関係と順序

離散数学・オートマトン 2020年後期 佐賀大学理工学部 只木進一



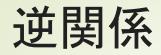
2項関係

- ■集合 $A \ge B$ の直積 $A \times B$ の部分集合R
 - ■AからBへの2項関係(AからBへの関係)
 - $\blacksquare R: A \rightarrow B$
 - \blacksquare (a,b) $\in R$: $a \ge b$ はRの関係にあるaRb
 - $\blacksquare R(a) = \{b | aRb\}: a \ge R$ の関係にある全体
- *R*: *A* → *A*: *A*の上の関係
- ■写像、関数との違い



関係の定義域、値域

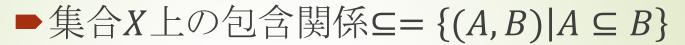
- $\blacksquare R: X \rightarrow Y$
- ■定義域X、値域Y



- $R^{-1} = \{(b, a) | a \in A, b \in B, aRb\}$
 - ■BからAへの関係
- $R^{-1}(b) = \{ a \in A | aRb \}$
 - b ∈ B と aRbの関係にあるaの全体

例

- $R = \{(a,a), (a,b), (a,c), (b,a), (c,a)\}$ は $X = \{a,b,c\}$ 上の二項関係
 - $R(a) = \{a, b, c\}, R(b) = R(c) = \{a\}$
 - $R^{-1}(a) = \{a, b, c\}, R^{-1}(b) = R^{-1}(c) = \{a\}$



 $\square \subseteq^{-1} (B) = 2^B : B$ の部分集合の族



関係と関数

- ■関係 $R: X \to Y$ のうち、 $\forall x \in X$ に対して |R(x)| = 1、つまりxに対して一つの $y \in Y$ が定まるとき、関数という
 - ■関数は、関係の特別な場合



関係の結合

- ■集合X、Y、Zに対する関係 $R: X \to Y$ と $S: Y \to Z$
- ■関係の結合S。R: X →Z
 - $S \circ R = \{(x, z) \in X \times Z | \exists y \in Y, xRy \land ySz \}$
- ■結合律
 - $R_3 \circ (R_2 \circ R_1) = (R_3 \circ R_2) \circ R_1$

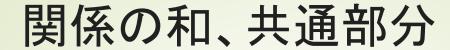
ر

- $\blacksquare A = \{a, b, c\}, X = \{\alpha, \beta, \gamma\}$
- $\blacksquare R = \{(a, \alpha), (a, \beta), (b, \beta), (c, \gamma)\}$
- $-S = \{(\alpha, a), (\alpha, b), (\beta, b), (\gamma, a)\}$
- $S \circ R = \{(x,z) \in A \times A | \exists y \in X, xRy \land ySz\} = \{(a,a), (a,b), (b,b), (c,a)\}$



恒等関係、関係のべき乗

- $\blacksquare R: A \rightarrow A$
 - $ightharpoonup R^0 = \Delta_R = \{(a,a) | a \in A\} : 恒等関係$
 - $R^{n+1} = R^n \circ R$: べき乗



- 定義域と値域が共通の関係 $R,S:A \rightarrow B$
 - \rightarrow 和 $R \cup S$
 - →共通部分R∩S
- ■反射推移閉包: $R^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} R^n$
- ■推移閉包: $R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$



- N上の二項関係nRm: n = m + 1
 - $\blacksquare nR^0m \Leftrightarrow n=m$
 - $\blacksquare nR^1m \Leftrightarrow n=m+1$
 - $\blacksquare nR^2m \Leftrightarrow n=m+2$
 - $\blacksquare nR^km \Leftrightarrow n=m+k$
 - $\blacksquare nR^*m \Leftrightarrow \exists k \geq 0, nR^km \Leftrightarrow n \geq m$
 - $\blacksquare nR^+m \Leftrightarrow \exists k > 0, nR^km \Leftrightarrow n > m$



同值関係 (equivalence relation)

- $\blacksquare R: A \rightarrow A$
 - 反射律(reflexive): ∀a ∈ Aに対してaRa
 - ■対称律(symmetric): $\forall a,b \in A$ に対して $aRb \Leftrightarrow bRa$
 - 推移律(transitive): $\forall a, b, c \in A$ に対して $aRb \land bRc \Leftrightarrow aRc$
- ■三つの性質を全て満たす:同値関係



- $ightharpoonup R = \{(x,y)|x \equiv y (\operatorname{mod} m)\}$
 - $= x, y \in N \cup \{0\}$ $em \in N$ で除した余りが等しい
- ■反射律:xRxは自明
- ■対称律:xRy = yRxも自明
- ■推移律: $xRy,yRz \Rightarrow xRz$



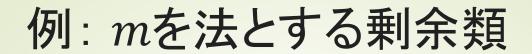
同値類 equivalence class

- ■集合A上の同値関係Rによって、集合Aを分ける
- $a \in A$ に対して $[a]_R = \{b \in A | aRb\}$
 - ■Rによって定まるaと同値なものの全体
 - ■aを代表元という

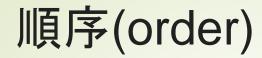


同値類の性質

- ■集合A上の同値関係R
- $ightharpoonup \forall a, b, c \in A$
 - 1. $a \in [a]_R$
 - 2. $b, c \in [a]_R \Rightarrow bRc$
 - 3. $aRb \Leftrightarrow [a]_R = [b]_R$
 - **4.** $[a]_R = [b]_R \geq [a]_R \cap [b]_R = \emptyset$ のいずれか一方だけが必ず成り立つ
 - $5. \quad \bigcup_{a \in A} [a]_R = A$



- $ightharpoonup R = \{(x,y)|x \equiv y (\operatorname{mod} m)\}$
- **■** *m*=3の場合: *A* = *N* ∪ {0}
 - -[0] = 3k
 - -[1] = 3k+1
 - -[2] = 3k+2
 - $-k \in N$



- ■反対称律(anti-symmetric)
 - $\Rightarrow \forall a,b \in A$ に対して、 $aRb \land bRa \Rightarrow a = b$

- ●大小関係≤は、反射律、推移律、反対称 律を満たす
 - ●半順序(partial order)または順序という
- 半順序集合: 半順序を定義された集合

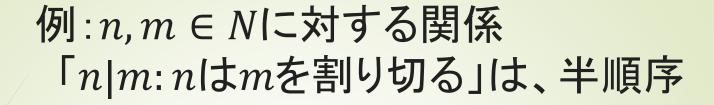


全順序 (total order)

- ■全順序:半順序に加えて、任意の二つの要素について比較可能であるとき
- 全順序集合: 全順序を定義された集合



- 自然数、整数、有理数、実数に対する大 小関係≤は、全順序
- ●集合の包含関係⊆は、半順序



- ■反射律: n|nは自明
- ■推移律: $n|m \land m|l \Rightarrow n|l$
- ■反対称律: $n|m \land m|n \Rightarrow m = an \land n = bm \Rightarrow a = b$
- ■n,mが互いに素の場合には、関係が成り立たないため、全順序ではない