集合と写像

離散数学・オートマトン
2021 年後期
佐賀大学理工学部　只木進一

この講義の目的

- コンピュータは離散的
    - 0 と 1 で全てを表現
    - Boole 変数
    - 論理演算
- 離散数学: Discrete Mathematics
    - 集合、論理、グラフ理論等
    - 計算機科学には必須
- オートマトンと形式言語
    - 抽象的計算機
    - 計算の理論

集合: Sets

- ある特性を持ったモノの集まり
  - 要素: elements
  - 集合に含まれるか否かは明確でなければならない
- 要素 x が集合 A に含まれる

$$x \in A \tag{1}$$

- 要素 x が集合 A に含まれない

$$x \notin A \tag{2}$$

集合の表現

- 外延的記述: extensive descriptions
  - 要素の列挙
  - 例: $A = \{2, 3, 5, 7\}$
- 内包的記述: inclusive descriptions
  - 条件の記述
  - $\{$要素 $|$ 要素の条件$\}$
  - 例: $A = \{n | n$ は 10 以下の素数$\}$

有限集合、無限集合、可算集合

- 有限集合: finite sets
  - 要素が有限個
- 無限集合: infinite sets
  - 要素が無限個
- 可算集合: countable/enumerable sets
  - 要素を列挙 (enumerate) できる
  - 自然数と対応付けることができる

集合の簡単な例

- 自然数 (natural numbers) 全体: N
  - $0 \notin N$
- 整数 (integers) 全体: Z
- 有理数 (rational numbers) 全体:Q
- 実数 (real numbers) 全体:R
- 複素数 (complex numbers) 全体: C

集合の簡単な例

- 10 以下の自然数

$$
\begin{aligned}
A &= \{n | n \in N, n \leq 10\} \\
&= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \qquad (3)
\end{aligned}
$$

- 10 以下の素数

$$B = \{2, 3, 5, 7\} \qquad (4)$$

- 10 未満の 3 で割り切れない自然数

$$
\begin{aligned}
C &= \{n | n \in N, n < 10, n \bmod 3 \neq 0\} \\
&= \{1, 2, 4, 5, 7, 8\} \qquad (5)
\end{aligned}
$$

閉区間、開区間、半開区間

- **閉区間**: closed sections

$$[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\} \tag{6}$$

- **開区間**: open sections

$$(a, b) = \{x | a < x < b\} \tag{7}$$

- **半開区間**: semi-closed sections

$$[a, b) = \{x | a \leq x < b\} \tag{8}$$

- **無限区間**: infinite sections

$$(-\infty, \infty), [a, \infty), (-\infty, b] \tag{9}$$

集合に関わる記号など

- 集合 A の全て (任意) の要素: $\forall x \in A$
- 集合 A のある (特定の) 要素: $\exists x \in A$
- 条件 p かつ条件 q: $p \wedge q$
- 条件 p または条件 q: $p \vee q$
- 条件 p の否定: $\neg p$

部分集合: subsets

- 集合 A の全ての要素が集合 B に含まれる
  - A は B の部分集合：$A \subseteq B$
  - A の任意の要素 x は B の要素である

$$\forall x \in A \Rightarrow x \in B \tag{10}$$

- A は B の部分集合であり、 B の要素で A に含まれないものがある
  - A は B の真部分集合 (true subsets)：$A \subset B$
  - A の任意の要素 x が B の要素であり、かつ、A の要素でない B の要素 y が存在する

$$(\forall x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (\exists y \in B \Rightarrow y \notin A) \tag{11}$$

