

# Modelska analiza I

---

## Naloga 109

8. 12. 2022

---



9. naloga – Stohastični populacijski modeli

1. Napravi **statistiko časov izumrtja** za preprosti eksponentni model ( $\beta = 1.0/\text{enota časa}$ ) za majhno ( $N = 25$ ) in veliko ( $N = 250$ ) populacijo. Ali je ta čas odvisen od velikosti časovnega koraka? Primerjaj z modelom, ki vključuje rojstva in smrti ( $\beta_r = 4\beta$ ,  $\beta_s = 5\beta$ )!
2. Za zgornji model poišči **matriko prehodov** in z njo oceni čas izumrtja. Za preprost eksponentni model izumiranja lahko zapišeš enačbe za verjetnostno porazdelitev v odvisnosti od časa. Kako se efektivni odmik te porazdelitve spreminja s časom?
3. V stohastičnem modelu zajci-lisice določi **povprečno življensko dobo** sistema, če začnemo v ravnovesnem stanju. Za boljšo primerjavo med rezultati uporabi stacionarno stanje z 200 zajci in 50 lisicami in razmerje rodnost/smrtnost  $5/4$  za zajce in obratno za lisice.
4. Stohastično simuliraj model epidemije iz 4. naloge z dodano možnostjo, da imuni postopoma spet postajajo dovzetni. Kakšna je statistika časov popolne eliminacije bolezni v odvisnosti od velikosti populacije in hitrosti izgubljanja imunosti?

## Naloga 1:

1. Statistična časov razprtja:  $\bar{T}$ ,  $\sigma_T$ , (poševnost, splodnost)
2. Odnosnost od velikosti populacije
3. Odnosnost od velikosti konca
4. Preverjanje z analitičnimi modelmi
5. Pojstva in snovi (sprememba  $\bar{T}$  in  $\sigma_T$ )  
zakaj:  $\bar{T}_{Rg} < \bar{T}_S$
6. Histogram, graf  $(\bar{x}, \sigma_x)$

Andrej Kalvo

## MODELSKA ANALIZA I

# 9. naloga – Stohastični populacijski modeli

Ema Mlinar, vpisna št.: 28222071

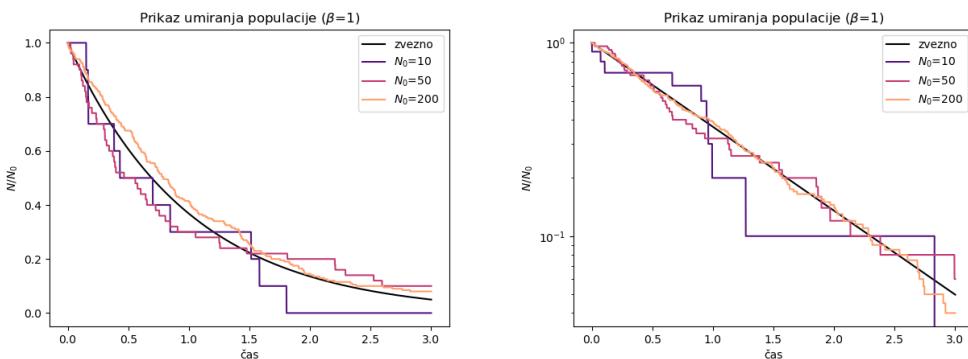
7. december 2022

## 1 Model umiranja populacije

Umiranje neke populacije lahko opišemo z zveznim ali z diskretnim modelom. Tu bomo uporabili diskretni model, zraven pa dodali še naključne fluktuacije, ki ustvarijo bolj realno simulacijo. Naključni dogodki bodo razporejeni po poissonski porazdelitvi:

$$\Delta N = -\mathcal{P}(\beta N \Delta t) \quad (1)$$

kjer je  $\beta$  nek prost parameter, ki določa hitrost umiranja populacije,  $N$  pa predstavlja velikost populacije. Za lažjo predstavo o dogajanju si najprej poglejmo primer takšnega umiranja populacije, glej sliko 1.



Slika 1: Prikaz umiranja populacije za tri različne začetne velikosti populacije ( $N_0$ ). Narisana je tudi krivulja, ki jo dobimo, če se problema lotimo zvezno. Graf je narisani v linearni in logaritemski skali.

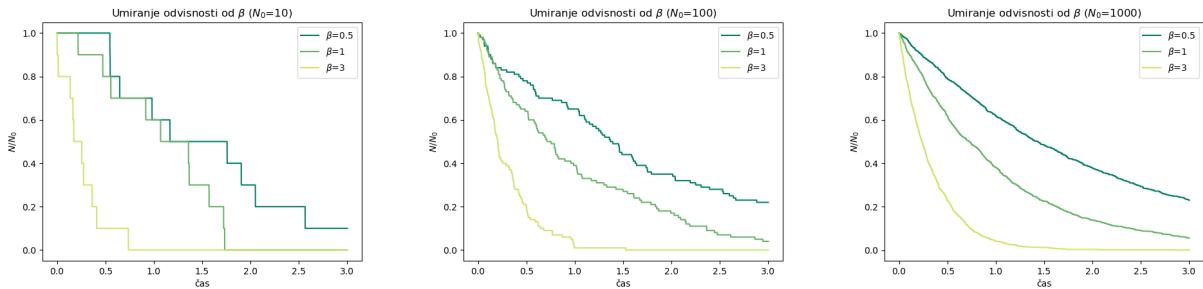
Na sliki je narisani potek za različne začetne velikosti populacije. Za primerjavo pa je narisana tudi krivulja, ki jo dobimo kot rešitev zvezne verzije problema brez šuma:

$$\frac{dN}{dt} = -\beta N \quad (2)$$

Opazimo lahko, da se pri večanju velikosti začetne populacije zelo hitro približamo zvezni limiti. Na primer pri  $N_0 = 1000$  dobimo že praktično zvezno verzijo, saj se pri tako veliki populaciji naključne fluktuacije izničijo, prav tako pa ni več opazna diskretna narava.

## 1.1 Odvisnost časa umiranja od $\beta$

Izkaže se, da je edini parameter, ki vpliva na dolžino umiranja,  $\beta$  (parametri kot so velikost populacije,  $\Delta t$  itd vplivajo le na razsipanost te količine). To je logično, saj je parameter  $\beta$  linearno (po definiciji) povezan z razpolovno dobo. Primeri krivulj za različne  $\beta$  so prikazani na sliki 2.



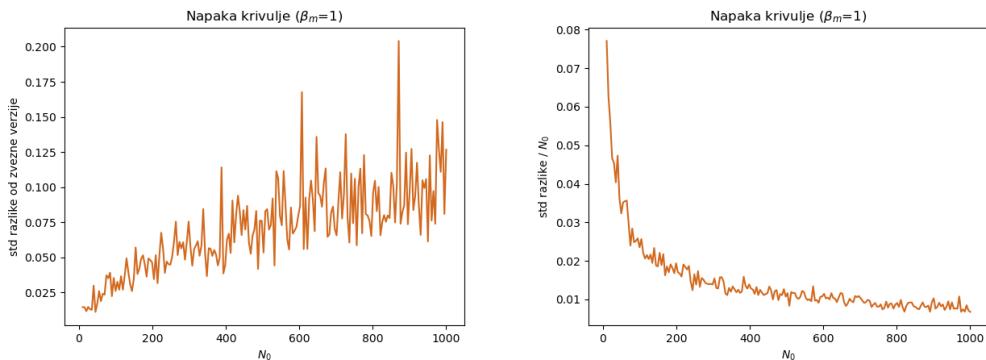
Slika 2: Primeri krivulj za različne  $\beta$  za različne velikosti populacije.

Prepričamo se lahko torej, da časovna skala ni odvisna od velikosti populacije. Prav tako pa vidimo, da je potek počasnejši pri manjših  $\beta$ .

## 1.2 Odvisnost napake od različnih parametrov

### 1.2.1 Odvisnost napake od velikosti začetne populacije $N_0$

Poglejmo sedaj odvisnost od začetne velikosti populacije bolj natančno, glej levi graf slike 3.



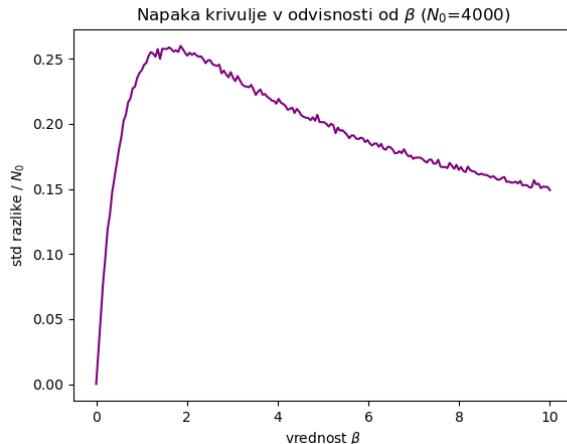
Slika 3: Odvisnost absolutne (levo) in relativne (desno) napake modela umiranja glede na zvezno verzijo.

Kot vidimo napaka zelo variira (kljub temu, da sem povprečila po 100 poskusih za posamezen  $N_0$ ), vidimo pa tudi, da odstopanje od zvezne verzije narašča ko povečujemo populacijo. To se nam zdi čudno, saj nam intuicija pravi, da je napaka manjša, če imamo večjo populacijo. Vendar pa če stvar pogledamo bolj natančno tu ni nobenega paradoksa. Kar imamo namreč v mislih kot "napako" je relativna napaka, torej napaka na levem grafu deljeno z velikost populacije. Ena oseba namreč pri večji populaciji prispeva bistveno manj kot pri manjši. Seveda pa je odstopanje v jeziku absolutne napake (torej če štejemo ljudi, ki odstopajo) večje pri večji populaciji, saj je več ljudi, ki lahko odstopajo.

S tem v mislih narišemo desni graf na sliki 3. Kot nam pravi intuicija, je napaka precej večja pri manjših  $N_0$ .

### 1.2.2 Odvisnost napake od parametra $\beta$

Odstopanje od zvezne vrednosti pa je odvisno tudi od parametra  $\beta$ , glej sliko 4.

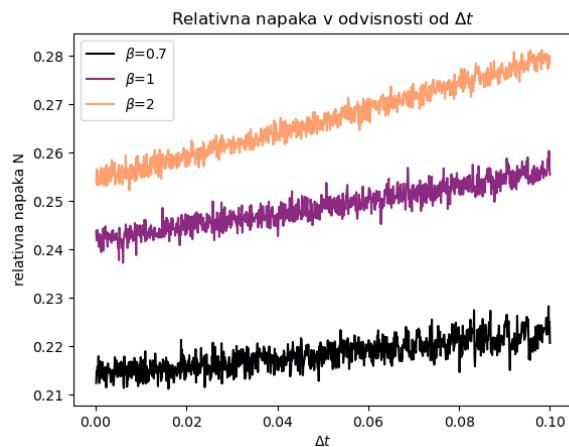


Slika 4: Odvisnost relativne napake modela umiranja glede na zvezno verzijo od parametra  $\beta$ .

Odvisnost ima prav posebno obliko, največja napaka je pri parametru  $\beta = 1.5$ .

### 1.2.3 Odvisnost napake od delilnega intervala $\Delta t$

Lahko si mislimo, da bo napaka (odstopanje od analitične zvezne verzije) odvisna tudi od  $\Delta t$ , odvisnost je prikazana na sliki 5.



