

Modelska analiza I

Naloga 107

1. 12. 2022



7. naloga – Naključna števila in integracije z metodo Monte Carlo

1. Telesu, ki ga omejuje ploskev,

(1)

(2)

$$\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} + \sqrt{|z|} = 1,$$

določi maso ter vztrajnostni moment,

(3)

- če je gostota konstantna,
- če se gostota spreminja z razdaljo od središča kot $\rho = r^p$, kjer je r razdalja od središča telesa. Kakšen učinek ima vrednost parametra p ?

Oceni natančnost rezultatov. Opazuješ lahko tudi obnašanje ostalih momentov (težišče, povprečja sferičnih harmonikov).

(1)

2. V krogi se rojevajo žarki gama. Njihova povprečna prosta pot v snovi, iz katere je kroga, je enaka radiju krogla. Kolikšen delež fotonov uide iz krogle? Kako se verjetnost pobega spreminja z razmerjem povprečne proste poti in radija krogle?

(2)

3. Model nevtronskega reflektorja: tok nevronov vpada pravokotno na ploščo, v kateri se nevroni sipljejo in nič ne absorbirajo, pri čemer je njihova prosta pot enaka polovici debeline plošče. V poenostavljenem modelu privzamemo (1), da se sipljejo samo naprej in nazaj, in (2) z enako verjetnostjo. Kakšna je porazdelitev po številu sipanj? Kolikšna je prepustnost reflektorja? Oceni natančnost. Nekoliko bolj realen je model z izotropnim sipanjem. Z njim preveri, koliko so rezultati poenostavljenega modela uporabni.

(3)

Razišči še kotno porazdelitev odbitih in prepusčenih nevronov ter odvisnost prepustnosti od debeline plošče v modelu z izotropnim sipanjem.

(4)

Za generiranje slučajnih števil lahko uporabiš vgrajene generatorje izbranega programskega jezika (za *Python* v modulu `numpy.random`) in druge, bolj sofisticirane generatorje iz numeričnih knjižnic. Preizkusilahko tudi druge izvore (psevdo)naključnih števil. Sistemski vir slučajnih števil `/dev/(u)random`, je koristen za inicializacijo generatorja, kadar inicializacija s trenutnim sistemskim časom nima dovolj fine ločljivosti.

Kadar potrebujemo slučajna števila iz porazdelitve, za katero nimamo vgrajenega namenskega generatorja, jih izračunamo iz števil ξ_i , žrebanih po enakomerni porazdelitvi iz intervala $[0, 1]$. Števila iz porazdelitve $P(x)$ dobimo z žrebotom kumulativo iz enakomerne porazdelitve: $\int_{-\infty}^x P(t) dt = \xi$, $\xi \in [0, 1]$. Slučajna števila iz eksponentne porazdelitve $P(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ tako dobimo z uporabo zvezne $x = -\lambda^{-1} \ln(1 - \xi)$. V primeru, da kumulativa ni obrnljiva, se lahko poslužimo žreba z zavračanjem.

Enakomerno porazdeljene slučajne smeri v prostoru generiramo z žrebotom dveh enakomerno porazdeljenih števil ξ_1, ξ_2 iz intervala $[0, 1]$, iz katerih izračunamo $\vartheta = \arccos(2\xi_1 - 1)$ in $\varphi = 2\pi\xi_2$.

Neobvezna dodatna naloga – Test Kolmogorov-Smirnova

1. Datoteke `mod_tmxx_yyy.dat`¹ vsebujejo čase oddaje nalog iz Modelske analize (xx – letnik 10, 11, 13, 14; yyy – številka naloge) v formatu `d:hh:mm`, merjeno od četrtnika ob polnoči. Minus v podatkih pripada številki dneva – `-1:20:30` pomeni sredo ob pol devetih zvečer.

S testom Kolmogorov-Smirnova preveri, če so kumulativne porazdelitve za posamezne naloge med seboj statistično enake in če se letniki statistično razlikujejo med seboj. S kolikšno verjetnostjo lahko določimo iz katerega leta prihajajo podatki za izbrano nalogo? Če je potrebno, upoštevaj, da se pogojti za nekatere naloge razlikujejo (novoletni prazniki, zadnja naloga semestra, ...) in jih izloči iz statistike.

Nahajamo vsamec eno nalogo
nen. Iz ostalih naselium
letno povprečje. Načrt glede
v kater letnici pače?! Delenje
porazdelitev!

¹Zapakirano v `mod_times.tar.gz`

Naloge 1:

1. Masa in utrijnostni moment telesa
2. Vpliv $\delta(r)$
3. Tefide?
4. Primerjave z analitičnimi izračuni
5. Studija način MC optimizacije (Γ_u)?
6. Vpliv različnih velikosti za generacijo naličjnih številk.
7. Drugi rezultati telesa (krogla, krog?)
8. Primerjave z navedenimi numerično integrirajo (ustanovite od 10)

Modelska analiza 1
November 2022
7. naloga

Naključna števila in integracije z metodo Monte Carlo

Žiga Černe
Vpisna št.: 28191003

1 Uvod

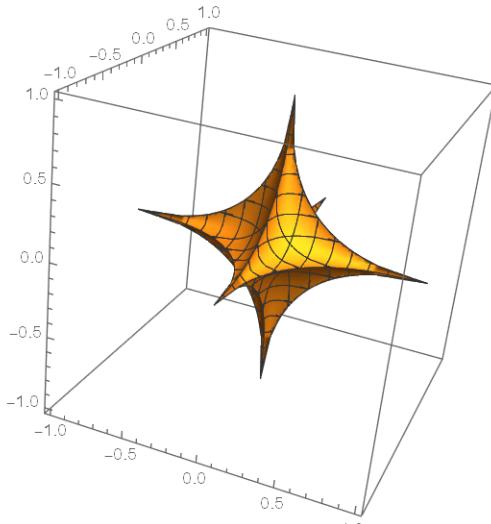
V tej nalogi sem raziskal uporabnosti metode Monte-Carlo. S pomočjo naključnega generatorja števil, sem do zelo velike natančnosti izračunal maso in vztrajnostni moment nekega žanimivega telesa. Izračunal sem tudi verjetnost za pobeg žarkov γ in pa odbojnost in prepustnost nevtronskega reflektorja. V zadnjem poglavju sem preizkusil še statistično metodo Kolmogorov-Smirnov.

2 Skrivnostno telo

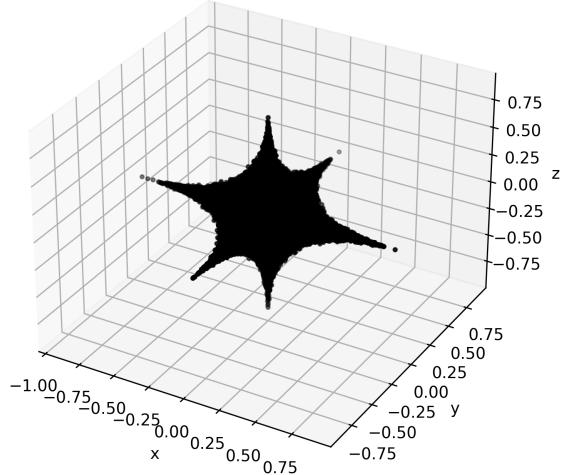
Telesu, ki ga opisuje enačba $\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} + \sqrt{|z|} = 1$, sem s pomočjo metode Monte Carlo izračunal maso ter vztrajnostni moment.

Najprej sem si pogledal kako dano telo izgleda. Pri tem mi je pomagal program Mathematica. Približno obliko objekta sem dobil tudi tako da sem v kocko okrog telesa naključno streljal točke in spremjal ali so pristale v telesu ali ne oz. ali zadostujejo enačbi

$$\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} + \sqrt{|z|} < 1. \quad (1)$$

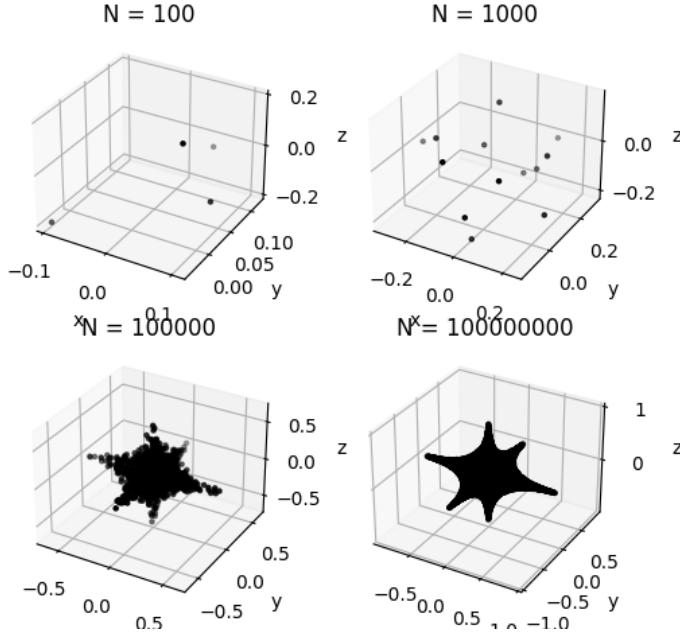


Slika 1: Točen rezultat iz Mathematice.



Slika 2: Prikaz z naključnim obstreljevanjem.

Iz slike je razvidno, da je objekt simetričen. Z večjim številom točk se resolucija objekta veča, kar je prikazano na sliki 3.



Slika 3: Slike objekta pri različnem številih točk.

2.1 Napake

Za napake se da izpeljati, da pri dovolj velikem N velja

$$\theta = \hat{\theta} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \quad (2)$$

kje je

$$\sigma = \sqrt{\hat{\theta}^2 - \hat{\theta}^2}, \quad (3)$$

$$\text{ter } \hat{\theta} = \frac{1}{N} \sum g(x_i), \quad \hat{\theta}^2 = \frac{1}{N} \sum g^2(x_i)$$

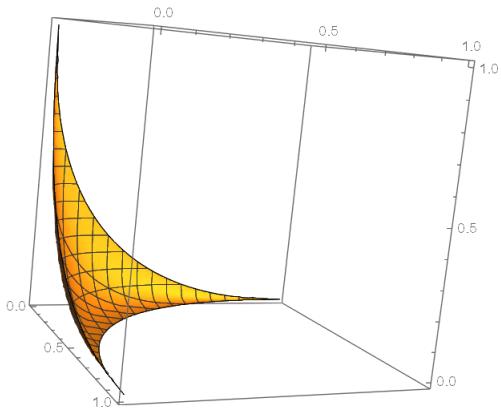
2.2 Masa

Celoten volumen objekta je najbrž mogoče izračunati tudi analitično, zagotovo pa se ga da izračunati tudi s pomočjo Wolfram matematike.

