

Modelska analiza I

Naloga 111

5. 1. 2023



11. naloga – Optimalno filtriranje

Kadar z zaporednimi meritvami spremljamo časovni razvoj procesa, katerega dinamiko poznamo, lahko s filtriranjem dosežemo občutno boljšo natančnost, kot jo dajejo surove meritve. Kalmanov filter deluje na principu optimalnega uteževanja linearne napovedi stanja ter novih meritov, kar doseže s sprotnim vodenjem evidence o kovarianci trenutne ocene stanja.

Naj bo \mathbf{x}_n vektor stanja sistema ob času n , P_n pa pripadajoča kovariančna matrika, ki opisuje njegovo statistično negotovost. Potrebujemo še začetno stanje \mathbf{x}_0^+ ter kovarianco P_0^+ , ki ju običajno dobimo iz prve surove meritve. Komponentam stanja, ki niso na voljo, nastavimo velike začetne kovariance.

Kalmanov filter poteka v dveh korakih. Prvi korak je izvedba časovnega koraka na trenutni napovedi stanja. Fizikalni sistem naj uboga časovno evolucijo $\mathbf{x}_{n+1} = F_n \mathbf{x}_n + \mathbf{c}_n + \mathbf{w}_n$, kjer je F_n prehodna matrika sistema, \mathbf{c}_n kontrolni vektor, \mathbf{w}_n pa vektor Gaussovega šuma s povprečjem 0 in kovariančno matriko Q_n . Napovemo novo stanje \mathbf{x}_{n+1}^- ter njegovo kovariančno matriko P_{n+1}^- :

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{n+1}^- &= F_n \mathbf{x}_n^+ + \mathbf{c}_n, \\ P_{n+1}^- &= F_n P_n^+ F_n^T + Q_n.\end{aligned}$$

Sledi izboljšava te napovedi z novimi meritvami. V splošnem ne merimo neposredno komponent vektorja stanja \mathbf{x}_n , temveč neko linearno kombinacijo $\mathbf{z}_n = H_n \mathbf{x}_n + \mathbf{r}_n$, kjer je H_n matrika, ki določa, kaj merimo, \mathbf{r}_n pa šum meritve s kovariančno matriko R_n . Matrika H_n je lahko singularna, če merimo manj spremenljivk, kot je dimenzija sistema.

$$\begin{aligned}K_{n+1} &= P_{n+1}^- H_{n+1}^T (H_{n+1} P_{n+1}^- H_{n+1}^T + R_{n+1})^{-1}, \\ \mathbf{x}_{n+1}^+ &= \mathbf{x}_{n+1}^- + K_{n+1} (\mathbf{z}_{n+1} - H_{n+1} \mathbf{x}_{n+1}^-), \\ P_{n+1}^+ &= (I - K_{n+1} H_{n+1}) P_{n+1}^-.\end{aligned}$$

Prva enačba določa izboljšanje natančnosti stanja zaradi novih meritov, K_{n+1} je pa faktor ojačanja, ki določa, s kolikšno utežjo nova meritve prispeva k popravku.

1. Tipičen primer uporabe Kalmanovega filtra je rekonstrukcija poti in hitrosti vozila na podlagi GPS podatkov o lokaciji, sprotnih podatkov o hitrosti vozila ter pospeškov z akcelerometra. V datoteki `kalman_cartesian_data.dat`¹ so po stolpcih podani čas t , zašumljene meritve položaja (x_n, y_n), hitrosti ($v_{x,n}, v_{y,n}$) ter pospeškov ($a_{x,n}, a_{y,n}$). Eksaktne vrednosti položajev in hitrosti za kontrolo pravilnosti najdete v datoteki `kalman_cartesian_kontrola.dat`. Vse količine so v osnovnih SI enotah.

V našem primeru je vektor stanja $\mathbf{x} = (x, y, v_x, v_y)$, kontrolni vektor dobimo iz pospeška, $\mathbf{c} = (0, 0, a_x \Delta t, a_y \Delta t)$, prehodna matrika sistema je konstantna in izhaja iz kinematičnih zvez,

$$F = \begin{bmatrix} I_{2 \times 2} & I_{2 \times 2} \Delta t \\ 0 & I_{2 \times 2} \end{bmatrix},$$

šum časovne evolucije sledi iz napake pospeška, $Q_n = \text{diag}(0, 0, \sigma_a^2 \Delta t^2, \sigma_a^2 \Delta t^2)$, šum meritov pa iz napak GPS podatkov ter hitrosti, $R_n = \text{diag}(\sigma_{xy}^2, \sigma_{xy}^2, \sigma_v^2, \sigma_v^2)$.

Podatki so vzorčeni vsakih $\Delta t = 1.783$ s. Za pospeške in GPS podatke sta znani absolutni napaki $\sigma_{xy} = 25$ m, $\sigma_a = 0.05 \text{ ms}^{-2}$, za hitrost pa poznamo relativno napako: $\sigma_v = 0.01 \|\mathbf{v}\|$, pri čemer napako vseeno navzdol omejimo na 1 km/h.

Napovej trajektorijo vožnje ter časovno odvisnost komponent hitrosti, v primeru, da vzorčenje ni tako gosto, kot je podano v datoteki, temveč dobimo le vsako peto meritve hitrosti in vsako

¹Na voljo na strani <http://predmeti.fmf.uni-lj.si/modelska/podatki>.

deseto meritve lokacije. Katere meritve so na voljo, določate z matriko H_n , ki je v našem primeru vedno diagonalna.

Kovarianca P_n vam pomaga pri določanju intervalov zaupanja za dobljene vrednosti, prav tako je koristno spremljati residue $\|\mathbf{z}_{n+1} - H_{n+1}\mathbf{x}_{n+1}^-\|$.