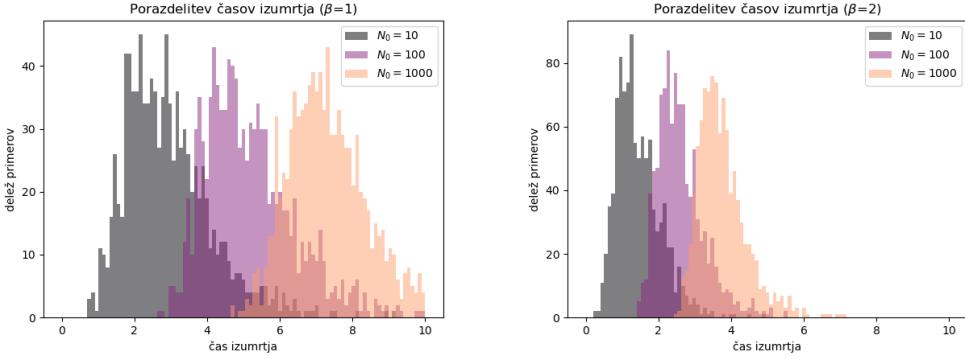
Slika 5: Odvisnost relativne napake modela umiranja glede na zvezno verzijo od parametra  $\Delta t$  za različne vrednosti  $\beta$ .

Vidimo, da je odvisnost napake od  $\Delta t$  lepo linearна, naklon premice ter njena začetna vrednost (višina) pa je odvisna od  $\beta$ .

## 1.3 Porazdelitev časov izumrtja

Predvsem nas pri obravnavanju umiranja populacije zanima, kdaj ta izumre. Ugotovimo, da je ta čas odvisen od velikosti populacije ter vrednost parametra  $\beta$ , glej sliko 6.

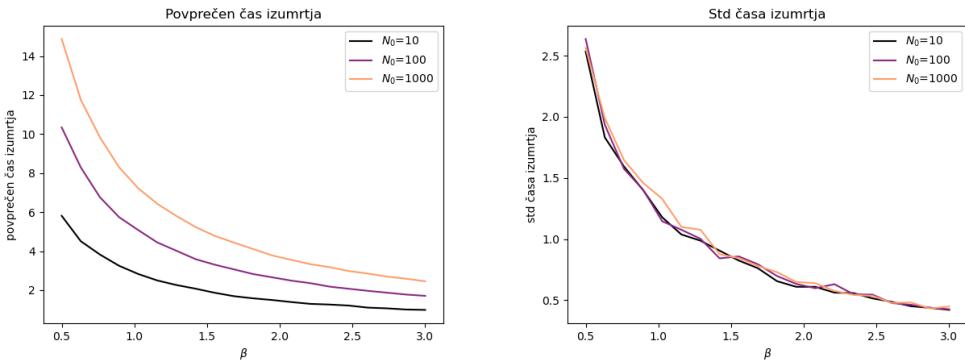
Kot vidimo dobimo različne vrednosti za izumrtje zaradi naključne narave naše simulacije, porazdelitev je približno gaussovsko. Ta vrh je pri različnih časih ter različno širok. Vidimo, da populacija prej



Slika 6: Porazdelitev časov izumrtja populacije od velikosti začetne populacije ter od parametra  $\beta$ . Leva slika prikazuje dogajanje pri parametru  $\beta = 1$ , desna pa pri  $\beta = 2$ , za primerjavo je skala na x osi enaka.

izumre pri manjših populacijah ter pri večjih  $\beta$ . Prav tako opazimo, da je porazdelitev širša pri manjših  $\beta$ .

Poglejmo povprečje izumrtja bolj natančno, glej levi graf na sliki 7.



Slika 7: (desno) Odvisnost povprečja izumrtja v odvisnosti od velikosti začetne populacije ter  $\beta$ . (levo) Odvisnost standardne deviacije časa izumrtja v odvisnosti od velikosti začetne populacije ter  $\beta$ .

Poglejmo še odvisnost standardne deviacije časov izumrtja populacije v odvisnosti od istih parametrov, glej desni graf na sliki 7. Vidimo, da je odvisnost standardne deviacije od  $\beta$  zelo podobna kot odvisnost povprečja. Opazimo pa tudi (kot smo že iz slike 6 domnevali), da standardna deviacija ni odvisna od velikosti populacije.

## 1.4 Rojstva in smrti

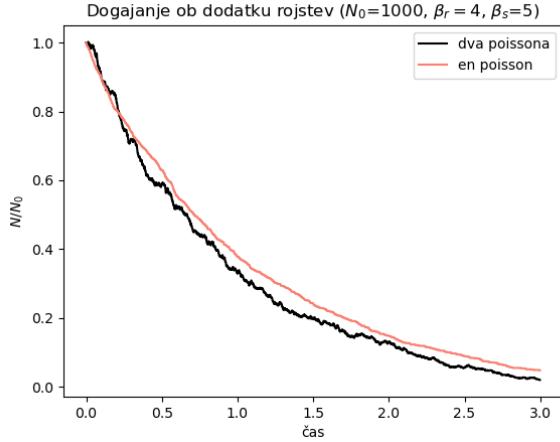
Našemu modelu lahko dodamo še rojstva. Ta so prav tako poissonsko razporejena:

$$\Delta N = -\mathcal{P}(\beta_s N \Delta t) + \mathcal{P}(\beta_r N \Delta t) \quad (3)$$

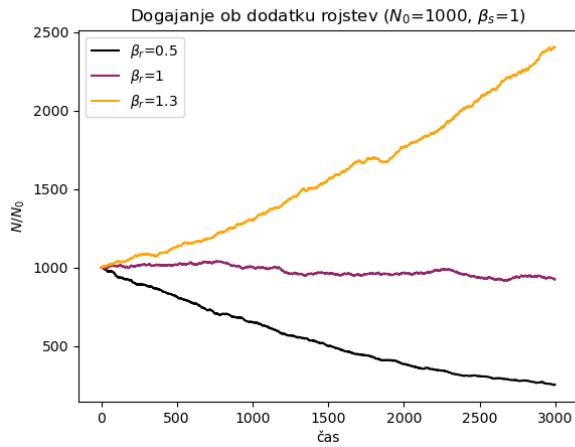
kjer sta  $\beta_s$  in  $\beta_r$  parametra smrti in rojstev. To pa ni enako kot če le namesto osnovne  $\beta$  zapišemo  $\beta = \beta_s - \beta_r$ . Razliko med temi dvema modeloma nakazuje slika 8.

Vidimo pa, da razen večje razpršenosti ni razlike. Torej so vse lastnosti vezane na povprečje iz prejšnjega poglavja enake.

Glede na vrednosti parametrov  $\beta_r$  in  $\beta_s$  dobimo tri možne režime:  $\beta_r < \beta_s$ ,  $\beta_r > \beta_s$ ,  $\beta_r = \beta_s$ . Razliko med njimi prikazuje slika 9.



Slika 8: Model izumiranja, če dodamo še rojstva za model, če uporabimo  $\Delta N = -\mathcal{P}(\beta_s N \Delta t) + \mathcal{P}(\beta_r N \Delta t)$  ali pa  $\Delta N = -\mathcal{P}((\beta_s - \beta_r) N \Delta t)$ .



Slika 9: Prikaz treh različnih režimov:  $\beta_r < \beta_s$ ,  $\beta_r > \beta_s$ ,  $\beta_r = \beta_s$ .

Če  $\beta_r < \beta_s$  dobimo eksponentno padanje kot če imamo samo smrti, za  $\beta_r > \beta_s$  dobimo eksponentno naraščanje, za  $\beta_r = \beta_s$  pa dobimo fluktuacije okoli osnovnega velikosti populacije.

Prikažemo lahko pa tudi čas, ko velikost populacije pade na polovico začetne vrednosti (oz. naraste na 1.5 začetne vrednosti v primeru naraščanja). To je prikazano na sliki 10.

Vidimo, da kot pričakovano umiranje poteka hitreje, če je razlika  $\beta_s - \beta_r$  večja. Kot pričakovano tudi tu vidimo tri režime. Na vrednostih po diagonali vidimo, da tam nikoli ne presežemo 1.5 ali 0.5.

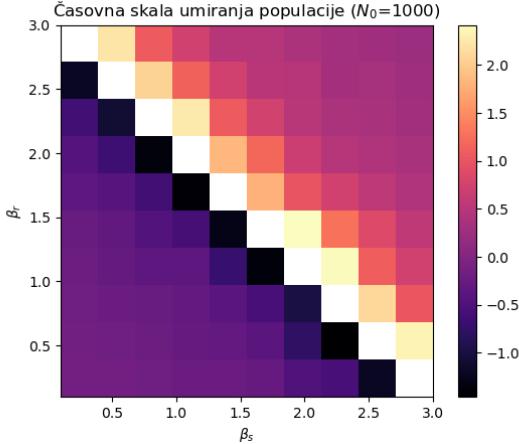
Za primer, ko je povprečje konstantno (in enako velikosti začetne populacije) pa lahko pogledamo kakšna so nihanja okoli ravnovesne lege v odvisnosti od  $\beta_r = \beta_s$ , glej sliko 11.

Opazimo, da dejansko obstaja odvisnost standardne deviacije nihanja od parametra  $\beta$ , nihanja so namreč večja, če je parameter večji.

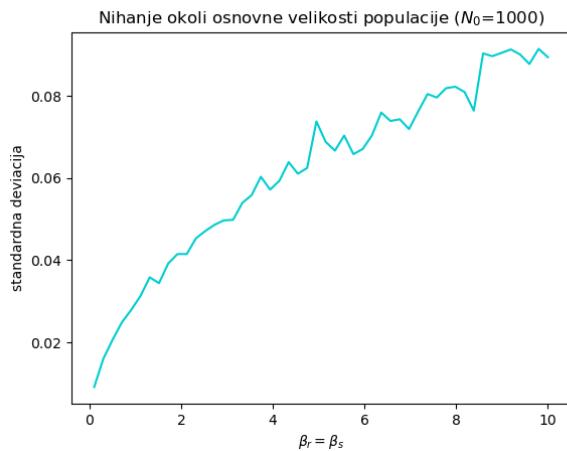
## 1.5 Moški in ženske

Zanimivo dogajanje pa dobimo tudi, če uporabimo dve različni vrednosti  $\beta$ , glej sliko 12.

V populaciji imamo moške in ženske, znano je, da je pričakovana življenska doba žensk daljša (kar pomeni, da ženskam pripada manjši  $\beta$  oz. počasneje umirajo). Razdelimo torej populacijo na začetku na polovico in ločeno gledamo populacijo moških in žensk z različnima koeficientoma  $\beta$ , dobimo desni



Slika 10: Karakteristični čas, ko velikost populacije pade pod 0.5 začetne populacije ali ko naraste na 1.5 začetne (to je prikazano z negativnim časom), za različne kombinacije parametrov  $\beta_s$  in  $\beta_r$ . Beli kvadratki pomenijo, da teh vrednosti nikoli ne doseže.



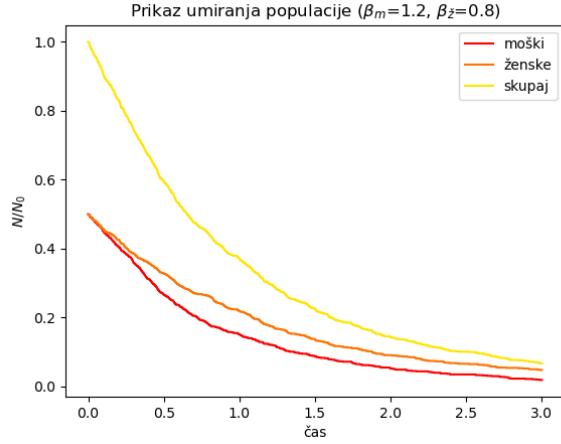
Slika 11: Nihanje okoli ravnovesne lege (začetna velikost populacije), če je  $\beta_r = \beta_s$  v odvisnosti od parametra  $\beta_r$  oz.  $\beta_s$ .

graf na sliki 12. Opazimo, da celotna populacija najprej pada kot populacija moških, nato pa kot populacija žensk. Na koncu ostane več žensk kot moških.