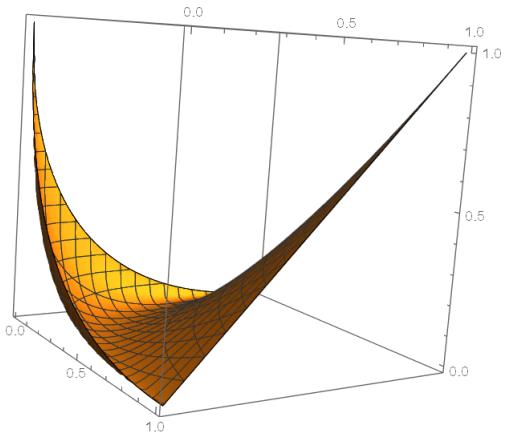
Ker je telo simetrično je dovolj, da izračunamo le maso ene osmine telesa, torej med koordinatami $x \in (0, 1)$, $y \in (0, 1)$, $z \in (0, 1)$. Ker bomo integrirali le po pozitivnih koordinatah, absolutnih vrednosti ne potrebujemo več. Problem nastane ko iz enačbe izrazimo z . Dobimo:

$$z = (1 - \sqrt{x} - \sqrt{y})^2, \quad (4)$$

kar je prikazano na grafu 5.



Slika 4: Osmina zvezde.



Slika 5: Pokvarjena osmina zvezde.

Integracija pod celotnim volumnom na desni nam bo dala napačen rezultat, zato sprememimo meje ene od spremenljivk, recimo x , iz $(0,1)$ v $(0, (1 - \sqrt{y})^2)$. Sprememba meje x koordinate nam območje integracije omeji le na želeni volumen na sliki 4. Integral se tako glasi

$$\int_0^1 dy \int_0^{(1-\sqrt{y})^2} (1 - \sqrt{x} - \sqrt{y})^2 dx \quad (5)$$

Mathematica mi je prijazno vrnila rezultat $\mathbf{m} = \frac{8}{90} = \mathbf{0.089}$.

Nato sem preizkusil še preprostejšo MC metodo. Maso sem izračunal po enačbi

$$m = \frac{V_k}{N} \sum_i \Delta_i \rho(r_i), \quad (6)$$

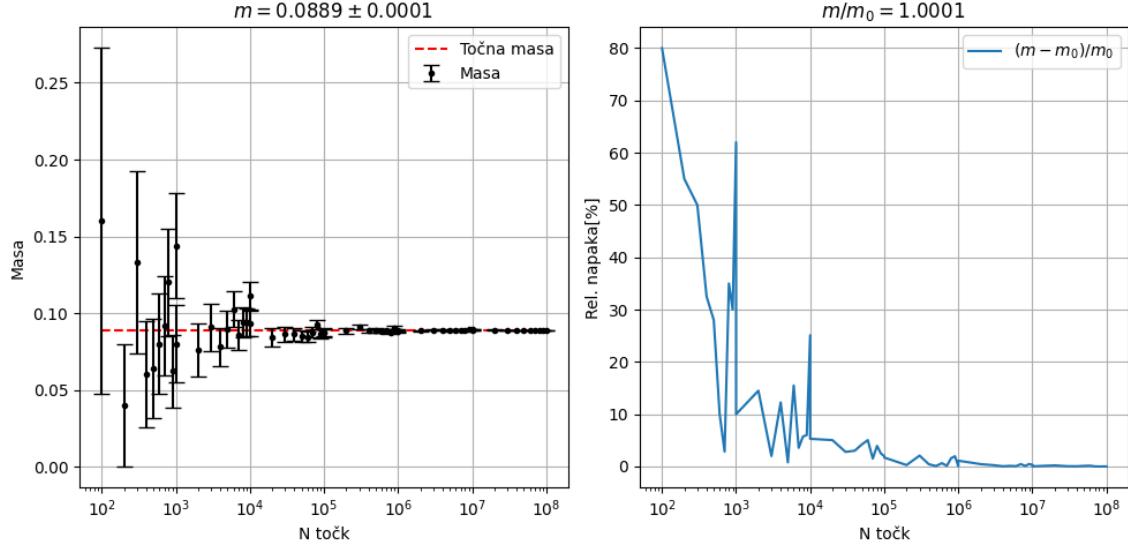
kjer je V_k masa celotne kocke, $\rho(r_i)$ gostota objekta v točki r_i , Δ_i je 0 ali 1 glede na to ali točka reši enačbo 1. Zaenkrat si poglejmo nekaj rezultatov s konstantno gostoto $\rho = 1$.

Pri konstantni gostoti se napako mase izračuna kot

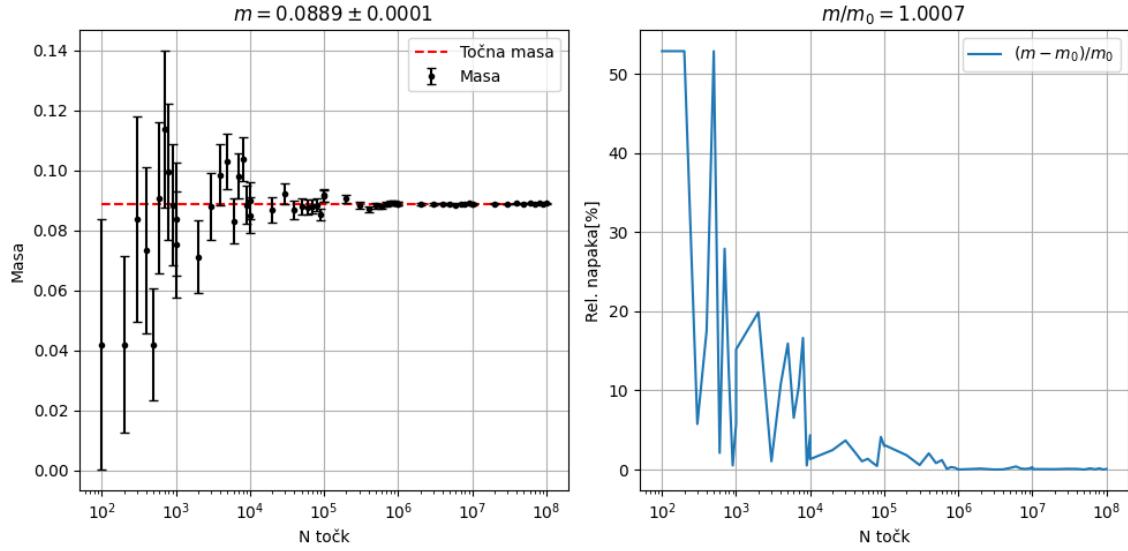
$$\sigma = m_k \sqrt{\frac{1}{N} \sum \Delta_i^2 - \left(\sum \Delta_i \right)^2} \quad (7)$$

kar se poenostavi v

$$\sigma = \frac{m_k}{N} \sqrt{n - \frac{n^2}{N}} \quad (8)$$

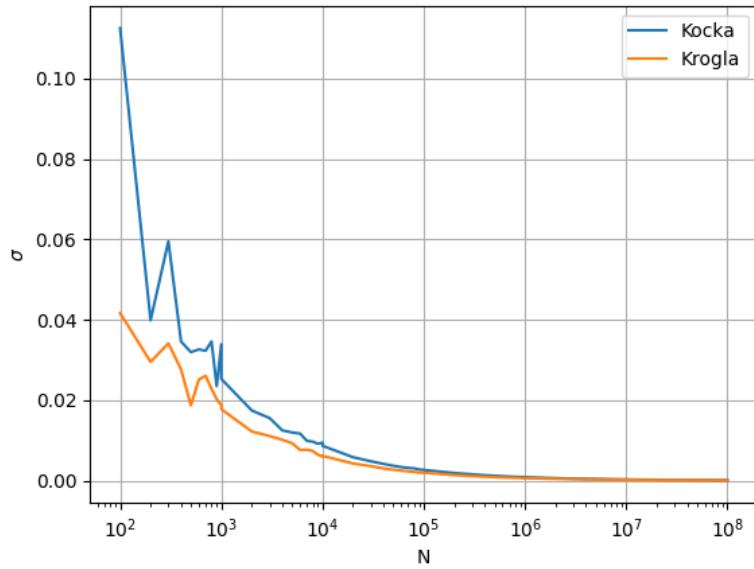


Slika 6: Masa in relativen odmik od prave vrednosti v odvisnosti od števila delcev. m/m_0 je razmerje med rešitvijo Monte-Carlo in točno rešitvijo.



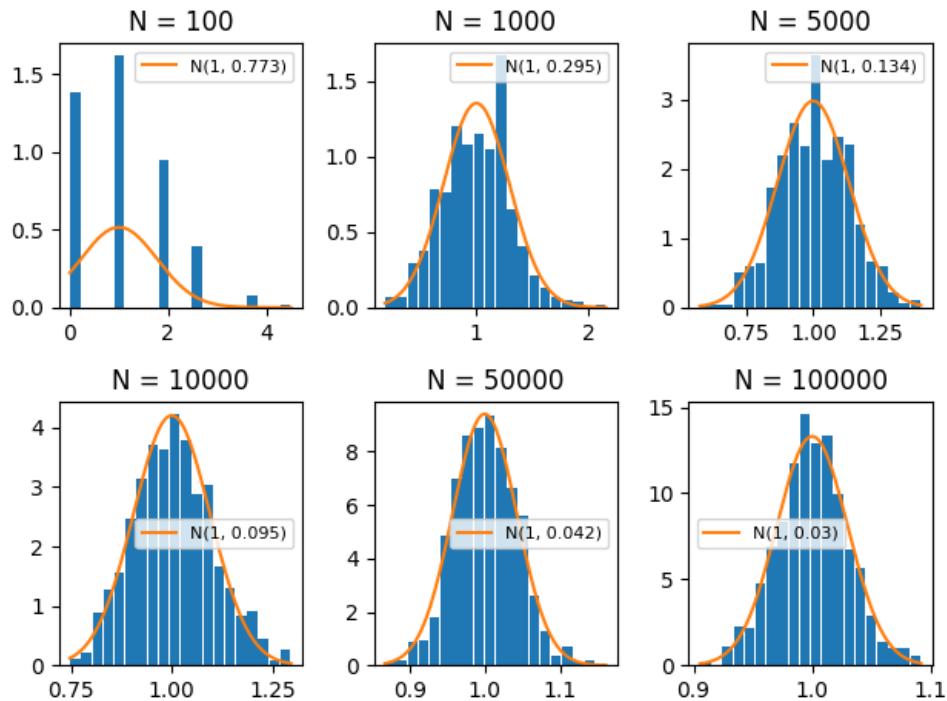
Slika 7: Poskus z krogelnim območjem

Preizkusil sem tudi zamenjavo kockastega območja s okroglim, saj ima manjši volumen. Točke so v sferičnih koordinatah podane s Φ, θ, r . Če želim enakomerno naključno porazdelitev v novih koordinatah, moram naključne koordinate računati kot $\Phi_i = 2\pi\xi_i$, $\theta_i = \arccos(2\xi_i - 1)$, $r_i = \sqrt[3]{\xi_i}$, kjer je ξ_i naključno število iz intervala (0,1). Zmanjšanje območja močno vpliva na velikost negotovosti σ , kar prikazuje graf 8



Slika 8: Primerjava negotovosti kockastega in kroglastega območja.

Pri različnih številih N sem 1000krat izračunal maso in normalizirano porazdelitev primerjal s gavsovsko porazdelitvijo. Za širino σ sem vzel povprečno vrednost napak mas.



