Problem selekcji

T.H. Cormen, C.E. Leiserson, R.L. Rivest, C. Stein
Wprowadzenie do algorytmów, rozdział 9.3
Wydawnictwa Naukowo-Techniczne (2004)

Problem. (Selekcja)

Wejście: *Tablica A składająca się z $n \geq 1$ różnych liczb oraz liczba $k \geq 1$.*

Wyjście: *k-ty co do wielkości element tablicy A,
tzn. takie $a \in A$, że $|\{x \in A : x < a\}| = k - 1$.*

Idea algorytmu selekcji `SELECTION`$(A[1 \ldots n], k)$

(1) Jeśli $n \leq 140$, posortuj tablicę A i zwróć $A[k]$.

(2) W przeciwnym wypadku podziel tablicę A na $\lfloor \frac{n}{5} \rfloor$ grup $A_1, \ldots, A_{\lfloor \frac{n}{5} \rfloor}$ po 5 elementów oraz na co najwyżej jedną grupę $A_{\lceil \frac{n}{5} \rceil}$ o $(n \mod 5)$ elementach.

(3) Posortuj elementy grup $A_1, \ldots, A_{\lceil \frac{n}{5} \rceil}$ i wyznacz medianę m_i każdej z nich.

(4) Wywołaj rekurencyjnie procedurę `SELECTION`, aby wyznaczyć (dolną) medianę m zbioru $\{m_1, \ldots, m_{\lceil \frac{n}{5} \rceil}\}$.

(5) ...

$k = 17$: **szukamy 17-tego elementu x w następującej tablicy ($x = 62$):**

3 50 60 63 11 4 5 85 70 99 61 101 62 19 22 10 30 1 100 9 82 21 40 71 20 80 81 79

Idea algorytmu selekcji $\texttt{SELECTION}(A[1 \ldots n], k)$

(1) Jeśli $n \leq 140$, posortuj tablicę A i zwróć $A[k]$.

(2) W przeciwnym wypadku podziel tablicę A na $\lfloor \frac{n}{5} \rfloor$ grup $A_1, \ldots, A_{\lfloor \frac{n}{5} \rfloor}$ po 5 elementów oraz na co najwyżej jedną grupę $A_{\lceil \frac{n}{5} \rceil}$ o ($n \mod 5$) elementach.

(3) Posortuj elementy grup $A_1, \ldots, A_{\lceil \frac{n}{5} \rceil}$ i wyznacz medianę m_i każdej z nich.

(4) Wywołaj rekurencyjnie procedurę $\texttt{SELECTION}$, aby wyznaczyć (dolną) medianę m zbioru $\{m_1, \ldots, m_{\lceil \frac{n}{5} \rceil}\}$.

(5) ...

$k = 17$: szukamy 17-tego elementu x w następującej tablicy ($x = 62$):

3 50 60 63 11 4 5 85 70 99 61 101 62 19 22 10 30 1 100 9 82 21 40 71 20 80 81 79

$\|$ 3 50 60 63 11 $\|$ 4 5 85 70 99 $\|$ 61 101 62 19 22 $\|$ 10 30 1 100 9 $\|$ 82 21 40 71 20 $\|$ 80 81 79 $\|$

Idea algorytmu selekcji `SELECTION`$(A[1\ldots n], k)$

(1) Jeśli $n \leq 140$, posortuj tablicę A i zwróć $A[k]$.

(2) W przeciwnym wypadku podziel tablicę A na $\lfloor \frac{n}{5} \rfloor$ grup $A_1, \ldots, A_{\lfloor \frac{n}{5} \rfloor}$ po 5 elementów oraz na co najwyżej jedną grupę $A_{\lceil \frac{n}{5} \rceil}$ o $(n \mod 5)$ elementach.

(3) Posortuj elementy grup $A_1, \ldots, A_{\lceil \frac{n}{5} \rceil}$ i wyznacz medianę m_i każdej z nich.

(4) Wywołaj rekurencyjnie procedurę `SELECTION`, aby wyznaczyć (dolną) medianę m zbioru $\{m_1, \ldots, m_{\lceil \frac{n}{5} \rceil}\}$.