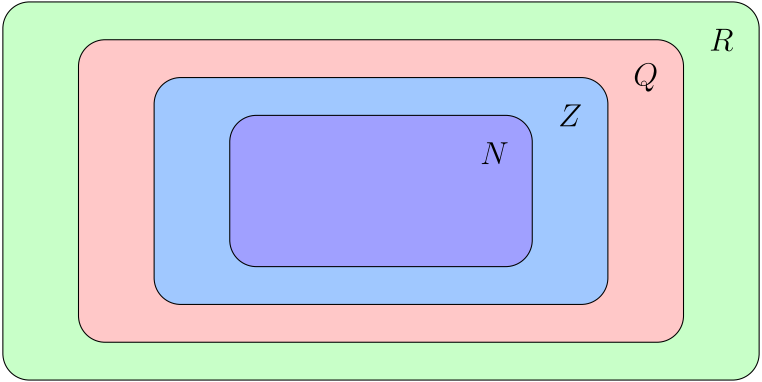
部分集合の例

- $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$
- 正の整数のうち、2 の倍数 A、3 の倍数 B、6 の倍数 C

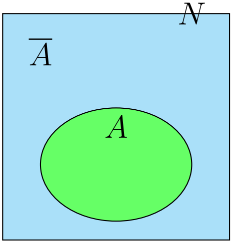
$$A = \{n | n = 2m, m \in N\} \tag{12}$$
$$B = \{n | n = 3m, m \in N\} \tag{13}$$
$$C = \{n | n = 6m, m \in N\} \tag{14}$$
$$(C \subset A) \wedge (C \subset B) \tag{15}$$
$$C = A \cap B \tag{16}$$

Venn 図

集合の関係を図示する



空集合と補集合:empty sets and complements

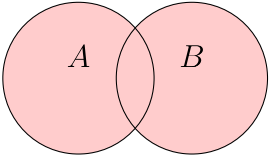


- 空集合: $\emptyset$
  - 要素を持たない集合
- 補集合
  - 全体集合からある集合を除いた部分
  - 例: 全体集合 N、集合 $A = \{n | n = 2m, m \in N\}$

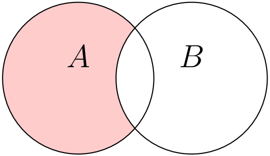
$$\overline{A} \equiv \{n | n \in N \wedge n \notin A\} \tag{17}$$

集合の演算

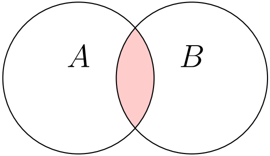
$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$



$$A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$



$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$



集合の演算の例

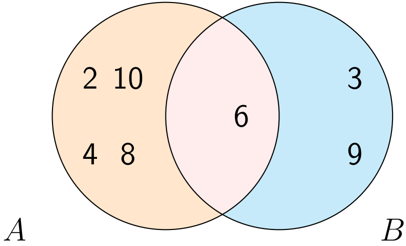
$$A = \{n|n = 2m, m \in N, n \leq 10\} \tag{18}$$

$$B = \{n|n = 3m, m \in N, n \leq 10\} \tag{19}$$

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\} \tag{20}$$

$$A \cap B = \{6\} \tag{21}$$

$$A \setminus B = \{2, 4, 8, 10\} \tag{22}$$



集合演算の基本的性質

- **交換律**: Commutative

$$X \cup Y = Y \cup X \tag{23}$$
$$X \cap Y = Y \cap X \tag{24}$$

- **結合律**: Associative

$$X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z \tag{25}$$
$$X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z \tag{26}$$

集合演算の基本的性質

- **分配律**: Distributive

$$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z) \tag{27}$$

$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z) \tag{28}$$

- **巾等律**: Idempotent

$$X \cup X = X \tag{29}$$

$$X \cap X = X \tag{30}$$

- **吸収律**: Absorption

$$X \cup (X \cap Y) = X \tag{31}$$

$$X \cap (X \cup Y) = X \tag{32}$$

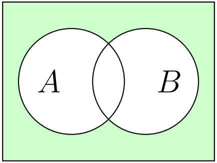
de Morgan の法則

- 全体集合 U とその部分集合 A と B

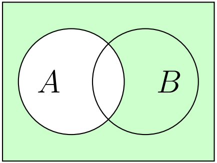
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \tag{33}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \tag{34}$$

