グラフ

離散数学・オートマトン
2024 年後期
佐賀大学理工学部　只木進一

グラフ: Graphs

- 日常用語ではネットワーク (networks) ともいう
  - インターネット
  - ヒトの繋がり
  - 交通網
  - 作業手順
- 要素の繋がり方に注目

様々なグラフ・ネットワーク

- SINET
  https://www.sinet.ad.jp/wp-content/uploads/2022/05/SINET6-2022_j.pdf
- https://www.opte.org/the-internet
- ANA 路線図
  https://www.ana.co.jp/ir/kessan_info/annual/pdf/11/11_25.pdf

グラフの定義: Definition of graphs

- グラフ: $G = (V, E)$
- V: 頂点 (vertex) の集合
- E: 辺 (edge) の集合
  - $e = (u, v)$: 頂点 u と v を結ぶ辺
  - 頂点 u と v を辺 e の端点という

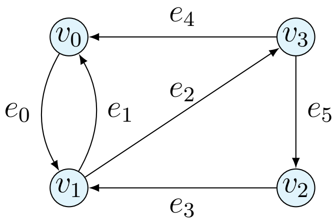
有向グラフと無向グラフ: Directed and non-directed graphs

- 無向グラフ: non-directed graphs
  - 辺に向きの無いグラフ
  - $\partial : E \to V \times V$: 辺から端点への写像
- 有向グラフ: directed graphs
  - 辺に向きの有るグラフ
  - $\partial^+ : E \to V$: 始点
  - $\partial^- : E \to V$: 終点

例 1.1:

$$V = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$$
$$E = \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$$

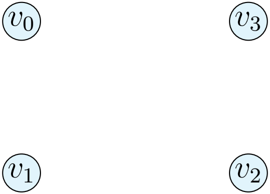
$$\partial^+ e_0 = v_0 \qquad \partial^- e_0 = v_1 \qquad \partial^+ e_1 = v_1 \qquad \partial^- e_1 = v_0$$
$$\partial^+ e_2 = v_1 \qquad \partial^- e_2 = v_3 \qquad \partial^+ e_3 = v_2 \qquad \partial^- e_3 = v_1$$
$$\partial^+ e_4 = v_3 \qquad \partial^- e_4 = v_0 \qquad \partial^+ e_5 = v_3 \qquad \partial^- e_5 = v_2$$



例 1.2:

$$
\begin{aligned}
V &= \{v_0, v_1, v_2, v_3\} \\
E &= \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}
\end{aligned}
$$

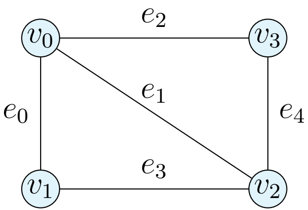
$$
\begin{array}{llll}
\partial^+ e_0 = v_0 & \partial^- e_0 = v_1 & \partial^+ e_1 = v_1 & \partial^- e_1 = v_2 \\
\partial^+ e_2 = v_1 & \partial^- e_2 = v_3 & \partial^+ e_3 = v_2 & \partial^- e_3 = v_1 \\
\partial^+ e_4 = v_3 & \partial^- e_4 = v_0 & \partial^+ e_5 = v_3 & \partial^- e_5 = v_2
\end{array}
$$



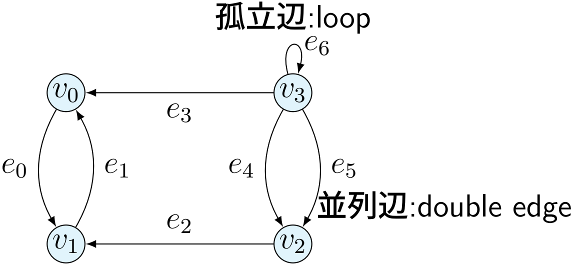
例 1.3:

$$V = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$$
$$E = \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4\}$$

$$\partial e_0 = \{v_0, v_1\} \qquad \partial e_1 = \{v_0, v_2\} \qquad \partial e_2 = \{v_0, v_3\}$$
$$\partial e_3 = \{v_1, v_2\} \qquad \partial e_4 = \{v_2, v_3\}$$