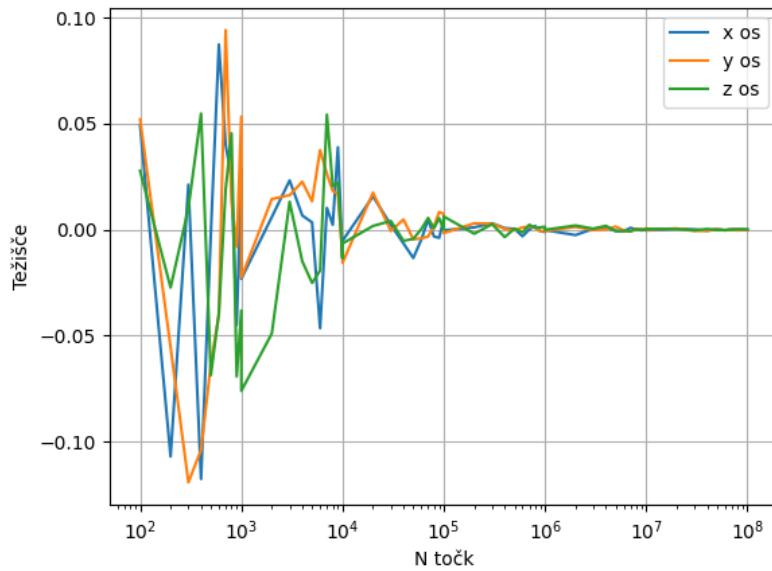
Slika 9: Normirana porazdelitev mas pri različnih številih točk.

Z večjim številom n je napaka vedno manjša. Porazdelitev se na videz vedno bolj ujema s Gaussovsko.

2.3 Težišče

Natančnost metode, lahko preverimo z izračunom težišča. Ker je objekt simetričen bi moralo biti težišče vseh treh osi enako nič. Težišče sem izračunal po enačbi

$$r_T = \frac{1}{\sum \Delta_i \rho(r_i)} \sum \Delta_i \rho(r_i) r_i \quad (9)$$



Slika 10: Težišče v odvisnosti od števila točk.

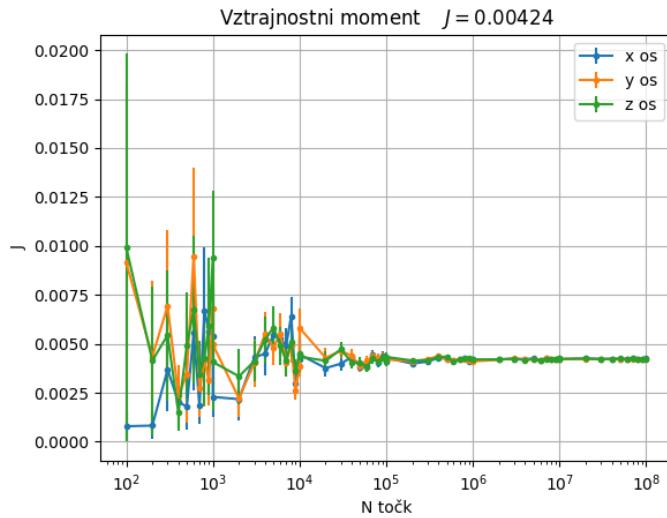
Po pričakovanjih se z večanjem števila N vsa tri težišča približujejo 0.

2.4 Vztrajnostni moment

Podobno kot maso lahko sedaj izračunam tudi vztrajnostni moment preko enačbe

$$J_z = \frac{m_k}{N} \sum_i \Delta_i r_i^2(x, y) \rho(r_i). \quad (10)$$

kjer je $r(x, y)^2$ je oddaljenost od osi z. Ker je objekt središčno simetričen velja $J_x = J_y = J_z$.

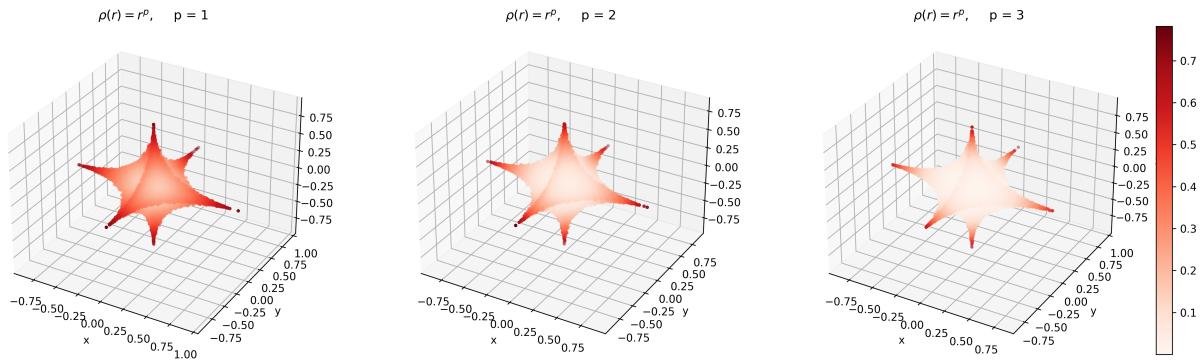


Slika 11: Vztrajnostni moment v odvisnosti od števila točk, izračunan z metodo MC.

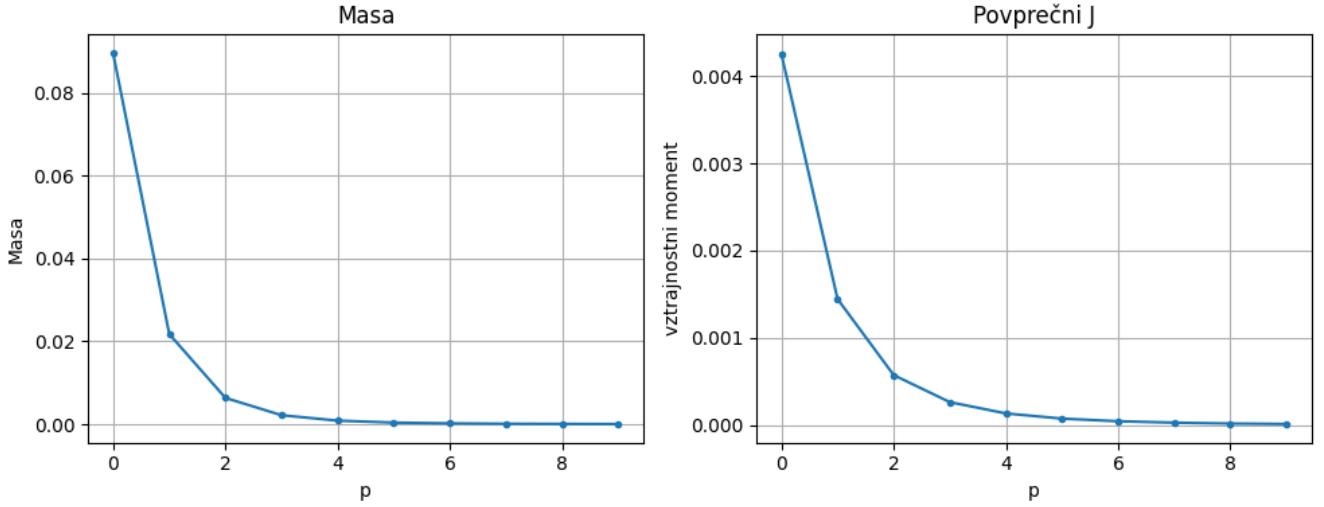
Podobno kot pri izračunu težišča se vztrajnostni momenti z večjim N približujejo končni vrednosti. Na koncu sem povprečil vse tri momente in dobil $J = 0.00423 \pm 6.6 \times 10^{-6}$.

2.5 Odvisnost gostote

Do zdaj smo upoštevali gostoto kot konstanto $\rho = 1$. Upoštevajmo sedaj radialno odvisnost gostote $\rho(r) = |r|^p$.



Z večjim p se vedno več mase nabira na robovih objekta.



Slika 12: Masa (levo) in vztrajnostni moment (desno) v odvisnosti od gostote.

3 Gamma pobeg

V tej nalogi sem sem proučil pobeg žarkov gamma iz krogle z radijem R. Povprečna prosta pot žarka gama opisuje porazdelitev:

$$f(s) = \frac{1}{\lambda} e^{-s/\lambda} \quad (11)$$

Po enačbi 11 pot ki jo opravi nek gamma žarek naključno enakomerno izžrebamo z enačbo

$$s = -\lambda \log(1 - \xi) \quad (12)$$

Točko na sferi opišemo z radijem $r = \sqrt[3]{\xi}$ in kotom $\cos \theta = 2\xi - 1$.

$$d = -r \cos \theta + R \sqrt{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 (1 - \cos^2 \theta)} \quad (13)$$

Če je prosta pot delca večja od oddaljenosti od roba krogla, je delec ušel iz krogle $s > d$.

Sedaj se lahko vprašamo kolikšen delež fotonov uide iz krogle, kar sem ponovno izračunal s pomočjo metode MC.

MODELSKA ANALIZA I

7. naloga – Naključna števila in integracije z metodo Monte Carlo

Ema Mlinar, vpisna št.: 28222071

23. november 2022

1 Masa telesa

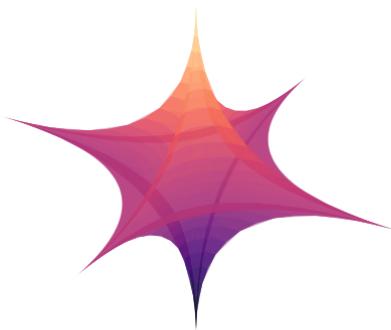
Cilj naloge je določiti maso telesa, ki je omejen s ploskvijo:

$$\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} + \sqrt{|z|} = 1 \quad (1)$$

To je v bistvu enotska krogla v t. i. p-normi, ki jo definiramo kot:

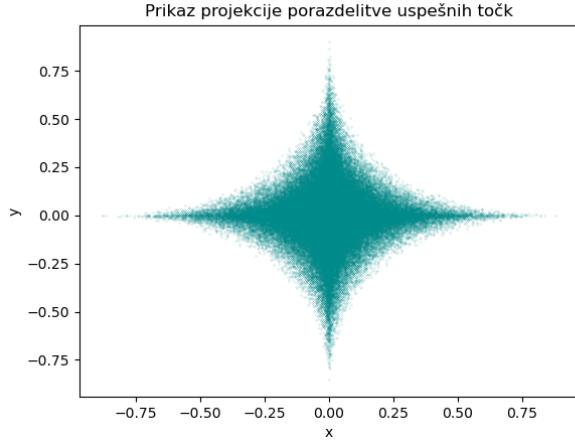
$$\|x\|_p = (\|x_1\|^p + \|x_2\|^p + \dots + \|x_n\|^p)^{1/p} \quad (2)$$

kjer je n število dimenzij, p pa je v našem primeru $\frac{1}{2}$. Naš primer telesa je prikazan na sliki 1



Slika 1: Prikaz 3D telesa s $p = 1/2$ iz navodila naloge, kateremu določamo maso.

Maso bomo določali s pomočjo metode Monte Carlo, se pravi naključno žrebali točke v kvadratu $[-1, 1]^3$ in gledali, če so znotraj telesa. Primere uspešnih točk projiciranih na ravnilo x-y prikazuje slika 2



Slika 2: Uspešno zadete točke projicirane na ravnino x-y.

