

9. naloga - Stohastični populacijski modeli

Tadej Lozej 28201055

18. januar 2024

Modelska analiza 1

Predavatelj: prof. dr. Simon Širca
Asistent: doc. dr. Miha Mihovilovič

Kazalo

1	Uvod	1
2	Statistika časov izumrtja	1
2.1	Smrti in rojstva	4
3	Matrika prehodov	6
4	Zajci-Lisice	7
5	Epidemija	9
6	Zaključek	10

1 Uvod

Populacijske modele smo raziskali že v četrti nalogi modelske analize. Podobne primere bomo obravnavali še enkrat, a tokrat stohastično. Diskretizirali bomo vrednosti populacije ter na podlagi Poissonove porazdelitve sprejemali odločitve.

2 Statistika časov izumrtja

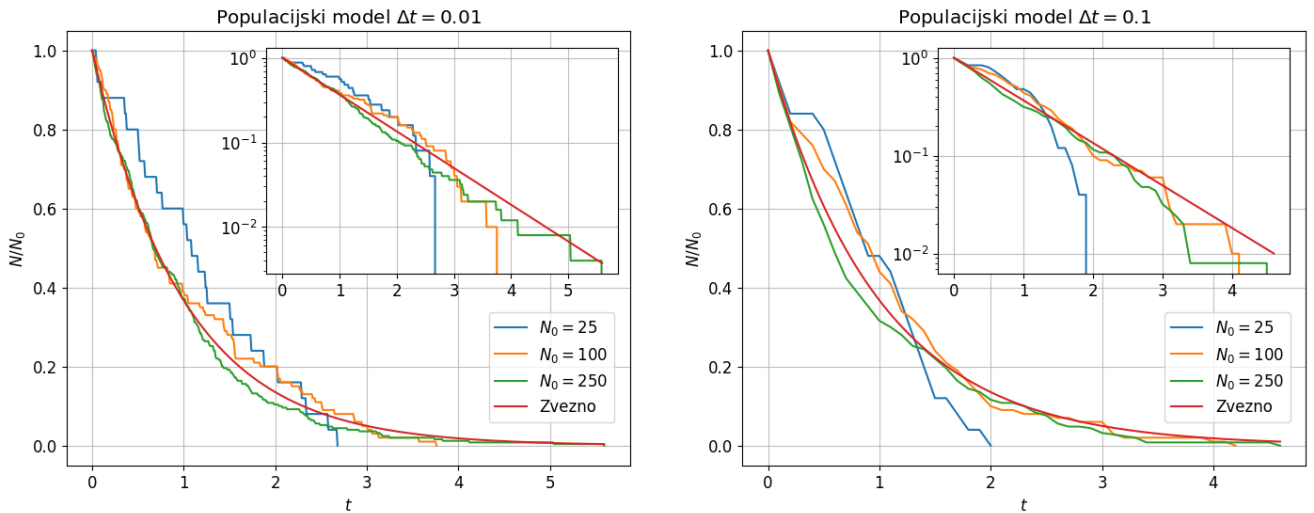
Imamo preprost eksponentno izumirajoči model populacije

$$\dot{N} = -\beta N; \quad N(0) = N_0, \quad (1)$$

kjer je $\beta = 1.0/\text{enota časa}$ koeficient hitrosti izumiranja ter N število osebkov v populaciji. To diferencialno enačbo lahko rešimo eksaktno in preprosto dovolimo, da populacija zvezno upada, ker ni nujno res, saj moramo načeloma ob nekem času imeti ne celo število osebkov. Model zato obravnavamo lahko tudi stohastično. Diskretiziramo čas in ob vsakem časovnem koraku po Poissonovi porazdelitvi žrebamo koliko osebkov ΔN umre. Tako ob vsakem časovnem koraku Δt populaciji prištejemo (oz. odštejemo)

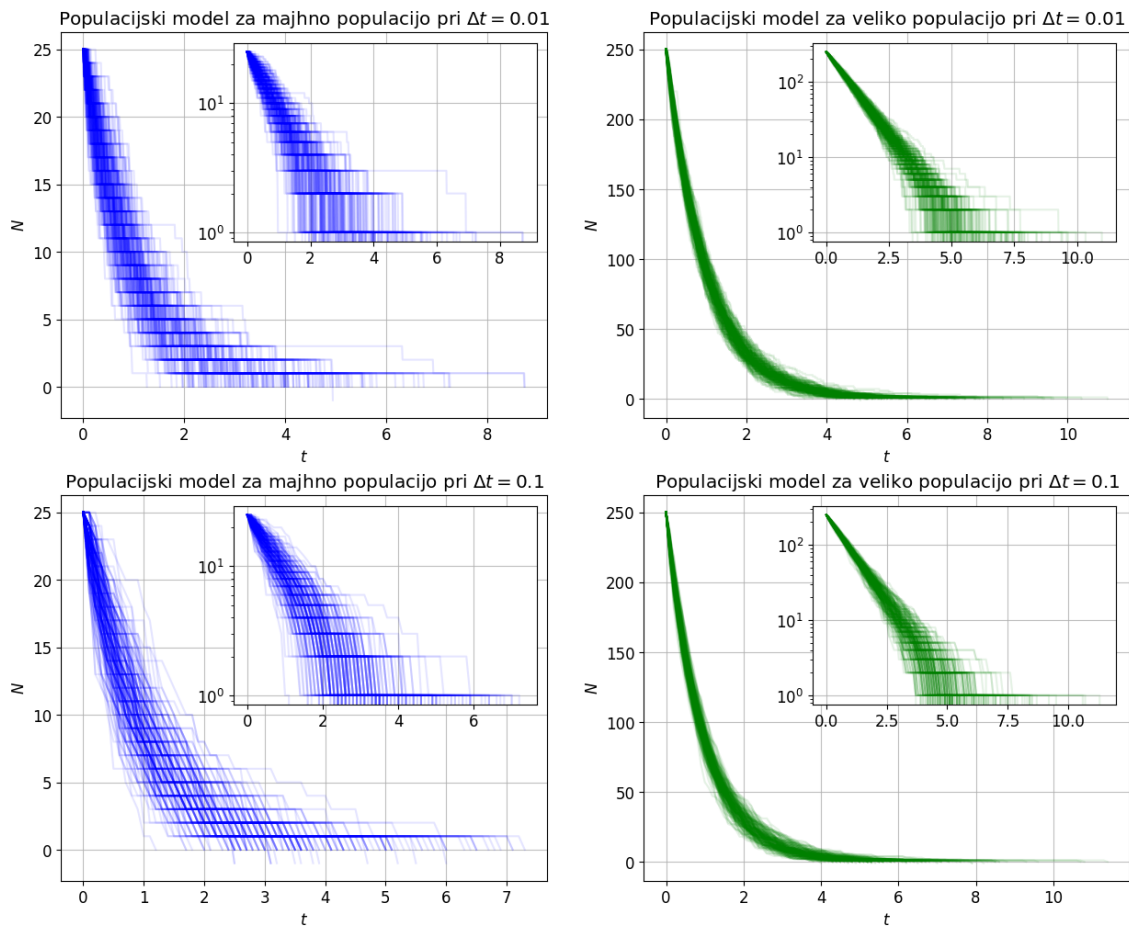
$$\Delta N = N - \varphi(\beta N \Delta t). \quad (2)$$