並列辺と孤立辺



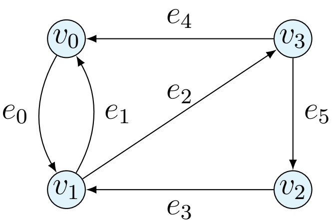
グラフの定義 2

- 頂点に連結した辺を明示する
- 無向グラフに対して
  - $\delta : V \to 2^E$: 頂点から辺の集合
- 有向グラフに対して
  - $\delta^+ : V \to 2^E$: 頂点を始点とする辺の集合
  - $\delta^- : V \to 2^E$: 頂点を終点とする辺の集合

例 1.4: (例 1.1 に対応)

$$V = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$$
$$E = \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$$

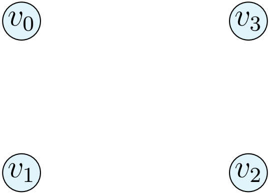
$$\delta^+ v_0 = \{e_0\} \quad \delta^- v_0 = \{e_1, e_4\} \quad \delta^+ v_1 = \{e_1, e_2\} \quad \delta^- v_1 = \{e_0, e_3\}$$
$$\delta^+ v_2 = \{e_3\} \quad \delta^- v_2 = \{e_5\} \quad \delta^+ v_3 = \{e_4, e_5\} \quad \delta^- v_3 = \{e_2\}$$



例 1.5: (例 1.2 に対応)

$$V = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$$
$$E = \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$$

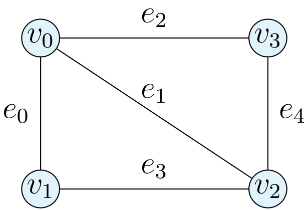
$$\delta^+ v_0 = \{e_0\} \quad \delta^- v_0 = \{e_4\} \quad \delta^+ v_1 = \{e_1, e_2\} \quad \delta^- v_1 = \{e_0, e_3\}$$
$$\delta^+ v_2 = \{e_3\} \quad \delta^- v_2 = \{e_1, e_5\} \quad \delta^+ v_3 = \{e_4, e_5\} \quad \delta^- v_3 = \{e_2\}$$



例 1.6: (例 1.3 に対応)

$$
\begin{aligned}
V &= \{v_0, v_1, v_2, v_3\} \\
E &= \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta v_0 &= \{e_0, e_1, e_2\} & \qquad \delta v_1 &= \{e_0, e_3\} \\
\delta v_2 &= \{e_1, e_3, e_4\} & \qquad \delta v_3 &= \{e_2, 4\}
\end{aligned}
$$

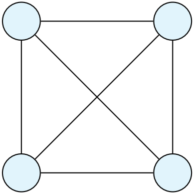


次数: Degree of vertex

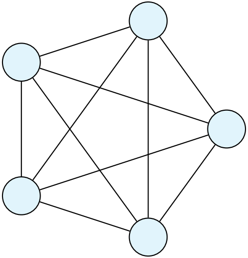
- 無向グラフに対して
  - 頂点 v を始点とする辺: $\delta : V \to 2^E$
  - 頂点 v の次数: $|\delta v|$
- 有向グラフに対して
  - $\delta^+ : V \to 2^E$: 頂点を始点とする辺の集合
  - $\delta^- : V \to 2^E$: 頂点を終点とする辺の集合
  - 頂点 v の正次数: $|\delta^+ v|$
  - 頂点 v の負次数: $|\delta^- v|$

