集合と写像

離散数学・オートマトン
2024年後期
佐賀大学理工学部　只木進一

この講義の目的: Purpose of this lecture

- コンピュータ内の処理はデジタル (digital)
  - 0 と 1 で全てを表現
  - Boole 変数
  - 論理演算
- 離散数学: Discrete Mathematics
  - 集合、論理、グラフ理論等
  - 計算機科学には必須
- オートマトンと形式言語
  - 抽象的計算機
  - 計算の理論
  - 言語理論: 正規表現、文脈自由文法

集合: Sets

- ある特性を持ったモノの集まり
  - 要素: elements
  - 集合に含まれるか否かは明確でなければならない
- 要素 x が集合 A に属する (x belongs to A)

$$x \in A \tag{2.1}$$

- 要素 x が集合 A に属さない (x does not belong to A)

$$x \notin A \tag{2.2}$$

集合の表現: Representation of Sets

- 外延的記述: extensive descriptions
  - 要素の列挙 (enumerating elements)
  - 例: $A = \{2, 3, 5, 7\}$
  - 例: $L = \{00, 01, 10, 11\}$
- 内包的記述: inclusive descriptions
  - 条件の記述: {要素 | 要素の条件}
  - 例: $A = \{n \mid n$は 10 以下の素数$\}$
  - 例: $L = \{s \mid s$は、0 と 1 からなる長さ 2 の文字列$\}$

有限集合、無限集合、可算集合

- 有限集合: finite sets
  - 要素が有限個
- 無限集合: infinite sets
  - 要素が無限個
- 可算集合: countable/enumerable sets
  - 要素を列挙 (enumerate) できる
  - 自然数と対応付けることができる
  - 無限集合でもよい
- 非加算集合: uncountable/unenumerable sets
  - 要素を列挙できない

例 2.1: 基本的な数の集合

- 自然数 (natural numbers) 全体: N
  - $0 \notin N$
- 整数 (integers) 全体: Z
- 素数 (prime numbers) 全体: P
- 有理数 (rational numbers) 全体: Q
- 実数 (real numbers) 全体: R
- 複素数 (complex numbers) 全体: C

例 2.2: 簡単な集合

- 10 以下の自然数

$$A = \{n \mid n \in N, n \leq 10\} \\ = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \quad (2.3)$$

- 10 以下の素数

$$B = \{2, 3, 5, 7\} \quad (2.4)$$

- 3 で割り切れない自然数

$$C = \{n \mid n \in N, n \bmod 3 \neq 0\} \quad (2.5)$$

閉区間、開区間、半開区間

- 閉区間: closed sections

$$[a,b] = \{x \mid a \leq x \leq b\} \tag{2.6}$$

- 開区間: open sections

$$(a,b) = \{x \mid a < x < b\} \tag{2.7}$$

- 半開区間: semi-closed sections

$$[a,b) = \{x \mid a \leq x < b\} \tag{2.8}$$

- 無限区間: infinite sections

$$(-\infty,\infty), [a,\infty), (-\infty,b] \tag{2.9}$$

集合に関わる記号など

- 集合 A の全て (任意) の要素: $\forall x \in A$
- 集合 A のある (特定の) 要素: $\exists x \in A$
- 条件 p かつ条件 q: $p \wedge q$
- 条件 p または条件 q: $p \vee q$
- 条件 p の否定: $\neg p$

部分集合: Subsets

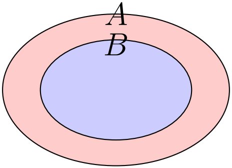
- 集合 A の全ての要素が集合 B に含まれる
  - A は B の部分集合: $A \subseteq B$
  - x が A の要素ならば、x は B の要素である:
    A の要素は、全て B の要素である

$$\forall x \in A \Rightarrow x \in B \tag{3.1}$$

真部分集合: True Subsets

- B は A の部分集合であり、A の要素で B に含まれないものがある
  - B は A の真部分集合 (true subsets): $B \subset A$
  - B の任意の要素 x が A の要素であり、かつ、B の要素でない A の要素 y が存在する

$$(\forall x \in B \Rightarrow x \in A) \wedge (\exists y \in A \Rightarrow y \notin B) \tag{3.2}$$