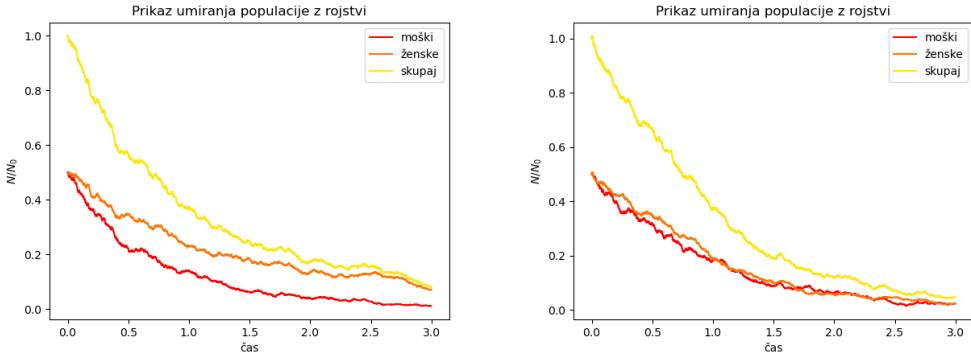
### 1.5.1 Še rojstva

Seveda tudi tu lahko dodamo še rojstva kot pri originalnem primeru. Spet obravnavamo celotno populacijo kot dve ločeni populaciji in dobimo levi graf na sliki 13.

Vidimo, da je potek zelo podoben kot če ne bi imeli rojstev. Vendar pa če populacijo moških in žensk preučimo bolj natančno ugotovimo, da smo zares tu predpostavili, da moški rojevajo moške, ženske pa rojevajo ženske. To seveda ni res. Da se rodi otrok potrebujemo moškega in žensko. Torej naredimo model v katerem pustimo del s smrtmi pri miru, pri rojstvih pa predpostavimo, da se rodi enako punč kot fantkov glede na vsoto moških in žensk. Dobimo desni graf na sliki 13. Tokrat opazimo, da je populacija moških in žensk skoraj enaka (kljub temu, da je populacija žensk rahlo večja), kar je precejšnja razlika od prejšnjega naivnega modela. To si lahko razložimo tako, da je že res, da umre manj žensk, a se jih tudi manj rodi, ker so rojstva povezana s populacijo moških.



Slika 12: Prikaz umiranja populacije dveh vrst z različnimi parametromi  $\beta_m$  in  $\beta_z$  (moški in ženske). Ženske imajo večjo pričakovano življenjsko dobo.



Slika 13: Prikaz umiranja populacije dveh vrst z različnimi parametromi  $\beta_m$  in  $\beta_z$  (moški in ženske) z dodatkom rojstev. Ženske imajo večjo pričakovano življenjsko dobo.

## 2 Matrika prehoda

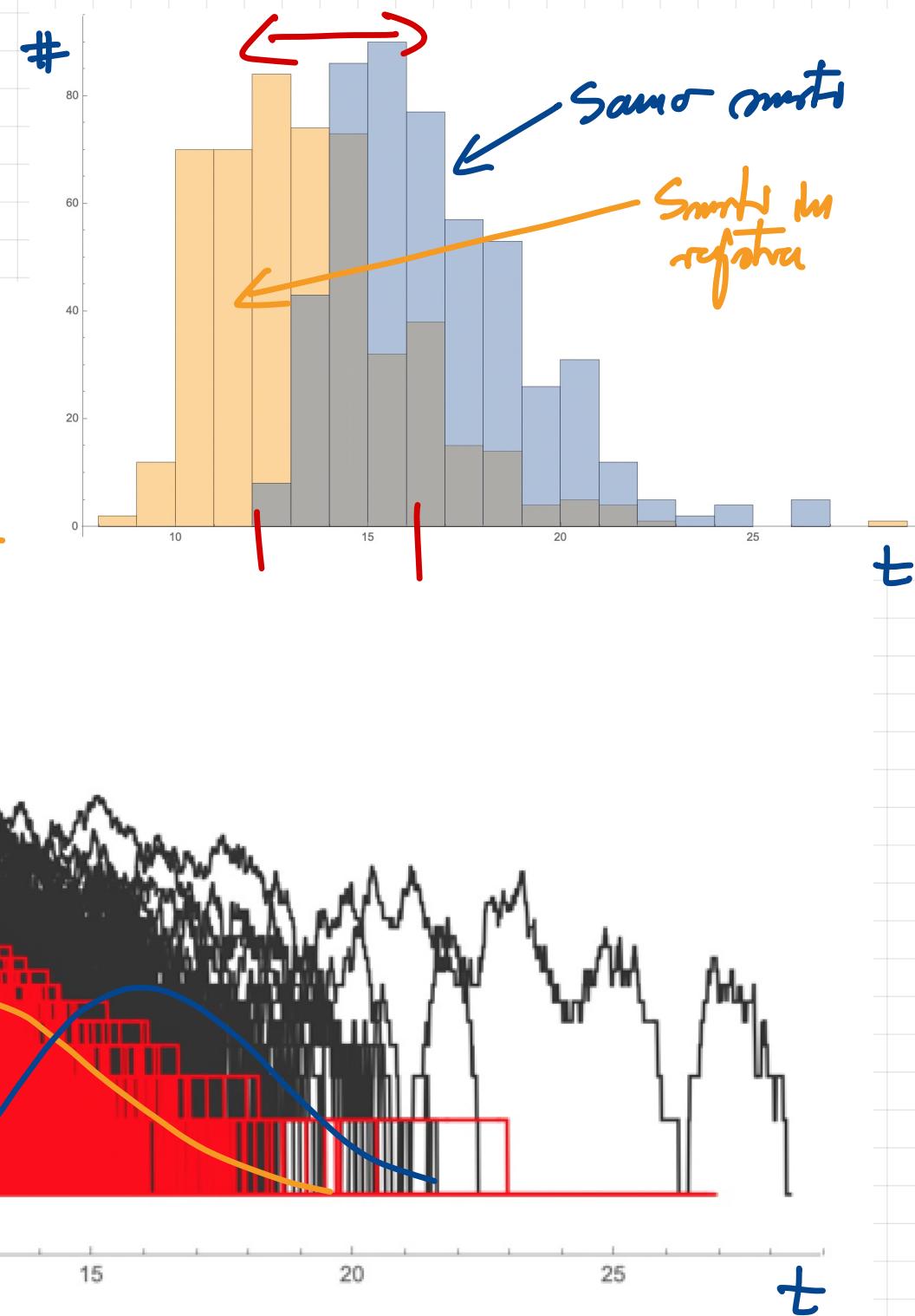
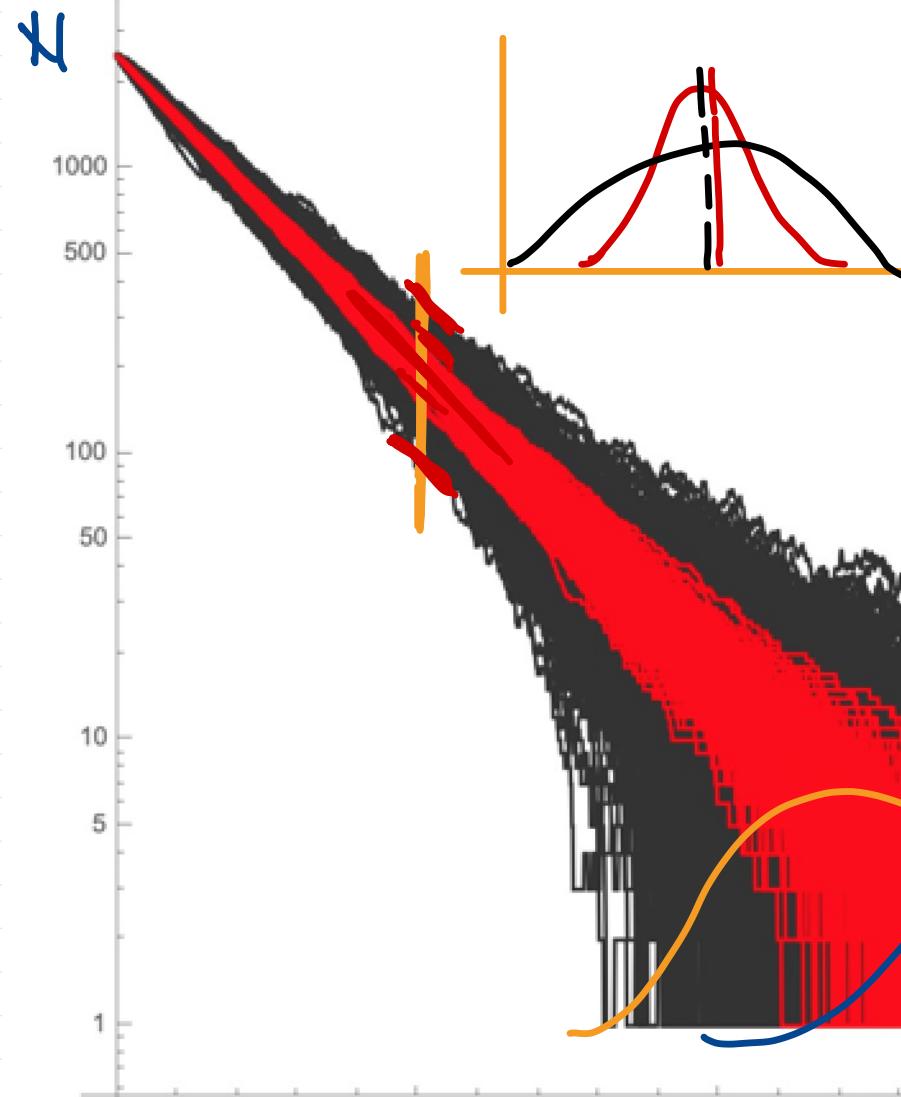
Dogajanje pa lahko namesto s Poissonske porazdelitvijo šuma razložimo tudi s t. i. matriko prehoda. Metoda je bila razložena na predavanjih, tukaj pa naj le omenim, da je ideja, da prenašamo iz nekega časovnega koraka na naslednjega verjetnost, da za določeno velikost populacije. S pomočjo te metode lahko na zelo preprost način dobimo porazdelitev velikosti populacije v nekem trenutku. Primer je prikazan na sliki 14.

Slika je narejena ob različnih trenutkih, kjer le pogledamo vrednosti matrike. Vidimo, da je na začetku porazdelitev zelo ozka, prav tako tudi na koncu. Najprej populacija pada zelo hitro, nato pa počasneje (kar smo videli tudi že v prejšnjih poglavjih).

S pomočjo te matrike lahko torej določimo vrednost momentov ob različnih časih, to je prikazano na sliki 15.

Oblika za povprečje nam je precej znana že od prej, prav tako smo podobno dobili tudi prej za standardno deviacijo. Standardna deviacija je večja pri večjih  $\beta_r$ , prav tako je tudi bolj razpotegnjena. Pri naslednjem momentu pa vidimo še večjo razpotegnjeno, prav tako je njegova vrednost precej večja pri večjih  $\beta_r$ . Pri krivulji za 0.0 vidimo nekakšno čudno obnašanje v bližini ničle, a to je verjetno posledica napake v numeričnem računanju, saj ni fizikalnega razloga za takšno obliko.

