

# 「離散数学・オートマトン」演習問題 04 (解答例)

2023/10/30

## 1 関係

課題 1  $N$  上の関係  $R$  と  $S$  を

$$R = \{(m, n) \mid m = 2n\} \quad (1.1)$$

$$S = \{(m, n) \mid m = n + 3\} \quad (1.2)$$

とすると、 $R \circ S$ 、 $R^2$ 、 $R^{-1}$  を求めなさい。

解答例

•  $R \circ S = \{(x, y) \mid \exists z, xSz \wedge zRy\}$  は

$$R \circ S = \{(x, y) \mid \exists z, \underline{x = z + 3} \wedge \underline{z = 2y}\}$$

である。これより以下を得る。

$$R \circ S = \{(m, n) \mid m = \underline{2n + 3}\}$$

•  $R^2 = \{(x, y) \mid \exists z, xRz \wedge zRy\}$  は

$$R^2 = \{(x, y) \mid \exists z, \underline{x = 2z} \wedge \underline{z = 2y}\}$$

である。これより以下を得る。

$$R \circ R = \{(m, n) \mid m = 4n\}$$

•

$$R^{-1} = \{(m, n) \mid 2m = n\}$$

課題 2  $\Sigma = \{a, b, c, d\}$  上の関係を考える。

$$R = \{(a, a), (a, b), (b, d), (c, d), (d, b)\} \quad (1.3)$$

$R^i = R^j$  となる最小の  $i \neq j$  の組を求めよ。また、 $R^*$  を求めよ。

解答例  $R^2$  を求める。

$$aRa \wedge aRa \Rightarrow aR^2a$$

$$aRa \wedge aRb \Rightarrow aR^2b$$

$$aRb \wedge bRd \Rightarrow aR^2d$$

$$bRd \wedge dRb \Rightarrow bR^2b$$

$$cRd \wedge dRb \Rightarrow cR^2b$$

$$dRb \wedge bRd \Rightarrow dR^2d$$

同様に  $R^3$  と  $R^4$  を求める。

$$aR^2a \wedge aRa \Rightarrow aR^3a$$

$$aR^2a \wedge aRb \Rightarrow aR^3b$$

$$aR^2b \wedge bRd \Rightarrow aR^3d$$

$$bR^2b \wedge bRd \Rightarrow bR^3d$$

$$cR^2b \wedge bRd \Rightarrow cR^3d$$

$$dR^2d \wedge dRb \Rightarrow dR^3b$$

$$aR^3a \wedge aRa \Rightarrow aR^4a$$

$$aR^3a \wedge aRb \Rightarrow aR^4b$$

$$aR^3b \wedge bRd \Rightarrow aR^4d$$

$$aR^3d \wedge dRb \Rightarrow aR^4b$$

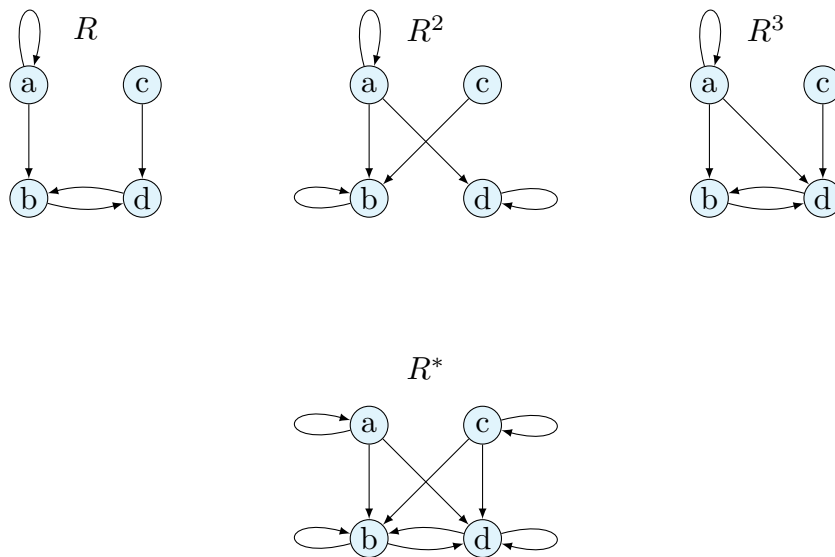
$$bR^3d \wedge dRb \Rightarrow bR^4b$$

$$cR^3d \wedge dRb \Rightarrow cR^4b$$

$$dR^3b \wedge bRd \Rightarrow dR^4d$$

以上から  $R^2 = R^4$  を得る。従って、 $R^* = R^0 \cup R \cup R^2 \cup R^3$  となる。しかし、 $R^3$  の要素は  $R^0 \cup R \cup R^2$  に含まれているため、 $R^* = R^0 \cup R \cup R^2$  で十分である。

$$\begin{aligned} R^* &= \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\} \cup \{(a, a), (a, b), (b, d), (c, d), (d, b)\} \\ &\quad \cup \{(a, a), (a, b), (a, d), (b, b), (c, b), (d, d)\} \\ &= \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (a, d), (b, d), (c, b), (c, d), (d, b)\} \end{aligned}$$



この課題に対応するコードは、以下の Github から取得できます。

<https://github.com/discrete-math-saga/RelationsAndOrder/>

## 2 順序

**課題 3** 全体集合  $U$  を考える。その部分集合  $A \subseteq U$  に対する関係  $\subseteq$  は、半順序であって全順序でないことを示せ。

**解答例** はじめに、反射律、推移律、反対称律を示し、半順序であることを示す。

- 反射律：ある集合  $A$  について、 $A \subseteq A$  は明らか
- 推移律： $C \subseteq B \wedge B \subseteq A$  ならば、 $C \subseteq A$  である。
- 反対称律： $B \subseteq A \wedge A \subseteq B$  ならば、 $A = B$  である。

次に、二つの集合  $A \subseteq U$  と  $B \subseteq U$  を考える。 $A \cap B$  が  $A$  または  $B$  と等しくない場合、 $A$  と  $B$  の間には関係  $\subseteq$  は成り立たない。つまり、関係  $\subseteq$  は全順序ではない。

/