

「離散数学・オートマトン」演習問題 01 (解答例)

2023/10/2

1 集合

課題 1 全体集合 $U = \{x \mid x \text{ は } 1 \text{ 桁の自然数}\}$ とし、 $A = \{x \mid x \in U \text{ は偶数}\}$ 及び $B = \{x \mid x \in U \text{ は } 3 \text{ の倍数}\}$ とする。ただし、自然数に 0 は含まないとする。このとき、以下の集合を、要素を列挙することで答えなさい。

1. \bar{A}
2. \bar{B}
3. $\bar{A} \cup \bar{B}$
4. $\bar{A} \cap \bar{B}$
5. $A \cup \bar{B}$
6. $A \setminus B$

解答例 はじめに、 U 、 A 及び B の要素を列挙する。

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$A = \{2, 4, 6, 8\}$$

$$B = \{3, 6, 9\}$$

1. $\bar{A} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
2. $\bar{B} = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$
3. $\bar{A} \cup \bar{B} = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$
4. $\bar{A} \cap \bar{B} = \{1, 5, 7\}$
5. $A \cup \bar{B} = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8\}$
6. $A \setminus B = \{2, 4, 8\}$

Python を使ったコード例と出力例も示す。Python の `set` は、要素の順序が不定である

ことに注意する。

```
1 U = set([x for x in range(1, 10)])
2 A = set([x for x in U if x % 2 == 0])
3 B = set([x for x in U if x % 3 == 0])
4
5 Abar = U - A
6 Bbar = U - B
7
8 print(Abar)
9 print(Bbar)
10 print(Abar | Bbar)
11 print(Abar & Bbar)
12 print(A | Bbar)
13 print(A - B)
```

```
{1, 3, 5, 7, 9}
{1, 2, 4, 5, 7, 8}
{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9}
{1, 5, 7}
{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8}
{8, 2, 4}
```

このコードは、以下の Github から取得できる。

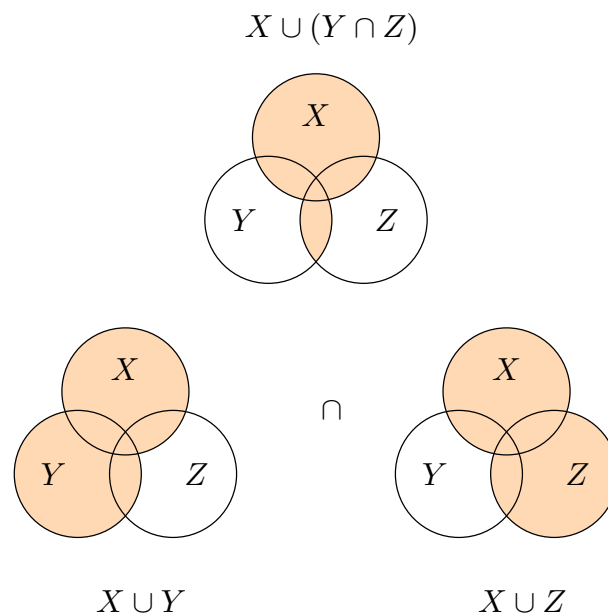
<https://github.com/discrete-math-saga/SetAndMapping/>

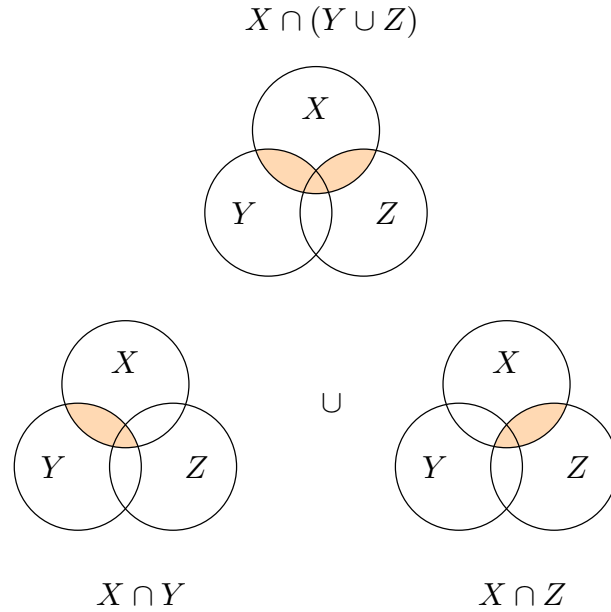
課題 2 X 、 Y 、 Z を集合とすると、以下の分配律を Venn 図を用いて示せ。