2. S telefonom lahko merimo le lokacijo in pospeške, informacij o hitrostih pa nimamo. Kako dobro lahko določite trajektorijo vožnje in potek hitrosti, če podatki o hitrosti niso na voljo? Kaj pa obratno, če so znane samo hitrosti in pospeški?
3. V resnici nam akcelerometer podaja pospeške $\mathbf{a} = (a_t, a_r)$ glede na trenutno orientacijo vozila. Med kontrolnim vektorjem in nehomogenim delom dinamičnega modela zato stoji še ena linearна preslikava B_n : $\mathbf{c}_n = B_n \mathbf{u}_n$. V tem primeru gre za ortogonalno transformacijo, definirano s trenutno oceno hitrosti:

$$\mathbf{u}_n = (\mathbf{0}, \mathbf{a}_n \Delta t), \quad B_n = \begin{bmatrix} I_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & B_n^{vv} \end{bmatrix}, \quad B_n^{vv} = \frac{1}{\|\mathbf{v}_n\|} \begin{bmatrix} v_x & -v_y \\ v_y & v_x \end{bmatrix}$$

Nekoliko bolj zapletena je potem kovarianca meritve pospeška, saj moramo upoštevati še negotovost trenutne ocene hitrosti:

$$Q_n^{vv} = \Delta t^2 \left\{ \sigma_a^2 I_{2 \times 2} + \frac{\mathbf{v}_n^\perp P_n^{vv} \mathbf{v}_n^\perp}{\|\mathbf{v}_n\|^4} \left[(B_n^{vv} \mathbf{a}_n^\perp) \otimes (B_n^{vv} \mathbf{a}_n^\perp) \right] \right\}$$

Pri tem sta Q^{vv} in P^{vv} hitrostno-hitrostna bloka 4×4 kovariančnih matrik. Vektorja \mathbf{a}_n^\perp in \mathbf{v}_n^\perp sta pospešek in hitrost, zavrtena v pozitivni smeri za $\frac{\pi}{2}$. Prvi člen je identičen kot prej, drugi člen pa upošteva, da projekcija negotovosti hitrosti prečno na smer gibanja pomeni nedoločenost kota in kvari zanesljivost pospeška. Če vam ta člen dela težave, ga lahko izpustite.

Rekonstruiraj pot iz podatkov, danih v datoteki `kalman_relative_data.dat`, katere stolpci so čas t , GPS položaji (x, y) ter pospeška (a_t, a_r) . Spet lahko izbiraš, kako pogosto so na voljo meritve položaja.

Nalogaj:

- Dalovite trajektorije raznije
- Balj redko vredenje, manj krajnjih segmenta (tunel)
- Kako toliko lako je da pustimo?
- Odnosnost trajektorije od zadatake negativnosti (koristance)
- Primjerice: resursa, mjerivo, kvalitet.
- Analiza / Primjerjaju odstupanj od pravih vrednosti, varijac, redudanc.
- Korisne funkcije elipse

Nadoga 2:

- Dcelooster trajektorije, ko nacaro le a im \times / m .
- Dcelooster hitrosti iz leg ali iz pospeška?
- Primerjave z rezultati, ker imamo mo podatke.

Nadoga 3:

- Dcelooster trajektorije, ker je pospešek podan glede na trenutno vrednostne varste.
- Primerjave z rezultati, ker je pospešek podan v LAB sistem.

11. naloga: Optimalno filtriranje

VITJA BELTRAM

VPISNA ŠTEVILKA: 28212063
29.12.2022

1 Naloga

S pomočjo Kalmanovega filtra in podanih meritev (položaj, hitrost in pospešek) poskušaj rekonstruirati trajektorijo vožnje in časovno odvisnost komponent hitrosti pri vožnji z avtom iz FMF do Litije. Pri tem ne uporabi vseh meritev, temveč le vsakih nekaj, npr. vsako 5 meritev hitrosti in vsako 10 meritev položaja.

Rekonstrukcijo poskusi narediti tudi brez meritev hitrosti, le položaja in pospeška, ter le z meritvami hitrosti in pospeška.

Nazadnje poskušaj še z meritvami pospeška podanim kot radialni in tangentni. Pri tem moraš spremeniti vektor c in matriko napake Q .

V navodilih je opisan postopek Kalmanovega filtra ter podani nasveti za definicijo matrik F , Q in R . Podane pa so tudi napake za podatke.

2 Rekonstrukcija položaja in hitrosti

V datoteki *kalman-cartesian-data.dat* so po stolpcih vpisani podatki o času, položaju (x, y), hitrost (v_x, v_y) ter pospešku (a_x, a_y). V nalogi bom spreminjal koliko podatkov za položaj in hitrost sploh uporabim, medtem ko bom vedno uporabil vse podatke o pospešku.

Ker se mi je zdelo, da v navodilih v kontrolnem vektorju manjka komponenta tudi za spremembo položaja zaradi pospeška sem jo dodal in uporabljal vektor

$$\mathbf{c} = \left(\frac{1}{2}a_x\Delta t^2, \frac{1}{2}a_y\Delta t^2, a_x\Delta t, a_y\Delta t \right).$$

Zaradi tega sem moral spremeniti tudi kovariančno matriko

$$Q = \text{diag} \left(\frac{1}{4}\sigma_a^2\Delta t^4, \frac{1}{4}\sigma_a^2\Delta t^4, \sigma_a^2\Delta t^2, \sigma_a^2\Delta t^2 \right).$$

Iz tega sledi tudi šum napovedi zaradi netočnega pospeška

$$\mathbf{w} = \left[\mathcal{N} \left(0, \frac{1}{2}\sigma_a\Delta t^2 \right), \mathcal{N} \left(0, \frac{1}{2}\sigma_a\Delta t^2 \right), \mathcal{N} \left(0, \sigma_a\Delta t \right), \mathcal{N} \left(0, \sigma_a\Delta t \right) \right],$$

kjer \mathcal{N} predstavlja Gaussovsko razporejen šum s povprečjem in varianco. Meritve pospeška sem vključil tudi v napoved položaja, saj se mi ni zdelo smiselna neuporaba meritev, ki jih imamo na voljo, kolikor je mogoče. Uporabil sem predlagane velikosti napake $\sigma_{xy} = 25m$, $\sigma_a = 0.05ms^{-2}$ in $\sigma_v = 0.01\|\mathbf{v}\|$ s spodnjo mejo 1 km/h.