(5) ...

$k = 17$: **szukamy 17-tego elementu** x **w następującej tablicy** ($x = 62$):

3 50 60 63 11 4 5 85 70 99 61 101 62 19 22 10 30 1 100 9 82 21 40 71 20 80 81 79

‖ 3 50 60 63 11 ‖ 4 5 85 70 99 ‖ 61 101 62 19 22 ‖ 10 30 1 100 9 ‖ 82 21 40 71 20 ‖ 80 81 79 ‖

‖ 3 11 50 60 63 ‖ 4 5 70 85 99 ‖ 19 22 61 62 101 ‖ 1 9 10 30 100 ‖ 20 21 40 71 82 ‖ 79 80 81 ‖

Idea algorytmu selekcji `SELECTION`$(A[1 \ldots n], k)$

(1) Jeśli $n \leq 140$, posortuj tablicę A i zwróć $A[k]$.

(2) W przeciwnym wypadku podziel tablicę A na $\lfloor \frac{n}{5} \rfloor$ grup $A_1, \ldots, A_{\lfloor \frac{n}{5} \rfloor}$ po 5 elementów oraz na co najwyżej jedną grupę $A_{\lceil \frac{n}{5} \rceil}$ o $(n \mod 5)$ elementach.

(3) Posortuj elementy grup $A_1, \ldots, A_{\lceil \frac{n}{5} \rceil}$ i wyznacz medianę m_i każdej z nich.

(4) Wywołaj rekurencyjnie procedurę `SELECTION`, aby wyznaczyć (dolną) medianę m zbioru $\{m_1, \ldots, m_{\lceil \frac{n}{5} \rceil}\}$.

(5) ...

$k = 17$: **szukamy 17-tego elementu x w następującej tablicy** ($x = 62$):

3 50 60 63 11 4 5 85 70 99 61 101 62 19 22 10 30 1 100 9 82 21 40 71 20 80 81 79

$\|$ 3 50 60 63 11 $\|$ 4 5 85 70 99 $\|$ 61 101 62 19 22 $\|$ 10 30 1 100 9 $\|$ 82 21 40 71 20 $\|$ 80 81 79 $\|$

$\|$ 3 11 50 60 63 $\|$ 4 5 70 85 99 $\|$ 19 22 61 62 101 $\|$ 1 9 10 30 100 $\|$ 20 21 40 71 82 $\|$ 79 80 81 $\|$

50 70 61 10 40 80

Idea algorytmu selekcji `SELECTION`$(A[1 \ldots n], k)$

(1) Jeśli $n \leq 140$, posortuj tablicę A i zwróć $A[k]$.

(2) W przeciwnym wypadku podziel tablicę A na $\lfloor \frac{n}{5} \rfloor$ grup $A_1, \ldots, A_{\lfloor \frac{n}{5} \rfloor}$ po 5 elementów oraz na co najwyżej jedną grupę $A_{\lceil \frac{n}{5} \rceil}$ o $(n \mod 5)$ elementach.

(3) Posortuj elementy grup $A_1, \ldots, A_{\lceil \frac{n}{5} \rceil}$ i wyznacz medianę m_i każdej z nich.

(4) Wywołaj rekurencyjnie procedurę `SELECTION`, aby wyznaczyć (dolną) medianę m zbioru $\{m_1, \ldots, m_{\lceil \frac{n}{5} \rceil}\}$.

(5) ...