1.1 Enakomerna gostota

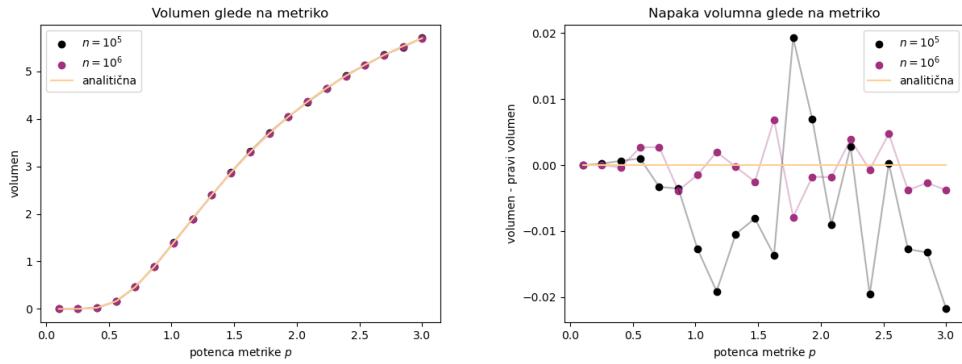
Najprej obravnavajmo primer, ko imamo enakomerno gostoto povsod po $[-1, 1]^3$. Pri 10^8 poskusih dobimo vrednost za maso 0.08889 ± 0.00003 (kjer smo predpostavili gostoto 1). Na internetu sem našla tudi analitično vrednost volumna za telesa z zgoraj omenjeno normo:

$$V = 2^n \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{p}\right)^n}{\Gamma\left(1 + \frac{n}{p}\right)} \quad (3)$$

kjer je Γ znana Gama-funkcija, za katero velja $\Gamma(m) = (m-1)!$, če je m celo število. Tako dobimo za volumen našega telesa $\frac{4}{25} \approx 0.088889$, kar se ujema z vrednostjo, ki jo dobimo pri numerični integraciji. Poglejmo še ujemanje za druge norme p in druge dimenzije n .

1.1.1 Različne norme

Slika 3 prikazuje maso telesa za različne norme.



Slika 3: Odvisnost mase od potence p ter razlika z analitično vrednostjo.

Vidimo, da (kot pričakovano) masa narašča z velikostjo p in se približuje vrednosti 0, ko gremo $p \rightarrow 0$ in vrednosti $8 = 2^3 = 2^n$, ko gremo $p \rightarrow \infty$. Pokažimo to analitično. Pri limiti $p \rightarrow 0$ si pomagamo

Stirlingovo formulo $\lim_{y \rightarrow 0} \Gamma\left(1 + \frac{1}{y}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \Gamma(1 + x) = \sqrt{2\pi x} \left(\frac{x}{e}\right)^x$:

$$\lim_{p \rightarrow 0} V = \lim_{p \rightarrow 0} 2^n \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{p}\right)^n}{\Gamma\left(1 + \frac{n}{p}\right)} = \quad (4)$$

$$= 2^n \cdot \frac{\sqrt{2\pi \frac{1}{p}}^n \left(\frac{1}{pe}\right)^{n/p}}{\sqrt{2\pi \frac{n}{p}} \left(\frac{n}{pe}\right)^{n/p}} = \quad (5)$$

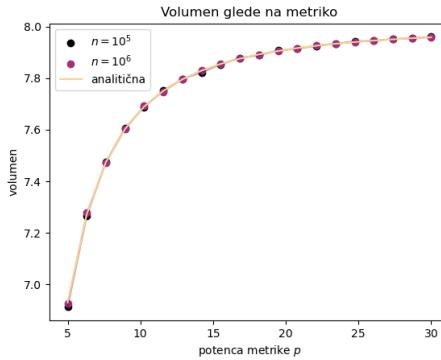
$$= C(n) \cdot \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p^{1/2 \cdot (n-1)} n^{n/p}} = \quad (6)$$

$$= C(n) \cdot \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p^{1/2 \cdot (n-1)}} = 0 \quad (7)$$

Podobno pokažemo še za $p \rightarrow \infty$:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} V = \lim_{p \rightarrow \infty} 2^n \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{p}\right)^n}{\Gamma\left(1 + \frac{n}{p}\right)} = 2^n \quad (8)$$

To sta točno vrednosti, ki ju dobimo tudi numerično, glej sliko 4.



Slika 4: Odvisnost mase od potence p ter razlika z analitično vrednostjo, prikaz obej limit.

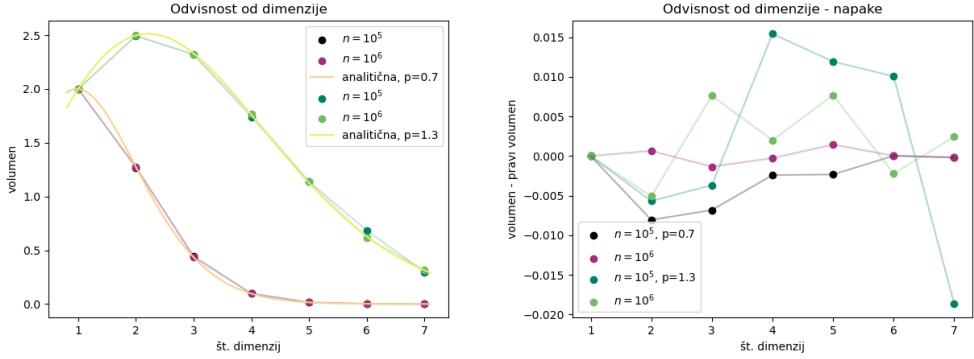
1.1.2 Različne dimenzije

Poglejmo sedaj še obnašanje za različne dimenzije. Graf za dva različna p prikazuje slika 5.

Opazimo, da vrednost volumna štarta pri 0, nato doseže pri nekem n vrh in nato spet počasi pada proti 0. Ta vrh je odvisen od vrednosti p . Preverimo najprej limiti analitično:

$$\lim_{n \rightarrow 0} V = \lim_{n \rightarrow 0} 2^n \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{p}\right)^n}{\Gamma\left(1 + \frac{n}{p}\right)} = \quad (9)$$

$$= \lim_{n \rightarrow 0} (2^n) \cdot \frac{1}{1} = 0 \quad (10)$$



Slika 5: Odvisnost mase od dimenzijskega prostora n ter razlika z analitično vrednostjo.

Preverimo še za $n \rightarrow \infty$, spet uporabimo Stirlingovo formulo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{p}\right)^n}{\Gamma\left(1 + \frac{n}{p}\right)} = \quad (11)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (2^n \cdot C^n) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{n}{p}}} \left(\frac{ep}{n}\right)^{n/p} = \quad (12)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{n}{p}}} \left(\frac{2^p C^p e p}{n}\right)^{n/p} = 0 \quad (13)$$

kjer smo pri zadnjem koraku uporabili, da $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x^n}{n^n}\right)^n = 0$.

Poščimo sedaj pri kateri dimenzijski volumen doseže maksimum. Zapišimo še $2^n \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{p}\right)^n = A(p)^n$. Torej lahko zapišemo:

$$\frac{dV}{dn} = \frac{A(p)^n \ln(A(p)) \cdot \Gamma\left(1 + \frac{n}{p}\right) - A(p)^n \cdot \Gamma'\left(1 + \frac{n}{p}\right) \frac{1}{p}}{\left(\Gamma\left(1 + \frac{n}{p}\right)\right)^2} = 0 \quad (14)$$

$$\implies n_{max} = \psi^{-1}(p \ln A(p)) \quad (15)$$

kjer je ψ^{-1} inverz poligama funkcije. Ta n_{max} , pri katerem je volumen maksimalen, je torej odvisen od parametra p . Če vstavimo v ta izraz prave vrednosti, dobimo točno vrhova na sliki 5.

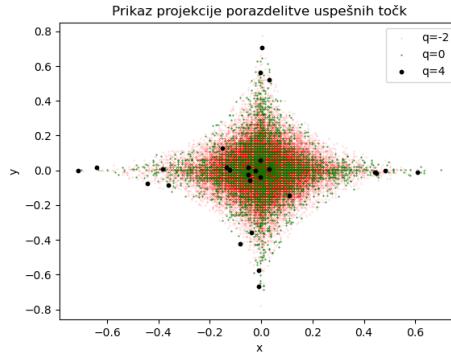
1.2 Neenakomerna gostota

Prej smo predpostavili, da je gostota enakomerna, sedaj pa obravnavajmo gostoto odvisno od oddaljenosti od koordinatnega izhodišča:

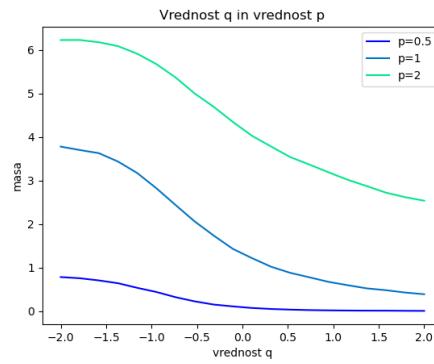
$$\rho = r^q \quad (16)$$

kjer je q neka potenca. Poglejmo najprej, kako ta razporeditev gostote izgleda. Na sliki 6 je so prikazani uspešni zadetki v naše telo, projicirano na ravnilo x-y za različne q . Tu smo za vse q uporabili enako število poskusov.

Opazimo, da je pri večjih q zadetkov precej manj, hkrati pa so bolj skoncentrirani v središču projekcije (torej v zgornjem in spodnjem kraku zvezde) ter v stranskih krakih zvezde. Pri manjših q (negativnih) pa je velika zgoščina na sredini telesa ter zelo veliko zadetkov. Poglejmo si sedaj odvisnost mase od q za različne vrednosti p , glej sliko 7.



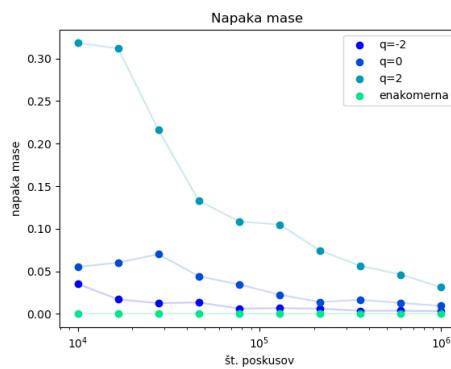
Slika 6: Projekcija uspešnih zadetkov v naše telo za majhno število poskusov (a za vsak q enako).



Slika 7: Prikaz odvisnosti mase telesa za neenakomerno gostoto (ki je odvisna le od radija) za različne potence ter različne norme p .

Vidimo, da (kot pričakovano) masa z večanjem potence pada. Vidimo pa tudi, da je največja odvisnost od q med vrednostmi $q = -1$ in $q = 0.5$. Seveda pa se masa še bolj močno kot s q spreminja s p kot smo nakazali že v prejšnjem razdelku.

Preverimo še napake meritev mase, ki jih dobimo tako, da program poženemo parkrat ter izračunamo standardno deviacijo. Dobimo odvisnost od števila poskusov na sliki 8.