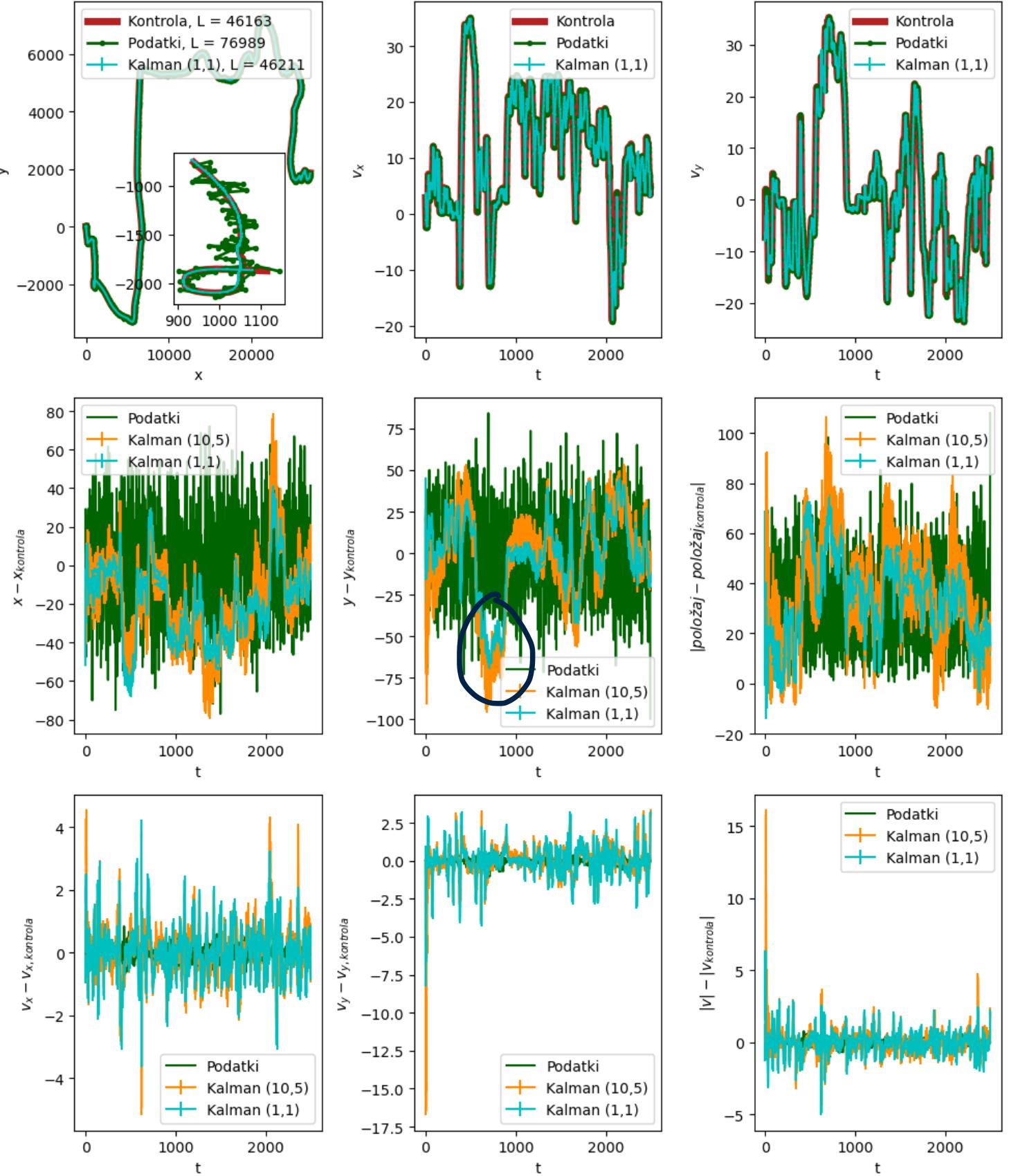
Koliko meritev uporabim pri rekonstrukciji sem kontroliral s spremenjanjem matrike H . Če sem pri napovedi uporabil določeno meritev, je morala biti ta diagonalna komponenta matrike enaka 1 ter 0, če meritve te komponente nisem uporabil.

Primerjal sem različno število uporabljenih podatkov. Da sem jih lažje primerjal sem uvedel notacijo $Kalman(i, j)$, kjer to pomeni uporabo Kalmanovega filtra z vsako i -to meritvijo položaja (x in y) ter vsako j -to meritvijo hitrosti (v_x in v_y). Za kvalitativno primerjavo sem najprej računal χ^2 , a se je izkazalo, da ta količina ni dobra, saj dobijo točke z večjo napako manjšo težo, česar pa si ne želimo. Zato sem raje računal *RMSE* (*root mean square error*) - koren povprečja kvadratnih odklonov od želenih vrednosti. Pri napaki položaja se mi je najbolj smiselno zdelo gledati razdaljo med napovedanim položajem in pravim položajem, pri hitrosti pa razliko med napovedano velikostjo hitrosti in pravo velikostjo hitrosti. Opazoval sem tudi vsako komponento posebej, da sem ugotovil, ali katero napovedujem slabše od druge.

Poglejmo si sedaj grafe. Najprej bom pokazal primerjavo med meritvami, napovedjo s Kalmanovim filtrom ter uporabljenimi vsemi meritvami in napovedjo s Kalmanovim filtrom in uporabljenou vsako 5 meritev hitrosti in 10 položaja. Rezultati so prikazani na grafu 1. V prvi vrstici so prikazani trajektorija vožnje ter časovni potek obeh komponent hitrosti. Z rdečo so prikazani kontrolni položaji in hitrosti, z zeleno so prikazani podatki in z svetlo modro Kalmanove napovedi z uporabljenimi vsemi podatki. Na povečanem delu na grafu levo zgoraj opazimo, koliko boljšo trajektorijo dobimo, če uporabimo Kalmanov filter. V drugi vrstici so prikazane razlike med x in y komponento med napovedmi ter kontrolnimi vrednostmi, dodana pa je tudi razdalja med napovedano točko in kontrolno točko (sredina desno). Poleg podatkov in Kalman(1,1) je tukaj predstavljena še napoved Kalman(10,5). Sploh na grafu sredina levo vidimo, da je napoved slabša od Klaman(1,1), a ne tako drastično, kolikor smo uporabili manj podatkov. Verjetno igrajo pomembno vlogo tukaj podatki o pospešku. V zadnji vrstici so predstavljena še odstopanja hitrosti od kontrolnih vrednosti. V srednji in zadnji vrstici vidimo, da obe komponenti položaja in hitrosti napovedujemo približno enako dobro.