$$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z) \quad (1.1)$$

$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z) \quad (1.2)$$

解答例





課題 3 R 、 S 及び T を集合とすると、以下の等式が成り立つことを示しなさい。

$$R \cap (S \setminus T) = (R \cap S) \setminus (R \cap T) \quad (1.3)$$

$$(R \cup S) \setminus T = (R \setminus T) \cup (S \setminus T) \quad (1.4)$$

解答例 はじめに、式 (1.3) を考える。 $S \setminus T = S \cap \bar{T}$ を用いる。式 (1.3) の左辺は $R \cap (S \setminus T) = R \cap S \cap \bar{T}$ である。一方、右辺は

$$\begin{aligned} (R \cap S) \setminus (R \cap T) &= (R \cap S) \cap \overline{(R \cap T)} \\ &= (R \cap S) \cap (\bar{R} \cup \bar{T}) \\ &= (R \cap S \cap \bar{R}) \cup (R \cap S \cap \bar{T}) \\ &= \emptyset \cup (R \cap S \cap \bar{T}) \\ &= R \cap S \cap \bar{T} \end{aligned}$$

ここで、 $R \cap S \cap \bar{R} = S \cap \emptyset$ を使っていることに注意する。

次に式 (1.4) を考える。

$$\begin{aligned} (R \cup S) \setminus T &= (R \cup S) \cap \bar{T} \\ &= (R \cap \bar{T}) \cup (S \cap \bar{T}) \\ &= (R \setminus T) \cup (S \setminus T) \end{aligned}$$

2 写像

課題 4 次の実関数の定義域を求めよ。

1.

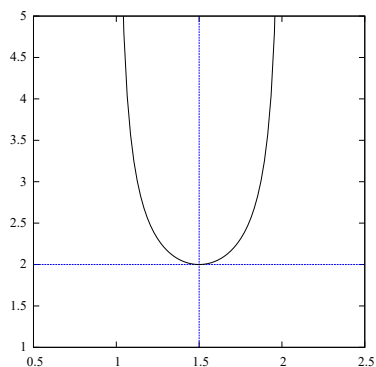
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}$$

2.

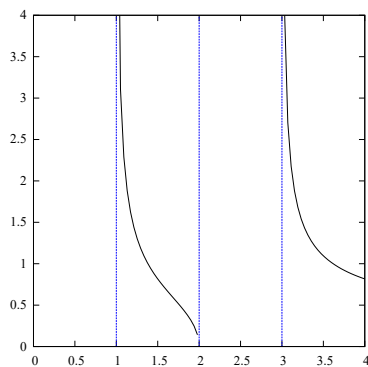
$$f(x) = \sqrt{\frac{x-3}{(x-1)(x-2)}}$$

解答例

1. $(x-1)(2-x)$ は、上に凸で $(1, 2)$ で正となる。従って、定義域は $(1, 2)$ である。



2. 三つの要素 $x-3$ 、 $x-1$ 、そして $x-2$ が 0 となる点に注目する。 $x \leq 1$ ですべての要素は負、 $1 \leq x \leq 2$ で一つが正で二つが負、 $2 \leq x \leq 3$ で二つが正で一つが負、そして $x \geq 3$ で全てが正となる。従って、定義域は $(1, 2) \cup [3, \infty)$ である。



課題 5 以下の二つの関数 f と g に対して、合成関数 $(f \circ g)(x)$ を示しなさい。

1. $f(x) = x^2, g(x) = 2x - 1$

2. $f(x) = \cos(x), g(x) = x^2 + 1$

解答例

1. $(f \circ g)(x) = (2x - 1)^2$

2. $(f \circ g)(x) = \cos(x^2 + 1)$

課題 6 実関数 $f(x) = be^{-ax}$ の逆関数を求めなさい。

解答例 $y = be^{-ax}$ の両辺の対数をとる。

$$\ln y = \ln b - ax$$

ここで、 $\ln x = \log_e x$ である。従って

$$x = \frac{\ln b - \ln y}{a} = \frac{1}{a} \ln \frac{b}{y}$$

より、以下を得る。

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{a} \ln \frac{b}{x}$$