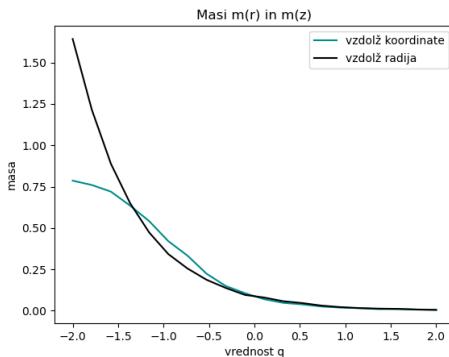


Slika 8: Prikaz odvisnosti napake mase telesa od števila poskusov za različne vrednosti q . Prikazana je tudi vrednost za izračun enakomerne gostote iz prejšnjega razdelka (ki ustreza $q = 0$).

Vidimo, da so napake za večje q precej večje (kar je posledica tega ž, da precej manj poskusov zadane telo). Vidimo pa tudi, da je za $q = 0$ precej bolj optimalna metoda iz prejšnjega razdelka.

Poglejmo si sedaj še primerjavo med odvisnostjo gostote od radija ter odvisnostjo gostote od neke ko-

ordinate (recimo z), torej $\rho = z^q$. Primerjava med masama za različni gostotni odvisnosti je prikazana na sliki 9

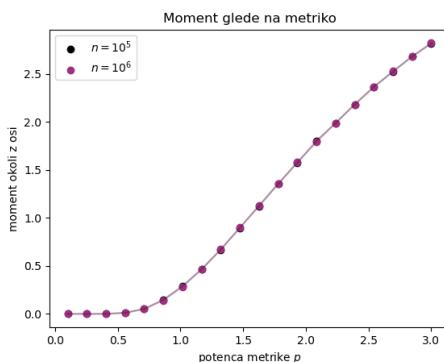


Slika 9: Primerjava med gostotnima odvisnostima $\rho = z^q$ in $\rho = r^q$ za različne vrednosti eksponenta q . Za p sem vzela vrednost $p = 0.5$.

Vidimo, da se pri negativnih q volumen med različnimi odvisnostmi precej razlikuje, tista, ki je odvisna od radija narašča precej hitreje. Vidimo pa tudi, da se vrednosti pri večjih (pozitivnih) vrednostih q zelo lepo ujemata.

1.3 Vztrajnostni moment okoli z osi

S tem, da vemo razporeditev mase po telesu (in to, koliko mase je v telesu) pa lahko določimo tudi vztrajnostni moment. Pri 10^7 poskusih dobimo vrednost za vztrajnostni moment okoli z osi za enakomerno gostoto $J = 0.00424 \pm 0.00002$. Poglejmo si sedaj kako vpliva potenca norme p na ta vztrajnostni moment, glej sliko 10.

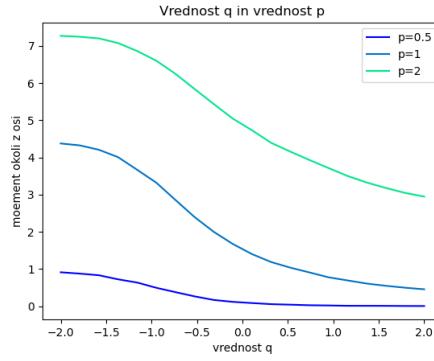


Slika 10: Prikaz odvisnosti vztrajnostnega momenta okoli z osi od potence norme p za enakomerno gostoto.

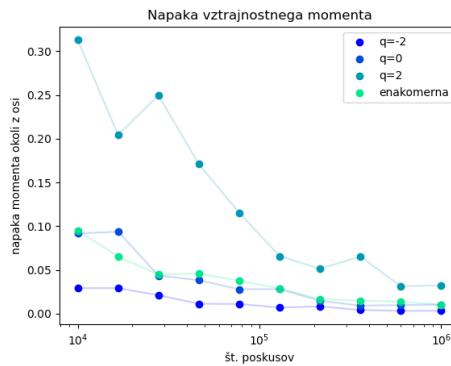
Opazimo, da dobimo zelo podobno kot za maso. Sedaj smo obravnavali le vztrajnostni moment pri konstantni gostoti. Poglejmo si še, kako je vztrajnostni moment povezan z eksponentom q pri primerih z neenakomerno gostoto oz. odvisnostjo gostote od radija, glej sliko 11.

Spet vidimo totalno isto kot prej, le skala je druga. Dolgčas! Mogoče edina stvar, ki je rahlo drugačna je tale: slika 12.

Kar je tu drugače, je namreč to, da imata vztrajnostna momenta izračunana za enakomerno gostoto podobne napake, če jih izračunamo s formulo za enakomerno gostoto ali pa s tisto za neenakomerno s $q = 0$. To se zgodi, ker smo imeli prej za maso bolj optimalno metodo za določanje mase pri enakomerni gostoti.



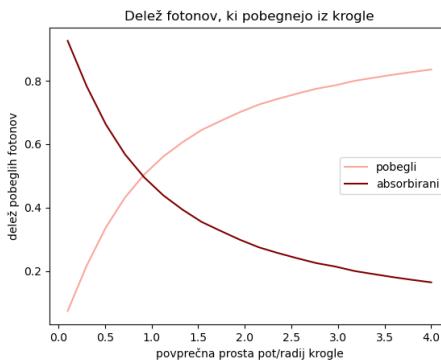
Slika 11: Prikaz odvisnosti vztrajnostnega momenta okoli z osi od potence odvisnosti gostote od radija za dve različni vrednosti p .



Slika 12: Prikaz odvisnosti napake vztrajnostnega momenta okoli z osi telesa od števila poskusov za različne vrednosti q . Prikazana je tudi vrednost za izračun enakomerne gostote (ki ustreza $q = 0$).

2 Žarki γ v krogli

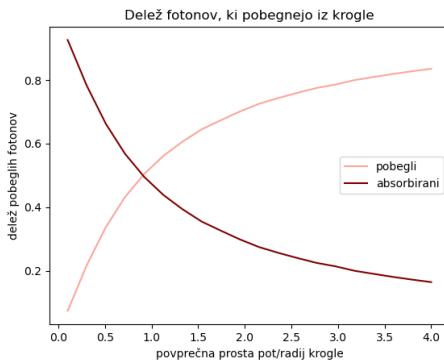
Tu je še en primer, ko bomo uporabili metodo Monte Carlo. V krogli se rojevajo žarki gama. Njihova povprečna prosta pot v snovi, iz katere je kroga, je λ , zunaj krogla pa lahko potujejo prosto (torej rečemo, da pobegnejo). Žarki se lahko rodijo kjerkoli v kroglji ter so izsevani v naključni smeri. Prosti parametri so torej trije: prosta pot (ki so porazdeljene po eksponentni porazdelitvi), kot izsevanja in radij izsevanja.



Slika 13: Prikaz deleža pobeglih in absorbiranih fotonov za različne vrednosti λ .

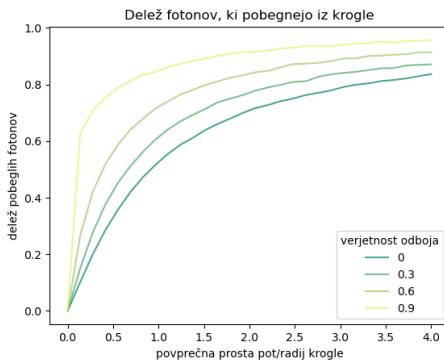
Če postavimo $\lambda = 1$ (torej je enaka radiju krogle), dobimo pri 10^7 poskusih delež pobeglih fotonov

približno 0.5274 ± 0.0001 . Deleži pobeglih fotonov za različne vrednosti λ so prikazani na sliki 13. Poglejmo sedaj še vrednosti napak v odvisnosti od števila poskusov, glej sliko 14. Vidimo, da napake dokaj počasi padajo z večanjem števila poskusov (x os je logaritempska).



Slika 14: Prikaz napake deleža pobeglih fotonov v odvisnosti od števila poskusov za različne vrednosti λ .

Poglejmo si sedaj še, kaj se zgodi, če se foton absorbira le z verjetnostjo ξ , sicer pa se odbije (oz. siplje) v naključno smer, glej sliko 15.



Slika 15: Prikaz modela, kjer se fotoni sipljejo v naključno smer z verjetnostjo ξ , sicer se pa absorbirajo. Vrednost 0 torej pomeni, da se vsi absorbirajo.

Vidimo, da se z deležem odbitih povečuje število fotonov, ki ubežijo. Za različne vrednosti λ je to povečevanje različno, a celo z najmanjšimi prostimi potmi λ skoraj vedno pride foton ven.

3 Model nevtronskega reflektorja

Pri modelu nevtronskega reflektorja imamo tok nevronov, ki vpada pravokotno na ploščo, v kateri se nevtroni sipljejo in nič ne absorbirajo, pri čemer je njihova prosta pot enaka λ .

3.1 Poenostavljen model

V poenostavljenem modelu privzamemo, da se sipljejo samo naprej in nazaj. Če je verjetnost za odboj naprej in nazaj enaka, pri številu poskusov 10^7 dobimo delež nazaj odbitih 0.24973 ± 0.00006 . Tu smo upoštevali, da se odbije lahko že ob vstopu na ploščo. Če pa tega odboja ne upoštevamo pa dobimo delež nazaj odbitih 0.4980 ± 0.0001 .

Seveda je natančnost določanja števila odbitih in prepuščenih nevronov (oz. odbitih naprej in nazaj) odvisna tako od števila poskusov kot tudi od vrednosti λ , glej sliko 16.

UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
MODELSKA ANALIZA 1
NALOGA 7

Jan Gobec VPŠ=28222067

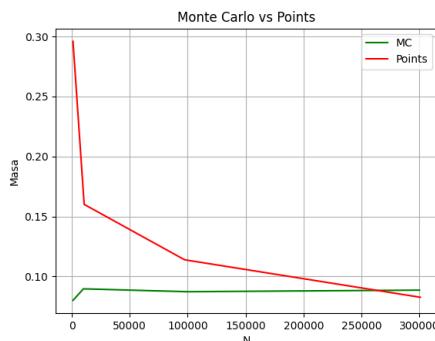
Modeli z metodo Monte Carlo

Naključna števila in integracije z metodo Monte Carlo

1. semester 2022/23

Ljubljana, 2022

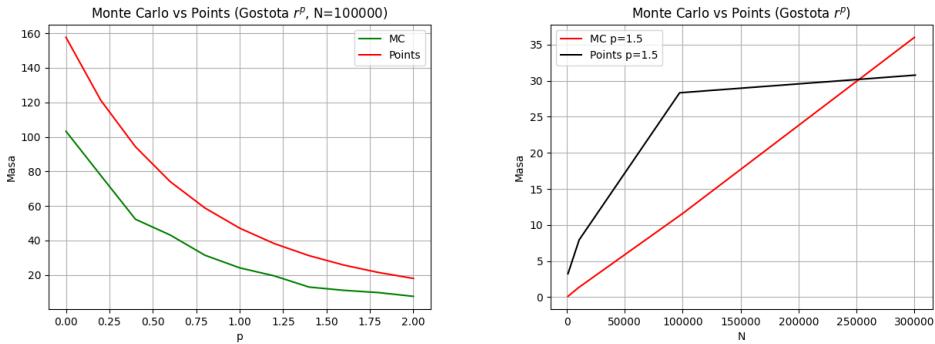
MC vs. novodna integracija



Slika 2: Trditev iz tabele 1 lahko tudi prikažem grafično. Na začetku ima metoda MC zakasnitev. Zakasnitev je odvisna od tega, kam padejo naključno generirana števila in lahko pada ali narašča, odvisno od generiranih števil. V tem primeru zakasnitev narašča. Zakasnitev je posledica premajhnega števila točk.