例 3.1: 簡単な集合の包含関係

- $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$
- 正の整数のうち、2 の倍数 A、3 の倍数 B、6 の倍数 C

$$A = \{n \mid n = 2m, m \in N\} \tag{3.3}$$

$$B = \{n \mid n = 3m, m \in N\} \tag{3.4}$$

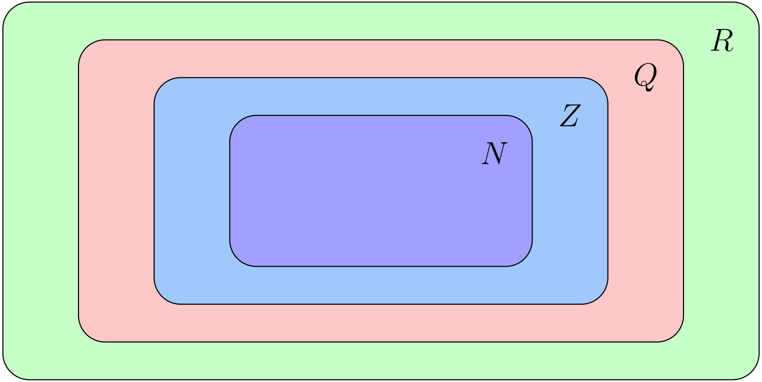
$$C = \{n \mid n = 6m, m \in N\} \tag{3.5}$$

$$(C \subset A) \wedge (C \subset B) \tag{3.6}$$

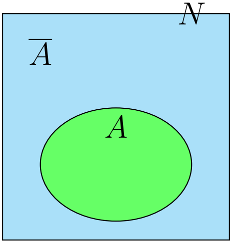
$$C = A \cap B \tag{3.7}$$

Venn 図: Venn Diagrams

集合の関係を図示する



空集合と補集合: Empty Sets and Complements



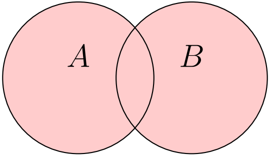
- 空集合 (empty sets): $\emptyset$
    - 要素を持たない集合
- 補集合 (complements)
    - 全体集合からある集合を除いた部分
    - 例: 全体集合 N、集合 $A = \{n \mid n = 2m, m \in N\}$

$$\overline{A} \equiv \{n \mid n \in N \wedge n \notin A\} \tag{3.8}$$

集合の演算: Operations on Sets

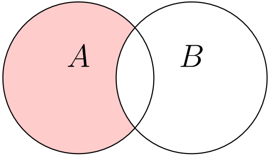
$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$

和
union



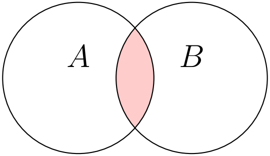
$$A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$

差
relative difference



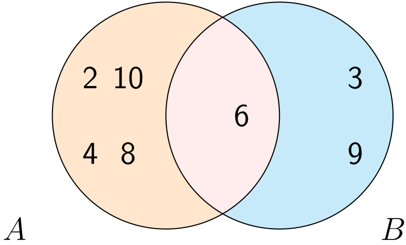
$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

共通部分
intersection



例 4.1: 集合の演算

$$A = \{n \mid n = 2m, m \in N, n \leq 10\} \tag{4.1}$$
$$B = \{n \mid n = 3m, m \in N, n \leq 10\} \tag{4.2}$$
$$A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\} \tag{4.3}$$
$$A \cap B = \{6\} \tag{4.4}$$
$$A \setminus B = \{2, 4, 8, 10\} \tag{4.5}$$



集合演算の基本的性質

- 交換律: Commutative

$$X \cup Y = Y \cup X \tag{4.6}$$
$$X \cap Y = Y \cap X \tag{4.7}$$

- 結合律: Associative

$$X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z \tag{4.8}$$
$$X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z \tag{4.9}$$

集合演算の基本的性質: 2

- 分配律: Distributive

$$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z) \tag{4.10}$$
$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z) \tag{4.11}$$

- 巾等律: Idempotent

$$X \cup X = X \tag{4.12}$$
$$X \cap X = X \tag{4.13}$$

- 吸収律: Absorption

$$X \cup (X \cap Y) = X \tag{4.14}$$
$$X \cap (X \cup Y) = X \tag{4.15}$$

de Morgan の法則

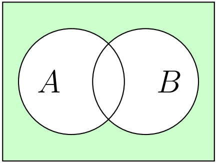
- 全体集合 U とその部分集合 A と B

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \tag{4.16}$$

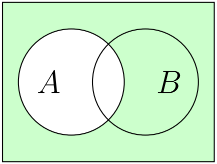
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \tag{4.17}$$