Na sliki 1 so prikazani poteki izumiranja za različne velikosti populacije ter zvezen model. Vidimo, da večja kot je populacija bolj se približamo zveznemu modelu.



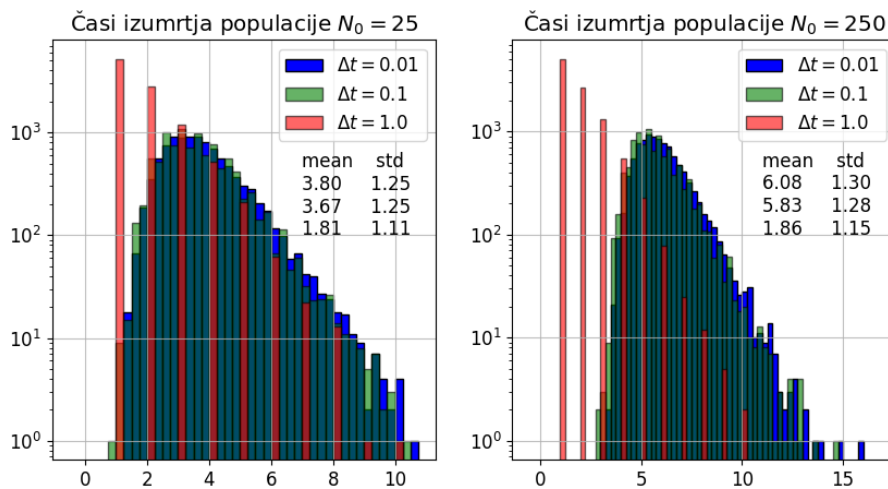
Slika 1: Potek izumiranja za različne velikosti populacije. Vidimo, da večja kot je populacija bolj se približamo zveznemu modelu.

Seveda pa zaradi naključnega žrebanja umrlih ob vsakem času Δt dobimo različne poteke izumrtja. Zanimala nas bo statistika časa izumrtja t_{death} v odvisnosti od velikosti časovnega koraka Δt ter velikosti populacije N_0 . Na sliki 2 je prikazanih več potekov izumrtja za majhno $N_0 = 25$ ter veliko $N_0 = 250$ populacijo za dva različno velika časovna koraka. Na teh slikah vidimo kako raztrešeni so različni časovni poteki izumrtja. Predvsem na grafih z logaritemskimi skalami lahko dobimo občutek za porazdeljenost časa smrti t_{death} za te štiri različne primere. Med različnimi časovnimi koraki ni videti pretežne razlike, lahko pa jasno opazimo, da je v povprečju večja populacija preživela dlje časa.



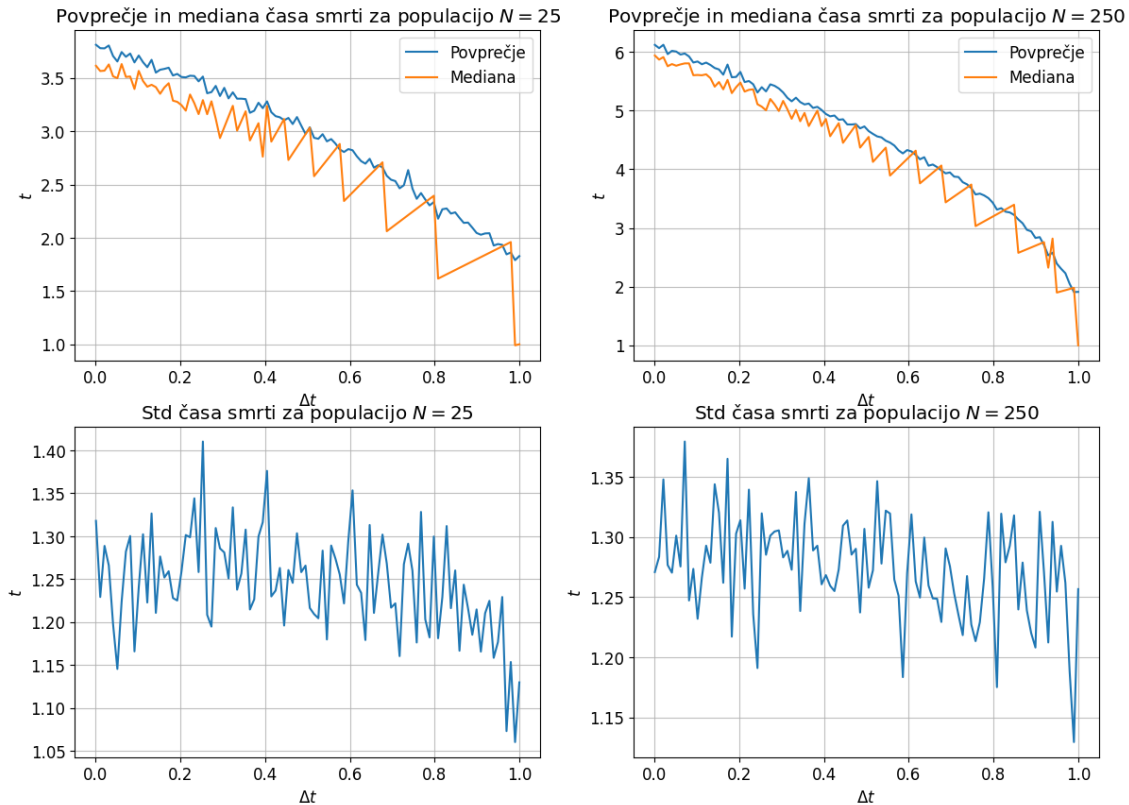
Slika 2: Več potekov izumrtja za majhno $N_0 = 25$ ter veliko $N_0 = 250$ populacijo za dva različno velika časovna koraka. Vidimo raztrešenost časovnih potekov izumrtja.