完全グラフ: Complete graphs

すべての頂点の組を結ぶ辺が存在する無向グラフ



K_4

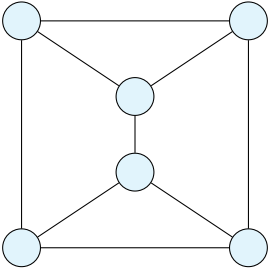


K_5

komplete: ドイツ語

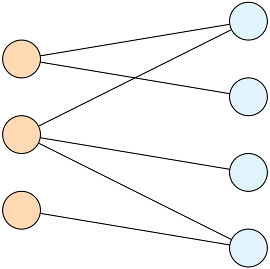
正則グラフ: Regular graphs

すべての頂点の次数が等しい無向グラフ

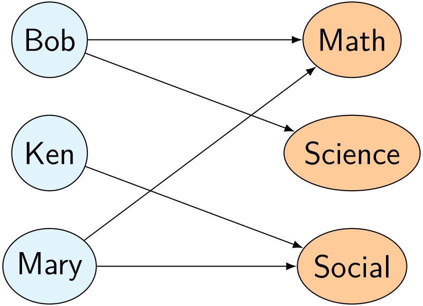


二部グラフ: Bipartites

- 頂点が 2 つの集合に別れ、集合内の辺が無い

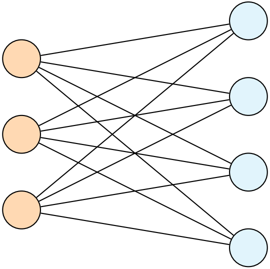


例 2.1: 得意科目



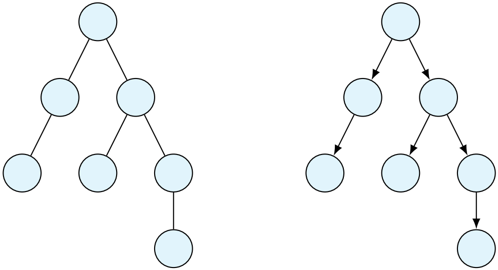
完全二部グラフ: Complete bipartites

左の各点が右の各点と結ばれている



木: Trees

閉路の無いグラフ。有向と無向がある。

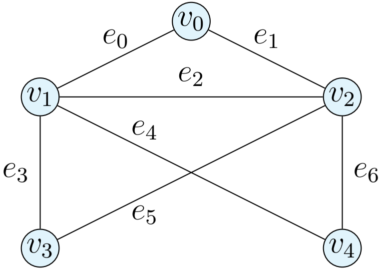


無向木では、任意の頂点が根 (root) になることができる。

Euler 閉路: 一筆書き: Euler circuits

- 「Königsberg の橋」: Graph 理論の端緒
  - https://www.britannica.com/science/Konigsberg-bridge-problem
  - Leonhard Euler (1707-1783)
- 無向グラフに対して、全ての辺を一度ずつ通り、元の頂点に戻る道を見つける
  - 道 (path): 辺の列
- 全ての頂点の次数が偶数の場合のみ、Euler 閉路が存在する

例 3.1:



Euler 閉路の例

$$e_0 \to e_3 \to e_5 \to e_6 \to e_4 \to e_2 \to e_1$$

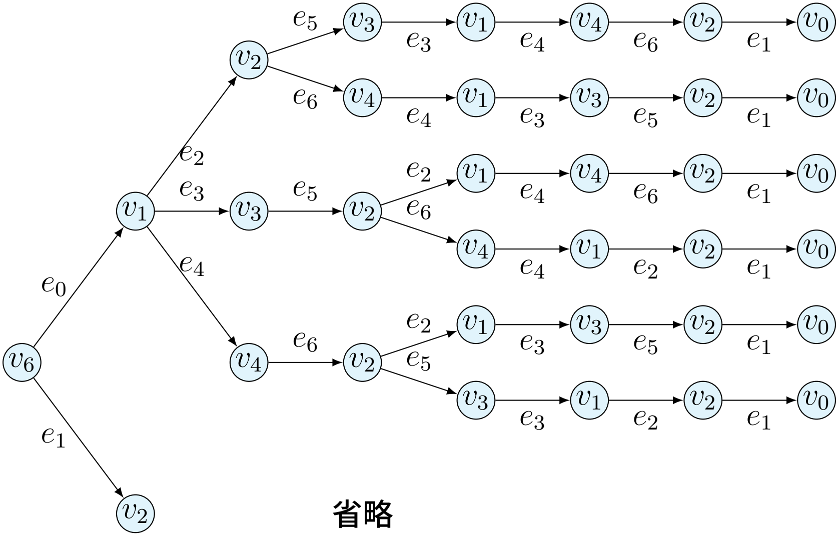
Euler 閉路を列挙するアイディア

- 列挙 (enumerate): 全て示す
- 始点から、再帰的に辺をたどる
- 全ての辺を一度ずつ通り、始点に戻る経路を保存する
  - 経路を構成する辺の数とグラフの辺の数の比較
  - 始点に戻ったか
- 経路を構成する辺を管理