Ker χ^2 ni bila prava izbira kriterija za natančnost napovedi, sem izbral *RMSE*. Ta na pove za koliko se v povprečju zmotimo pri napovedi različnih količin. Rezultati za različne i in j za količine x , y , oddaljenost napovedane od kontrolne točke za vsako meritev, velikost hitrosti in celotna prepotovana pot so prikazani na grafu 2. Opazimo lahko očitno, da se napoved hitrosti bolj poslabša če zmanjšamo frekvenco meritev hitrosti. Prav tako očitno je, da se napoved celotne prepotovane poti poslabša bolj, če zmanjšamo frekvenco meritev položaja. Pri napovedi položaja pa se ta poslabša približno enako pri zmanjševanju frekvence meritev položaja in hitrosti, kar me je presenetilo. Prav tako me je presenetilo, da napovemo komponento x položaja precej slabše od komponente y . Naj navedem še filtre, pri katerih sem dobim najmanjšo RMSE. Za x komponento je to Kalman(30,14), za y komponento Kalman(17,2), za razdaljo Kalman(17,1), za hitrost Kalman(28,1) in za pot Kalman(20,1). Pri vseh je torej bolj pomembno, da dobimo podatek o hitrosti kot o položaju. Zanimivo je tudi, da pri nobenem i ni pod 10, kar pomeni, da podatki o položaju le zavajajo filter, saj so zašumljeni z napako 25m, pri napovedih z $j = 1$, pa imamo podobne napake že brez meritev, kar pomeni, da včasih te le zavajajo filter.

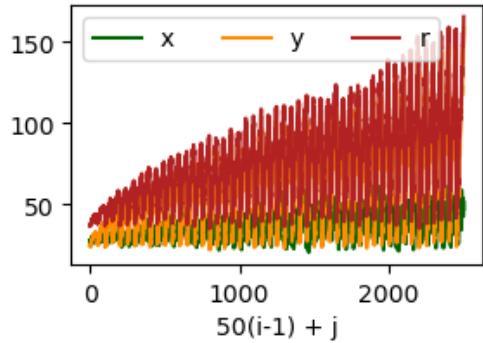
Analiza optimalnega filtriranja s Kalmanovim filtrom



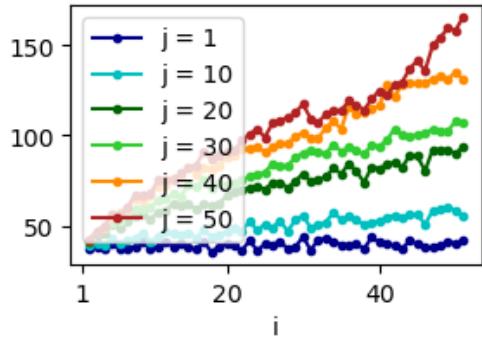
2

Slika 1: Prikazana je primerjava med kontrolnimi podatki ter meritvami in Kalmanovimi napovedmi. V prvi vrstici so prikazani trajektorija in časovna napoved obej komponent hitrosti, v drugi vrstici je prikazana razlika med napovedmi ter meritvami ter kontrolnimi podatki in v zadnji vrstici enako za hitrosti. Na grafih so prikazani tudi intervali zaupanja, a so precej neopazni, saj so majhni, napaka napovedi pa tudi precej oscilira.

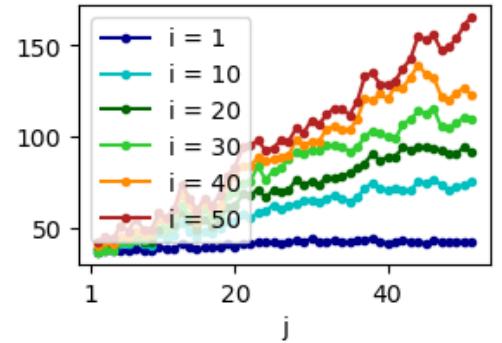
RMSE napovedi x in y komponente ter razdalje od kontrolne točke



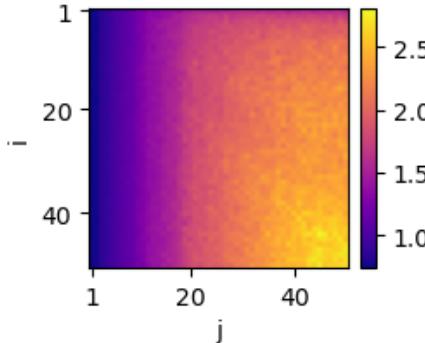
RMSE napovedi razdalje od kontrolne točke



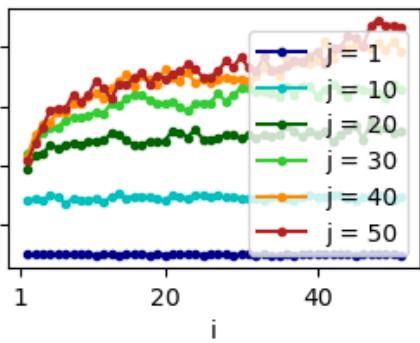
RMSE napovedi razdalje od kontrolne točke



