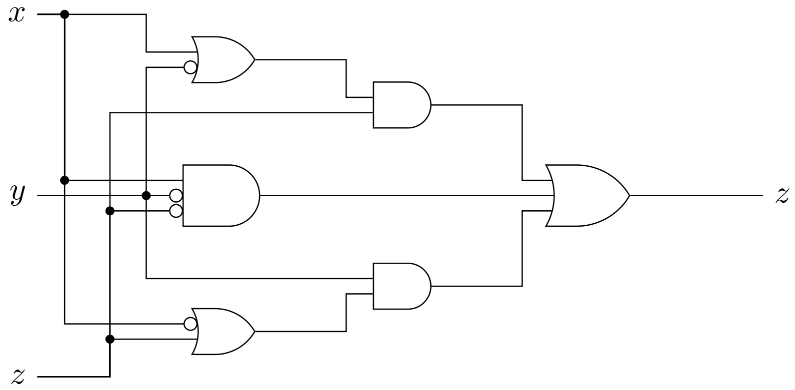
解答例

$$\begin{aligned} w &= (xyz + \bar{x})(x + \bar{z}) \\ &= xxyz + xyz\bar{z} + \bar{x}x + \bar{x}\bar{z} \\ &= xyz + 0xy + 0 + \bar{x}\bar{z} \\ &= xyz + \bar{x}\bar{z} \end{aligned}$$

x	y	z	$(xyz + \bar{x})(x + \bar{z})$	$xyz + \bar{x}\bar{z}$
1	1	1	1	1
1	1	0	0	0
1	0	1	0	0
1	0	0	0	0
0	1	1	0	0
0	1	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	0	1	1

課題 6　論理式 $w = (x + \bar{y})\, z + (\bar{x} + z)\, y + x\bar{y}\bar{z}$ に対応する論理回路を示しなさい。

解答例

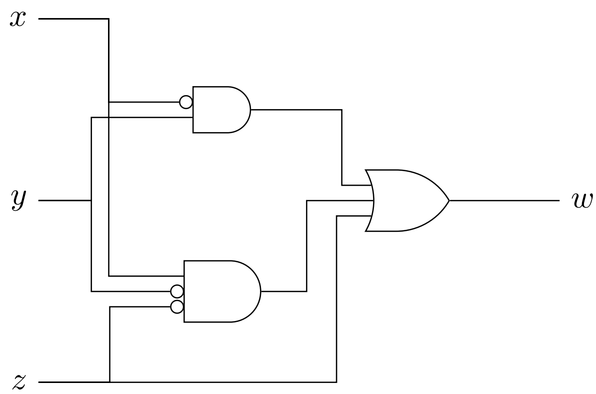


課題 7　前問の論理式を基本積の和、つまりブール変数の積の和へと変形し、対応する論理回路を示しなさい。

解答例

$$\begin{aligned} w &= (x+\bar{y})\,z + (\bar{x}+z)\,y + x\bar{y}\bar{z} \\ &= xz + \bar{y}z + \bar{x}y + yz + x\bar{y}\bar{z} \\ &= xz + (y+\bar{y})\,z + \bar{x}y + x\bar{y}\bar{z} \\ &= xz + z + \bar{x}y + x\bar{y}\bar{z} \\ &= z + \bar{x}y + x\bar{y}\bar{z} \end{aligned}$$

x	y	z	$(x+\bar{y})\,z + (\bar{x}+z)\,y + x\bar{y}\bar{z}$	$z + \bar{x}y + x\bar{y}\bar{z}$
1	1	1	1	1
1	1	0	0	0
1	0	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	1	1
0	1	0	1	1
0	0	1	1	1
0	0	0	0	0


x
y
z
w