Tabela 1: Primerjava enakomerne mreže z metodo MC za $\rho(r) = 1$. Obe metodi za dovolj veliko število točk konvergirata k isti vrednosti mase. Torej za dovolj veliko število točk, lahko računamo volumne in mase tudi s pomočjo enakomerne mreže. Prednost MC metode je predvsem hitrost in da že za majhno število točk, dobimo dober rezultat. Število točk, ki padejo v telo je zmeraj naključno, pri enakomerni mreži pa to število ni naključno.

Število točk	MC masa	Enakomerna mreža masa
1000	0.073±0.010	0.296±0.031
10000	0.088±0.010	0.160±0.010
100000	0.087±0.003	0.114±0.003
300000	0.089±0.002	0.083±0.002



Slika 3: Primerjava računanja mase telesa z metodo MC in enakomerno mrežo za $\rho(r) = r^p$. Masa za $p = 1.5$ bo naraščala s številom točk, saj funkcija gostote narašča proti mejam telsa. Torej točke, ki padaže v telo bolj proti njegovi meji, prispevajo več k končni masi.

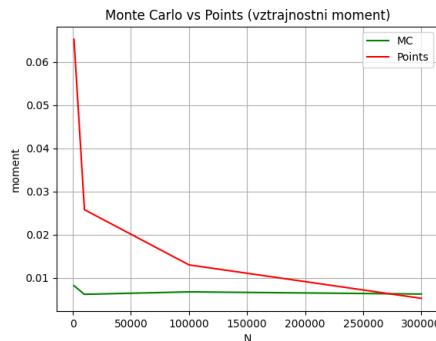
Ogledal sem si še odvisnost od parametra p in števila točk za gostoto $\rho(r) = r^p$.

1.2 Izračun vztrajnsotnega momenta z metodo Monte Carlo

Izračunal sem še vztrajnostni moment telesa. Vztrajnostni moment lahko zapišem

$$J = \int \rho(r) r^2 dV = \frac{\rho_0 V_0}{N} \sum_{i=1}^N \rho(r_i) (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \quad (2)$$

Vztrajnostni moment sem računal za konstanten ρ .



Slika 4: Primerjava računanja vztrajnostnega momenta telesa z metodo MC in enakomerno mrežo za $\rho(r) = 1$. Odvisnost je zelo podobna tisti iz računanja mase pri konstantnem ρ .

Tabela 2: Primerjava enakomerne mreže z metodo MC za $\rho(r) = 1$ za izračun vztrajnostnega momenta.

Število točk	MC moment	Enakomerna mreža moment
1000	0.008±0.003	0.065±0.007
10000	0.0062±0.0008	0.026±0.002
100000	0.0067±0.0002	0.013±0.0004
300000	0.0063±0.0001	0.0053±0.0001

Naloga 2:

1. $T(\lambda/r), R(\lambda/r)$
2. $T + R \stackrel{?}{=} 1$
3. $\lambda \left(\frac{I}{n} = 1 \right) = ?$
4. Linita ($\lambda \rightarrow 0, \infty$)

Maks Koncilja
št: 28191075

Modelska analiza 1

*7. naloga – Naključna števila in integracije
z metodo Monte Carlo*

doc. dr. Miha Mihovilovič, prof. dr. Simon Širca

2. Pobeg nevronov iz krogle

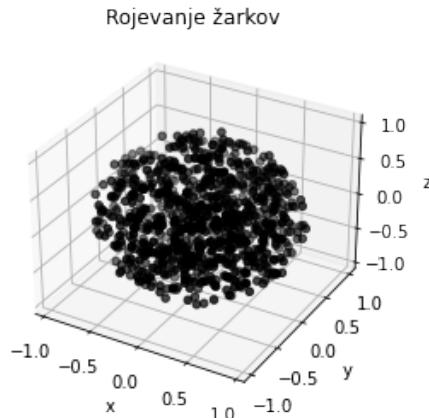
Obravnavajmo rojevanje žarkov v krogl, ki ima polmer $R = 1$. Verjetnost za pobeg je definirana kot:

$$P = \int \int \int e^{-d(r,\theta)/\lambda} dV = \frac{3}{2} \int_0^1 r^2 dr \int_0^\pi e^{-d(r,\theta)/\lambda} d(\cos(\theta)).$$

Kjer je d definoran kot:

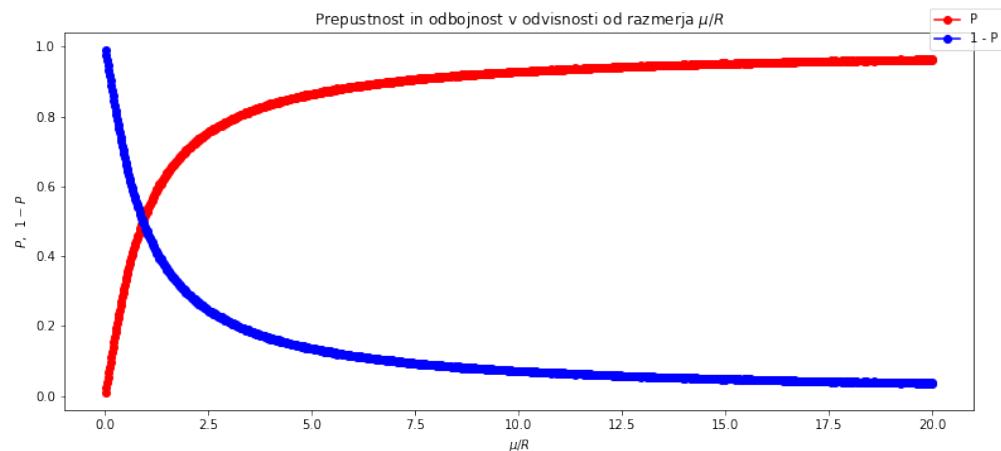
$$d = -r \cos(\theta) + \sqrt{1 - r^2(1 - \cos^2(\theta))}$$

Z MC algoritmom lahko simuliramo delež nevronov, ki uide iz krogle. Najprej simulirajmo enotsko kroglo v kateri se nevroni rojevajo:



Nevroni se rojevajo v krogli.

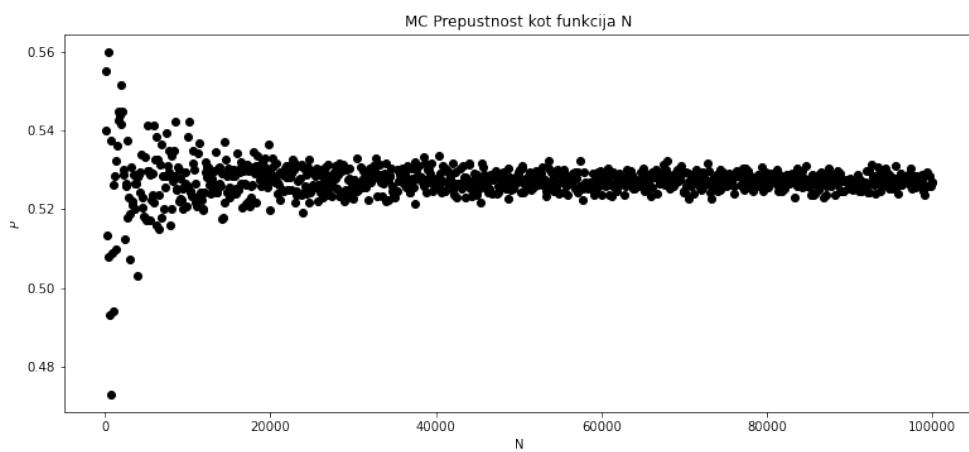
Numerično integrirajmo zgornji integral, da dobimo verjetnost za pobeg.



Verjetnost za pobeg pri vrednosti μ .

Iz grafa ugotovimo, da je pri vrednosti proste poti $\mu = R$ verjetnost za pobeg 0.52.

Natančnost Retultatov MC metod je odvisna od števila MC korakov. To prikažimo z grafom Prepustnosti v odvisnosti od N .



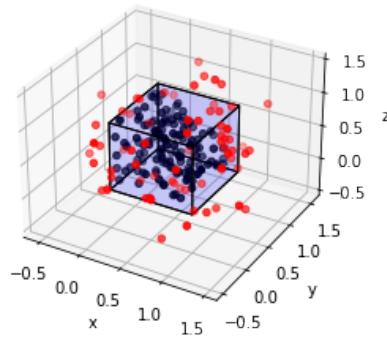
Verjetnost za pobeg pri vrednosti $\mu = 1$ za različne N .

2.2 Kocka

Poglejmo si podoben primer, le da tokrat simuliramo verjetnost za pobeg iz kocke.

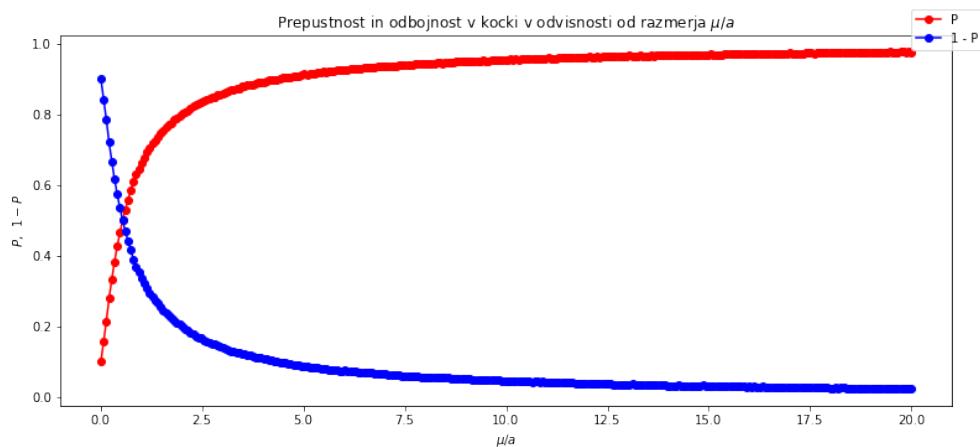
Algoritem poteka po naslednjem postopku:

- Na začetku naključno izberem $T(x, y, z)$ znotraj enotske kocke, kje se bo nevron rodil.
- Izrebam s, θ, ϕ za določitev premika nevtrona v sferičnih koordinatah iz točke T .
- Če je nevron zapustil kocko: $n++$, $N++$. Če je ni zapustil: $N++$.



Prikaz simulacije 200 točk in premikov pri $\mu = 0.3$. Točke obarvane rdeče so zapustile enotsko kocko.

Podobno kot pri krogli si poglejmo prepustnost in odbojnost v kocki pri vrednosti μ .



Verjetnost za pobeg se veča hitreje kot pri krogli, $P(\mu = 0.5) = 0.5$.

Naloga 3:

1. Parezdelter po števku sijav.
2. Prepuščnost reflektanja
3. $T(\lambda/\alpha) = ?$
4. $1D \rightarrow 3D$, 1D vs. 3D
5. Kateri parezdelter vzbudi v prepuščnih nivojih
kvante. (Odbog nivojev na L. ploskevi?)

