MonteCarlo法

計算機アルゴリズム特論：2015年度

只木進一

MonteCarlo法

- 狭義
  - 乱数を用いた積分（和）計算
- 広義
  - 乱数を用いたアルゴリズム

例：πの計算

- 一辺の長さ1の正方形内に2次元乱数を生成：(x, y) $(0 \leq x, y < 1)$
- 乱数が半径1の扇形に入る$(0 \leq (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} < 1)$確率は、正方形に対する扇形の面積の比$\pi/4$

- N個の2次元乱数のうち、m個が扇形に入る確率$P_N(m)$

$$P_N(m) = \binom{N}{m} p^m (1-p)^{N-m},\ p = \frac{\pi}{4}$$

- 確率母関数を使う

$$G(z) = \sum_{m=0}^{N} P_N(m) z^m = (1-p+pz)^N$$

$$G'(z)=\sum_{m=0}^{N} mP_N(m)z^{m-1}=Np(1-p+pz)^{N-1}$$

$$\langle m\rangle = G'(1) = Np$$

$$G''(z)=\sum_{m=0}^{N} m(m-1)P_N(m)z^{m-2}$$

$$=N(N-1)p^2(1-p+pz)^{N-2}$$

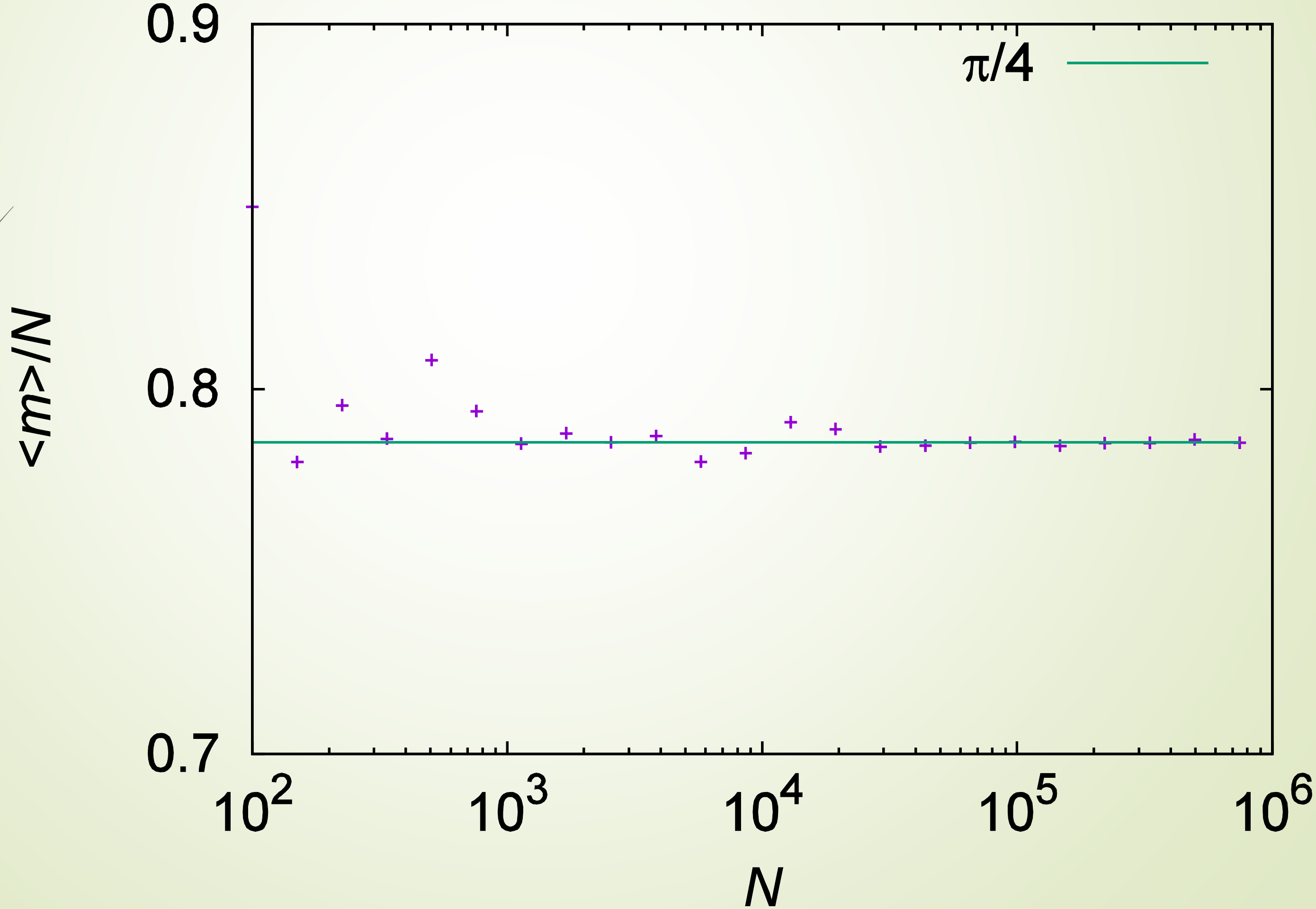
$$\langle m^2\rangle - \langle m\rangle = G''(1) = N(N-1)p^2$$