$\overline{A \cup B}$

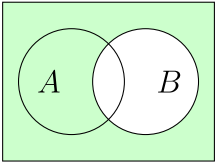


$\overline{A}$



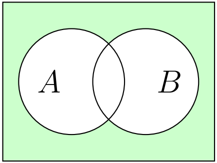
$\cap$

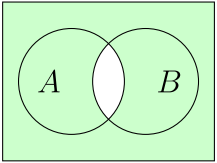
$\overline{B}$



$=$

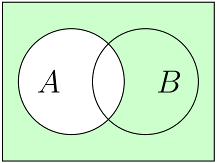
$\overline{A} \cap \overline{B}$





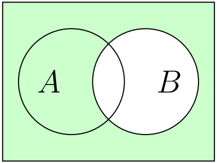
$\overline{A \cap B}$

$\overline{A}$



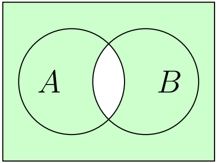
$\cup$

$\overline{B}$



$=$

$\overline{A} \cup \overline{B}$



集合の族: families

- 要素が集合である「集合」
- 例：べき集合

$$A = \{1, 2, 3\} \tag{35}$$

$$2^A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\} \tag{36}$$

写像 (mappings) または関数 (functions)

- 集合 X の各要素に、集合 Y の要素が一つ対応しているときに、その対応関係を写像または関数と呼ぶ
  - $f : X \to Y$
  - X: 定義域 (domain)
  - Y: 値域 (range)
- f による x の像 (image)

$$y = f(x) \tag{37}$$

- f による X の像

$$\{f(x) | x \in X\} \subseteq Y \tag{38}$$

写像の例

- 二次関数 $f(x) = x^2$

$$f : R \rightarrow \{x | x \in R, x \geq 0\} \tag{39}$$

- 与えられた自然数を越えない最大の素数を返す写像 p

$$p : N \rightarrow \{n | n \text{ は素数}\} \tag{40}$$

- ASCII 文字に対してコードを 16 進で返す写像 h

$$h : \{c | c \text{ は ASCII 文字}\} \rightarrow \{c | c \text{ は 2 桁の 16 進数}\} \tag{41}$$

単射、全射、全単射

- **単射**: injective, one-to-one
  - X の異なる点には、Y の異なる点が対

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \tag{42}$$

- **全射**: surjective, onto
  - $\forall y \in Y$ に対して $f(x) = y$ なる x が存在
  - 注意: y に対して x が一つ定まるのではない
- **全単射**: bijective
  - 逆写像が存在する
  - 全射かつ単射

写像の四則演算

- 二つの関数 f と g
- それぞれの定義域 D_f と D_g

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x), (x \in D_f \cap D_g) \tag{43}$$

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x), (x \in D_f \cap D_g) \tag{44}$$

$$(f/g)(x) = f(x)/g(x), (x \in D_f \cap \{x | x \in D_g, g(x) \neq 0\}) \tag{45}$$

$$(cf)(x) = cf(x), (c \text{ は定数}) \tag{46}$$

写像の四則演算例

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x + 1 \\
g(x) &= x^2 - 3 \\
(f \pm g)(x) &= (x + 1) \pm \left(x^2 - 3\right) \\
(f \times g)(x) &= (x + 1)\left(x^2 - 3\right) \\
(f/g)(x) &= (x + 1) / \left(x^2 - 3\right)
\end{aligned}
$$

写像の合成

- 三つの集合 X、Y、Z
- 二つの写像：$f X \to Y$、$g : Y \to Z$
- 合成関数

$$g \circ f : X \to Z \tag{47}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \tag{48}$$

- 例

$$f(x) = x + 1$$
$$g(x) = x^2 - 3$$
$$(g \circ f)(x) = g(x+1) = (x+1)^2 - 3$$

直積

- 値に順序がある組
  - 例：2 次元の座標
- n 個の値の組：n-tuple

$$(x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}) \tag{49}$$