$k = 17$: szukamy 17-tego elementu x w następującej tablicy ($x = 62$):

$$3\ \ 50\ \ 60\ \ 63\ \ 11\ \ 4\ \ 5\ \ 85\ \ 70\ \ 99\ \ 61\ \ 101\ \ \color{blue}{62}\ \ 19\ \ 22\ \ 10\ \ 30\ \ 1\ \ 100\ \ 9\ \ 82\ \ 21\ \ 40\ \ 71\ \ 20\ \ 80\ \ 81\ \ 79$$

$$\|\,3\ \ 50\ \ 60\ \ 63\ \ 11\,\|\,4\ \ 5\ \ 85\ \ 70\ \ 99\,\|\,61\ \ 101\ \ 62\ \ 19\ \ 22\,\|\,10\ \ 30\ \ 1\ \ 100\ \ 9\,\|\,82\ \ 21\ \ 40\ \ 71\ \ 20\,\|\,80\ \ 81\ \ 79\,\|$$

$$\|\,3\ \ 11\ \ \color{red}{50}\ \ 60\ \ 63\,\|\,4\ \ 5\ \ \color{red}{70}\ \ 85\ \ 99\,\|\,19\ \ 22\ \ \color{red}{61}\ \ 62\ \ 101\,\|\,1\ \ 9\ \ \color{red}{10}\ \ 30\ \ 100\,\|\,20\ \ 21\ \ \color{red}{40}\ \ 71\ \ 82\,\|\,79\ \ \color{red}{80}\ \ 81\,\|$$

$$\color{red}{50}\ \ 70\ \ 61\ \ 10\ \ 40\ \ 80$$

$$3\ \ 11\ \ 4\ \ 5\ \ 19\ \ 22\ \ 10\ \ 30\ \ 1\ \ 9\ \ 21\ \ 40\ \ 20\,\|\,\color{red}{50}\,\|\,60\ \ 63\ \ 85\ \ 70\ \ 100\ \ 99\ \ 82\ \ 61\ \ 101\ \ 71\ \ 62\ \ 80\ \ 81\ \ 79$$

Idea algorytmu selekcji `SELECTION`$(A[1 \ldots n], k)$

(4) ...

(5) Podziel tablicę wejściową względem mediany median m tak, że wszystkie elementy podtablicy $A[1 \ldots i-1]$ są mniejsze od m, $A[i] = m$, a wszystkie elementy podtablicy $A[i+1 \ldots n]$ są większe od m.

(6) Jeśli $i = k$, zwróć m. W przeciwnym razie wywołaj rekurencyjnie procedurę `SELECTION`, aby wyznaczyć:

- k-ty najmniejszy element w podtablicy $A[1 \ldots i-1]$, jeśli $i > k$;
- $(k-i)$-ty najmniejszy element w podtablicy $A[i+1 \ldots n]$, jeśli $i < k$.

$k = 17$: **szukamy 17-tego elementu x w następującej tablicy** ($x = 62$):

3 50 60 63 11 4 5 85 70 99 61 101 62 19 22 10 30 1 100 9 82 21 40 71 20 80 81 79

$\|$ 3 50 60 63 11 $\|$ 4 5 85 70 99 $\|$ 61 101 62 19 22 $\|$ 10 30 1 100 9 $\|$ 82 21 40 71 20 $\|$ 80 81 79 $\|$

$\|$ 3 11 50 60 63 $\|$ 4 5 70 85 99 $\|$ 19 22 61 62 101 $\|$ 1 9 10 30 100 $\|$ 20 21 40 71 82 $\|$ 79 80 81 $\|$

50 70 61 10 40 80

3 11 4 5 19 22 10 30 1 9 21 40 20 $\|$ 50 $\|$ 60 63 85 70 100 99 82 61 101 71 62 80 81 79

$i = 14$, $k = 17 > 14$: **3-ci element w** $\|$ 60 63 85 70 100 99 82 61 101 71 62 80 81 79

Idea algorytmu selekcji `SELECTION`$(A[1 \ldots n], k)$

(4) …

(5) Podziel tablicę wejściową względem mediany median m tak, że wszystkie elementy podtablicy $A[1 \ldots i-1]$ są mniejsze od m, $A[i] = m$, a wszystkie elementy podtablicy $A[i+1 \ldots n]$ są większe od m.

(6) Jeśli $i = k$, zwróć m. W przeciwnym razie wywołaj rekurencyjnie procedurę `SELECTION`, aby wyznaczyć:

- k-ty najmniejszy element w podtablicy $A[1 \ldots i-1]$, jeśli $i > k$;
- $(k-i)$-ty najmniejszy element w podtablicy $A[i+1 \ldots n]$, jeśli $i < k$.

