Ôn tập kiến thức toán

FIC - Ta Dang Khoa

Đại số tuyến tính

- Các khái niệm cơ bản:
    - Vector, Matrix, …
- Phép toán
    - Cộng
    - Nhân Vector - Vector, Matrix - Matrix, tích element-wise
    - Chuyển vị
    - Ma trận nghịch đảo

Đại số tuyến tính

Khái niệm cơ bản

- Scalar: là một số thực (EX: 1, 2, 1.1, -1, ...). Ký hiệu: $x \in \mathbb{R}$

- Vector: là một vector gồm n số thực. Thông thường vector được viết dưới dạng cột. Ký hiệu: $x \in \mathbb{R}^n$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Đại số tuyến tính
Khái niệm cơ bản

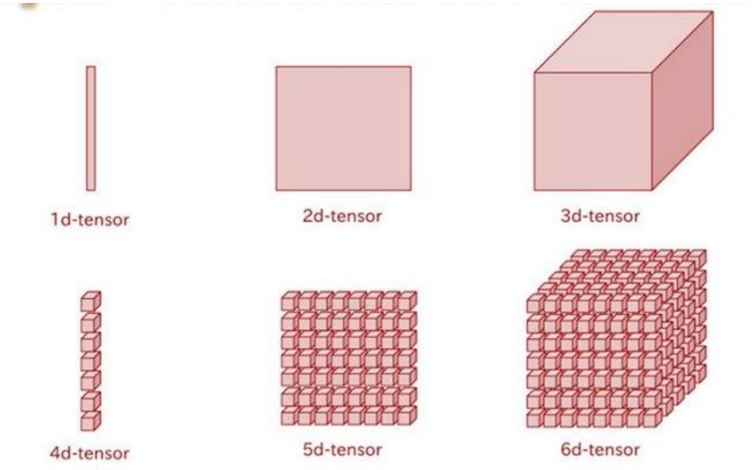
- Matrix: là một matrix gồm m dòng và n cột. Ký hiệu: $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & \dots & n \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ m \end{array} &
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\
a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Đại số tuyến tính

Khái niệm cơ bản

- Tensor: Ta có thể hiểu là tập hợp nhiều phần tử được bố trí vào một không gian nhiều hơn 2 chiều.



Đại số tuyến tính

Khái niệm cơ bản

- Norm: Cho biết chiều dài của vector đó (khá giống với trị tuyệt đối của số thực)

- Công thức L2 norm: $\|\boldsymbol{x}\|_2 := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$

- Công thức L1 norm: $\|\boldsymbol{x}\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$

- Có thể áp dụng công thức tính norm cho các ma trận A có kích thước bất kỳ

Đại số tuyến tính

Phép toán

- Chuyển vị (Transpose): Ký hiệu: $\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Đại số tuyến tính

Phép toán

- Phép cộng: ta có thể cộng các vector hoặc các ma trận với cùng kích thước

$$A+B = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1n} \\ B_{21} & A_{22} & \dots & B_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{m1} & B_{m2} & \dots & B_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} & \dots & A_{1n}+B_{1n} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} & \dots & A_{2n}+B_{21} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1}+B_{m1} & A_{m2}+B_{m2} & \dots & A_{mn}+B_{mn} \end{bmatrix}$$

Đại số tuyến tính
Phép toán

- Tích vô hướng giữa 2 vector (tích vô hướng / tích độ dài = cos)

$$x^\top y = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Chú ý: $x^\top y = y^\top x$

Đại số tuyến tính

Phép toán

- Tích ma trận: A x B: yêu cầu (matrix A có shape là m x n thì B có shape là n x p)

$$C = AB = \begin{bmatrix} — & a_1^\top & — \\ — & a_2^\top & — \\ & \vdots & \\ — & a_m^\top & — \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & | & & | \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_p \\ | & | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^\top b_1 & a_1^\top b_2 & \cdots & a_1^\top b_p \\ a_2^\top b_1 & a_2^\top b_2 & \cdots & a_2^\top b_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m^\top b_1 & a_m^\top b_2 & \cdots & a_2^\top b_p \end{bmatrix}$$

Đại số tuyến tính
Phép toán

- Tính chất của nhân ma trận:

    + Không có tính giao hoán AB != BA

    + Kết hợp: (AB)C = A(BC)

    + Phân phối: A(B + C) = AB + AC

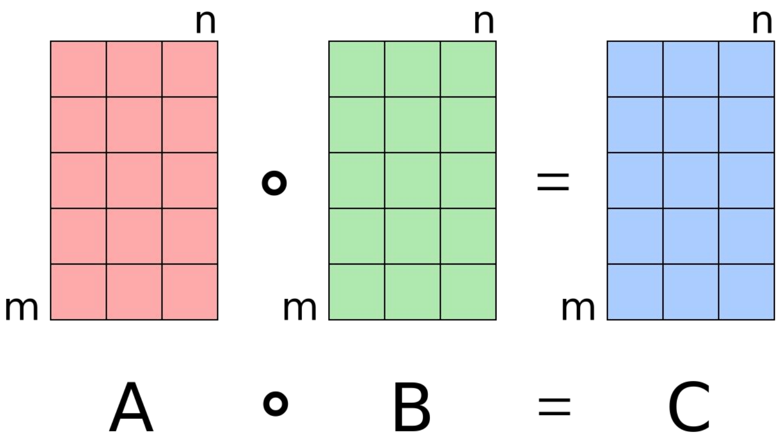
- Transpose:

$$(A^\top)^\top = A$$
$$(AB)^\top = B^\top A^\top$$
$$(A + B)^\top = A^\top + B^\top$$

Đại số tuyến tính

Phép toán

- Tích element-wise C = A o B



Đại số tuyến tính
Phép toán

- Ma trận đơn vị (Identity Matrix): ma trận vuông n x n với tất cả các phần tử đường chéo bằng 1, các phần tử còn lại bằng 0.

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$AI_n = A = I_m A$$

Đại số tuyến tính
Phép toán

- Ma trận nghịch đảo

$$A^{-1}A = I_n = AA^{-1}$$

Trong đó A là một ma trận vuông, không phải ma trận nào cũng có nghịch đảo

Giải tích

- Các công thức đạo hàm cơ bản

- Đạo hàm riêng

Giải tích

Các công thức đạo hàm

Đạo hàm: khái niệm quan trọng trong khảo sát hàm số, tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\log x)' = \frac{1}{x}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$(uv)' = u'v + v'u$$

$$[f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x)$$

Giải tích

Đạo hàm riêng

Đạo hàm riêng: một hàm nhiều biến f, muốn tính đạo hàm theo biến x ta coi các biến khác là hằng số. Xem ví dụ sau:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 3xy - x + e^x + e^y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 3y - 1 + e^x \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 3x + e^y$$

Xác suất thống kê

- Khái niệm cơ bản

- Xác suất có điều kiện

- Một số loại phân phối

Xác suất thống kê

Khái niệm cơ bản

- Không gian mẫu (Sample space): Là tập hợp bao gồm tất cả các kết quả có thể xảy ra của một phép thử. Ví dụ: Tung 1 viên xúc xắc có 6 mặt: {1, 2, 3, 4, 5, 6}

- Sự kiện (Event): Một tập con của không gian mẫu.

Ví dụ: Tính xác suất tung 1 viên xúc xắc thu được số chẵn.

Tập không gian mẫu {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Tập sự kiện {2, 4, 6}

Xác suất thống kê

Khái niệm cơ bản

- Tính chất:
  - Nếu $A \subseteq B$ thì $P(A) \leq P(B)$
  - Union bound: $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$
  - Nếu $A_1, \ldots, A_k$ là các sự kiện không giao nhau từng đôi một và $\cup_{i=1}^{k} A_i = \Omega$, thì $\Sigma_{i=1}^{k} P(A_i) = 1$

- Xác suất có điều kiện: Xác suất để điều kiện A khi đã có điều kiện B

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Xác suất thống kê
Tính chất xác suất có điều kiện

- Tính chất
    - $P(A|B) \geq 0$
    - $P(\Omega|B) = 1$
    - Nếu $A \cap C = \varnothing$ thì $P(A \cup C|B) = P(A|B) + P(C|B)$
- Công thức nhân xác suất:
    - $P(AB) = P(B)P(A|B) = P(A)P(B|A)$
    - $P(A_1A_2\ldots A_n) = P(A_1)\prod_{i=2}^{n} P(A_i|A_1\ldots A_{i-1})$
- Công thức Bayes:

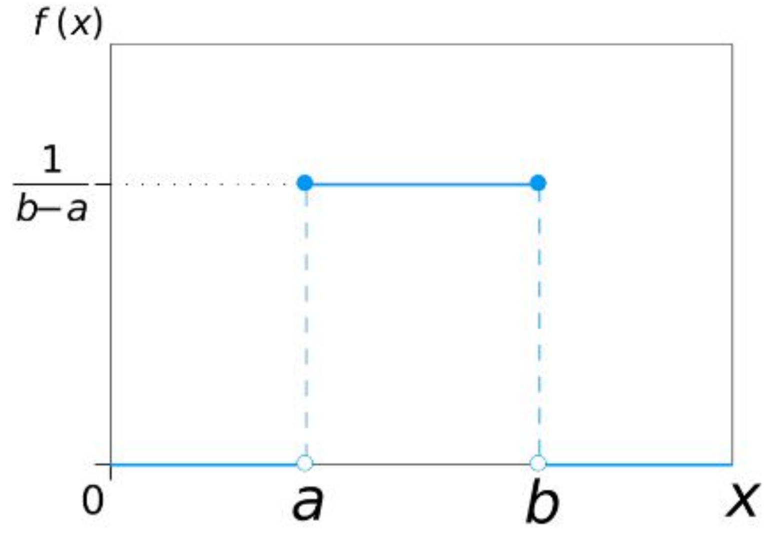
$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

Xác suất thống kê

Phân phối xác suất - Phân phối đều

- $X \sim Uniform\,(a, b)$ Xác suất như nhau tại mọi giá trị trong khoảng từ a đến b

$$f\,(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a, b] \\ 0 & x \notin [a, b] \end{cases}$$

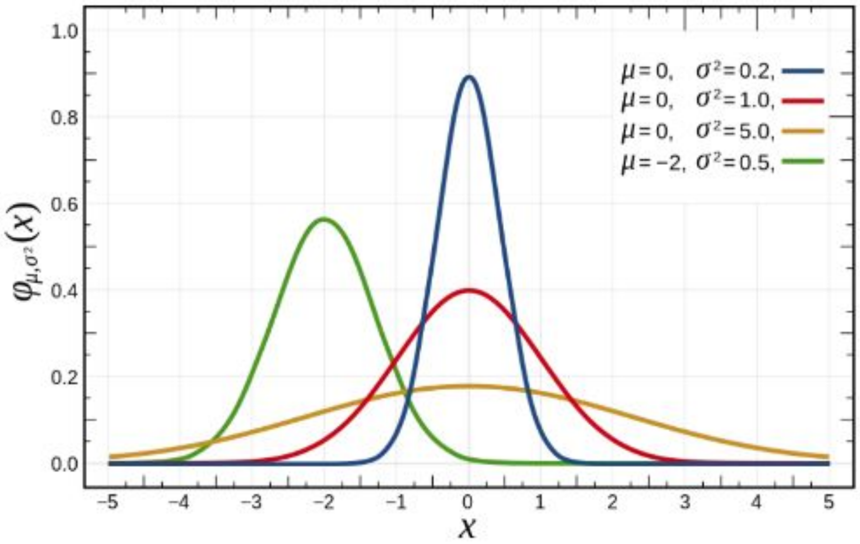


Xác suất thống kê

Phân phối xác suất - Phân phối chuẩn

- $X \sim Normal\left(\mu, \sigma^2\right)$Phân phối chuẩn/Gauss (Normal/Gaussian Distribution)

$$f\left(x\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



Bài tập

1. Thực hiện các phép tính sau:

(a) $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

(f) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(g) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Bài tập

2. Tính vector gradient của các hàm số sau:

(a) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + x + 1$ với $x, y \in \mathbb{R}$

(b) $f(z) = w^\top z$ với $w, z \in \mathbb{R}^n$

(c) $f(v) = v^\top v$ với $v \in \mathbb{R}^n$