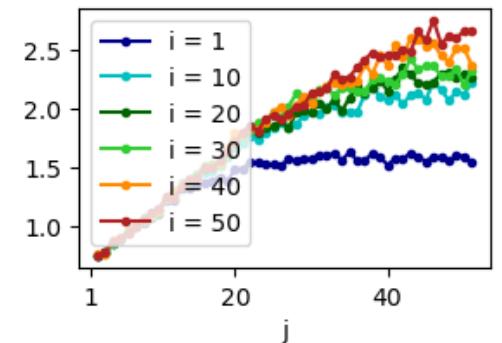
RMSE velikosti hitrosti



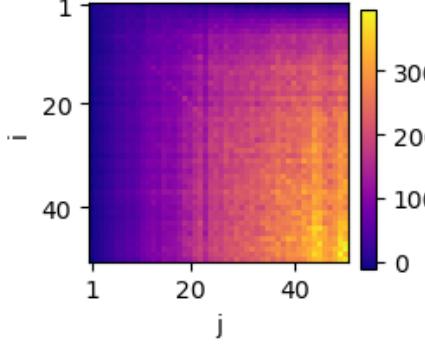
RMSE velikosti hitrosti



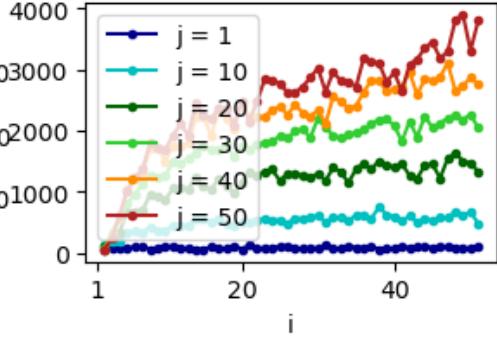
RMSE velikosti hitrosti



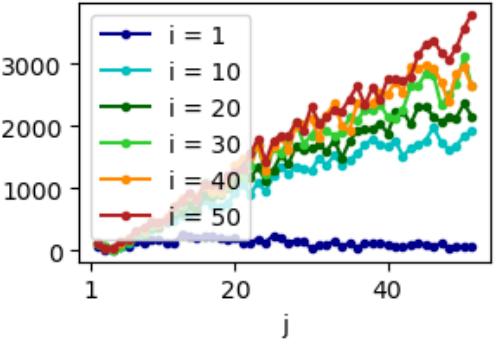
RMSE celotne prepotovane razdalje



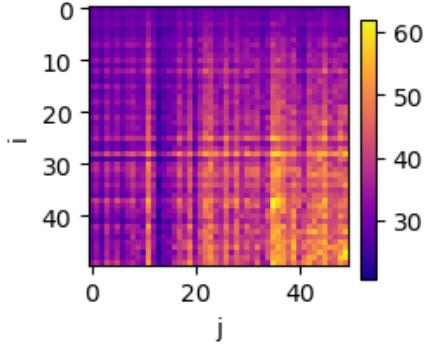
RMSE celotne prepotovane razdalje



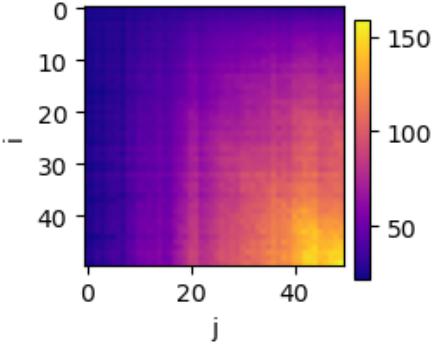
RMSE celotne prepotovane razdalje



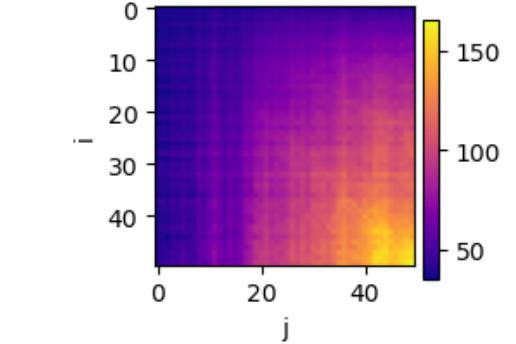
RMSE(x)



RMSE(y)



RMSE(r)

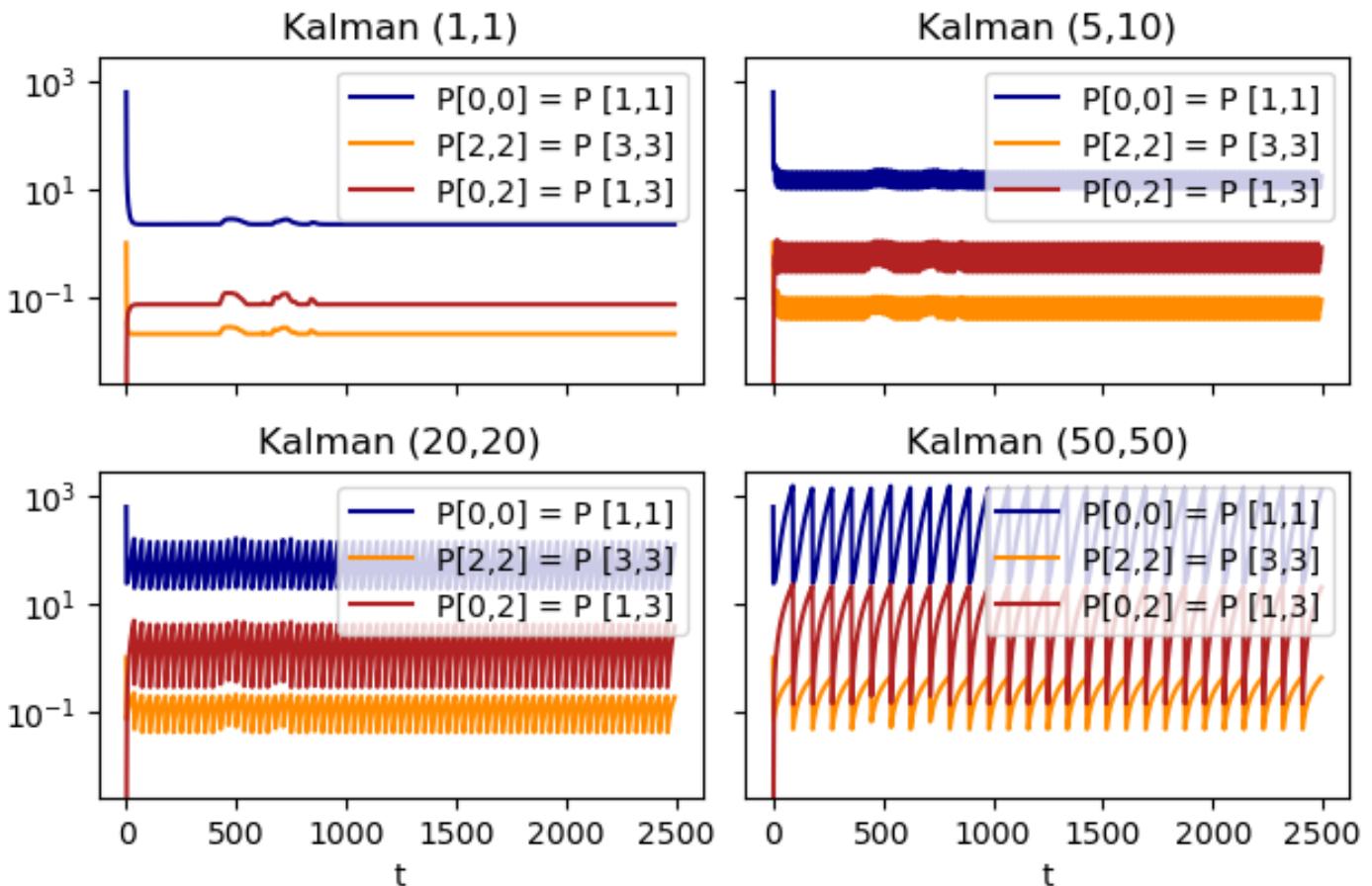


Slika 2: Na grafu so prikazani rezultati rekonstrukcije z $i, j \in [1, 50]$ - torej od uporabljene vsake meritve do uporabljene vsake 50-te. Glavni rezultat je ali se napoved bolj pokvari če zmanjšamo frekvenco meritev položaja (i) ali hitrosti (j). Pri hitrosti se očitno in pričakovano bolj pokvari če zmanjšamo frekvenco meritev hitrosti, pri prepotovani poti je očitno, da se napoved bolj pokvari ko zmanjšamo frekvenco meritev položaja, pri položaju pa se napoved pokvari približno v enaki meri tako pri manjšanju frekvence meritev položaja kot hitrosti. Zanimivo pa je, da x komponento položaja napovedujemo precej bolje od y .