Poglejmo si za začetek histogramirano porazdelitev času smrti t_{death} za majhno ter veliko populacijo za nekaj različnih velikosti časovnega koraka Δt . Histogrami so prikazani na sliki 3. Predalčki po katerih sortiramo čase smrti so veliki 0.25. Vidimo, da porazdelitev ni zares Gaussovska temveč bolj spominja na Poissonsko. Na grafih so prav podanih nekaj statističnih značilnosti porazdelitev. Sklepamo, da ima s večjim časovnim korakom porazdelitev manjše povprešje in std.



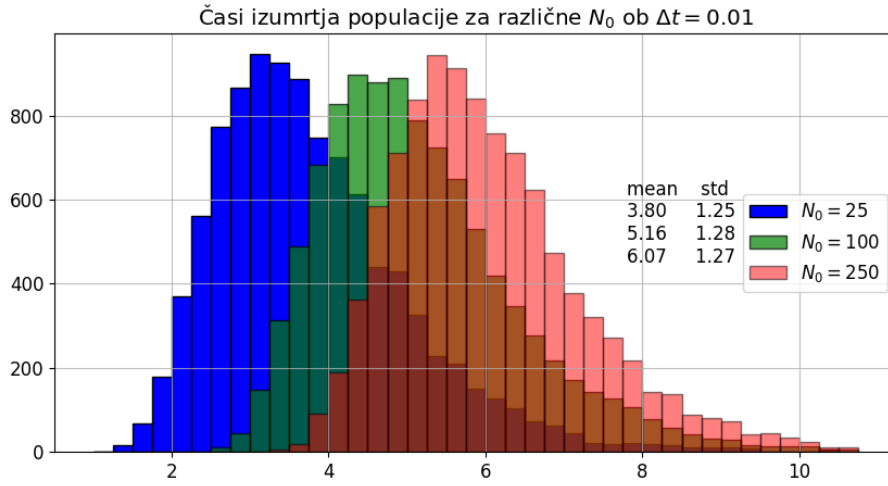
Slika 3: Porazdelitev časov izumrtja populacije t_{death} za majhno populacijo na levo ter veliko populacijo na desno za nekaj različnih velikosti časovnega koraka Δt .

Na prejšnji sliki lahko vidimo statistične značilnosti le za tri primere različnih časovnih korakov. Slika 4 prikazuje tri statistične značilnosti porazdelitve časa smrti v odvisnosti od velikosti časovnega koraka Δt za majhno in veliko populacijo. Pri povprečju, mediani in standardni deviaciji vidimo očiten trend navzdol.

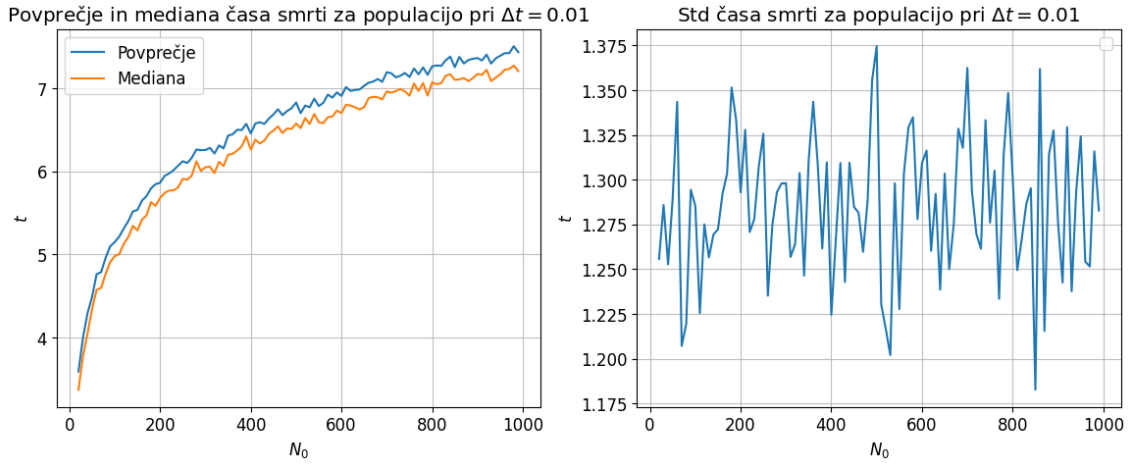


Slika 4: Tri statistične značilnosti porazdelitve časa smrti v odvisnosti od velikosti časovnega koraka Δt za majhno in veliko populacijo. Pri povprečju, mediani in standardni deviaciji vidimo očiten trend navzdol.