Dodateli:



## Vročta / Lek 2 luka Poissonova porazdelitev:

$$X \sim \text{Poisson}(\lambda) ; Y \sim \text{Poisson}(\mu)$$

$$Z = X + Y \Rightarrow Z \stackrel{?}{\sim} \text{Poisson}(\lambda + \mu)$$

Za Poissonove porazdelitev velja:

$$p(k; \lambda) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} ; E[k] = \lambda, \text{Var}[k] = \lambda$$

Konvalucija:

$$\begin{aligned}
 f_{X+Y}(n) &= \sum_i f_X(i) f_Y(n-i) = \\
 &= \sum_{i=0}^n \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!} \cdot \frac{\mu^{n-i} e^{-\mu}}{(n-i)!} = e^{-(\lambda+\mu)} \sum_{i=0}^n \frac{\lambda^i \mu^{n-i}}{i! (n-i)!} = \\
 &= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!} \sum_{i=0}^n \frac{n!}{i! (n-i)!} \lambda^i \mu^{n-i} = \frac{(\lambda+\mu)^n - (\lambda+\mu)}{n!} (\lambda+\mu)! \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

Rozloka:

$$Z = X - Y$$

$$f_Z(\mu) = \sum_{i=-M}^M f_X(\mu+i) f_Y(i) =$$

$$= \sum_{\substack{i=0 \\ i=\max\{0, -\mu\}}}^{\infty} \frac{\lambda^{i+\mu} e^{-\lambda}}{(i+\mu)!} \frac{\mu^i e^{-\mu}}{i!}$$

$$= \underbrace{\lambda^{-(\mu+\lambda)} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^{\frac{\mu}{2}} I_{|\mu|}(2\sqrt{\mu\lambda})}_{\text{Skellam distribution}}$$

Modifikacija  
Besedova funkcija

$$E[Z] = \lambda - \mu$$

$$\text{Var}[Z] = \lambda + \mu$$

## Návody 2:

1. Matematické prehľad
2. Vplivu vektorov ďasomulga kauka
3. Variance, pravdohodnosť a odchýlosť od ďasa
4. Smrť vs. Rejšta + Smrť
5. Počerpavosť s stohastickým modelom

Andrej Ucelovský

Filip Kratochvíl

# Mark Fortuna

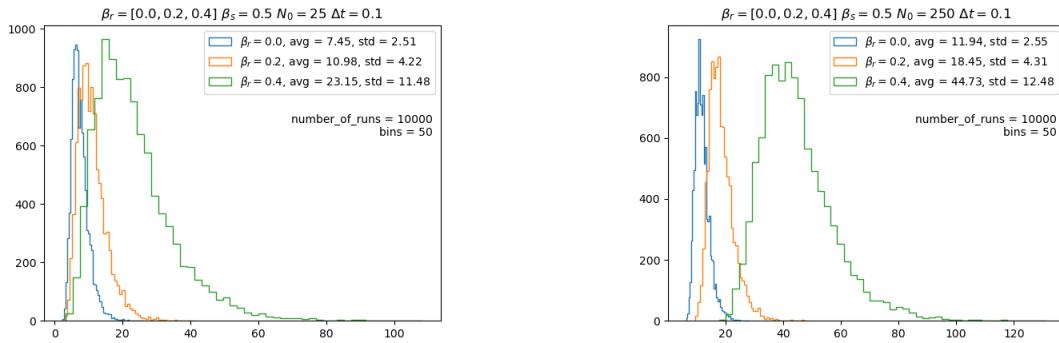


Figure 4: Odvisnost časov izumrtja od faktorja rojstev  $\beta_r$ . Leva porazdelitev prikazuje izumrtje populacije 25 osebkov, desna pa 250 osebkov. na x-osi so prikazani intervali časov izumrtja, na y-osi pa število simulacij katerih čas spada v ta zaboj.

Manj kot je računski model odvisen od parametrov računanja kot je naprimer časovni korak, boljši je. Na sliki 5 vidimo odvisnost porazdelitve časov izumrtja od velikosti časovnega koraka  $\Delta t$ . Vidimo, da se povprečja porazdelitev premikajo k manjšim časom, večji kot je časovni korak  $\Delta t$ . Pri populacijski 250 lahko opazimo tudi nižanje vrha porazdelitve. Ker je število simulacij vsakič enako, to pomeni večja standardna deviacija porazdelitve. Iz prikazanih izračunov to težko potrdimo. Potrebna bi bila nadaljnja analiza.

Nasploh mora biti, glede na problem, časovni korak dovolj majhen. V poglavju 5 smo morali biti pozorni na časovni korak, saj obravnavamo pojav z zelo različnimi karakterističnimi časi.

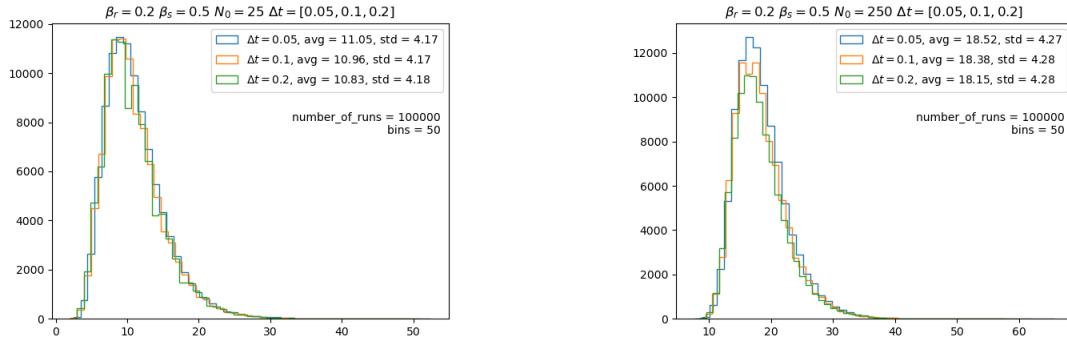


Figure 5: Porazdelitev časov izumrtja v odvisnosti od časovnega koraka  $\Delta t$ . na x-osi so prikazani intervali časov izumrtja, na y-osi pa število simulacij katerih čas spada v ta zaboj.

## 2 Matrika prehodov

Verjetnostno porazdelitev sistema ob času  $t$  opišemo z vektorjem

$$\mathbf{x} = (x_0(t), \dots, x_m(t)) , \quad (3)$$

kjer so komponente  $x_j(t)$  verjetnosti, da ima sistem ob času  $t$ ,  $j$  osebkov. Začetno stanje z  $N_0$  osebki bomo zapisali kot  $(\mathbf{x})_{N_0}(t=0) = 1$  oz.

$$\mathbf{x}(t=0) = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) , \quad (4)$$

kjer je mesto z 1,  $N_0$ -ta komponenta vektorja. Vektorja nismo zaključili pri začetni velikosti populacije. Podaljšali smo ga, ker s tem omogočimo večanje populacije za  $\beta_r > 0$ . Tak vektor ima  $m$  komponent. Prehod porazdelitve v naslednji časovni korak izračunamo kot

$$\mathbf{x}(t + \Delta t) = M\mathbf{x}(t) , \quad (5)$$

kjer matriko prehoda  $M$  za primer iz poglavja 1 zapišemo kot

$$\begin{bmatrix} 1 & 1\beta_s \Delta t & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 - 1(\beta_r + \beta_s)\Delta t & 2\beta_s \Delta t & 0 & \dots \\ 0 & 1\beta_r \Delta t & 1 - 2(\beta_r + \beta_s)\Delta t & 3\beta_s \Delta t & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Ker je matrika  $M$  je  $m \times m$  matrika, bi se moral z velikostjo populacije računski čas skoraj kvadratično povečevati. S tem v mislih naj  $m$  ne bo prevelik. Za izračune v sklopu te naloge smo, za velikost začetne populacije  $N_0 = 100$ , izbrali  $m$  nekje med 110 in 300, odvisno od razmerja  $\beta_r/\beta_s$ .

Časovni razvoj porazdelitve populacije za različne  $\beta_r$  je prikazan na sliki 6. S časom se vse simulacije z  $\beta_r/\beta_s < 1$  premikajo proti manjšim številom. Praviloma, bi se moralo povprečje porazdelitve premikati po eksponentni odvisnosti na kateri temelji naš primer

$$\langle N \rangle(t) = \langle N \rangle(0) e^{(\beta_r - \beta_s)t}, \quad (7)$$

česar nismo eksplisitno preverili zgleda pa kot, da drži.

Vidimo, da so večje razlike  $|\beta_s - \beta_r|$ , porazdelitve bolj ostre. Prav tako opazimo, da obstaja verjetnost, večanja populacije za kratek čas ( $N > N_0$ ), kadar je  $\beta_r > 0$ . Enak pojav je na sliki 7 prikazan z logaritemsko lestvico na y-osi.

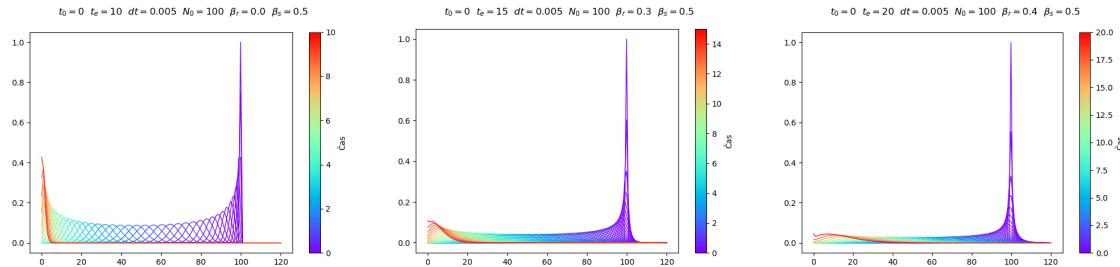


Figure 6: Časovni razvoj porazdelitve populacije za različne faktorje rojstva  $\beta_r$ . Na x-osi je število osebkov v populaciji, na y-osi pa verjetnostna porazdelitev za velikost populacije ob času  $t$ .

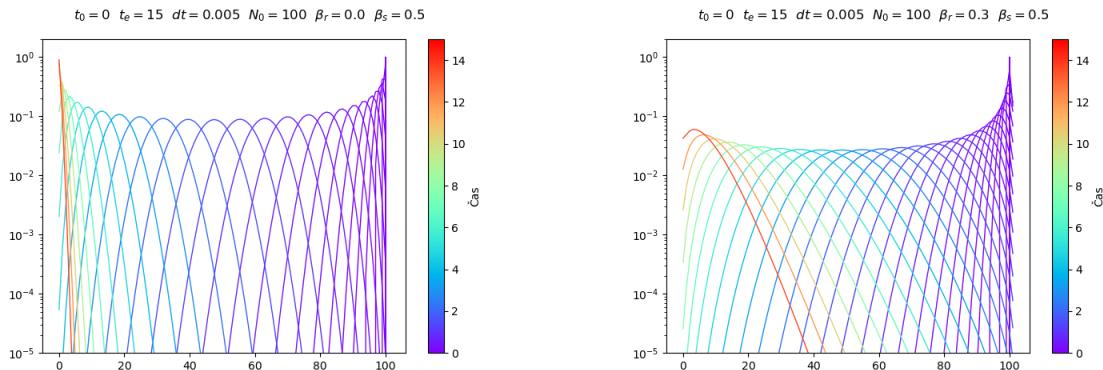


Figure 7: Časovni razvoj prikazan na logaritemski skali. Na x-osi je število osebkov v populaciji, na y-osi pa verjetnostna porazdelitev za velikost populacije ob času  $t$ .