Złożoność czasowa algorytmu

- Krok 1. Sortowanie przez wstawianie tablicy A, gdy $|A| \leq 140$: $\Theta(1)$.
- Krok 2. Podział tablicy na grupy $A_1, \ldots, A_{\lceil \frac{n}{5} \rceil}$: $\Theta(n)$.
- Krok 3. Wyznaczenie mediany w każdej z grup (sortowanie): $\lceil \frac{n}{5} \rceil \cdot \Theta(1) = \Theta(n)$.
- Krok 4. Rekurencyjne wyznaczenie mediany m zbioru $\{m_1, \ldots, m_{\lceil \frac{n}{5} \rceil}\}$: $T(\lceil \frac{n}{5} \rceil)$.
- Krok 5. Podział tablicy A względem mediany median: $\Theta(n)$.

  ↳ Np. procedura `partition` używana przy sortowaniu szybkim: $\Theta(n)$.

$k = 17$: **szukamy 17-tego elementu** x **w następującej tablicy** $(x = 62)$**:**

3 50 60 63 11 4 5 85 70 99 61 101 62 19 22 10 30 1 100 9 82 21 40 71 20 80 81 79

‖ 3 50 60 63 11 ‖ 4 5 85 70 99 ‖ 61 101 62 19 22 ‖ 10 30 1 100 9 ‖ 82 21 40 71 20 ‖ 80 81 79 ‖

‖ 3 11 50 60 63 ‖ 4 5 70 85 99 ‖ 19 22 61 62 101 ‖ 1 9 10 30 100 ‖ 20 21 40 71 82 ‖ 79 80 81 ‖

50 70 61 10 40 80

3 11 4 5 19 22 10 30 1 9 21 40 20 ‖ 50 ‖ 60 63 85 70 100 99 82 61 101 71 62 80 81 79

$i = 14$, $k = 17 > 14$: **3-ci element w** ‖ 60 63 85 70 100 99 82 61 101 71 62 80 81 79

3 **50** 60 63 11 4 5 85 70 99 61 101 62 19 22 10 30 1 100 9 82 21 40 71 20 80 81 79

3 11 4 5 19 22 10 30 1 9 21 40 20 ‖ 50 ‖ 60 63 85 70 100 99 82 61 101 71 62 80 81 79

- Krok 6. Rekurencja dla podtablicy $A[1\ldots i-1]$ lub $A[i+1\ldots n]$: $T(\lfloor\frac{7n}{10}\rfloor+7)$.

  ↳ Liczba elementów w A większych od m wynosi przynajmniej $\lfloor\frac{3n}{10}\rfloor - 6$. Zatem rozmiar podtablicy $A[1\ldots i-1]$ wynosi co najwyżej $\lfloor\frac{7n}{10}\rfloor + 7$.

  ↳ Liczba elementów w A mniejszych od m wynosi przynajmniej $\lfloor\frac{3n}{10}\rfloor - 6$. Zatem rozmiar podtablicy $A[i+1\ldots n]$ wynosi co najwyżej $\lfloor\frac{7n}{10}\rfloor + 7$.

$\|$ 3 **50** 60 63 11 $\|$ 4 5 85 70 99 $\|$ 61 101 62 19 22 $\|$ 10 30 1 100 9 $\|$ 82 21 40 71 20 $\|$ 80 81 79 $\|$

podział na grupy 5-elementowe

3 11 4 5 19 22 10 30 1 9 21 40 20 $\|$ 50 $\|$ 60 63 85 70 100 99 82 61 101 71 62 80 81 79

- Krok 6. Rekurencja dla podtablicy $A[1 \ldots i-1]$ lub $A[i+1 \ldots n]$: $T(\lfloor \frac{7n}{10} \rfloor + 7)$.