Podobno kot smo zdaj opazovali različne porazdelitve za različne vrednosti časovnega koraka Δt lahko opazujemo tudi kako se med seboj razlikujejo porazdelitve z različnimi velikostmi populacije N_0 . Na sliki 5 so prikazane tri takšne porazdelitve. Za vsako porazdelitev sem uporabil 10000 vzorcev in predalčki so široki 0.25 časovnih enot. Vidimo, da se povprečje porazdelitve časov smrti z večanjem populacije premika v desno, kar pomeni, da v povprečju večje populacije živijo dlje časa kot manjše. Histogrami porazdelitev so prikazani le za tri različne velikosti populacije, na sliki 6 pa lahko vidimo tri statistične lastnosti porazdelitve v odvisnosti od velikosti populacije. Očiten na prvi pogled logaritemski ali korenski trend lahko vidimo v povprečju in mediani v standardni deviaciji pa ne vidimo očitnega trenda.



Slika 5: Tri histogrami porazdelitev časa smrti za časovni korak $\Delta t = 0.01$ a različnih velikosti populacij N_0 . Vidimo, da se z večanjem populacije porazdelitev premika v desno.



Slika 6: Tri statistične lastnosti porazdelitev časa smrti v odvisnosti od velikosti populacije. Vidimo očiten naraščajoč trend za povprečje in mediano ter stagniranje standardne deviacije.

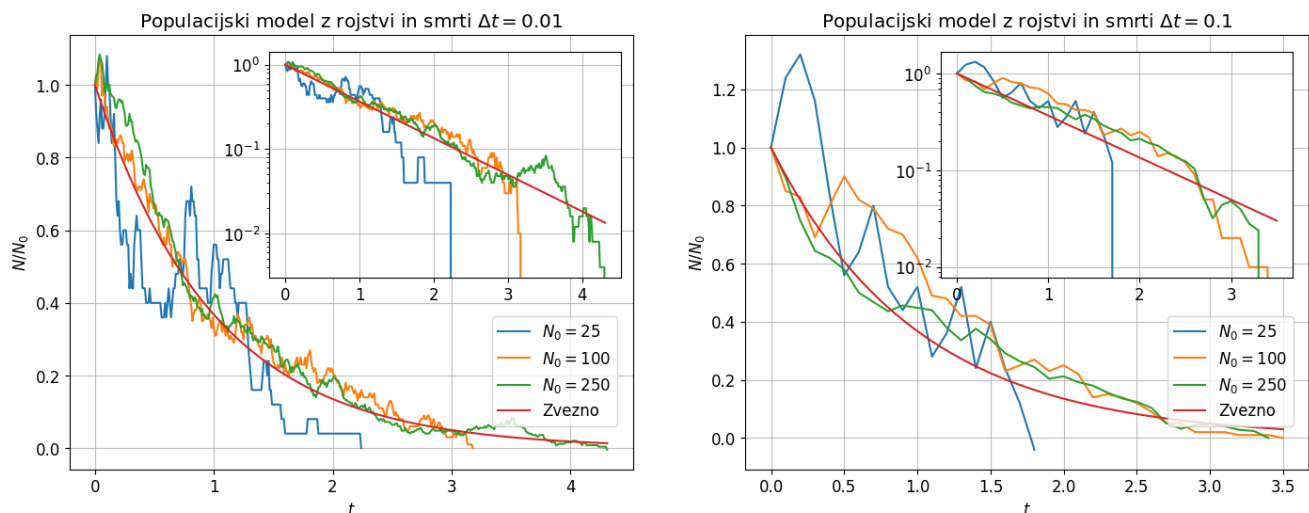
2.1 Smrti in rojstva

Model lahko hitro razširimo tako, da poleg smrti osebkov omogočimo tudi rojstvo le-teh. Tako ob vsakem časovnem koraku Δt populaciji prištejemo (oz. odštejemo) spremembo populacije zaradi smrti in rojstev osebkov

$$\Delta N = \wp(\beta_r N \Delta t) - \wp(\beta_s N \Delta t), \quad (3)$$

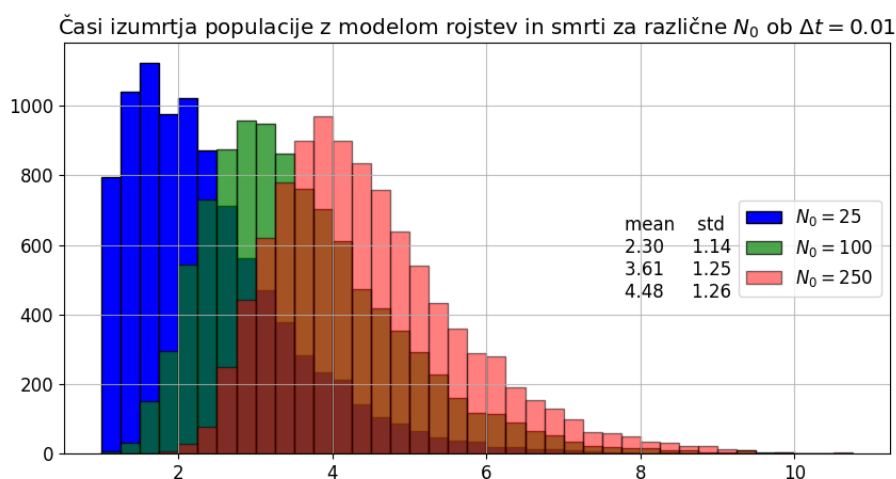
kjer je $\beta_r = 4\beta$ parameter, ki opisuje hitrost rojstev ter $\beta_s = 5\beta$ parameter, ki opisuje hitrost smrti.

Na sliki 7 je prikazan potek izumiranja ob dveh različno velikih časovnih korakih za nekaj različnih velikosti populacije. Vidimo, da večja kot je populacija bolj se približamo zveznemu modelu.