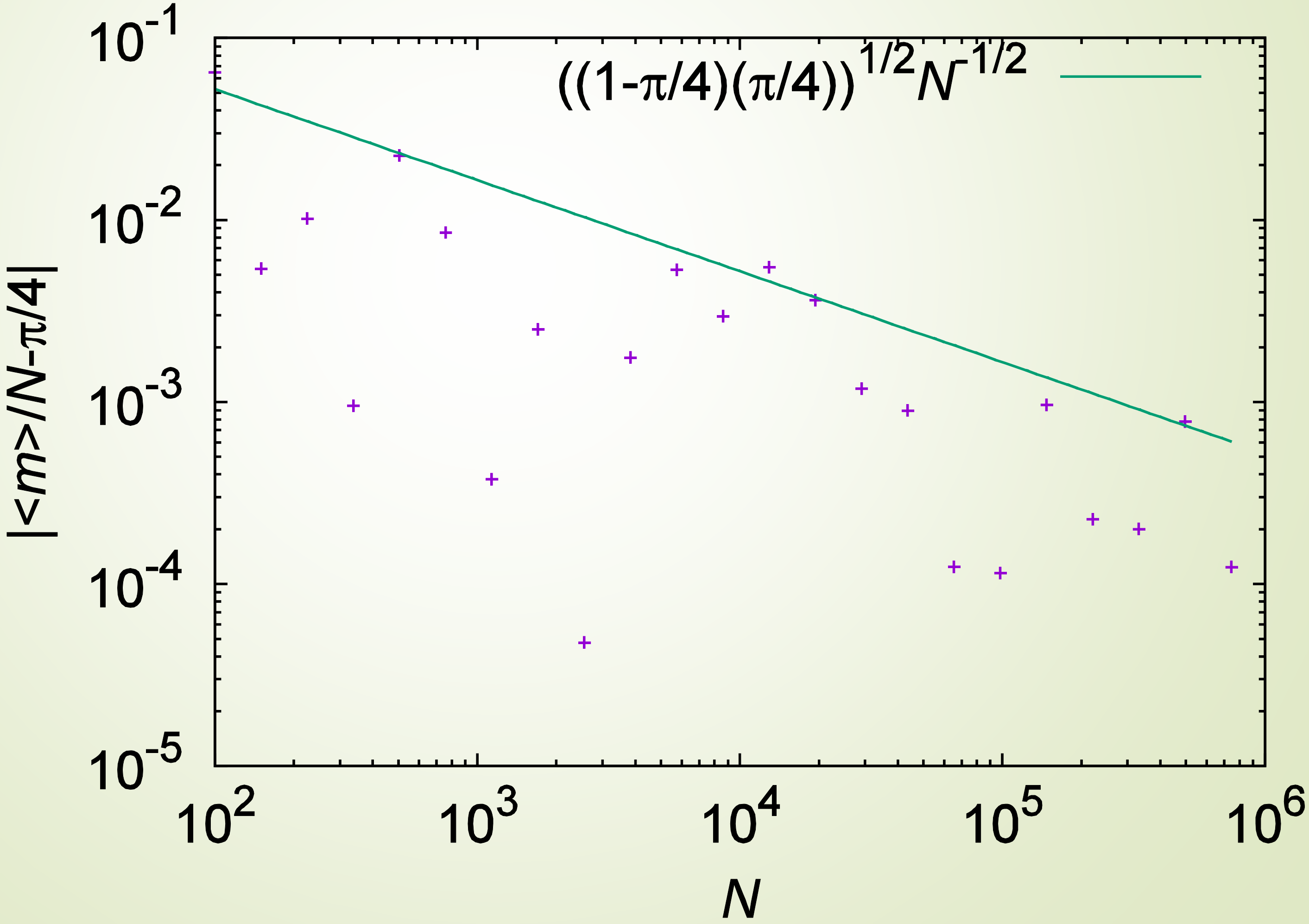
$$\sigma^2 = \langle m^2\rangle - \langle m\rangle^2 = N(N-1)p^2 + Np - N^2p^2$$

$$=Np(1-p)$$

これが正しいことを確かめる ただし、簡単に

- $\langle m \rangle_{\mathrm{exp}}/N \sim p \cong \pi/4$
- $\frac{\sigma}{\langle m \rangle} = \left(\frac{1-p}{p}\right)^{1/2} N^{-1/2}$より
  - $\left| \langle m \rangle_{\mathrm{exp}}/N - \frac{\pi}{4} \right|$が$N^{-1/2}$でゼロに近づく


0.9
0.8
0.7
<m>/N
π/4
10^2
10^3
10^4
10^5
10^6
N



$((1-\pi/4)(\pi/4))^{1/2}N^{-1/2}$
$|\langle m\rangle/N-\pi/4|$
N
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}
10^{2}
10^{3}
10^{4}
10^{5}
10^{6}