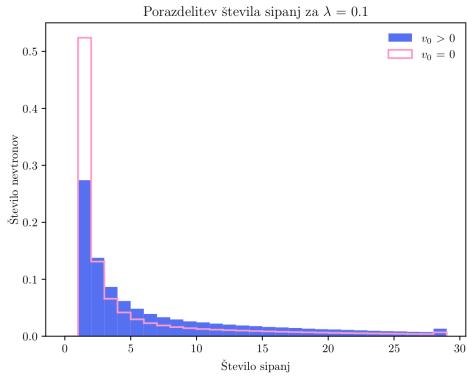
UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

NALOGA 7: NAKLJUČNA ŠTEVILA IN INTEGRACIJA Z METODO MONTE CARLO

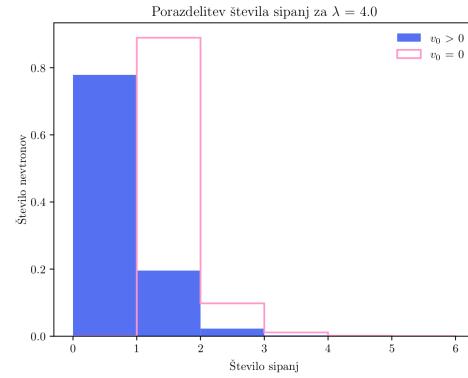
MODELSKA ANALIZA 1

DANA KOCIJANČIČ
VPISNA ŠTEVILKA: 28222068

PREDAVATELJ: PROF. DR. SIMON ŠIRCA
ASISTENT: DOC. DR. MIHA MIHOVILOVIČ



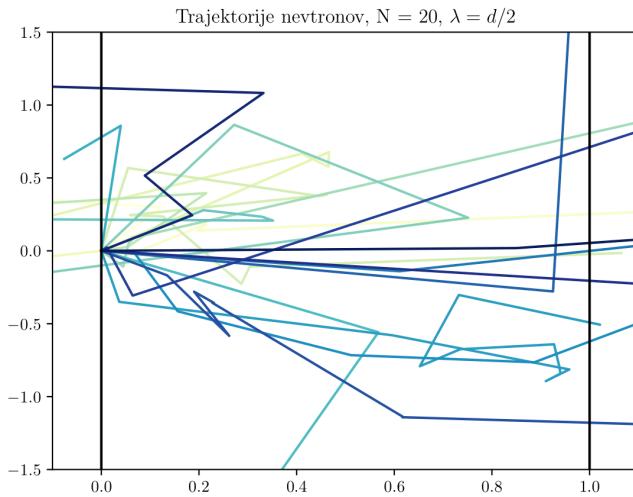
Slika 14: Porazdelitev števila sipanja nevtronov za primer $\lambda = 0.1$.



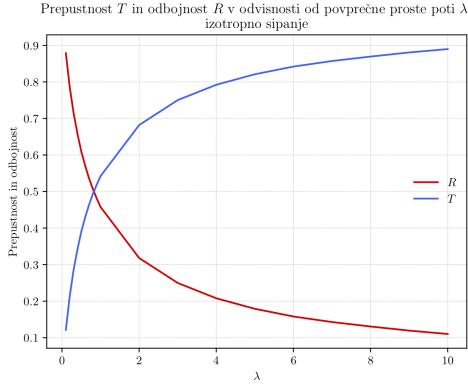
Slika 15: Porazdelitev števila sipanja nevtronov za primer $\lambda = 4$.

Model izotropnega sipanja

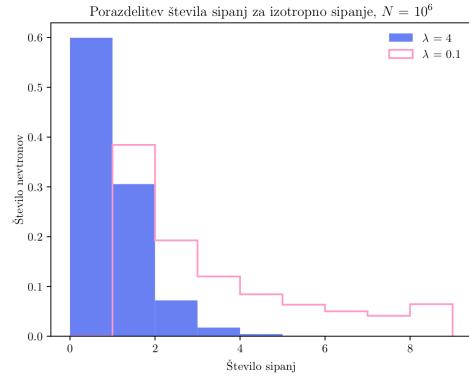
Poglejmo, ali se rezultati kaj spremenijo za primer, ko upoštevamo izotropno sisanje. Slika 16 prikazuje trajektorije nevtronov. Znova narišemo odvisnost odbojnosti in prepustnosti od parametra λ . Rezultat prikazuje sliko 17. Odvisnost je kvalitativno zelo podobna odvisnosti na grafu 11, kvantitativno pa se pojavijo razlike. Iz porazdelitev na sliki 18 lahko vidimo, da je delež nevtronov, ki se ne sipljejo manjši kot v primeru sipanja naprej-nazaj. Za izotropno sisanje je delež nevtronov ki se ne sipljejo nobenkrat približno 0.6, v modelu naprej-nazaj pa 0.8. Število sipanj se tudi sicer poveča.



Slika 16: Trajektorije nevtronov za primer $\lambda = d/2 = 1/2$.

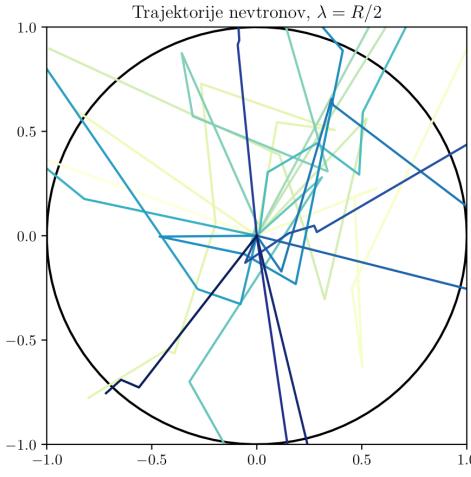


Slika 17: Odvisnost prepustnosti in odbojnosti od λ . Ocenjena maksimalna napaka je $\sigma_{max} = 0.0005$. Za izračun pri posameznem λ smo spremljali 10^6 nevronov.

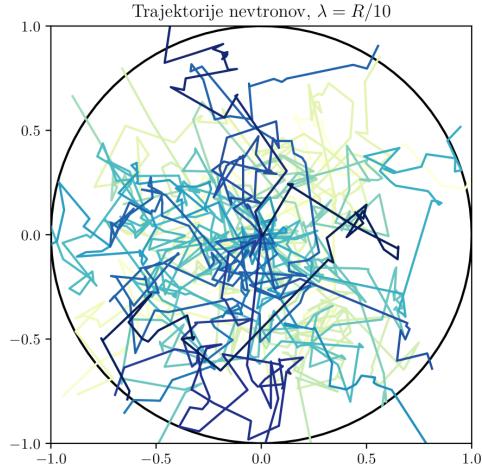


Slika 18: Porazdelitev števila sipanj za vrednosti parametra λ je 0.1 in 4.

Poglejmo si še reflektor, ki je cilindrične oblike. Ker bomo obravnavali neskončen valj v smeri z -osi, se problem poenostavi na dve dimenziji. Zanimivi sta le koordinati x in y oz. razdalja do izhodišča r ter kot φ . V središču reflektorja ($x = 0, y = 0$). Postavimo izotopen izvor. Narišimo nekaj karakterističnih trajektorij. Rezultate prikazujeta slika [19] in [20]. Znova opazimo, da je sisanj več za manjši parameter λ .



Slika 19: Trajektorije nevronov za $\lambda = R/2$, $R = 1$.



Slika 20: Trajektorije nevronov za $\lambda = R/10$.

V naslednjem koraku bomo poskušali vključiti še energijsko odvisnost. Pomagali si bomo z rezultati, ki smo jih izpeljali pri predmetu Merjenje ionizirajočega sevanja in Wikipedio. Predpostavimo naslednje:

- hitri nevroni izgubljajo energijo pri elastičnem sisanju in se upočasnujejo,
- če je hitrost nevronov majhna (termični nevroni) se verjetnost za zajetje nevrona poveča,
- povprečna prosta pot nevrona λ je odvisna od energije.

Načeloma bi moral biti presek za zajetje nevtrona za dobre reflektorje zelo majhen, a bomo v našem modelu predpostavili, da sta pobeg in absorpcija edina ponora nevtronov, zato bo verjetnost za absorpcijo znatna.

Ko se nevron z energijo E siplje na jedru z masnim številom A , je izguba njegove energije porazdeljena enakomerno med najmanjšo možno in največjo možno energijo

$$E_{\min} = E \text{ in } E_{\max} = \alpha E.$$

Parameter α je odvisen od masnega števila materiala, iz katerega je reflektor:

$$\alpha = \left(\frac{A - 1}{A + 1} \right)^2.$$

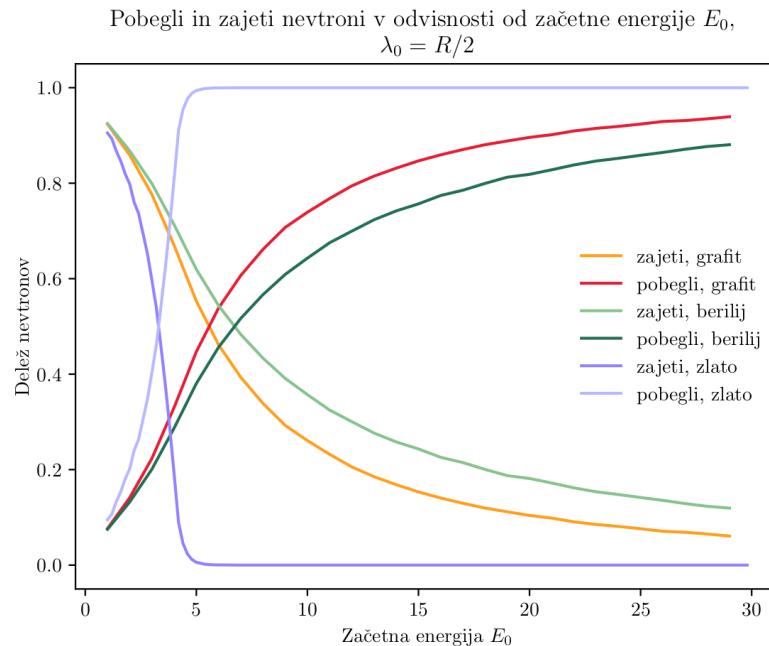
Verjetnost za zajetje nevtrona se z energijo spreminja približno kot

$$\sigma_{\text{zajetje}} \propto \frac{1}{\sqrt{E}},$$

povprečna prosta pot pa kot

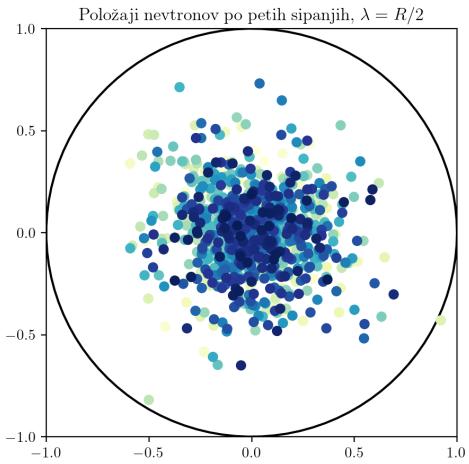
$$\lambda \propto \frac{\sqrt{E}}{1 + \sqrt{E}}.$$

Zdaj lahko izračunamo delež pobeglih in zajetih nevtronov v odvisnosti od začetne energije E_0 za nekaj materialov, ki se jih da uporabiti kot reflektor. Rezultate za grafit, berilij in zlato predstavlja slika 21. Vidimo, da ima zlato od vseh treh materialov najmanjšo verjetnost za zajetje nevtrona, berilij pa najvišje.