2.1 Matrika napak napovedi P

Pogledal sem si tudi, kako se spreminja komponente matrike P med rekonstrukcijo pri različnih frekvencah meritov. Rezultati so prikazani na grafu 3. Najprej poudarimo, da so komponente $P[0, 1], P[0, 3], P[1, 2]$ ter $P[2, 3]$ enake 0, komponente $P[0, 0] = P[1, 1], P[2, 2] = P[3, 3]$ ter $P[0, 2] = P[1, 3]$ pa so paroma enake, zato so prikazane le 3 komponente na grafih. $P[0, 2]$ predstavlja korelacijo med hitrostjo in položajem. Glede na grafa 2 spodaj levo in sredina je zanimivo, da sta napaki x in y komponente položaja enaki. V vseh primerih je največja komponenta $P[0, 0]$, ki predstavlja kvadrat napake x komponente položaja. Pri manjšanju frekvence meritov se logično napaka poveča in oscilira, saj ob prihodu nove meritve napako precej zmanjšamo, saj napoved popravimo skladno z meritvijo. Oscilacije so za vse komponente enake, saj imamo meritve položaja in hitrosti z enako frekvenco. Napaka pa se tudi ob prihodu nove meritve ne zmanjša na napako pri Kalman(1,1), kar je tudi pričakovano, saj Kalmanov filter le uskladi meritve in napoved in če je napoved zelo napačna ne more biti nova napoved čisto pravilna.

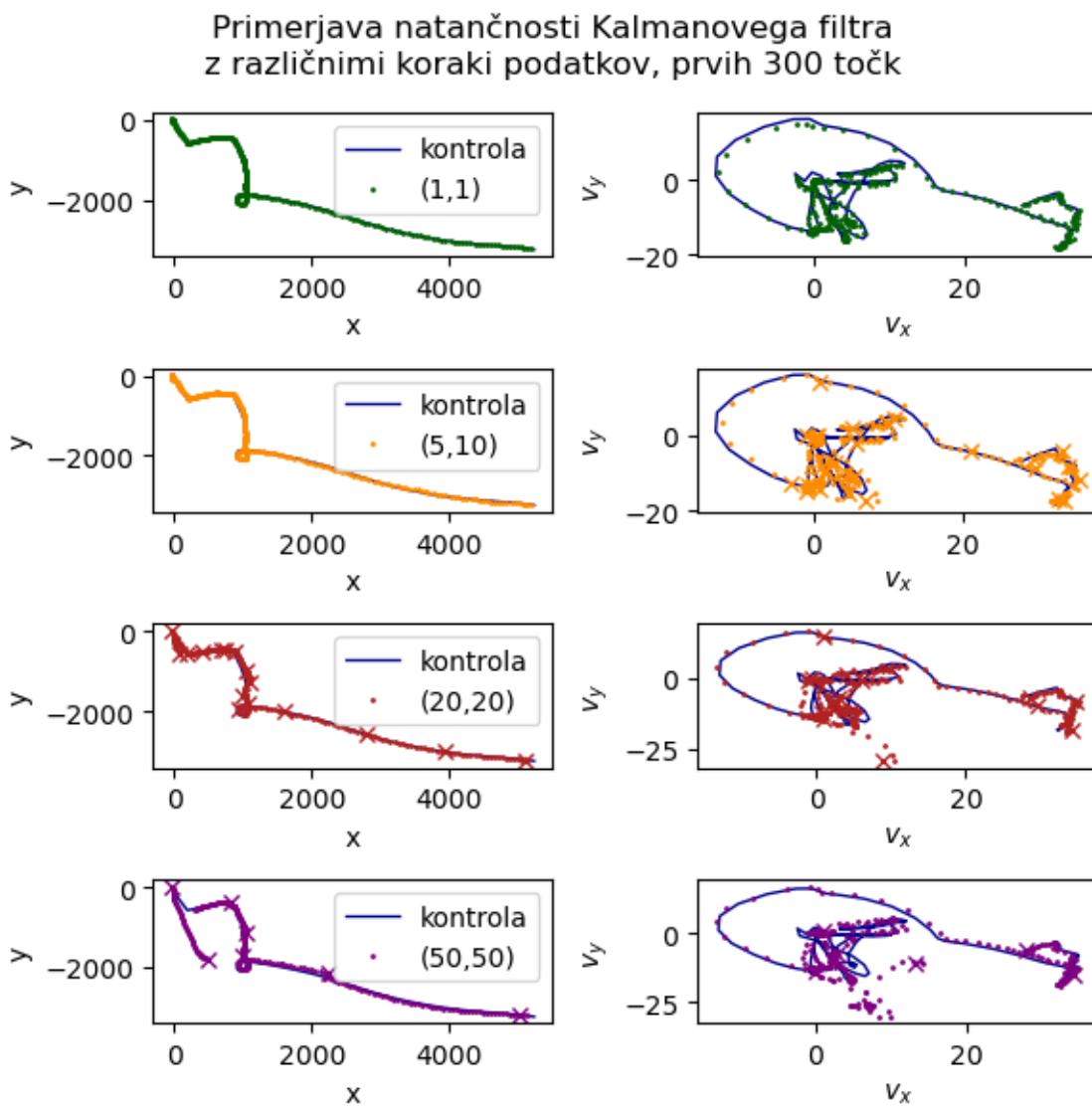
Časovna odvisnosot komponent matrike P
 $P[0,1] = P[0,3] = P[1,2] = P[2,3] = 0$



Slika 3: Časovna odvisnost neničelnih komponent matrike P . Pričakovano imamo večje oscilacije komponent pri manjši frekvenci meritov. Napaka pri novi meritvi pa se ne zmanjša na napako pri Kalman(1,1). Opazimo, da smo na začetku napako precenili, kar je Kalmanov filter zelo hitro popravil in napako zmanjšal, korelacijo pa povečal.