Algorithm 1 Euler 閉路列挙のアルゴリズム

```
//                                                ▷ E_Euler: 経由した辺のリスト、初期値 E_Euler = ∅
//                                                ▷ r: 始点
procedure ENUMERATEEULER(v, E_Euler)
    if (v == r) ∧ (|E_Euler| == |E|) then
        見つけた Euler 閉路 E_Euler を保存
    else
        for all e ∈ δv do                         ▷ //v に接続する全ての辺
            if e ∉ E_Euler then
                E'_Euler = E_Euler ∪ {e}
                w = ∂e \ {v}                      ▷ //辺 e の v と反対側の頂点
                enumerateEuler(w, E'_Euler)
            end if
        end for
    end if
end procedure
```

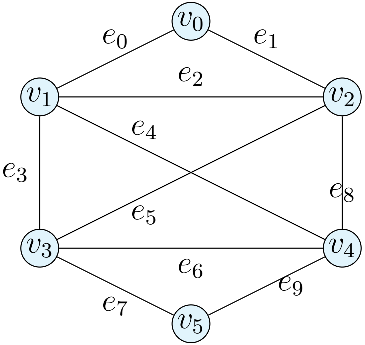
探索の様子


e_5 v_3 e_3 v_1 e_4 v_4 e_6 v_2 e_1 v_0
v_2
e_6 v_4 e_4 v_1 e_3 v_3 e_5 v_2 e_1 v_0
e_2
e_2 v_1 e_4 v_4 e_6 v_2 e_1 v_0
v_1 e_3 v_3 e_5 v_2 e_6
v_4 e_4 v_1 e_2 v_2 e_1 v_0
e_4
e_0
e_2 v_1 e_3 v_3 e_5 v_2 e_1 v_0
v_6 v_4 e_6 v_2 e_5
v_3 e_3 v_1 e_2 v_2 e_1 v_0
e_1
v_2
省略

列挙の結果

```
['e0', 'e2', 'e5', 'e3', 'e4', 'e6', 'e1']
['e0', 'e2', 'e6', 'e4', 'e3', 'e5', 'e1']
['e0', 'e3', 'e5', 'e2', 'e4', 'e6', 'e1']
['e0', 'e3', 'e5', 'e6', 'e4', 'e2', 'e1']
['e0', 'e4', 'e6', 'e2', 'e3', 'e5', 'e1']
['e0', 'e4', 'e6', 'e5', 'e3', 'e2', 'e1']
['e1', 'e2', 'e3', 'e5', 'e6', 'e4', 'e0']
['e1', 'e2', 'e4', 'e6', 'e5', 'e3', 'e0']
['e1', 'e5', 'e3', 'e2', 'e6', 'e4', 'e0']
['e1', 'e5', 'e3', 'e4', 'e6', 'e2', 'e0']
['e1', 'e6', 'e4', 'e2', 'e5', 'e3', 'e0']
['e1', 'e6', 'e4', 'e3', 'e5', 'e2', 'e0']
```

例 3.2:



閉路の例

$$e_0 \to e_2 \to e_5 \to e_3 \to e_4 \to e_6 \to e_7 \to e_9 \to e_8 \to e_1$$

列挙の結果: 逆回り省略

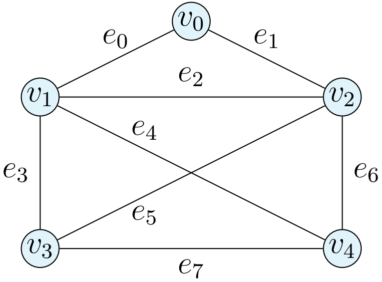
```
['e0', 'e2', 'e5', 'e3', 'e4', 'e6', 'e7', 'e9', 'e8', 'e1']
['e0', 'e2', 'e5', 'e3', 'e4', 'e9', 'e7', 'e6', 'e8', 'e1']
['e0', 'e2', 'e5', 'e6', 'e4', 'e3', 'e7', 'e9', 'e8', 'e1']
['e0', 'e2', 'e5', 'e6', 'e9', 'e7', 'e3', 'e4', 'e8', 'e1']
['e0', 'e2', 'e5', 'e7', 'e9', 'e4', 'e3', 'e6', 'e8', 'e1']
['e0', 'e2', 'e5', 'e7', 'e9', 'e6', 'e3', 'e4', 'e8', 'e1']
['e0', 'e2', 'e8', 'e4', 'e3', 'e6', 'e9', 'e7', 'e5', 'e1']
['e0', 'e2', 'e8', 'e4', 'e3', 'e7', 'e9', 'e6', 'e5', 'e1']
['e0', 'e2', 'e8', 'e6', 'e3', 'e4', 'e9', 'e7', 'e5', 'e1']
['e0', 'e2', 'e8', 'e6', 'e7', 'e9', 'e4', 'e3', 'e5', 'e1']
['e0', 'e2', 'e8', 'e9', 'e7', 'e3', 'e4', 'e6', 'e5', 'e1']
['e0', 'e2', 'e8', 'e9', 'e7', 'e6', 'e4', 'e3', 'e5', 'e1']
```

```
['e0', 'e3', 'e5', 'e2', 'e4', 'e6', 'e7', 'e9', 'e8', 'e1']
['e0', 'e3', 'e5', 'e2', 'e4', 'e9', 'e7', 'e6', 'e8', 'e1']
['e0', 'e3', 'e5', 'e8', 'e6', 'e7', 'e9', 'e4', 'e2', 'e1']
['e0', 'e3', 'e5', 'e8', 'e9', 'e7', 'e6', 'e4', 'e2', 'e1']
['e0', 'e3', 'e6', 'e4', 'e2', 'e5', 'e7', 'e9', 'e8', 'e1']
['e0', 'e3', 'e6', 'e4', 'e2', 'e8', 'e9', 'e7', 'e5', 'e1']
['e0', 'e3', 'e6', 'e8', 'e2', 'e4', 'e9', 'e7', 'e5', 'e1']
['e0', 'e3', 'e6', 'e8', 'e5', 'e7', 'e9', 'e4', 'e2', 'e1']
['e0', 'e3', 'e6', 'e9', 'e7', 'e5', 'e2', 'e4', 'e8', 'e1']
['e0', 'e3', 'e6', 'e9', 'e7', 'e5', 'e8', 'e4', 'e2', 'e1']
['e0', 'e3', 'e7', 'e9', 'e4', 'e2', 'e5', 'e6', 'e8', 'e1']
['e0', 'e3', 'e7', 'e9', 'e4', 'e2', 'e8', 'e6', 'e5', 'e1']
['e0', 'e3', 'e7', 'e9', 'e6', 'e5', 'e2', 'e4', 'e8', 'e1']
['e0', 'e3', 'e7', 'e9', 'e6', 'e5', 'e8', 'e4', 'e2', 'e1']
['e0', 'e3', 'e7', 'e9', 'e8', 'e2', 'e4', 'e6', 'e5', 'e1']
['e0', 'e3', 'e7', 'e9', 'e8', 'e5', 'e6', 'e4', 'e2', 'e1']
['e0', 'e4', 'e6', 'e3', 'e2', 'e5', 'e7', 'e9', 'e8', 'e1']
['e0', 'e4', 'e6', 'e3', 'e2', 'e8', 'e9', 'e7', 'e5', 'e1']
['e0', 'e4', 'e6', 'e5', 'e2', 'e3', 'e7', 'e9', 'e8', 'e1']
['e0', 'e4', 'e6', 'e5', 'e8', 'e9', 'e7', 'e3', 'e2', 'e1']
['e0', 'e4', 'e6', 'e7', 'e9', 'e8', 'e2', 'e3', 'e5', 'e1']
['e0', 'e4', 'e6', 'e7', 'e9', 'e8', 'e5', 'e3', 'e2', 'e1']
['e0', 'e4', 'e8', 'e2', 'e3', 'e6', 'e9', 'e7', 'e5', 'e1']
['e0', 'e4', 'e8', 'e2', 'e3', 'e7', 'e9', 'e6', 'e5', 'e1']
['e0', 'e4', 'e8', 'e5', 'e6', 'e9', 'e7', 'e3', 'e2', 'e1']
['e0', 'e4', 'e8', 'e5', 'e7', 'e9', 'e6', 'e3', 'e2', 'e1']
['e0', 'e4', 'e9', 'e7', 'e3', 'e2', 'e5', 'e6', 'e8', 'e1']
['e0', 'e4', 'e9', 'e7', 'e3', 'e2', 'e8', 'e6', 'e5', 'e1']
['e0', 'e4', 'e9', 'e7', 'e5', 'e2', 'e3', 'e6', 'e8', 'e1']
['e0', 'e4', 'e9', 'e7', 'e5', 'e8', 'e6', 'e3', 'e2', 'e1']
['e0', 'e4', 'e9', 'e7', 'e6', 'e8', 'e2', 'e3', 'e5', 'e1']
['e0', 'e4', 'e9', 'e7', 'e6', 'e8', 'e5', 'e3', 'e2', 'e1']
```