  ↳ Liczba elementów w A większych od m wynosi przynajmniej $\lfloor \frac{3n}{10} \rfloor - 6$. Zatem rozmiar podtablicy $A[1 \ldots i-1]$ wynosi co najwyżej $\lfloor \frac{7n}{10} \rfloor + 7$.

  ↳ Liczba elementów w A mniejszych od m wynosi przynajmniej $\lfloor \frac{3n}{10} \rfloor - 6$. Zatem rozmiar podtablicy $A[i+1 \ldots n]$ wynosi co najwyżej $\lfloor \frac{7n}{10} \rfloor + 7$.

$\| 3 \;\; 11 \;\; \mathbf{50} \;\; 60 \;\; 63 \| 4 \;\; 5 \;\; 70 \;\; 85 \;\; 99 \| 19 \;\; 22 \;\; 61 \;\; 62 \;\; 101 \| 1 \;\; 9 \;\; 10 \;\; 30 \;\; 100 \| 20 \;\; 21 \;\; 40 \;\; 71 \;\; 82 \| 79 \;\; 80 \;\; 81 \|$

posortowane grupy 5-elementowe i ich mediany

$3 \;\; 11 \;\; 4 \;\; 5 \;\; 19 \;\; 22 \;\; 10 \;\; 30 \;\; 1 \;\; 9 \;\; 21 \;\; 40 \;\; 20 \| 50 \| 60 \;\; 63 \;\; 85 \;\; 70 \;\; 100 \;\; 99 \;\; 82 \;\; 61 \;\; 101 \;\; 71 \;\; 62 \;\; 80 \;\; 81 \;\; 79$

- Krok 6. Rekurencja dla podtablicy $A[1\dots i-1]$ lub $A[i+1\dots n]$: $T(\lfloor \frac{7n}{10} \rfloor + 7)$.
  - ↳ Liczba elementów w A większych od m wynosi przynajmniej $\lfloor \frac{3n}{10} \rfloor - 6$. Zatem rozmiar podtablicy $A[1\dots i-1]$ wynosi co najwyżej $\lfloor \frac{7n}{10} \rfloor + 7$.
  - ↳ Liczba elementów w A mniejszych od m wynosi przynajmniej $\lfloor \frac{3n}{10} \rfloor - 6$. Zatem rozmiar podtablicy $A[i+1\dots n]$ wynosi co najwyżej $\lfloor \frac{7n}{10} \rfloor + 7$.

$\| 3 \quad 11 \quad \mathbf{50} \quad 60 \quad 63 \| 4 \quad 5 \quad 70 \quad 85 \quad 99 \| 19 \quad 22 \quad 61 \quad 62 \quad 101 \| 1 \quad 9 \quad 10 \quad 30 \quad 100 \| 20 \quad 21 \quad 40 \quad 71 \quad 82 \| 79 \quad 80 \quad 81 \|$

posortowane grupy 5-elementowe i ich mediany

3	11	**50**	60	63
4	5	70	85	99
19	22	61	62	101
1	9	10	30	100
20	21	40	71	82
	79	80	81	

$3 \quad 11 \quad 4 \quad 5 \quad 19 \quad 22 \quad 10 \quad 30 \quad 1 \quad 9 \quad 21 \quad 40 \quad 20 \| 50 \| 60 \quad 63 \quad 85 \quad 70 \quad 100 \quad 99 \quad 82 \quad 61 \quad 101 \quad 71 \quad 62 \quad 80 \quad 81 \quad 79$

- Krok 6. Rekurencja dla podtablicy $A[1 \ldots i-1]$ lub $A[i+1 \ldots n]$: $T(\lfloor \frac{7n}{10} \rfloor + 7)$.

  ↳ Liczba elementów w A większych od m wynosi przynajmniej $\lfloor \frac{3n}{10} \rfloor - 6$. Zatem rozmiar podtablicy $A[1 \ldots i-1]$ wynosi co najwyżej $\lfloor \frac{7n}{10} \rfloor + 7$.

  ↳ Liczba elementów w A mniejszych od m wynosi przynajmniej $\lfloor \frac{3n}{10} \rfloor - 6$. Zatem rozmiar podtablicy $A[i+1 \ldots n]$ wynosi co najwyżej $\lfloor \frac{7n}{10} \rfloor + 7$.