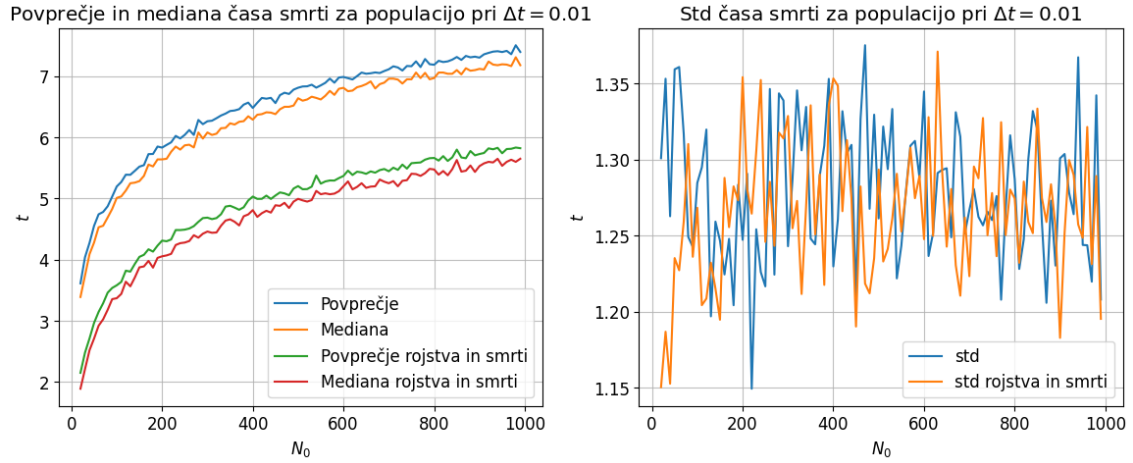
Slika 7: Potek izumiranja za različne velikosti populacije z modelom rojstva in smrti. Vidimo, da večja kot je populacija bolj se približamo zveznemu modelu.

Na sliki 8 si pogledjmo še porazdelitve časa smrti t_{death} pri fiksnem časovnem koraku $\Delta t = 0.01$ ter nekaj različnih velikosti populacije. Z večanjem populacije se kot pričakovano porazdelitve premikajo v desno. Če histograme primerjamo s prejšnjimi vidimo, da v modelu z rojstvi in smrtmi v povprečju populacija umre prej kot če imamo le smrti!



Slika 8: Tri histogrami porazdelitev časa smrti za časovni korak $\Delta t = 0.01$ a različnih velikosti populacij N_0 . Vidimo, da se z večanjem populacije porazdelitev premika v desno.

Zgoraj imamo primer le za tri različne velikosti populacije. Pogledjmo si statistične lastnosti porazdelitev časa smrti t_{death} v odvisnosti od velikosti populacije za model z rojstvi ter smrtmi ter jih primerjajmo z osnosnim modelom brez rojstev. Rezultati so prikazani na sliki 9. Vidimo, da sta povprečje in mediana očitno manjša pri modelu, kjer upoštevamo rojstva in smrti pri vseh velikostih populacije. Standardni odklon se pa pri modelih ne razlikuje veliko. To pomeni, da so porazdelitve približno enako široke ter imajo podobno obliko le porazdelitve časa smrti pri modelu z rojstvi in smrtmi so zamaknjene bolj v levo. V povprečju te populacije izumirajo prej.



Slika 9: Tri statistične lastnosti porazdelitev časa smrti v odvisnosti od velikosti populacije za model brez rojstev in model z rojstvi. Vidimo očiten naraščajoč trend za povprečje in mediano ter stagniranje standardne deviacije. Model z rojstvi ima porazdelitve očitno bolj zamaknjene v levo. To pomeni, da v povprečju te populacije prej umirajo.

3 Matrika prehodov

Verjetnostno porazdelitev sistema ob času t opišemo z vektorjem

$$\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t))^T, \quad (4)$$

kjer so komponente $x_j(t)$ verjetnosti, da ima sistem ob času t , j osebkov. Začetno stanje z N_0 osebki bomo zapisali kot

$$\vec{x}(t=0) = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0), \quad (5)$$

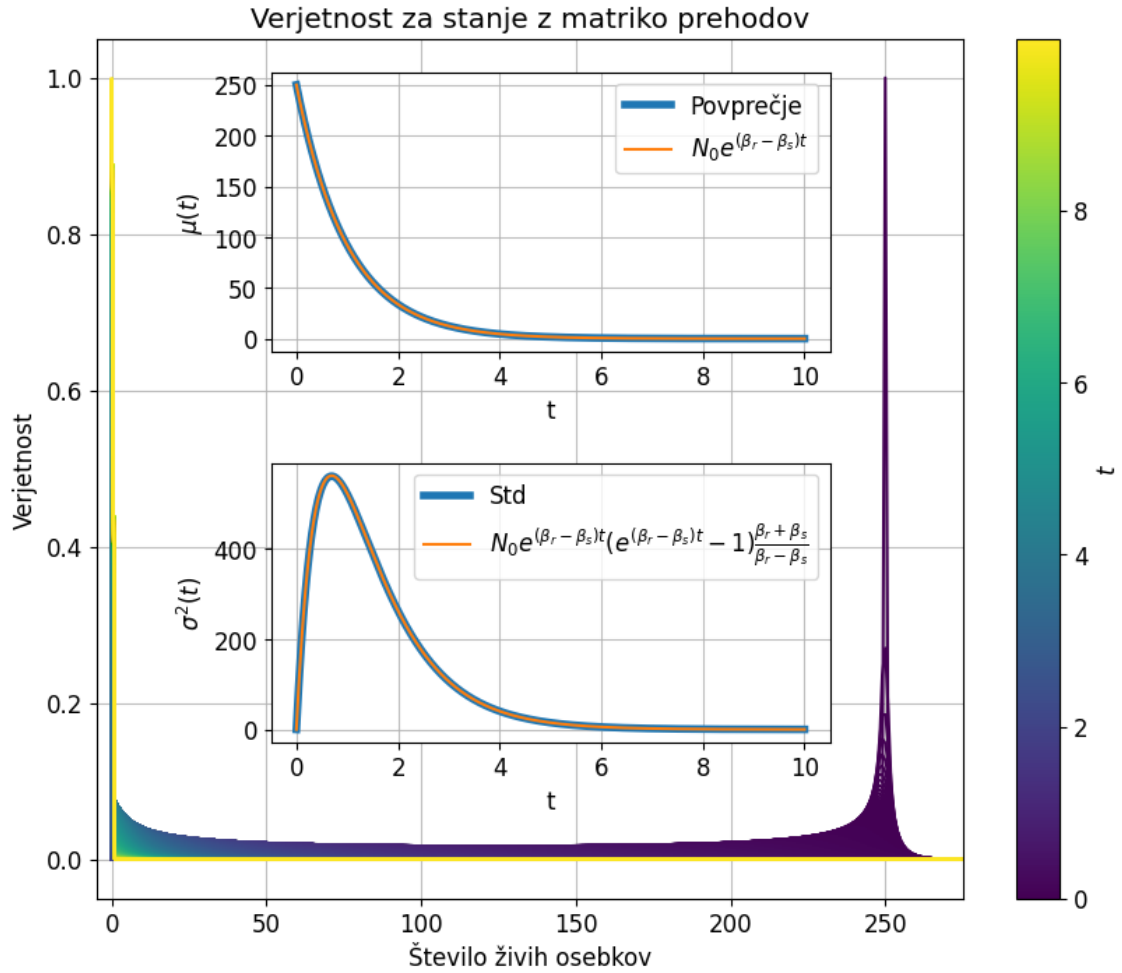
kjer je 1 na mestu N_0 . Vektorja je daljši kot začetna vrednost populacije, saj s tem omogočimo večanje populacije za $\beta_r > 0$. Prehod porazdelitve v naslednji časovni korak izračunamo kot