$\overline{A \cup B}$

$\overline{A \cup B}$

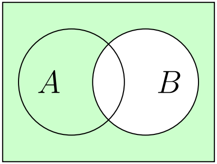


$\overline{A}$



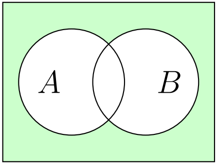
$\cap$

$\overline{B}$



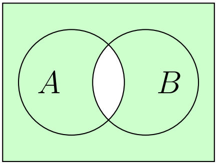
$=$

$\overline{A} \cap \overline{B}$

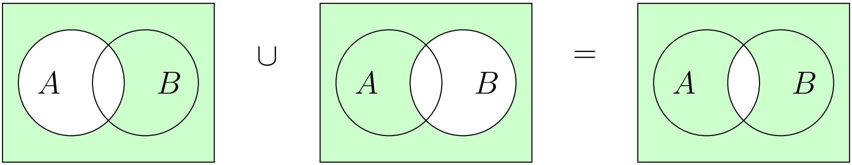


$\overline{A \cap B}$

$\overline{A \cap B}$



$\overline{A}$ $\cup$ $\overline{B}$ $=$ $\overline{A} \cup \overline{B}$



集合の族: Families

- 要素が集合である「集合」
- 例: べき集合 (power sets)
  - 集合 A の部分集合の全て

$$A = \{1, 2, 3\} \tag{5.1}$$

$$2^A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\} \tag{5.2}$$

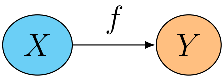
Python による集合演算

- `X | Y`: $X \cup Y$
- `X & Y`: $X \cap Y$
- `X - Y`: $X \setminus Y$
- `X ^ Y`: $X \oplus Y$

https://github.com/discrete-math-saga/SetAndMapping

写像 (Mappings) または関数 (Functions)

- 集合 X の各要素に、集合 Y の要素が一つ対応しているときに、その対応関係を写像または関数と呼ぶ
  - $f : X \to Y$
  - X: 定義域 (domain)
  - Y: 値域 (range)



- f による x の像 (image)

$$y = f(x) \tag{6.1}$$

- f による X の像

$$\{f(x) \mid x \in X\} \subseteq Y \tag{6.2}$$

例 6.1: 簡単な写像

- 二次関数 $f(x) = x^2$

$$f : R \to \{x \mid x \in R, x \geq 0\} \tag{6.3}$$

- 与えられた自然数を越えない最大の素数を返す写像 p

$$p : N \to \left\{k \mid k\text{は}n\text{以下の素数}\right\} \tag{6.4}$$

- ASCII 文字に対してコードを 16 進で返す写像 h

$$h : \left\{c \mid c\text{は ASCII 文字}\right\} \to \left\{c \mid c\text{は 2 桁の 16 進数}\right\} \tag{6.5}$$

単射、全射、全単射

- **単射**: injective, one-to-one
  - X の異なる点には、Y の異なる点が対

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \tag{6.6}$$

- **全射**: surjective, onto
  - $\forall y \in Y$ に対して $f(x) = y$ なる x が存在
  - 注意: y に対して x が一つ定まるのではない
- **全単射**: bijective
  - 逆写像が存在する
  - 全射かつ単射

例 6.2:

- $X = Y = R$ とすると、$f(x) = e^x$ は、単射であって、全射でない。
- $X = Y = R$ とすると、$f(x) = \tan x$ は、全射であって、単射でない。
- $X = Y = N$ とすると、$f(x) = x^2$ は、単射であって、全射でない。

写像の四則演算

- 二つの関数 f と g
- それぞれの定義域 D_f と D_g

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x), (x \in D_f \cap D_g) \tag{6.7}$$

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x), (x \in D_f \cap D_g) \tag{6.8}$$

$$(f/g)(x) = f(x)/g(x), (x \in D_f \cap \{x \mid x \in D_g, g(x) \neq 0\}) \tag{6.9}$$

$$(cf)(x) = cf(x), \left(c\text{は定数}\right) \tag{6.10}$$

例 6.3: 写像の四則演算

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x + 1 \\
g(x) &= x^2 - 3 \\
(f \pm g)(x) &= (x+1) \pm \left(x^2 - 3\right) \\
(f \times g)(x) &= (x+1)\left(x^2 - 3\right) \\
(f/g)(x) &= (x+1) / \left(x^2 - 3\right)
\end{aligned}
$$

写像の合成: Composites

- 三つの集合 X、Y、Z
- 二つの写像: $fX \to Y$、$g : Y \to Z$
- 合成関数: composites

$$g \circ f : X \to Z \tag{6.11}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \tag{6.12}$$

- 例

$$f(x) = x + 1$$
$$g(x) = x^2 - 3$$
$$(g \circ f)(x) = g(x+1) = (x+1)^2 - 3$$

直積: Products

- 値に順序がある組
  - 例: 2 次元の座標
  - $f : R \times R \to R$

$$f(x, y) = x^2 + 2y^3 \tag{6.13}$$

- n 個の値の組: n-tuple

$$(x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}) \tag{6.14}$$