‖ 3 11 **50** 60 63 ‖ 4 5 70 85 99 ‖ 19 22 61 62 101 ‖ 1 9 10 30 100 ‖ 20 21 40 71 82 ‖ 79 80 81 ‖

posortowane wiersze wzg. median

1	9	10	30	100
20	21	40	71	82
3	11	**50**	60	63
19	22	61	62	101
4	5	70	85	99
	79	80	81	

3 11 4 5 19 22 10 30 1 9 21 40 20 ‖ 50 ‖ 60 63 85 70 100 99 82 61 101 71 62 80 81 79

- Krok 6. Rekurencja dla podtablicy $A[1\ldots i-1]$ lub $A[i+1\ldots n]$: $T(\lfloor\frac{7n}{10}\rfloor+7)$.
  - ↳ Liczba elementów w A większych od m wynosi przynajmniej $\lfloor\frac{3n}{10}\rfloor-6$. Zatem rozmiar podtablicy $A[1\ldots i-1]$ wynosi co najwyżej $\lfloor\frac{7n}{10}\rfloor+7$.
  - ↳ Liczba elementów w A mniejszych od m wynosi przynajmniej $\lfloor\frac{3n}{10}\rfloor-6$. Zatem rozmiar podtablicy $A[i+1\ldots n]$ wynosi co najwyżej $\lfloor\frac{7n}{10}\rfloor+7$.

$\| 3 \quad 11 \quad \mathbf{50} \quad 60 \quad 63 \| 4 \quad 5 \quad 70 \quad 85 \quad 99 \| 19 \quad 22 \quad 61 \quad 62 \quad 101 \| 1 \quad 9 \quad 10 \quad 30 \quad 100 \| 20 \quad 21 \quad 40 \quad 71 \quad 82 \| 79 \quad 80 \quad 81 \|$

1	9	10	30	100
20	21	40	71	82
3	11	**50**	60	63
19	22	61	62	101
4	5	70	85	99
	79	80	81	

co najmniej $(\lceil \frac{1}{2} \cdot \lceil \frac{n}{5} \rceil \rceil - 2)$ wierszy

> 50

co najmniej $3 \cdot (\lceil \frac{1}{2} \cdot \lceil \frac{n}{5} \rceil \rceil - 2)$ elementów

$3 \quad 11 \quad 4 \quad 5 \quad 19 \quad 22 \quad 10 \quad 30 \quad 1 \quad 9 \quad 21 \quad 40 \quad 20 \| 50 \| 60 \quad 63 \quad 85 \quad 70 \quad 100 \quad 99 \quad 82 \quad 61 \quad 101 \quad 71 \quad 62 \quad 80 \quad 81 \quad 79$

- Krok 6. Rekurencja dla podtablicy $A[1 \ldots i-1]$ lub $A[i+1 \ldots n]$: $T(\lfloor \frac{7n}{10} \rfloor + 7)$.
  - ↳ Liczba elementów w A większych od m wynosi przynajmniej $\lfloor \frac{3n}{10} \rfloor - 6$. Zatem rozmiar podtablicy $A[1 \ldots i-1]$ wynosi co najwyżej $\lfloor \frac{7n}{10} \rfloor + 7$.
  - ↳ Liczba elementów w A mniejszych od m wynosi przynajmniej $\lfloor \frac{3n}{10} \rfloor - 6$. Zatem rozmiar podtablicy $A[i+1 \ldots n]$ wynosi co najwyżej $\lfloor \frac{7n}{10} \rfloor + 7$.