$$\vec{x}(t + \Delta t) = M\vec{x}(t), \quad (6)$$

kjer matriko prehoda M zapišemo kot

$$\begin{bmatrix} 1 & 1\beta_s\Delta t & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 - 1(\beta_r\beta_s)\Delta t & 2\beta_s\Delta t & 0 & \dots \\ 0 & 1\beta_r\Delta t & 1 - 2(\beta_r\beta_s)\Delta t & 3\beta\Delta t & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Na sliki 10 so prikazani rezultati dobljeni z matirko prehoda za veliko populacijo. Na sliki sta poleg verjetnostne porazdelitve stanj od časa prikazana tudi prvi moment (povprečje) porazdelitve v odvisnosti od časa ter standardni odklon v odvisnosti od časa. Vidimo, da se napovedani funkciji za povprečje in std ujemata z izmerjenimi.



Slika 10: Verjetnostna porazdelitev stanj v odvisnosti od časa pridobljena z matriko prehodov. Prikazan je tudi prvi moment (povprečje) porazdelitve v odvisnosti od časa ter standardni odklon porazdelitve.

4 Zajci-Lisice

S podobnim stohastičnim modelom lahko opišemo tudi problem ene od prejšnjih domačih nalog in sicer problem zajcev in lisic. S Poissonsko porazdelitvijo problem opišemo z enačbami

$$Z_{n+1} = Z_n + \wp(\rho_Z Z_n \Delta t) - \wp(\sigma_Z Z_n \Delta t) - \wp(\gamma Z_n L_n \Delta t) \quad (8)$$

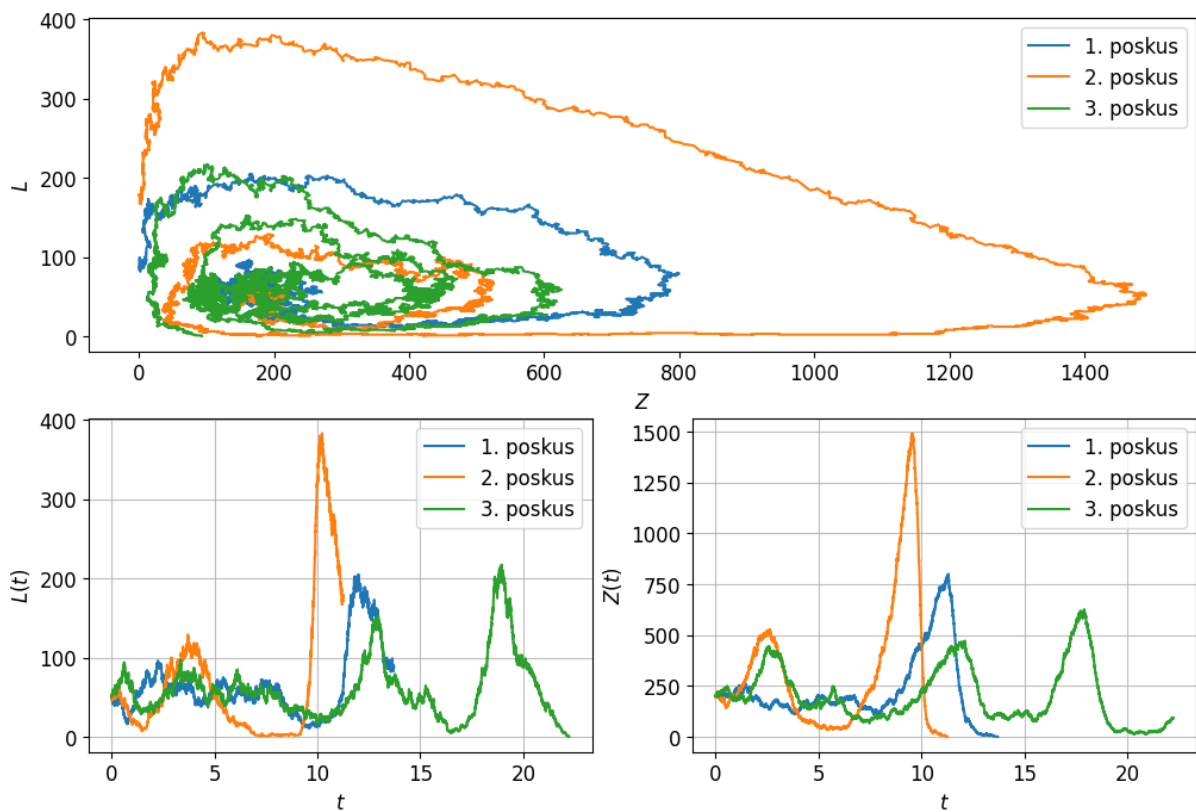
$$L_{n+1} = L_n + \wp(\rho_L L_n \Delta t) - \wp(\sigma_L L_n \Delta t) - \wp(\delta Z_n L_n \Delta t), \quad (9)$$