Na sliki 8 lahko opazimo, da krivulja v bližini mrtve populacije ( $N = 0$ ) ni gladka. Velja, da se simulacije, ki zaidejo na  $N = 0$ , ne vrnejo. Simulacije, ki pridejo do  $N = 1$  pa lahko spet zaživijo. S tem razmislekomo si predstavljamo, da se verjetnost za izumrtje s časom akumulira, ostale verjetnosti pa so bolj "pretočne". Na sliki 9 vidimo, da pri rasti populacije (desna slika) take negladkosti na zgornji meji ni.

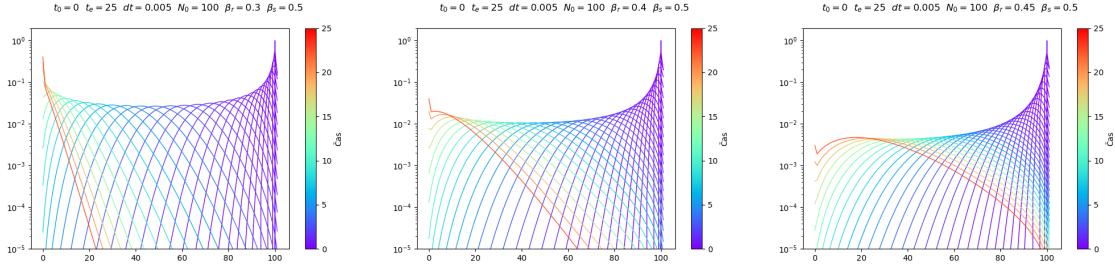


Figure 8: Časovni razvoj populacije za različne faktorje  $\beta_r$ . Na x-osi je število osebkov v populaciji, na y-osi pa verjetnostna porazdelitev za velikost populacije ob času  $t$ .

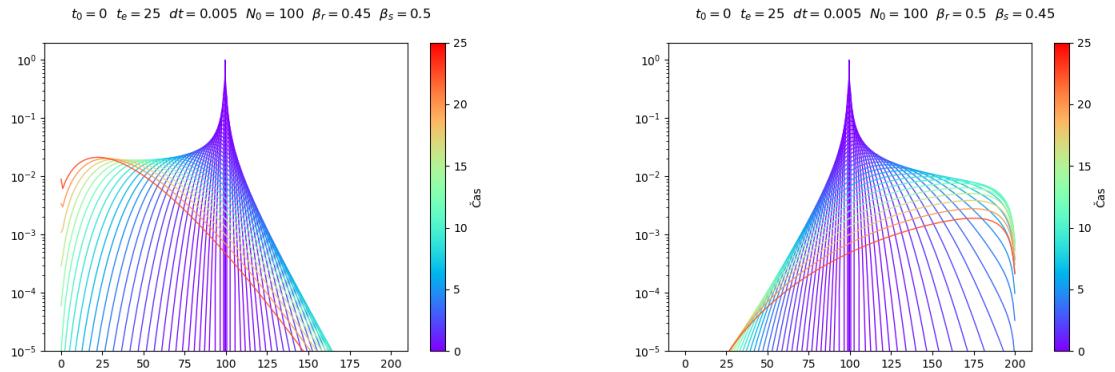


Figure 9: Večanje oz. manjšanje populacije. Na x-osi je število osebkov v populaciji, na y-osi pa verjetnostna porazdelitev za velikost populacije ob času  $t$ .

Poseben primer, ki je prikazan na sliki [10] je  $\beta_s = \beta_r \neq 0$ . V tem primeru pojav zgleda kot nekakšna difuzija. Po dolgem času so verjetnosti za kakršnokoli velikost populacije zelo podobne. Opazimo lahko tudi nekakšno nenanaravno koleno pri meji velikosti populacije. V resnici bi se populacija lahko večala, a smo omejili računski model. Vidimo, da s povečanjem meje omogočimo dodatno večanje populacije. Nedvomno, bi koleno spet opazili za večje čase. Problem postane za večje meje računsko vse bolj zahteven. Poleg tega se zdi kot, da zahtevajo večje matrike in vektorji še manjši časovni korak.

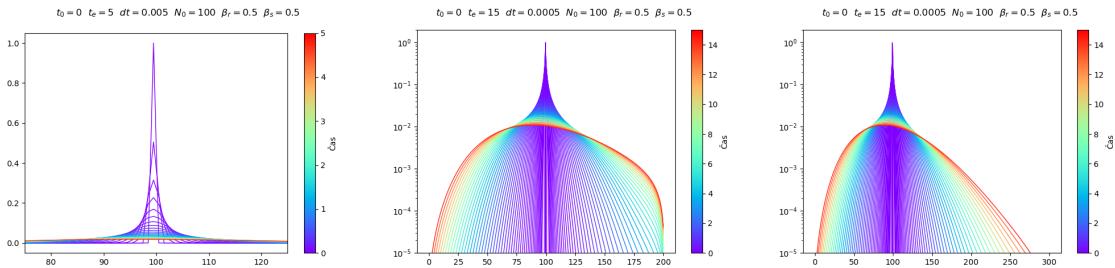


Figure 10: Časovni razvoj porazdelitve populacije kadar velja  $\beta_s = \beta_r \neq 0$ . Leva in sredinska slika prikazujejo enako simulacijo, vektor  $\mathbf{x}$  ima 200 komponent. Desno je slika simulacije s še bolj razširjenim vektorjem;  $\mathbf{x}$  ima 300 komponent. Na x-osi je število osebkov v populaciji, na y-osi pa verjetnostna porazdelitev za velikost populacije ob času  $t$ .

Na sliki [11] vidimo vpliv časovnega koraka na pravilnost rešitev. Za velike populacije ( $N = 300$ ) je korak  $\Delta t = 0.005$  prevelik. Ko, korak zmanjšamo na  $\Delta t = 0.0005$  dobimo smiselne rezultate. Poleg koraka smo tudi skrajšali čas simulacije, saj je računsko dokaj zahtevna.

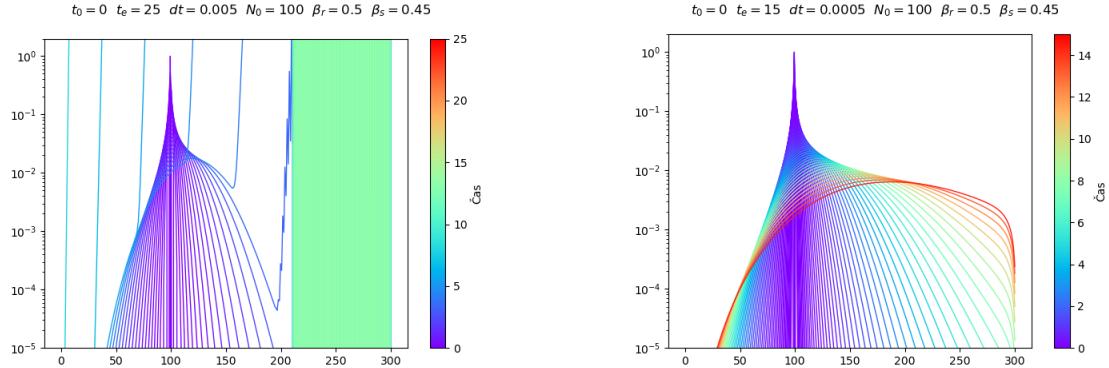


Figure 11: Neuspeh izračuna za prevelike časovne korake  $\Delta t$ . Na x-osi je število osebkov v populaciji, na y-osi pa verjetnostna porazdelitev za velikost populacije ob času  $t$ .

Matrični pristop omogoča zelo enostaven izračun verjetnosti, da bo populacija izumrla v času  $t$ . Verjetnost, da populacija izumre v času  $t$  je kar vrednost 1. komponente vektorja stanja  $(\mathbf{x})_1(t)$ . Verjetnosti za izumrtje populacije v nekem času, za več faktorjev  $\beta_r$  prikazuje slika [12]. Seveda, lahko izračunamo tudi verjetnost, da populacija v nekem času ni izumrla.

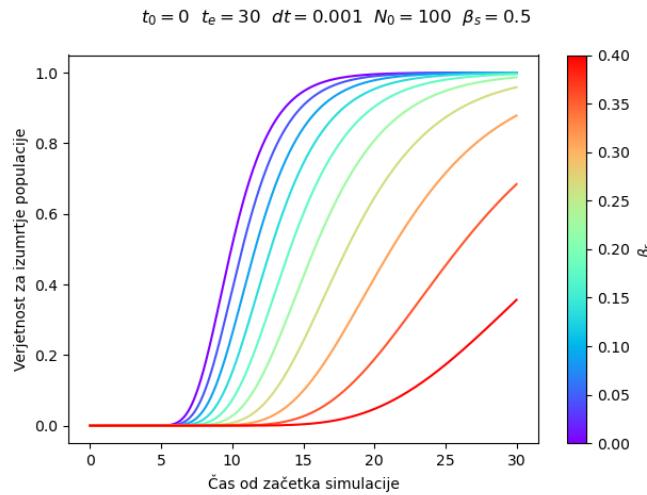


Figure 12: Verjetnost za izumrtje populacije v času  $t$  za različne faktorje rojstva  $\beta_r$ .

### 3 Model zajci-lisice

Zvezen model populacij zajcev in lisic na otoku

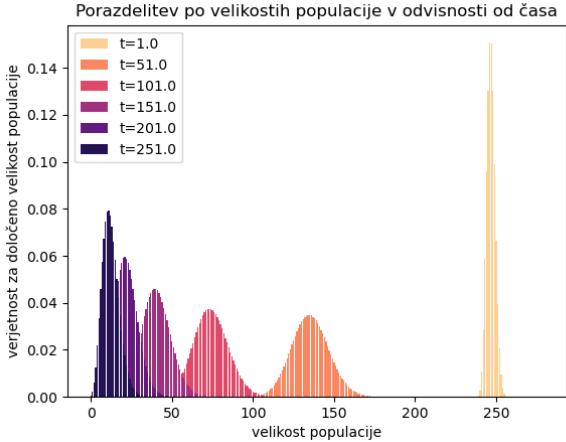
$$\begin{aligned} \dot{Z} &= \rho_Z Z - \sigma_Z Z - \gamma Z L \\ \dot{L} &= \rho_L L - \sigma_L L - \delta Z L \end{aligned} , \quad (8)$$

prepišemo v stohastično obliko

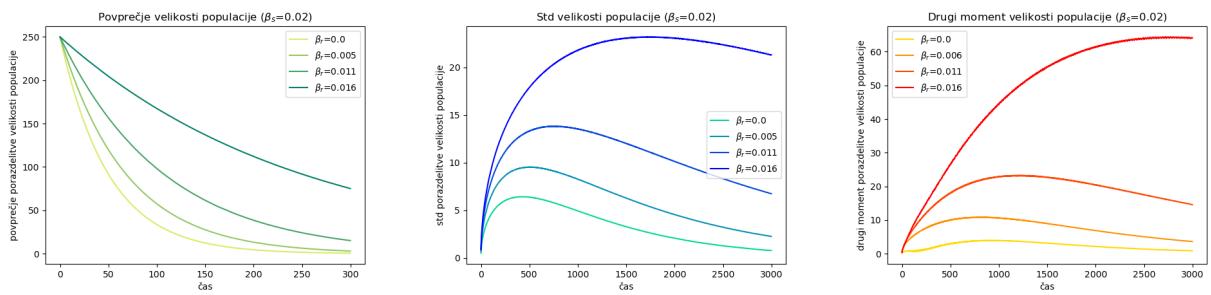
$$\begin{aligned} Z_{i+1} &= Z_i + \phi(\rho_Z Z_i \Delta t) - \phi(\sigma_Z Z_i \Delta t) - \phi(\gamma Z_i L_i \Delta t) \\ L_{i+1} &= L_i + \phi(\rho_L L_i \Delta t) - \phi(\sigma_L L_i \Delta t) - \phi(\delta Z_i L_i \Delta t) \end{aligned} , \quad (9)$$

## Naloga 3:

1. Fazne porfeti
2. Primernjace & cencilitični reditvum
3. Odnosnost med parametri od parametru
4. Katera vrste izmene?



Slika 14: Spreminjanje porazdelitve velikosti populacije v odvisnosti od časa.