Hamilton 閉路: Hamilton circuits

- 無向グラフに対して、全ての頂点を一度ずつ経由して、始点に戻る閉路
- 巡回セールスマン問題等で必要となる

例 3.3:



閉路の例

$$v_0 \to v_1 \to v_3 \to v_4 \to v_2 \to v_0$$

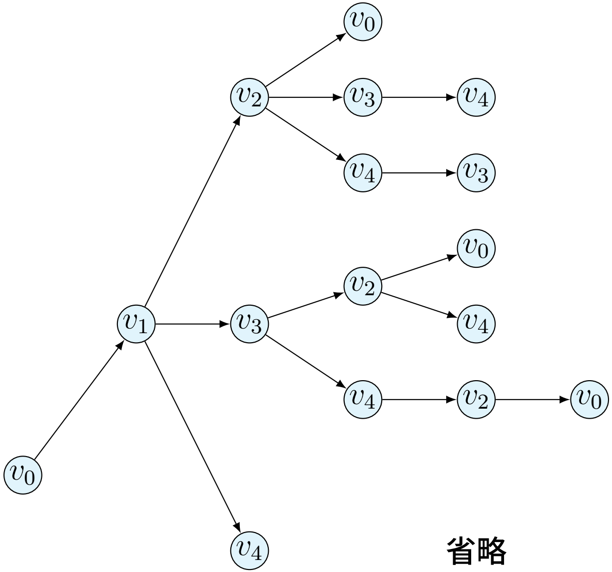
Hamilton 閉路を列挙するアイディア

- 始点から、再帰的に辺をたどる
- 全ての頂点を一度ずつ通り、始点に戻る経路を保存する
  - 経路を構成する頂点の数とグラフの頂点の数の比較
  - 始点に戻ったか
- 経路を構成する頂点を管理

Algorithm 2 Hamilton 閉路列挙のアルゴリズム

$//$ ▷ V_{Hamilton}: 経由した頂点のリスト、初期値は $V_{\text{Hamilton}} = \{r\}$
$//$ ▷ r: 始点
procedure ENUMERATEHAMILTON(v, V_{Hamilton})
  for all $e \in \delta v$ **do** ▷ $//v$ に接続する全ての辺
    $w = \partial e \setminus \{v\}$ ▷ 辺 e の v と反対側の頂点
    if $(w == r) \wedge (|V_{\text{Hamilton}}| == |V|)$ **then**
      見つけた Hamilton 閉路 V_{Hamilton} を保存
    else
      if $w \notin V_{\text{Hamilton}}$ **then**
        $V'_{\text{Hamilton}} = V_{\text{Hamilton}} \cup \{w\}$
        enumerateHamilton(w, V'_{Hamilton})
      end if
    end if
  end for
end procedure

探索の様子



列挙の結果

```
['v0', 'v1', 'v3', 'v4', 'v2']
['v0', 'v1', 'v4', 'v3', 'v2']
['v0', 'v2', 'v3', 'v4', 'v1']
['v0', 'v2', 'v4', 'v3', 'v1']
```