「離散数学・オートマトン」演習問題 03 (解答例)

2023/10/23

1　数学的帰納法

課題 1　$n \in N$ に対する以下の公式を数学的帰納法により証明しなさい。

$$\sum_{k=1}^{n} k\left(k+1\right)^2 = \frac{1}{12} n\left(n+1\right)\left(n+2\right)\left(3n+5\right) \tag{1.1}$$

解答例

1. $n = 1$ の場合。

$$\begin{aligned} \mathrm{LHS} &= 1 \times 2^2 = 4 \\ \mathrm{RHS} &= \frac{1}{12} \times 1 \times 2 \times 3 \times 8 = 4 \end{aligned}$$

   式 (1.1) が成り立つ。

2. ある n について式 (1.1) が成り立つと仮定して、$n+1$ の場合を導出する。

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k\left(k+1\right)^2 &= \sum_{k=1}^{n} k\left(k+1\right)^2 + \left(n+1\right)\left(n+2\right)^2 \\ &= \frac{1}{12} n\left(n+1\right)\left(n+2\right)\left(3n+5\right) + \left(n+1\right)\left(n+2\right)^2 \\ &= \frac{1}{12}\left(n+1\right)\left(n+2\right)\left[n\left(3n+5\right) + 12\left(n+2\right)\right] \\ &= \frac{1}{12}\left(n+1\right)\left(n+2\right)\left(3n^2+17n+24\right) \\ &= \frac{1}{12}\left(n+1\right)\left(n+2\right)\left(n+3\right)\left(3n+8\right) \\ &= \frac{1}{12}\left(n+1\right)\left(n+2\right)\left(n+3\right)\left(3(n+1)+5\right) \end{aligned}$$

   これは、式 (1.1) の $n+1$ の場合である。

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

課題 2　$m \in N \cup \{0\}$ に対する以下の公式を数学的帰納法により証明しなさい。ただし $n \in N$ である。

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{n+k}{n} = \binom{n+m+1}{n+1} \tag{1.2}$$

解答例

1. $m = 0$

$$\text{LHS} = \binom{n}{n} = 1$$
$$\text{RHS} = \binom{n+1}{n+1} = 1$$

2. ある m について式 (1.2) が正しいと仮定し、$m+1$ の場合を導出する。

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m+1} \binom{n+k}{n} &= \sum_{k=0}^{m} \binom{n+k}{n} + \binom{n+m+1}{n} \\ &= \binom{n+m+1}{n+1} + \binom{n+m+1}{n} \\ &= \binom{n+m+2}{n+1}\end{aligned}$$

ここで、二項係数の漸化式

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

を使用している。

課題 3　$n \in N$ に対する以下の公式 (de Moivre の公式) を数学的帰納法により証明しなさい。

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) \tag{1.3}$$

ここで、i は虚数単位 $i^2 = -1$ である。

解答例　$n = 1$ は自明である。ある n について式 (1.3) が成り立つと仮定して、$n+1$ の

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$
Euler の公式

場合を導出する。

$$
\begin{aligned}
(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^{n+1} &= (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^{n}(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) \\
&= (\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) \\
&= \cos(n\theta)\cos(\theta) - \sin(n\theta)\sin(\theta) \\
&\quad + i\cos(n\theta)\sin(\theta) + i\sin(n\theta)\cos(\theta) \\
&= \cos((n+1)\theta) + i\sin((n+1)\theta)
\end{aligned}
$$

これは、式 (1.3) の $n+1$ の場合である。ここで、以下に示す三角関数の加法定理を使っている。

$$
\begin{aligned}
\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \\
\cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta
\end{aligned}
$$

2 再帰的定義

課題 4 記号 $\Sigma = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}$ で構成する回文、つまり前から読んでも、後から読んでも同じになる文の集合 L を再帰的に定義しなさい。ただし、$\epsilon \in L$(ϵ は、長さゼロの文字列) とする。

解答例

1. $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \epsilon \in L$
2. $s \in L$ ならば、$\mathrm{a}s\mathrm{a} \in L$、$\mathrm{b}s\mathrm{b} \in L$

aaa, aba, aa
bab, bbb, bb

課題 5 二項係数は、$n \in N$、$1 \leq k \leq n-1$ として、以下のように再帰的に定義することができる。

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \tag{2.1}$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \tag{2.2}$$

このとき、実際に $\binom{4}{2}$ を求め、

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \tag{2.3}$$

と比較しなさい。

解答例 初めに、再帰的定義に従って値を求める。

$$
\begin{aligned}
\binom{4}{2} &= \binom{3}{1} + \binom{3}{2} \\
&= \binom{2}{0} + \binom{2}{1} + \binom{2}{1} + \binom{2}{2} \\
&= 2 + 2\binom{2}{1} = 2 + 2\left[\binom{1}{0} + \binom{1}{1}\right] \\
&= 6
\end{aligned}
$$

次に、式 (2.3) に従って、直接計算する。

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$$

二項係数を求める python コードを示す。

```python
def binomial(n:int, r:int) -> int:
    """
    二項係数

    Parameters
    ---------
    n, r: n>=r>=0である整数
    """
    if n < 0 or r < 0 or n < r:
        raise Exception('引数の値が正しくありません')
    if r == 0 or r == n:
        return 1
    return binomial(n-1, r-1) + binomial(n-1, r)

n = 4
k = 2
v = binomial(n,k)
m = f'C({n},{k})={v}'
print(m)
```

このコードは、以下の Github から取得できます。

https://github.com/discrete-math-saga/MathematicalInductionAndRecursiveDefinitions