2.2 Primerjava različnih frekvenc pri napovedi položaja

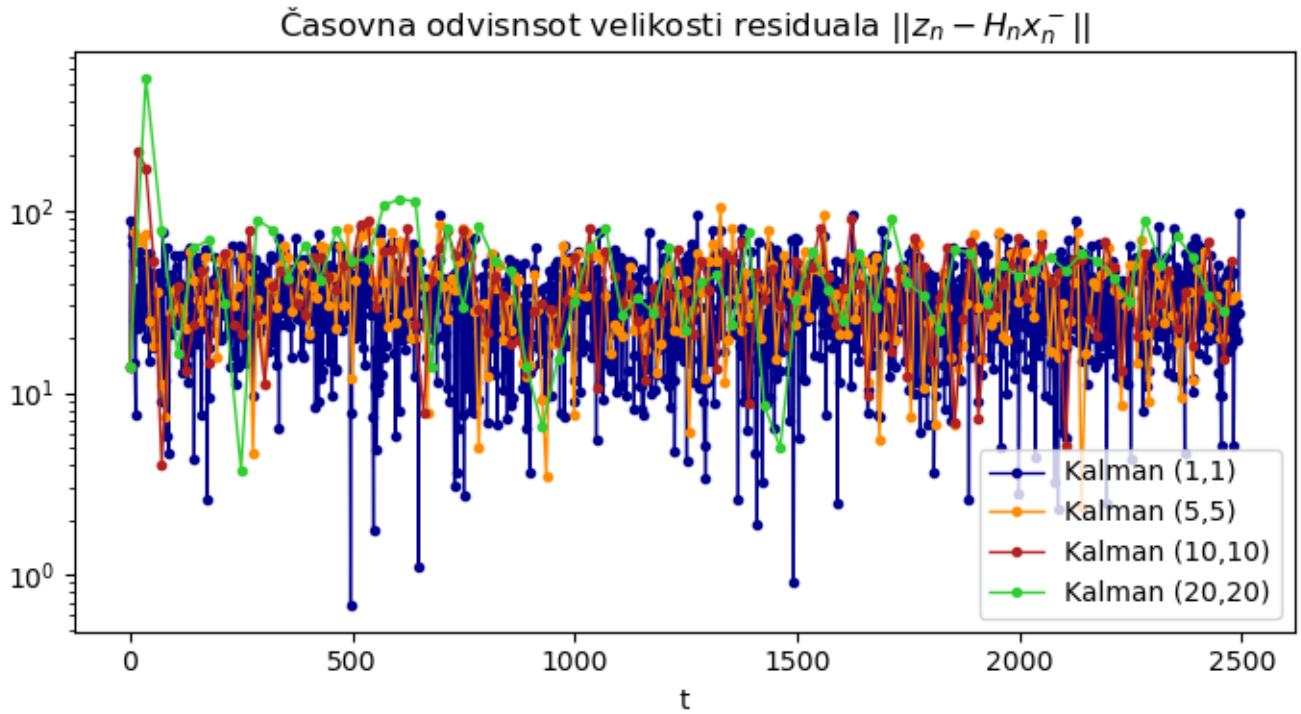
Že do zdaj sem primerjal točnost napovedi pri različni frekvenci meritev, a le kot vrednost RMSE. Želel pa sem tudi pogledati, kakšne napovedi dajejo posamezni filtri, zato sem si narisal graf 4. Na njem je prikazana kontrolna trajektorija položaja in hitrosti ter napovedani trajektoriji z vedno manjšo frekvenco meritev. Opazimo lahko, da se tudi Kalman(5,10) precej dobro ujema s kontrolnimi točkami. Pri Kalman(20,20) in Kalman(50,50) pa je s križci označena zadnja točka pred novo meritvijo. Vidimo, da zakomplikirane trajektorije hitrosti pri Kalman(20,20) težko povsem zajemamo, pri Kalman(50,50) pa sploh. Kar me je najbolj presenetilo je, kako tudi pri zadnjem filtru dobro opišemo zanko pri okoli $(x, y) = (1000, -2000)$. Po prvih 50 točkah gremo precej stran od krivulje, potem pa smo precej dobro na njej. Poglavitno vlogo pri tem imajo podatki o pospešku, ki jih dobimo na vsakem koraku in jih uporabimo tako pri napovedi hitrosti, kot položaja.



Slika 4: Primerjava natančnosti Kalmanovega filtra pri različnih frekvencah meritev. S križci je označena zadnja točka pred novo meritvijo. Ker je hitrostna trajektorija precej zahtevnejša od položajne jo težje opišemo. Presenetilo me je, kako dobro opišemo ovinek pri $(x, y) = (1000, -2000)$ tudi pri Kalman(50,50). Da je to možno, je zagotovo zaslužen podatek o pospešku, ki ga dobimo pri vsaki točki.

2.3 Časovna odvisnost residualov

Pogledal sem tudi časovno odvisnost velikosti residualov $\|z_n - H_n x_n^-\|$. Te nam povejo kako se meritev razlikuje od napovedi. Ker smo matriko H_n spremajali v vsaki meritvi in jo nastavili tako, da meritev pri določenih korakih ne upošteva, je velikost residuala na točkah, kjer je H_n singularna, enaka meritvi in ne dobimo pravega residuala. Zato sem gledal le residuala, ko v filtru upoštevam meritve. Torej pri Kalman(10,10) sem narisal le vsak 10 residual. Rezultati so prikazani na grafu 5. Opazimo lahko, da se te ne razlikujejo močno, kar me je presenetilo. Kot smo videli na sliki 4, pa lahko to opravičimo s tem, da so bile napovedi dokaj dobre tudi za filtre z manj frekventnimi meritvami.