$\| 3 \;\; 11 \;\; \mathbf{50} \;\; 60 \;\; 63 \| 4 \;\; 5 \;\; 70 \;\; 85 \;\; 99 \| 19 \;\; 22 \;\; 61 \;\; 62 \;\; 101 \| 1 \;\; 9 \;\; 10 \;\; 30 \;\; 100 \| 20 \;\; 21 \;\; 40 \;\; 71 \;\; 82 \| 79 \;\; 80 \;\; 81 \|$

$3 \cdot (\lceil \frac{1}{2} \cdot \lceil \frac{n}{5} \rceil \rceil - 2) \geq \lfloor \frac{3n}{10} \rfloor - 6$

$\lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$

co najwyżej $(\lfloor \frac{7n}{10} \rfloor + 7)$ elementów ≤ 50

1	9	10	30	100
20	21	40	71	82
3	11	**50**	60	63
19	22	61	62	101
4	5	70	85	99
	79	80	81	

co najmniej $(\lceil \frac{1}{2} \cdot \lceil \frac{n}{5} \rceil \rceil - 2)$ wierszy

> 50

co najmniej $3 \cdot (\lceil \frac{1}{2} \cdot \lceil \frac{n}{5} \rceil \rceil - 2)$ elementów

$3 \;\; 11 \;\; 4 \;\; 5 \;\; 19 \;\; 22 \;\; 10 \;\; 30 \;\; 1 \;\; 9 \;\; 21 \;\; 40 \;\; 20 \| 50 \| 60 \;\; 63 \;\; 85 \;\; 70 \;\; 100 \;\; 99 \;\; 82 \;\; 61 \;\; 101 \;\; 71 \;\; 62 \;\; 80 \;\; 81 \;\; 79$

- Krok 6. Rekurencja dla podtablicy $A[1 \ldots i-1]$ lub $A[i+1 \ldots n]$: $T(\lfloor \frac{7n}{10} \rfloor + 7)$.
  - ↳ Liczba elementów w A większych od m wynosi przynajmniej $\lfloor \frac{3n}{10} \rfloor - 6$. Zatem rozmiar podtablicy $A[1 \ldots i-1]$ wynosi co najwyżej $\lfloor \frac{7n}{10} \rfloor + 7$.
  - ↳ Liczba elementów w A mniejszych od m wynosi przynajmniej $\lfloor \frac{3n}{10} \rfloor - 6$. Zatem rozmiar podtablicy $A[i+1 \ldots n]$ wynosi co najwyżej $\lfloor \frac{7n}{10} \rfloor + 7$.

$\| 3 \ \ 11 \ \ \mathbf{50} \ \ 60 \ \ 63 \,\|\, 4 \ \ 5 \ \ 70 \ \ 85 \ \ 99 \,\|\, 19 \ \ 22 \ \ 61 \ \ 62 \ \ 101 \,\|\, 1 \ \ 9 \ \ 10 \ \ 30 \ \ 100 \,\|\, 20 \ \ 21 \ \ 40 \ \ 71 \ \ 82 \,\|\, 79 \ \ 80 \ \ 81 \,\|$

co najmniej $(\lceil \frac{1}{2} \cdot \lceil \frac{n}{5} \rceil \rceil - 2)$ wierszy

< 50

1	9	10	30	100
20	21	40	71	82
3	11	**50**	60	63
19	22	61	62	101
4	5	70	85	99
	79	80	81	

co najmniej $3 \cdot (\lceil \frac{1}{2} \cdot \lceil \frac{n}{5} \rceil \rceil - 2)$ elementów

$3 \ \ 11 \ \ 4 \ \ 5 \ \ 19 \ \ 22 \ \ 10 \ \ 30 \ \ 1 \ \ 9 \ \ 21 \ \ 40 \ \ 20 \,\|\, 50 \,\|\, 60 \ \ 63 \ \ 85 \ \ 70 \ \ 100 \ \ 99 \ \ 82 \ \ 61 \ \ 101 \ \ 71 \ \ 62 \ \ 80 \ \ 81 \ \ 79$

- Krok 6. Rekurencja dla podtablicy $A[1 \ldots i-1]$ lub $A[i+1 \ldots n]$: $T(\lfloor \frac{7n}{10} \rfloor + 7)$.
  - ↳ Liczba elementów w A większych od m wynosi przynajmniej $\lfloor \frac{3n}{10} \rfloor - 6$. Zatem rozmiar podtablicy $A[1 \ldots i-1]$ wynosi co najwyżej $\lfloor \frac{7n}{10} \rfloor + 7$.
  - ↳ Liczba elementów w A mniejszych od m wynosi przynajmniej $\lfloor \frac{3n}{10} \rfloor - 6$. Zatem rozmiar podtablicy $A[i+1 \ldots n]$ wynosi co najwyżej $\lfloor \frac{7n}{10} \rfloor + 7$.