Slika 15: Prikaz odvisnosti prvih treh momentov od parametra rojstva.

### 3 Model zajcev in lisic

S podobnim modelom kot prej opisan problem rojevanja in umiranja pa lahko rešimo tudi problem iz ene od prejšnjih domačih nalog in sicer problema zajcev in lisic. S Poissonske porazdelitvijo problem opišemo takole:

$$z_{n+1} = z_n + \mathcal{P}(5\alpha z_n \Delta t) - \mathcal{P}(4\alpha z_n \Delta t) - \mathcal{P}\left(\frac{\alpha}{l_0} z_n l_n\right) \quad (4)$$

$$l_{n+1} = l_n + \mathcal{P}(4\alpha l_n \Delta t) - \mathcal{P}(5\alpha l_n \Delta t) + \mathcal{P}\left(\frac{\alpha}{l_0} z_n l_n\right) \quad (5)$$

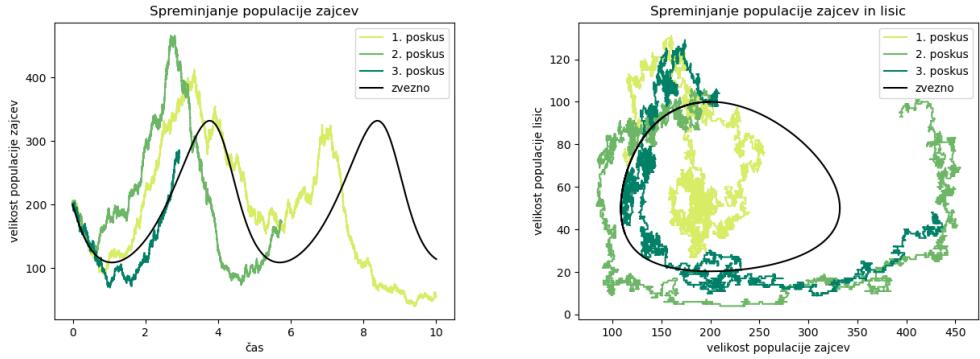
Na sliki 16 sta prikazana diagrama populacije zajcev v odvisnosti od časa ter populacije zajcev v odvisnosti od populacije lisic.

Vidimo, da populacije zelo težko ujamejo ravno pravo krožnico (oz. trajektorijo). To je posledica tega, da imamo kar tri naključne parametre na spremenljivko.

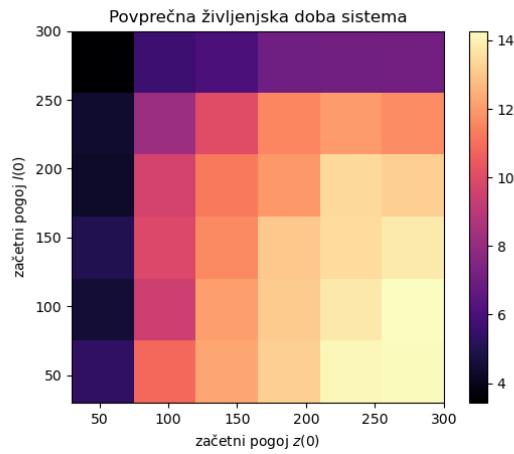
Poglejmo sedaj koliko časa tak sistem sploh lahko živi. Če začnemo v ravnovesju (npr. v  $(z_0, l_0) = (200, 50)$ ) dobimo povprečni čas življenja sistema  $7.2 \pm 3.4$ . Na sliki 17 je prikazan povprečni življenjski čas sistema pri različnih začetnih pogojih za velikost populacije zajcev in lisic.

Vidimo, da začetni pogoji zelo vplivajo na nadaljnji potek. Iz grafa razberemo, da je najbolj optimalno imeti na začetku čim več zajcev in čim manj lisic. Poglejmo še ali prej zmanjka zajcev ali lisic, glej sliko 18.

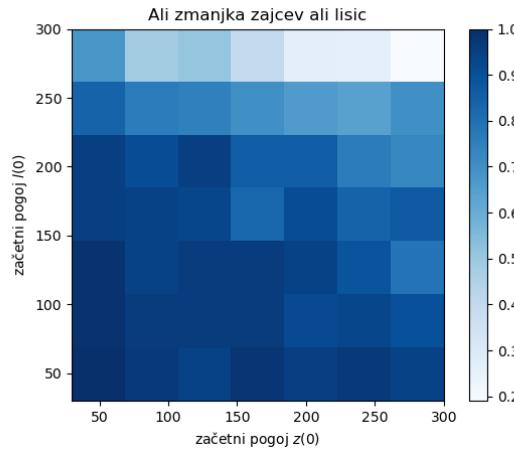
Vidimo, da pri večjih začetnih vrednostih populacije prej zmanjka zajcev kot lisic, pri manjših pa obratno. Prav tako pa je iz diagrama jasno, da večja količina lisic na začetku povzroči večjo verjetnost, da zmanjka zajcev.



Slika 16: (levo) Diagram populacije zajcev v odvisnosti od časa. (desno) Diagram populacije zajcev v odvisnosti od populacije lisic. V obeh primerih je prikazana tudi zvezna analitična rešitev.



Slika 17: Odvisnost povprečnega življenskega časa za sistem pri določenih robnih pogojih  $z(0)$  in  $l(0)$ .



Slika 18: Prikaz verjetnosti, da bodo izumrle lisice (in ne zajci) glede na začetne pogoje. Vrednost 1 pomeni, da bo zagotovo najprej zmanjkalo lisic, vrednost 0 pa da bo zagotovo najprej zmanjkalo zajcev.

## 4 Model epidemije

Za konec pa omenimo še uporabo tega postopka pri modeliranju epidemije (kar je bila tudi ena od prejšnjih nalog). Na sliki 19 sta prikazana primera, ko ne upoštevamo, da imuni postanejo po nekaj

## Naloga 4:

1. Prikazjavez z analitičnimi modelmi
  2. Dov letincev epidemije.  
Mechanizem izboljševanja.  
Čas vrha epidemije.
- $\bar{x}, \sigma_x$  v odvisnosti od parametrov

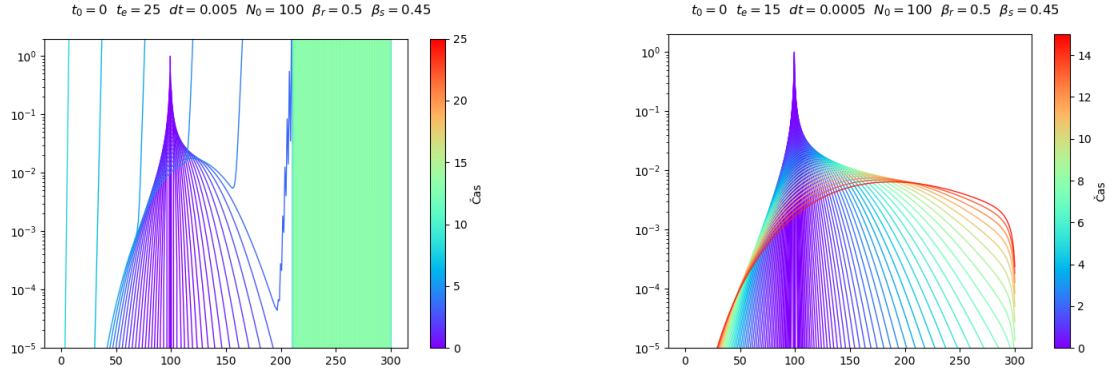


Figure 11: Neuspeh izračuna za prevelike časovne korake  $\Delta t$ . Na x-osi je število osebkov v populaciji, na y-osi pa verjetnostna porazdelitev za velikost populacije ob času  $t$ .

Matrični pristop omogoča zelo enostaven izračun verjetnosti, da bo populacija izumrla v času  $t$ . Verjetnost, da populacija izumre v času  $t$  je kar vrednost 1. komponente vektorja stanja  $(\mathbf{x})_1(t)$ . Verjetnosti za izumrtje populacije v nekem času, za več faktorjev  $\beta_r$  prikazuje slika [12]. Seveda, lahko izračunamo tudi verjetnost, da populacija v nekem času ni izumrla.

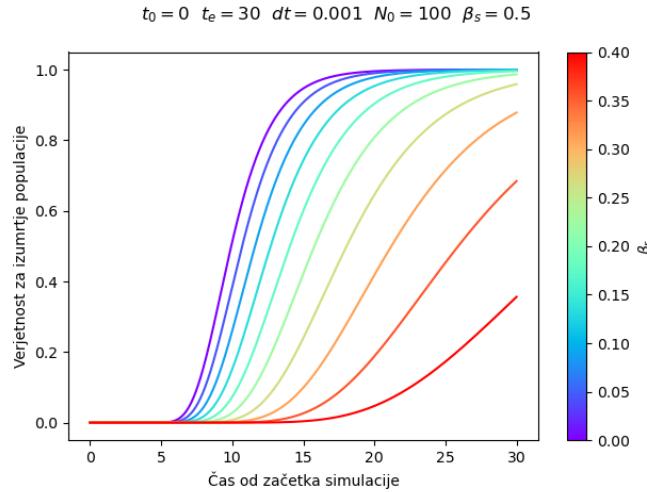


Figure 12: Verjetnost za izumrtje populacije v času  $t$  za različne faktorje rojstva  $\beta_r$ .

