

「離散数学・オートマトン」演習問題 03 (解答例)

2024/10/21

1 数学的帰納法

課題 1 $n \in N$ に対する以下の公式を数学的帰納法により証明しなさい。

$$\sum_{k=1}^n k(k+1)^2 = \frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n+5) \quad (1.1)$$

解答例

1. $n = 1$ の場合。

$$\text{LHS} = 1 \times 2^2 = 4$$

$$\text{RHS} = \frac{1}{12} \times 1 \times 2 \times 3 \times 8 = 4$$

式 (1.1) が成り立つ。

2. ある n について式 (1.1) が成り立つと仮定して、 $n+1$ の場合を導出する。

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k(k+1)^2 &= \sum_{k=1}^n k(k+1)^2 + (n+1)(n+2)^2 \\ &= \frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n+5) + (n+1)(n+2)^2 \\ &= \frac{1}{12}(n+1)(n+2)[n(3n+5) + 12(n+2)] \\ &= \frac{1}{12}(n+1)(n+2)(3n^2 + 17n + 24) \\ &= \frac{1}{12}(n+1)(n+2)(n+3)(3n+8) \\ &= \frac{1}{12}(n+1)(n+2)(n+3)(3(n+1)+5) \end{aligned}$$

これは、式 (1.1) の $n+1$ の場合である。

課題 2 $m \in N \cup \{0\}$ に対する以下の公式を数学的帰納法により証明しなさい。ただし $n \in N$ である。

$$\sum_{k=0}^m \binom{n+k}{n} = \binom{n+m+1}{n+1} \quad (1.2)$$

解答例

1. $m = 0$

$$\text{LHS} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\text{RHS} = \binom{n+1}{n+1} = 1$$

2. ある m について式 (1.2) が正しいと仮定し、 $m+1$ の場合を導出する。

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{m+1} \binom{n+k}{n} &= \sum_{k=0}^m \binom{n+k}{n} + \binom{n+m+1}{n} \\ &= \binom{n+m+1}{n+1} + \binom{n+m+1}{n} \\ &= \binom{n+m+2}{n+1} \end{aligned}$$

ここで、二項係数の漸化式

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

を使用している。

課題 3 $n \in N$ に対する以下の公式 (de Moivre の公式) を数学的帰納法により証明しなさい。

$$(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta) \quad (1.3)$$

ここで、 i は虚数単位 $i^2 = -1$ である。

解答例 $n = 1$ は自明である。ある n について式 (1.3) が成り立つと仮定して、 $n+1$ の

場合を導出する。

$$\begin{aligned}
 (\cos(\theta) + i \sin(\theta))^{n+1} &= (\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n (\cos(\theta) + i \sin(\theta)) \\
 &= (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)) (\cos(\theta) + i \sin(\theta)) \\
 &= \cos(n\theta) \cos(\theta) - \sin(n\theta) \sin(\theta) \\
 &\quad + i \cos(n\theta) \sin(\theta) + i \sin(n\theta) \cos(\theta) \\
 &= \cos((n+1)\theta) + i \sin((n+1)\theta)
 \end{aligned}$$

これは、式 (1.3) の $n+1$ の場合である。ここで、以下に示す三角関数の加法定理を使っている。

$$\begin{aligned}
 \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \\
 \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta
 \end{aligned}$$

2 再帰的定義

課題 4 記号 $\Sigma = \{a, b\}$ で構成する回文、つまり前から読んでも、後から読んでも同じになる文の集合 L を再帰的に定義しなさい。ただし、 $\epsilon \in L$ (ϵ は、長さゼロの文字列) とする。

解答例

1. $a, b, \epsilon \in L$
2. $s \in L$ ならば、 $asa \in L$ 、 $bsb \in L$

課題 5 二項係数は、 $n \in N$ 、 $1 \leq k \leq n-1$ として、以下のように再帰的に定義することができる。

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \tag{2.1}$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \tag{2.2}$$

このとき、実際に $\binom{4}{2}$ を求め、

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{2.3}$$

と比較しなさい。

解答例 初めに、再帰的定義に従って値を求める。

$$\begin{aligned}\binom{4}{2} &= \binom{3}{1} + \binom{3}{2} \\ &= \binom{2}{0} + \binom{2}{1} + \binom{2}{1} + \binom{2}{2} \\ &= 2 + 2 \binom{2}{1} = 2 + 2 \left[\binom{1}{0} + \binom{1}{1} \right] \\ &= 6\end{aligned}$$

次に、式 (2.3) に従って、直接計算する。

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$$

二項係数を求める python コードを示す。

```
1 def binomial(n:int, r:int) -> int:
2     """
3     二項係数
4
5     Parameters
6     -----
7     n, r: n>=r>=0 である整数
8     """
9     if n < 0 or r < 0 or n < r:
10         raise Exception(' 引数の値が正しくありません')
11     if r == 0 or r == n:
12         return 1
13     return binomial(n-1, r-1) + binomial(n-1, r)
14
15 n = 4
16 k = 2
17 v = binomial(n,k)
18 m = f'C({n},{k})={v}'
19 print(m)
```

このコードは、以下の Github から取得できます。

<https://github.com/discrete-math-saga/>

MathematicalInductionAndRecursiveDefinitions