‖ 3 11 **50** 60 63 ‖ 4 5 70 85 99 ‖ 19 22 61 62 101 ‖ 1 9 10 30 100 ‖ 20 21 40 71 82 ‖ 79 80 81 ‖

co najmniej $(\lceil \frac{1}{2} \cdot \lceil \frac{n}{5} \rceil \rceil - 2)$ wierszy

< 50

co najmniej $3 \cdot (\lceil \frac{1}{2} \cdot \lceil \frac{n}{5} \rceil \rceil - 2)$ elementów

1	9	10	30	100
20	21	40	71	82
3	11	**50**	60	63
19	22	61	62	101
4	5	70	85	99
	79	80	81	

$$3 \cdot (\lceil \tfrac{1}{2} \cdot \lceil \tfrac{n}{5} \rceil \rceil - 2) \geq \lfloor \tfrac{3n}{10} \rfloor - 6$$

$$\lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$$

co najwyżej $(\lfloor \frac{7n}{10} \rfloor + 7)$ elementów ≥ 50

3 11 4 5 19 22 10 30 1 9 21 40 20 ‖ 50 ‖ 60 63 85 70 100 99 82 61 101 71 62 80 81 79

▶ Krok 6. Rekurencja dla podtablicy $A[1 \ldots i-1]$ lub $A[i+1 \ldots n]$: $T(\lfloor \frac{7n}{10} \rfloor + 7)$.

↳ Liczba elementów w A większych od m wynosi przynajmniej $\lfloor \frac{3n}{10} \rfloor - 6$. Zatem rozmiar podtablicy $A[1 \ldots i-1]$ wynosi co najwyżej $\lfloor \frac{7n}{10} \rfloor + 7$.

↳ Liczba elementów w A mniejszych od m wynosi przynajmniej $\lfloor \frac{3n}{10} \rfloor - 6$. Zatem rozmiar podtablicy $A[i+1 \ldots n]$ wynosi co najwyżej $\lfloor \frac{7n}{10} \rfloor + 7$.

Złożoność czasowa algorytmu

- Krok 1. Sortowanie przez wstawianie tablicy A, gdy $|A| \leq 140$: $\Theta(1)$.
- Krok 2. Podział tablicy na grupy $A_1, \ldots, A_{\lceil \frac{n}{5} \rceil}$: $\Theta(n)$.
- Krok 3. Wyznaczenie mediany w każdej z grup (sortowanie): $\lceil \frac{n}{5} \rceil \cdot \Theta(1) = \Theta(n)$.
- Krok 4. Rekurencyjne wyznaczenie mediany m zbioru $\{m_1, \ldots, m_{\lceil \frac{n}{5} \rceil}\}$: $T(\lceil \frac{n}{5} \rceil)$.
- Krok 5. Podział tablicy A względem mediany median: $\Theta(n)$.
- Krok 6. Rekurencja dla podtablicy $A[1 \ldots i-1]$ lub $A[i+1 \ldots n]$: $T(\lfloor \frac{7n}{10} \rfloor + 7)$.

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{dla } n \leq 140; \\ T(\lceil \frac{n}{5} \rceil) + T(\lfloor \frac{7n}{10} \rfloor + 7) + \Theta(n) & \text{w przeciwnym wypadku,} \end{cases}$$

Można wykazać, że rozwiązaniem powyższej zależności jest $T(n) = \Theta(n)$.

Twierdzenie 1. (Blum, Floyd, Pratt, Rivest, Tarjan 1973)
Problem selekcji można rozwiązać w czasie liniowym.