### 3 Model zajci-lisice

Zvezen model populacij zajcev in lisic na otoku

$$\begin{aligned} \dot{Z} &= \rho_Z Z - \sigma_Z Z - \gamma Z L \\ \dot{L} &= \rho_L L - \sigma_L L - \delta Z L \end{aligned}, \quad (8)$$

prepišemo v stohastično obliko

$$\begin{aligned} Z_{i+1} &= Z_i + \phi(\rho_Z Z_i \Delta t) - \phi(\sigma_Z Z_i \Delta t) - \phi(\gamma Z_i L_i \Delta t) \\ L_{i+1} &= L_i + \phi(\rho_L L_i \Delta t) - \phi(\sigma_L L_i \Delta t) - \phi(\delta Z_i L_i \Delta t) \end{aligned}, \quad (9)$$

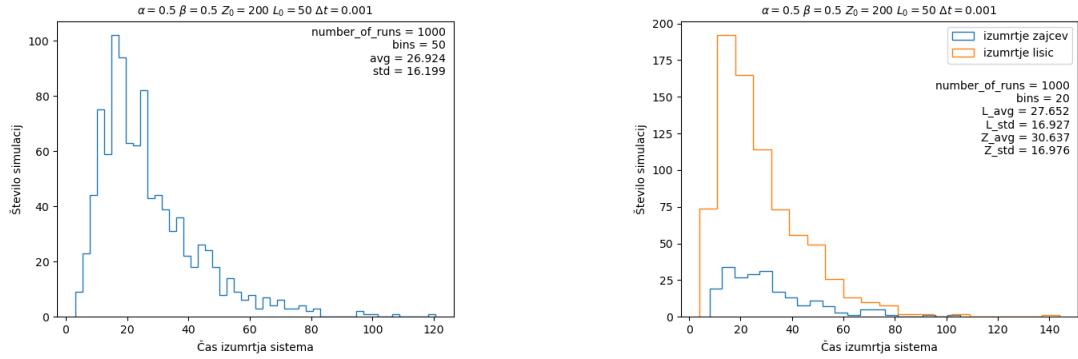


Figure 15: Na levem grafu je prikazana porazdelitev časov izumrtja katerikoli živalske skupine. Na desnem grafu ločimo med zaustavitvijo simulacije, ki jo je sprožilo izumrtje lisic in tisto, ki jo je sprožilo izumrtje zajcev.

## 4 Epidemija

Epidemijo bomo modelirali z zakasnjениmi učinki: inkubacijska doba in čas izgube imunitete. Stohastični model zapišemo kot

$$\begin{aligned} D_{n+1} &= D_n - \phi(\alpha D_n B_{n-n_d} \Delta t) + \phi(\gamma B_{n-n_d} \Delta t) \\ B_{n+1} &= B_n + \phi(\alpha D_n B_{n-n_d} \Delta t) - \phi(\beta B_n \Delta t) \quad , \\ I_{n+1} &= I_n + \phi(\beta B_n \Delta t) - \phi(\gamma B_{n-n_d} \Delta t) \end{aligned} \quad (11)$$

kjer imata  $n_i$  in  $n_d$  vlogo zakasnih časov za *inkubacijsko dobo* oz. za ponovno *dovzetnost*. V tem preprostem modelu ne obravnavamo smrti, kar si je pomembno zapomniti pri obravnavi končnih rezultatov poglavja 4.1. Vidimo, da enačbe ne dopuščajo spremicanja velikosti celotne populacije.

Na sliki 16 vidimo učinek časa zgubljanja imunosti  $\tau_d = n_d \Delta t$ . Potrebno pa je razločiti med  $\tau_d$  in hitrostjo zgubljanja imunosti  $\gamma$ . Vidimo, da je koleno padanja imunih za približno  $\tau_d$  zamaknjeno za vrhom bolnih. Faktor  $\gamma$  določa padanje imunih v kolenu.

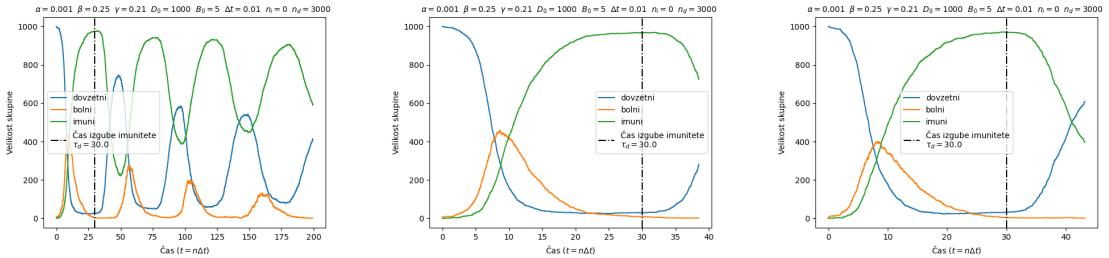


Figure 16: Učinek časa izgubljanja imunosti  $\tau_d = n_d \Delta t$ .

Iz slike 16 vidimo, da lahko pri istih parametrih pride do različno število valov epidemije. To je zaradi stohastičnega pristopa.

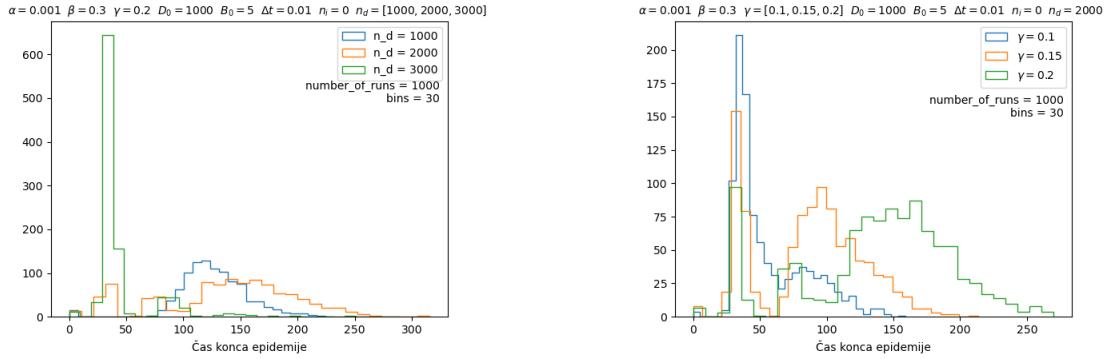


Figure 17: Porazdelitve časov konca epidemije. Na levi sliki spreminjamo čas do zgube imunosti, na desni pa hitrost zgubljanja imunosti. Več vrhov je posledica več valov epidemije.

Možnost več valov se vidi kot več vrhov porazdelitve časov konca epidemije (slika 17). Vidimo, da je verjetnost za malo valov največja pri velikem času zgubljanja imunosti. Za kratke  $\tau_d$  smemo sklepati, da do več valov sploh ne pride. Na sliki 18 je razvidno, da je valov več, a se krivulja bolnih ne približa dovolj blizu  $B = 0$ , da bi se epidemija končala v prvih valovih.

Učinek hitrosti izgubljanja imunosti na število valov epidemije ima veliko bolj jasen vpliv kot čas izgube imunosti (slika 17).

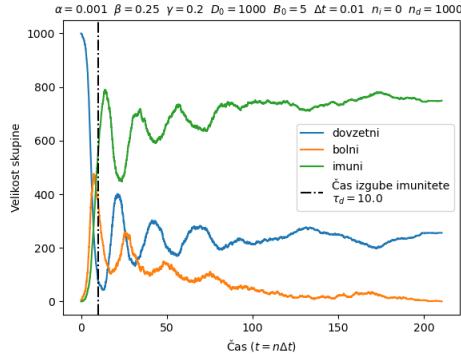


Figure 18: Oscilirajoče padanje obolelih pri majhnem času do izgubljanja imunosti.

#### 4.1 Družbeni povratni učinki: Maske in zabave

Model lahko izboljšamo tako, da glede na število bolnih prilagodimo hitrost širjenja  $\alpha$ . Kadar delež bolnih presega  $m_m$  (meja mask) uvedemo stroge ukrepe nošenja mask in hitrost širjenja pada na  $\alpha_m$ . Kadar pa delež bolnih pade pod  $m_p$  (meja zabav) hitrost širjenja naraste na  $\alpha_p$ . Nekaj primerov simulacij za parametre  $\alpha_m = 0.0005$ ,  $\alpha_p = 0.01$ ,  $m_m = 10\%$  in  $m_p = 0.2\%$  vidimo na sliki 19. Ukrepi poskrbijo, da je število bolnih nizko, zabave pa, da se epidemija ne ustavi prehitro.

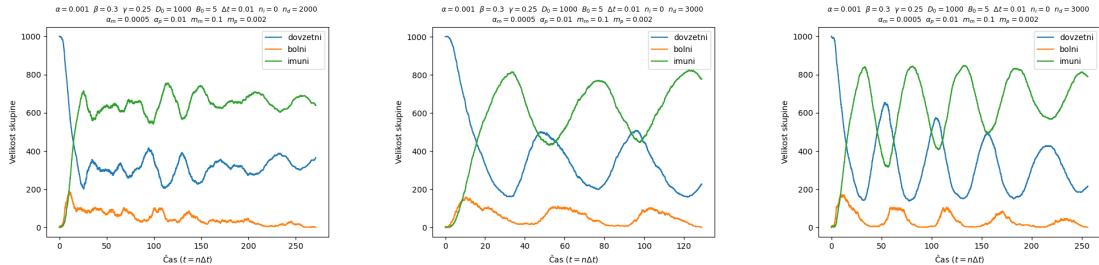


Figure 19: Časovni potek epidemije ob upoštevanju družbenih povratnih učinkov.

Na sliki 20 so prikazane porazdelitve časov epidemije za različne meje za nošenje mask  $m_m$ . Vidimo, da visoka meja hitreje konča epidemijo. Poskrbi za manj valov. S takim pristopom smo mnogokrat presegli dopustno mejo bolnih. Če bi naš model upošteval smrti, bi se to poznalo kot več mrtvih. Nedvomno pa nizka meja maskiranja podaljša epidemijo za naš preprost model, katerega parametri temelijo na tem, kako dobiti valove epidemije in ne na znanstveno določenih vrednosti parametrov.

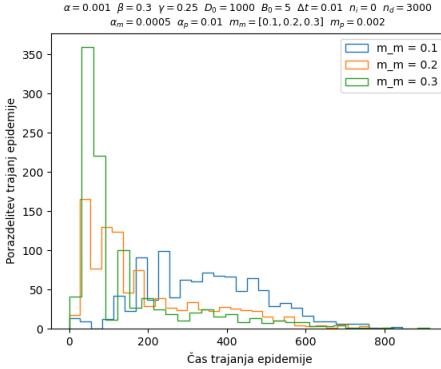


Figure 20: Porazdelitve časov epidemije odvisne od meje nošenja mask  $m_m$ . Pomembno se je zavedati, da naš model ne upošteva smrti! Ukrep mask je poskrbel, da število nikoli ni preseglo določene meje.

## 5 Reaktorska kinetika

Obravnavamo populacijo neutronov: te se naključno absorbirajo in rojevajo, s fisijo tvorijo cepitvene produkte, katerih razpad rojeva nove neutronne. A kot bomo videli je stohastičen pristop za to področje popolnoma neprimeren, ker so populacije tako ogromne. Rečeno drugače, s stohastičnim pristopom ne odkrijemo nič novega v primerjavi z determinističnim pristopom.

Populacijo neutronov in prednikov zakasnih neutronov bomo obravnavali z enogrupno enačbo točkovne kinetike

$$\begin{aligned} \dot{N} &= \frac{\rho - \beta}{\Lambda} N + \lambda C + S_0 \\ \dot{C} &= \frac{\beta}{\Lambda} N - \lambda C \end{aligned}, \quad (12)$$

kjer je  $\rho = \frac{k-1}{k}$  reaktivnost,  $\beta \approx 0.0065$  delež zakasnih neutronov,  $\Lambda = \frac{\ell}{k}$  povprečni življenski čas neutrona v reaktorju,  $\lambda$  razpadna konstanta prednikov  $C$  in  $S_0$  vir neutronov.

Prepisano v obliko primerno za stohastično obravnavo

$$\begin{aligned} N_{i+1} &= N_i + \Theta_{react} - \Theta_{delay} + \Theta_{decay} + \Theta_{source} \\ C_{i+1} &= C_i + \Theta_{delay} - \Theta_{decay} \end{aligned}, \quad (13)$$

kjer so

$$\begin{aligned} \Theta_{react} &= \Theta \left( \frac{\rho}{\Lambda} N_i \Delta t \right) \\ \Theta_{delay} &= \Theta \left( \frac{\beta}{\Lambda} N_i \Delta t \right) \\ \Theta_{decay} &= \Theta (\lambda C_i \Delta t) \\ \Theta_{source} &= \Theta (S_0 \Delta t) \end{aligned}. \quad (14)$$

žrebi po Poissonovi porazdelitvi.