Slika 21: Delež zajetih in pobeglih nevtronov za različne materiale v odvisnosti od začetne energije E_0 .

Za konec lahko predstavimo, kako se spremenijo pozicije nevtronov po vsakem sisanju. Stanje po petem sisanju za začetno energijo $E_0 = 100$ prikazuje slika 22 kratek video pa se nahaja na https://drive.google.com/drive/folders/1K7IGyAR9V9fqxoNJsZV--nBik5ZckcXK?usp=share_link.



Slika 22: Položaji nevronov po petem sisanju za začetno energijo $E_0 = 100$.

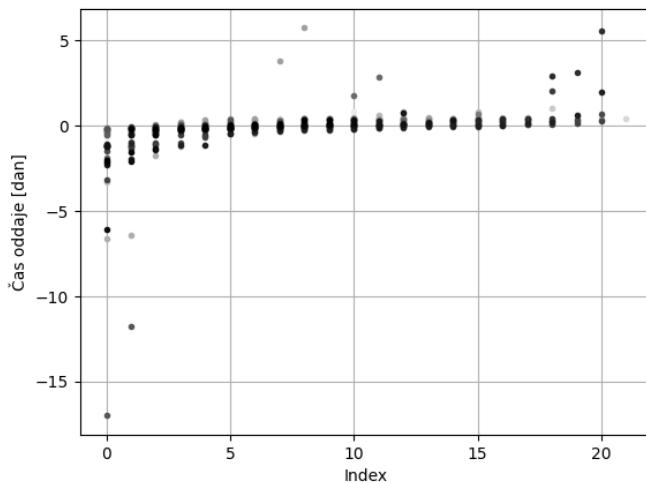
Zaključek

Pri prvi nalogi smo veliko pozornosti posvetili napakam in ugotovili, da napaka končnega rezultata pada s korenom števila žrebanj. Tak način računanja napake smo uporabili tudi pri vseh naslednjih izračunih. Pri drugi nalogi smo izračunali odvisnost verjetnosti za pobeg od razmerja povprečne proste poti in radija krogle. Pri tretji nalogi pa smo poskušali model nevtronskega reflektorja izboljšati z upoštevanjem energijskih odvisnosti.

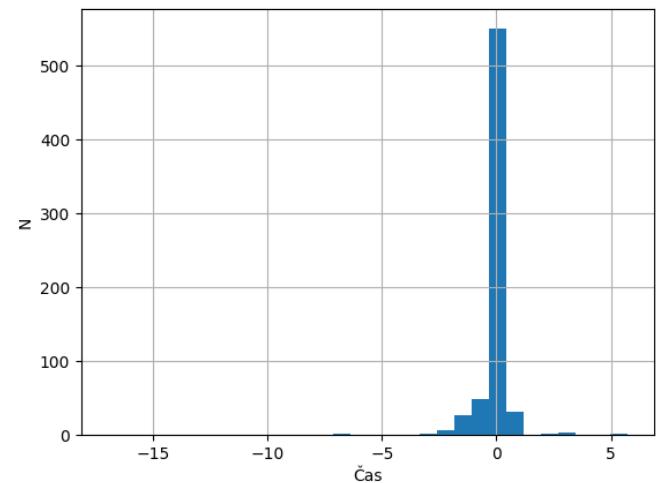
Dodatačna naloga:

1. Primjerice 13 nalogi smatraj letnica
2. Prodruži letnike srednjo
3. Odvojost od α (stupnjevi frekvenca)
4. Ič katerega leta prikazajo podatki za posamezno nalogo?

Žiga Černe

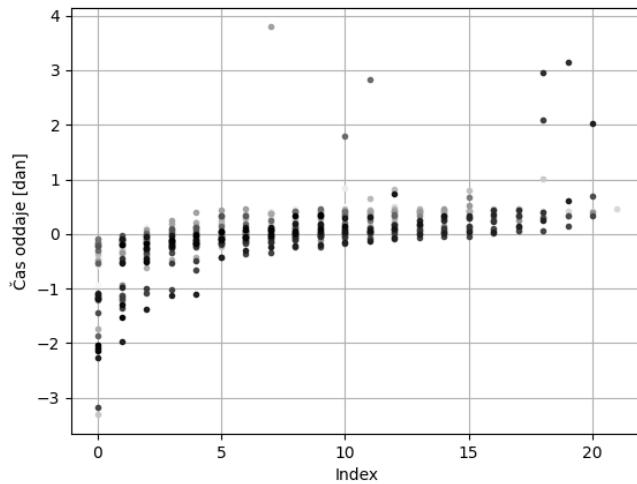


Slika 19: Prvi prikaz podatkov.

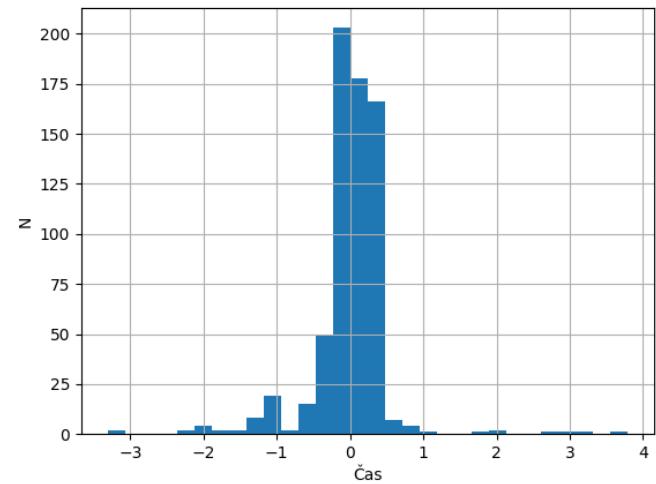


Slika 20: Prvi prikaz podatkov.

Na prvi pogled opazimo, da se vse vrednosti gibljejo okrog 0 z izjemo nekaj ubežnikov. Ker je redkokdo tako zavzet da bi nalogo oddal 15 dni pred rokom, sem območje omejil na 5 dni vse čase izven tega območja pa odstranil. Nov set podatkov izgleda takole.

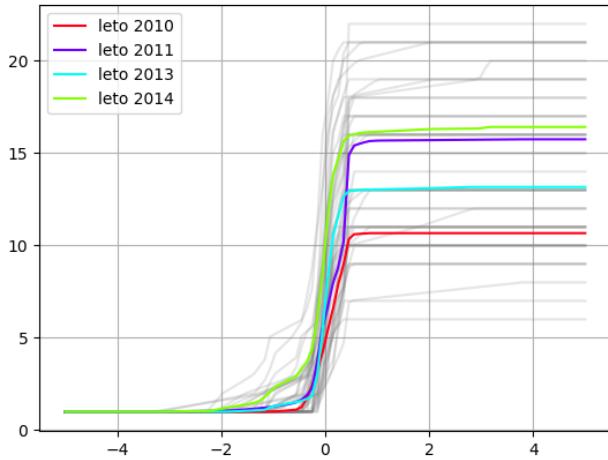


Slika 21: Obrezani podatki.

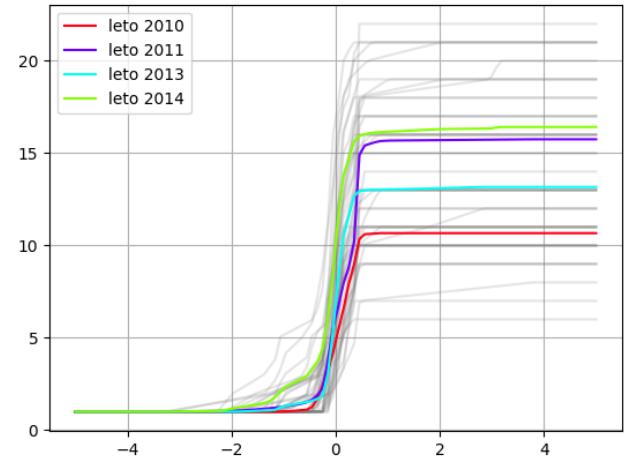


Slika 22: Porazdelitev obrezanih podatkov.

Statistično podobnost se računa glede na oddaljenost komulativnih funkcij podatkov, zato sem najprej izračunal komulativne funkcije za posamezne naloge in izračunal povprečja za posamezna leta.



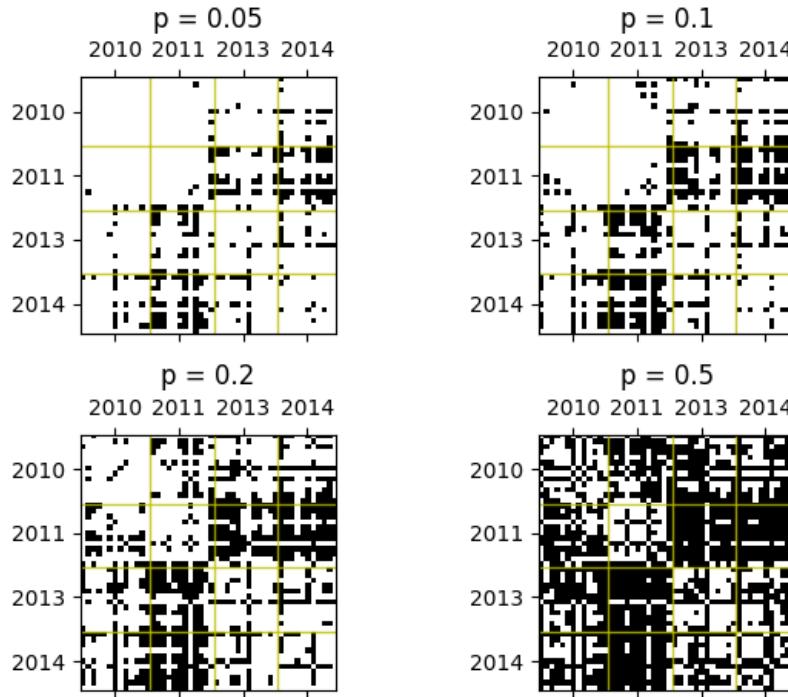
Slika 23: Povprečja kumulativnih funkcij.



Slika 24: Približana slika.

Opazimo, da se povprečja iz leta v leto, kar razlikujejo. Najprej opazimo, da z leti narašča tudi število oddaj nalog in da so študenti vsako leto bolj točni.

Za konec sem z metodo Kolmogorov-Smirnova preveril še medsebojne statistične podobnosti.



Slika 25: Seti podatkov ki so si med seboj statistično enaki pri zanesljivosti p . Bela barva $p_{izracunan} > p$, Črna barva $p_{izracunan} < p$.

Iz grafov lahko razberemo, da se delavnost študentov najbolj ujema v letih 2010 in 2011, saj so si porazdelitve časov oddaj vseh nalog v teh letih statistično enake. Prav tako so si vsi časi v letu 2010 statistično enaki.