$$(10)$$

kjer so

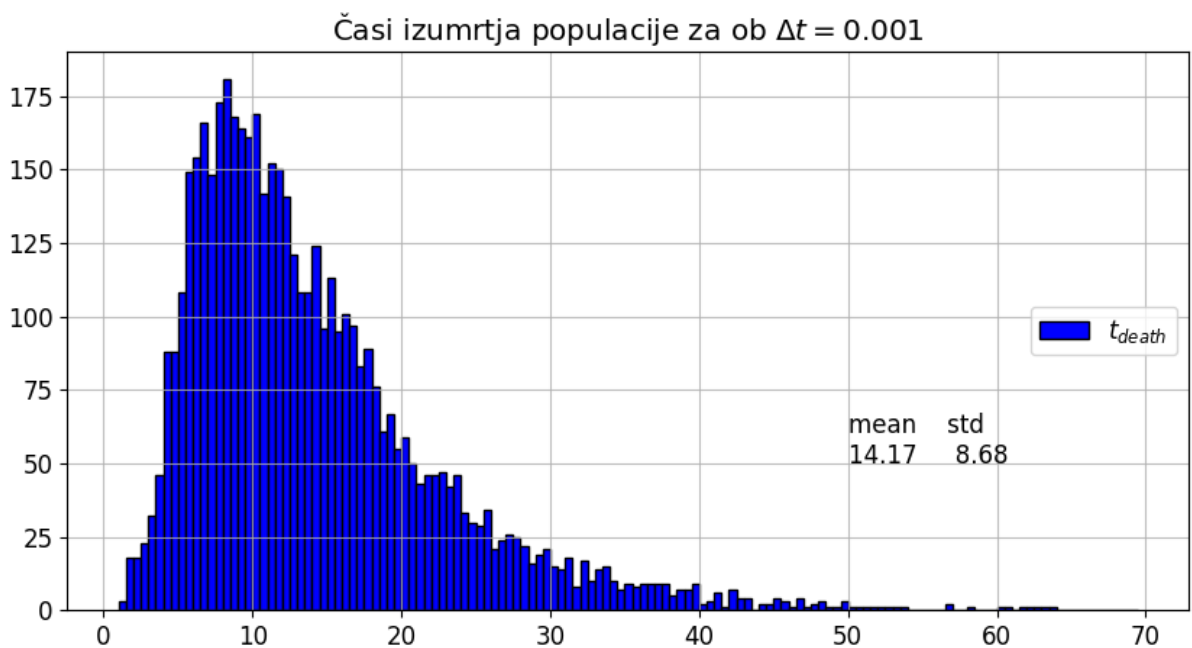
$$\rho_Z = 5\alpha, \quad \sigma_Z = 4\alpha, \quad \rho_L = 4\beta, \quad \sigma_L = 5\beta, \quad \gamma = \frac{\alpha}{L_0} \quad \text{in} \quad \delta = \frac{\beta}{Z_0}.$$

Tukaj sta α in β prosta parametra ter L_0 ter Z_0 začetni vrednosti populacije lisic oz. zajcev. za vrednosti β in α vzamemo kar preprosto $\beta = \alpha = 1$. Vse trajektorije oz. gledane scenarije bomo začeli v zastojni točki $(Z_0, L_0) = (200, 50)$. Na sliki 11 so prikazani trije taki scenariji v faznem prostoru lisic in zajcev. Prav tako so na spodnjih dveh grafih prikazani časovni poteki populacije lisic in populacije zajcev. Trajektorija se ustavi, ko izumrejo zajci ali lisice. V naših treh primerih v prvih dveh izumrejo lisice v tretjem pa zajci. Zanima nas statistika časa izumrtja ene izmed populacij, če začnemo v zastojni točki.



Slika 11: Tri trajektorije v faznem prostoru lisic in zajcev, ki se začnejo v zastojni točki $(Z_0, L_0) = (200, 50)$.

Na sliki 12 vidimo histogram porazdelitve časov smrti sistema. Histogram vsebuje 5000 scenarijev. V teh 5000 scenarijih so lisice izumrle večkrat, in sicer 77,3% scenarijev.



Slika 12: Histogram porazdelitve časov izumrtja scenarijev, ki se začnejo v zastojni točki $(Z_0, L_0) = (200, 50)$.

5 Epidemija

Prav tako lahko stohastično obravnavamo model epidemije, ki smo ga zvezno obravnavali v četrti nalogi pri populacijskih modelih. V takšni obravnavi lahko brez reševanja zakasnelih diferencialnih enačb v sistemu upoštevamo to, da imuni čez nekaj časa postanejo spet dovzetni. Stohastični model zapišemo kot

