

数学的帰納法と再帰的定義

離散数学・オートマトン

2024 年後期

佐賀大学工学部 只木進一

自然数の定義: Peano の公理

- 集合 N が以下の 3 つを満たすとき、 N の要素を自然数という
 - $1 \in N$
 - 単射 $S : N \rightarrow N$ が存在。ただし $1 \notin S(N)$ (1 を S の値域に含まない)

$$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y) \quad (1.1)$$

- $M \subseteq N$ が、以下を満たすとき $M = N$

$$1 \in M \quad (1.2)$$

$$S(M) \subset M \quad (1.3)$$

Peano の公理の意味

- $S(n)$ は $n + 1$ に相当: 「後者」
- Peano の 2 番目の公理より

$$2 = S(1)$$

$$3 = S(2)$$

...

- Peano の 3 番目の公理
 - 1 を含む N の部分集合が N そのもの
 - つまり、1 から導出されたもの以外を含まない

数学的帰納法: Mathematical induction

- Peano の 3 番目の公理を「数学的帰納法の公理」と呼ぶ
- $P(x)$, $x \in N$ に対する数学的帰納法
 - $P(1) = \text{T}$: 帰納法の基礎
 - 任意に選んだ k に対して $P(k) = \text{T}$ を仮定
 - 帰納ステップにより $P(k+1) = \text{T}$ を示す
- 実際の証明では $x = 1$ から始める必要はなく、適当は初期値を選ぶ。

例 2.1:

● 命題

$$\sum_{k=0}^n (2k+1) = (n+1)^2, \forall n \in N \cup \{0\} \quad (2.1)$$

● $n = 0$

$$\text{LHS} = \sum_{k=0}^0 (2k+1) = 2 \times 0 + 1 = 1 \quad (2.2)$$

$$\text{RHS} = (0+1)^2 = 1 \quad (2.3)$$

- ある n で命題 (??) が正しいと仮定し、 $n+1$ の場合も真であることを示す

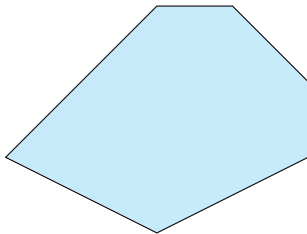
続き

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} (2k+1) &= \sum_{k=0}^n (2k+1) + (2(n+1)+1) \\ &= (n+1)^2 + 2(n+1) + 1 \\ &= ((n+1)+1)^2\end{aligned}\tag{2.4}$$

- $\sum_{k=0}^n (2k+1)$ に対して、命題を適用している

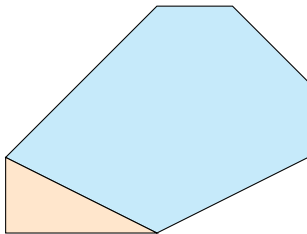
例 2.2:

- 命題: 凸な正 n 角形の内角の和は $A_n = (n - 2) \pi$ である。
- $n = 3$ の場合 $A_3 = \pi$ は自明
- ある n で正しいとする: $A_n = (n - 2) \pi$



続き

- 一点追加する



$$A_{n+1} = A_n + \pi = ((n+1) - 2) \pi \quad (2.5)$$

例 2.3:

- 命題: 集合 A の大きさ $|A|$ に対して、 $|A| < \infty$ ならば
 $|2^A| = 2^{|A|}$
- $|A| = 0$ 、つまり $A = \emptyset$ の場合

$$\text{LHS} = |2^\emptyset| = |\{\emptyset\}| = 1 \quad (2.6)$$

$$\text{RHS} = 2^{|A|} = 2^0 = 1 \quad (2.7)$$

- $|A| = k$ の場合に命題が正しいと仮定し、新たに一つ要素 ($b \notin A$) を追加した集合を $B = A \cup \{b\}$ とする

つづき

- 2^B の要素は、 2^A の要素 (2^k 個) と、 2^A の各要素に b を加えたもの (2^k 個) の全体

$$2^B = 2^A \cup \{s \cup \{b\} \mid s \in 2^A\} \quad (2.8)$$

- つまり

$$|2^B| = 2^k + 2^k = 2^{k+1} \quad (2.9)$$

$$2^{|B|} = 2^{|A|+1} = 2^{k+1} \quad (2.10)$$

例 2.4:

- $A = \{a, b\}$ の場合

$$2^A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\} \quad (2.11)$$

$$|2^A| = 4 \quad (2.12)$$

$$2^{|A|} = 2^2 = 4 \quad (2.13)$$

- $B = A \cup \{c\}$ とする

$$\begin{aligned} 2^B &= \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\} \\ &\quad \cup \{\{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\} \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$|2^B| = 8 \quad (2.15)$$

$$2^{|B|} = 2^3 = 8 \quad (2.16)$$

累積帰納法: Course-of-values induction

- 命題 $P(n)$, $(n \in N, n \geq n_0)$
 - $P(n_0)$ が成り立ち
 - ある k に対して $P(m)$, $n_0 \leq m \leq k$ が成り立つならば $P(k+1)$ も成り立つとき
 - 任意の $n \geq n_0$ に対して $P(n)$ が成り立つ

累積帰納法が正しいこと

- $k = n_0$ の場合、自明
- 累積帰納法は正しくないと仮定
 - 累積帰納法が正しくない最小の値を $n_f > n_0$ とする
 - しかし、 $n_0 \leq m < n_f$ が正しいことから $P(n_f)$ が導かれれば、累積機能法が証明される。

例 3.1: Fibonacci 数列

- Fibonacci 数列を漸化式で定義: f_{n+2} は、直前の f_{n+1} だけでなく f_n も使って定義されていることに注意

$$f_0 = 0, f_1 = 1, f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \quad (3.1)$$

- f_n は次式となる

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \quad (3.2)$$

- $n = 0$

$$f_0 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^0 - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^0 = 0 \quad (3.3)$$

- $n = 1$

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^1 - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^1 \\ &= \frac{1}{2\sqrt{5}} (1 + \sqrt{5} - 1 + \sqrt{5}) = 1 \end{aligned} \quad (3.4)$$

ある n と $n - 1$ で、式 (??) が正しいと仮定して、一般式を導出

$$\begin{aligned}
 f_{n+1} &= f_n + f_{n-1} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \\
 &\quad + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n \left(1 + \frac{2}{1 + \sqrt{5}} \right) \\
 &\quad - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \left(1 + \frac{2}{1 - \sqrt{5}} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n \frac{3 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \frac{3 - \sqrt{5}}{1 - \sqrt{5}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \tag{3.5}
\end{aligned}$$

例 3.2:

$$a_0 = 1 \tag{3.6}$$

$$a_n = \sum_{k=1}^n 2^k a_{n-k} \tag{3.7}$$

で定義する数列 $\{a_n\}$ の $n \geq 1$ の一般項は

$$a_n = 2^{2n-1} \tag{3.8}$$

である。

証明

- $n = 1$

$$a_1 = \sum_{k=1}^1 2^k a_{n-k} = 2a_0 = 2 \quad (3.9)$$

$$a_1 = 2^{2*1-1} = 2 \quad (3.10)$$

続き

- $\forall k(1 \leq k \leq n)$ で $a_k = 2^{2k-1}$ であるとする。

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} 2^k a_{n+1-k} = \sum_{k=1}^n 2^k a_{n+1-k} + 2^{n+1} a_0 \\ &= \sum_{k=1}^n 2^{k+2(n+1-k)-1} + 2^{n+1} \\ &= 2^{2n+1} \sum_{k=1}^n 2^{-k} + 2^{n+1} = 2^{2n+1} (1 - 2^{-n}) + 2^{n+1} \\ &= 2^{2n+1} \end{aligned} \tag{3.11}$$

再帰的定義: Recursive definitions

- 可算集合や、可算集合上の関数、関係などを、初期値と再帰手続きで定義するもの
- 集合 S の再帰的定義
 - 初期ステップ: S の要素をいくつか列挙
 - 再帰ステップ: S の要素から新しい要素を導出
 - 限定句: 上記二つのみで構成することを言明

例 4.1: Kleene 閉包

- アルファベット (記号の集合) Σ から、その Kleene 閉包 Σ^* を再帰的に定義
- $\forall a \in \Sigma$ に対して $a \in \Sigma^*$ 。また $\epsilon \in \Sigma^*$
- $\forall a \in \Sigma$ と $\forall x \in \Sigma^*$ に対して、 $ax \in \Sigma^*$
- 例 $\Sigma = \{0, 1\}$

$$\Sigma^* = \{\epsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, \\ 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111, \dots\} \quad (4.1)$$

例 4.2: 階乗

- $0! = 1$
- $n! = n \times (n - 1)!, \text{ for } n \in \mathbb{N}$

例 4.3: 二項係数

- $n \in N$ 、 $1 \leq m \leq n$ に対して

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1} \quad (4.2)$$

$$\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1 \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1} &= \frac{(n-1)!}{m!(n-m-1)!} + \frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!} \\ &= \frac{n!}{m!(n-m)!} \left(\frac{n-m}{n} + \frac{m}{n} \right) = \binom{n}{m}\end{aligned}\tag{4.4}$$