Da sprobammo ali model deluje ga preizkusimo na enostavnem primeru, prikazanem na sliki 21. V tem in vseh nadaljnjih primerih smo začetne populacije neutronov  $N_0$ , njihovih prednikov  $C_0$ , reaktivnost  $\rho_0$  in vir  $\$0$  nastavili tako, da reaktor obratuje v stacionarnih pogojih.

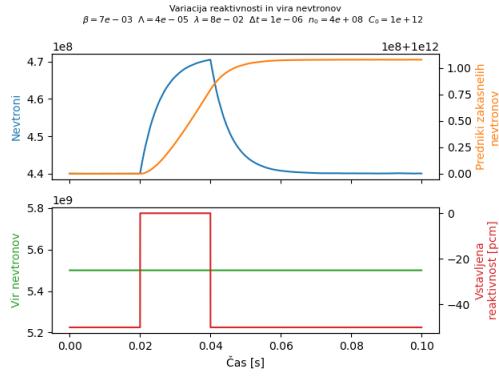


Figure 21: Odziv podkritičnega stabilnega reaktorja na spremembo reaktivnosti.

Odziv na reaktorja na izklop vira se vidi na sliki [22], odziv na padec reaktivnosti pa slika [23]. Da razberemo promptni in zakasneli odziv morali pojavi simulirati dvakrat. Z zelo majhnim časovnim korakom za promptni odziv in večjim za zakasneli odziv.

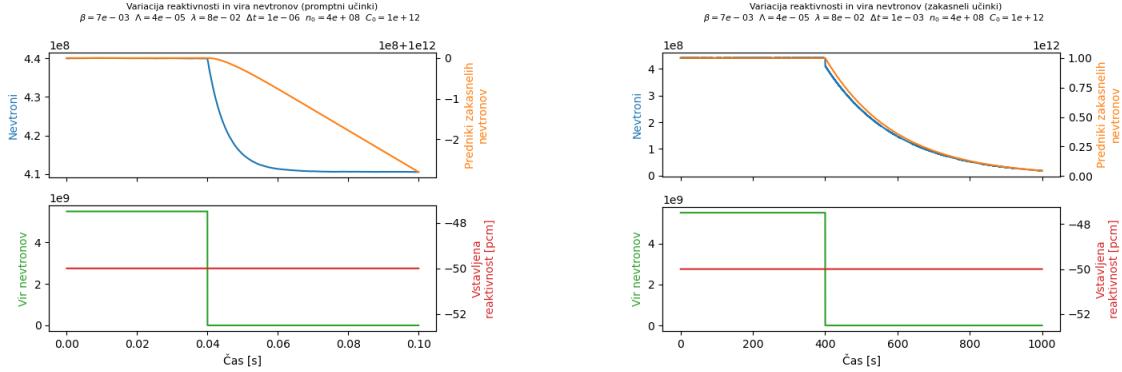


Figure 22: V podkritičnem reaktorju izklopimo vir nevronov.

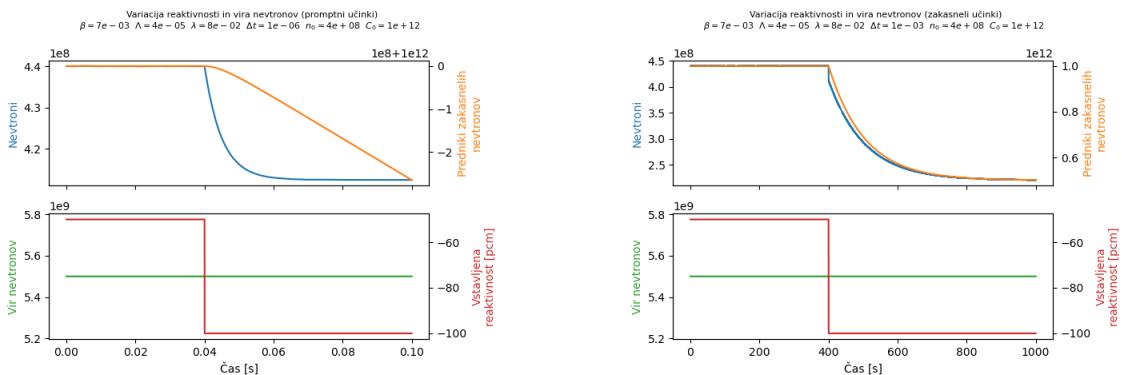


Figure 23: V kritičnem reaktorju odstranimo reaktivnost (vstavimo kontrolno palico).

Da stohastični pristop pride do izraza moramo populacije zmanjšati za več velikostnih redov (sliki [24] in [25]).

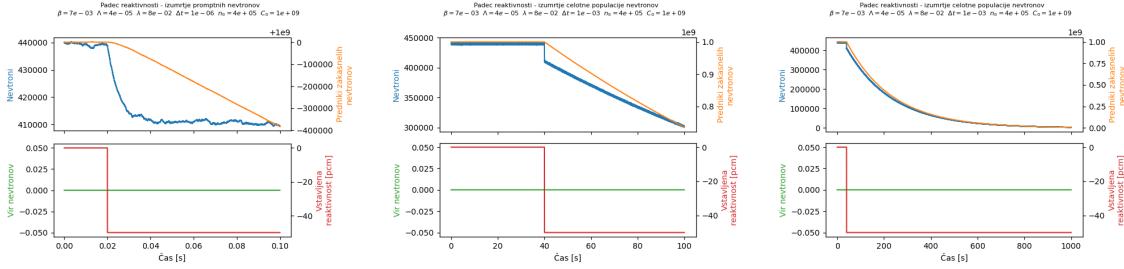


Figure 24: Da opazimo posledice stohastičnega pristopa moramo močno zmanjšati populacije nevtronov.

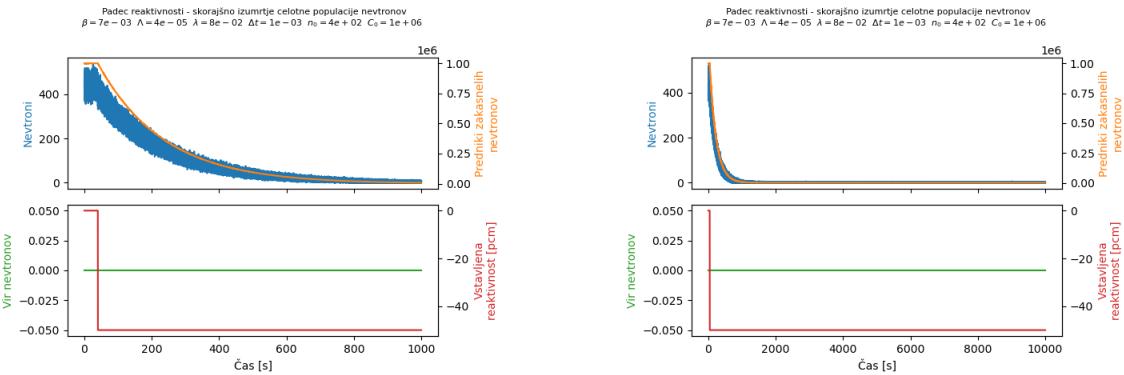


Figure 25: Populacijo nevtronov zmanjšamo na izjemno malo.

## 5.1 Kratek pulz nevtronskega vira

Poglejmo si primer, ko za 0.05 s prižgemo nevtronski vir v reaktorju brez populacije nevtronov in prednikov zakasnih nevtronov. Na sliki 26 je prikazan primer za podkritičen reaktor, na sliki 27 pa kritičen reaktor. Vidimo, da po pulzu praktično celotna populacija nevtronov umre. Vsi kasnejši nevtroni so posledica radioaktivnega razpada nekaterih fizijskih produktov - zakasneli nevtroni. V kritičnem reaktorju je teh nekaj nevtronov dovolj, da še vedno ustvarjajo nove fizijske produkte.

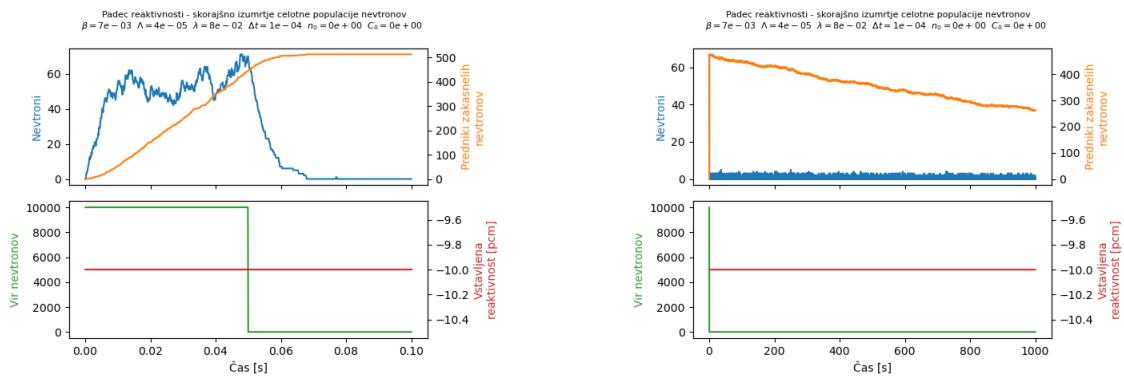


Figure 26: Oba grafa prikazujeta enak pojav. Levi je simuliran na časovni skali pulza, na desnem pa se vidi radioaktivni razpad prednikov zakasnih nevtronov.

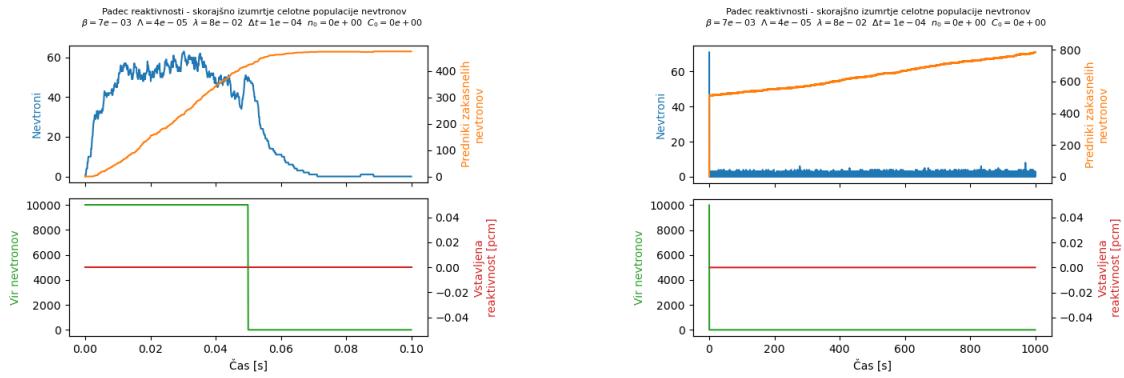


Figure 27: Oba grafa prikazujeta enak pojav. Levi je simuliran na časovni skali pulza, na desnem pa se vidi naraščanje prednikov zakasnih nevronov zaradi kritičnosti reaktorja.

Za ta primer je stohastični pristop bolj zanimiv. Npr. Lahko bi si ogledali porazdelitev časov izumrtja promptnih nevronov.