$$D_{n+1} = D_n - a + b \quad (11)$$

$$B_{n+1} = B_n + a - c \quad (12)$$

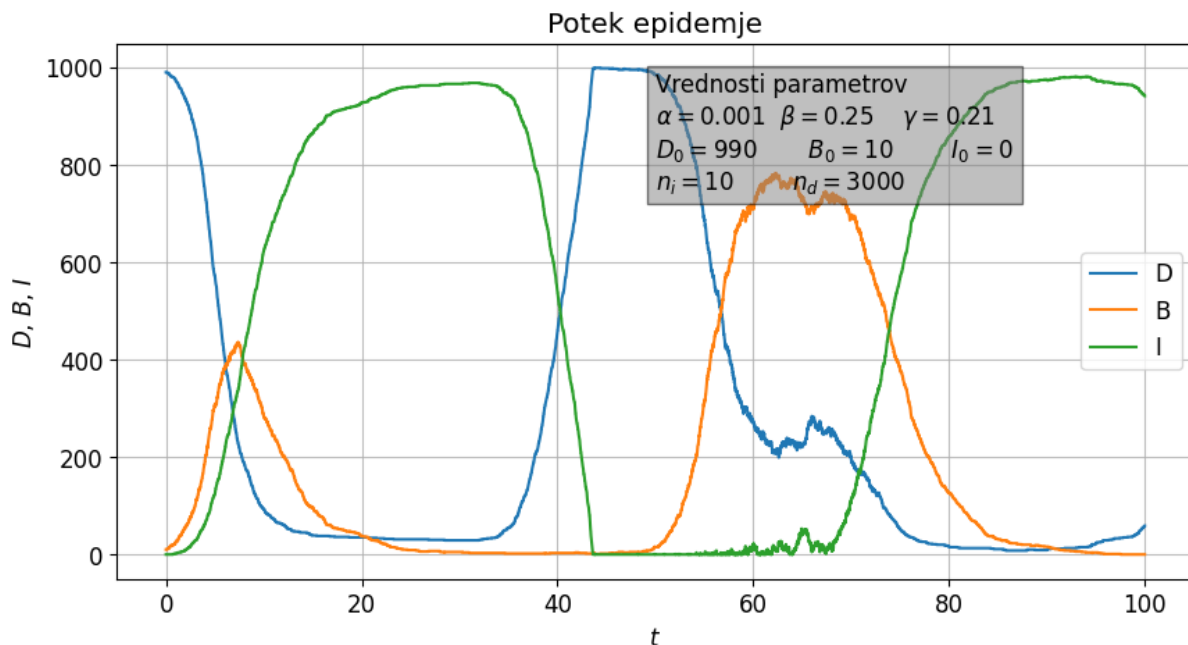
$$I_{n+1} = I_n + c - b, \quad (13)$$

kjer so

$$a = \wp(\alpha D_n B_{n-n_i} \Delta t), \quad b = \wp(\gamma I_{n-n_d} \Delta t), \quad \text{in} \quad c = \wp(\beta B_n \Delta t)$$

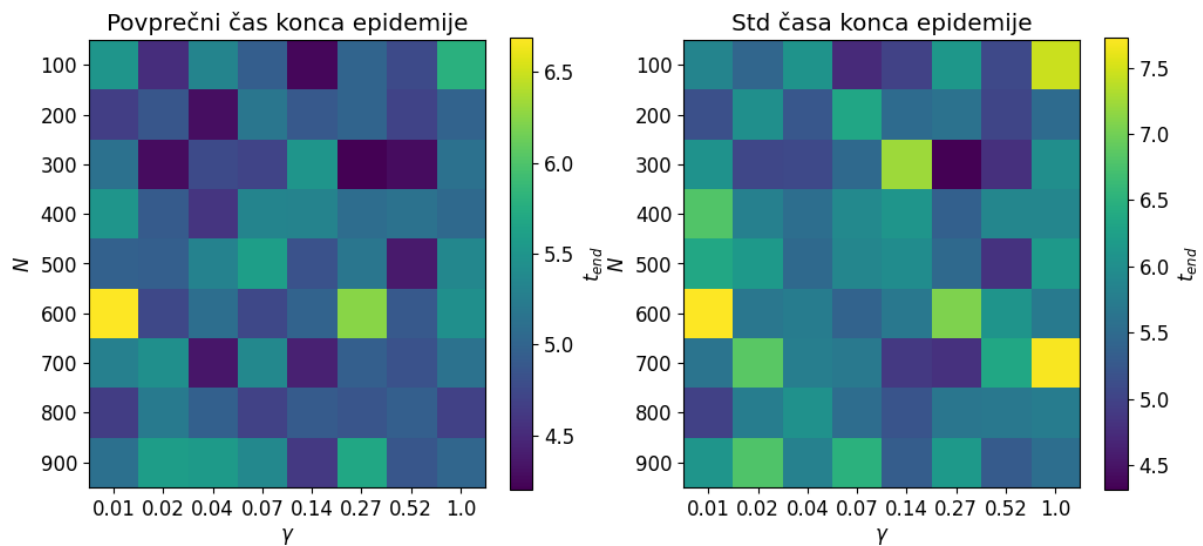
Poissonsko žrebana naključna števila. Pomembno je, da v vsakem koraku števila a , b in c žrebamo le enkrat ter jih nato upoštevamo v enačbah (11)-(13), saj se tako število celotne populacije ohranja! V teh Poissonsko porazdeljenih številih imamo tudi parametre α , β in γ , ki upoštevajo nalezljivost bolezni (večji kot je α bolj je nalezljiva bolezen), hitrost prebolevanja (večji kot je β hitreje osebek preboli bolezen) ter hitrost izgube imunosti (večji kot je γ hitreje osebek izgubi imunost). Parametra n_i in n_d pa narekujeta trajanje inkubacijske dobe ter trajanje imunosti.

Na sliki 13 vidimo primer poteka epidemije za parametre zapisane na sliki. Vidimo, da je v primeru drugi val epidemije hujši kot prvi. To povzroči rast števila imunih in nato padec bolnih na 0 in konec epidemije.



Slika 13: Potek epidemije za vrednosti parametre zapisane na sliki.

Za vsak scenarij epidemije začnemo z enim procentom bolanih in 99% dovzetnih populacije. Tako začnemo spreminjati velikost populacije N ter parameter γ . Druge parametre ohranimo pri enaki vrednosti kot na sliki 13. Za vsako kombinacijo parametrov simuliramo 200 scenarijev (kar ni veliko) in si zabeležimo povprečni čas konca epidemije ter standardni odklon porazdelitve. Rezultati so prikazani na sliki 14. Zanimivo, da za izbrane parametre ne vidimo nobenega izrazitega trenda.



Slika 14: Povprečen čas in standardno odstopanje konca epidemije v odvisnosti od velikosti populacije ter parametru γ .

6 Zaključek

Stohastično smo obravnavali različne populacijske modele. Model eksponentnega izumrtja, model zajcev in lisic ter model epidemije. Predvsem nas je zanimala statistika nekaj karakterističnih časov.