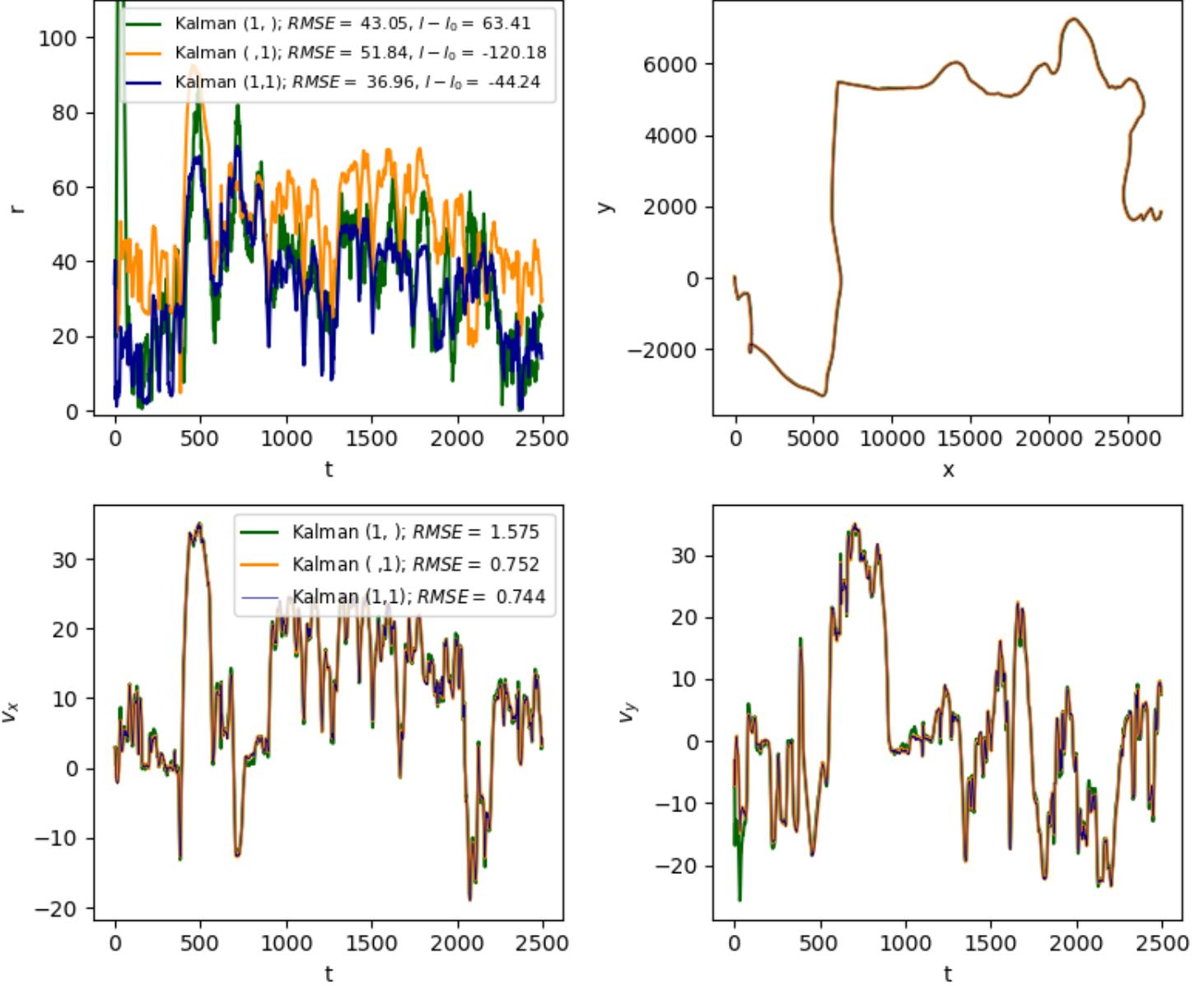


Slika 5: Residuali v odvisnosti od časa za različno frekventne meritve. Opazimo lahko, da so vsi residuali podobnih velikosti. Povprečja v vrstnem redu legende si sledijo 31.3, 34.5, 39.9, 62.8. Torej povprečja vseeno naraščajo, kar pomeni, da so napovedane točke bolj oddaljene od kontrolnih.

3 Napovedovanje brez podatka o položajih ali hitrostih

V tem sklopu si bomo pogledali rezultate napovedovanja trajektorij, s tem da bomo v enem primeru ostali popolnoma brez meritev položaja, v drugem pa brez meritev hitrosti. Oba sta limitna primera iz slike 2. Ko i preseže število kontrolnih točk dobimo primer brez meritev položaja in ko j preseže to število dobimo primer brez podatkov o hitrostih. V obeh primerih vseeno uporabimo vse podatke o pospeških kot do sedaj. Rezultati so prikazani na sliki 6. Čeprav so odstopanja majhna, lahko vidimo, da so napovedi hitrosti slabše če nimamo meritev hitrosti, kar lahko vidimo tudi po RMSE vrednostih. Pri napaki položaja pa se filter seveda bolje obnese, če dobimo podatke o položaju, kot hitrosti. Je pa večja razlika med filtrom z vsemi meritvami in drugo najboljšo napovedjo kot pri hitrosti.

Primerjava odsotnosti meritev hitrosti ali položaja



Slika 6: Na grafih je prikazana primerjava napovedi brez meritev hitrosti (zeleno), brez meritev položaja (oranžno) ter z meritvijo obojega (modro). Graf zgoraj levo prikazuje razdaljo med napovedano in kontrolno točko ob vsakem času. Zgoraj desno je prikazana trajektorija, kjer s težavo vidimo razlike. Spodaj pa sta prikazani časovna poteka v_x in v_y . Prikazani so tudi podatki o RMSE in celotni razdalji.

4 Radialni in tangencialni pospeški

V tem poglavju bomo uporabljali podane podatke v datoteki *kalman-relative-data.dat*. V njej so podatki o času, položaju (x,y) ter pospeških (a_t, a_r), kjer sta pospeška podana kot tangencialni in radialni. S pomočjo teh podatkov bomo poskušali rekonstruirati trajektorijo položaja in časovni potek hitrosti. Ker sta pospeška podana na drugačen način moramo spremeniti tudi kontrolni vektor $\mathbf{c}_n = B_n \mathbf{u}_n$, ki smo ga prepisali na drugačen način. Vektor \mathbf{u} in matriko B zapišemo na sledeč način

$$\mathbf{u}_n = \left(\frac{1}{2} a_{nt} \Delta t^2, \frac{1}{2} a_{nr} \Delta t^2, a_{nt} \Delta t, a_{nr} \Delta t \right), \quad B_n = \begin{bmatrix} B_n^{vv} & 0 \\ 0 & B_n^{vv} \end{bmatrix}; \quad B_n^{vv} = \frac{1}{\|\mathbf{v}_n\|} \begin{bmatrix} v_x & -v_y \\ v_y & v_x \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Na ta način smo ortogonalno zavrteli pospeška, da zdaj kažeta v x in y smer. Poleg tega moramo spremeniti tudi matriko napake Q_n

$$Q_n^{xy} = \frac{\Delta t^4}{4} \left\{ \sigma_a^2 I_{2x2} + \frac{v_n^\perp P_n^{xy} v_n^\perp}{\|v_n\|^4} \left[(B_n^{vv} a_n^\perp) \otimes (B_n^{vv} a_n^\perp) \right] \right\} \quad (2)$$

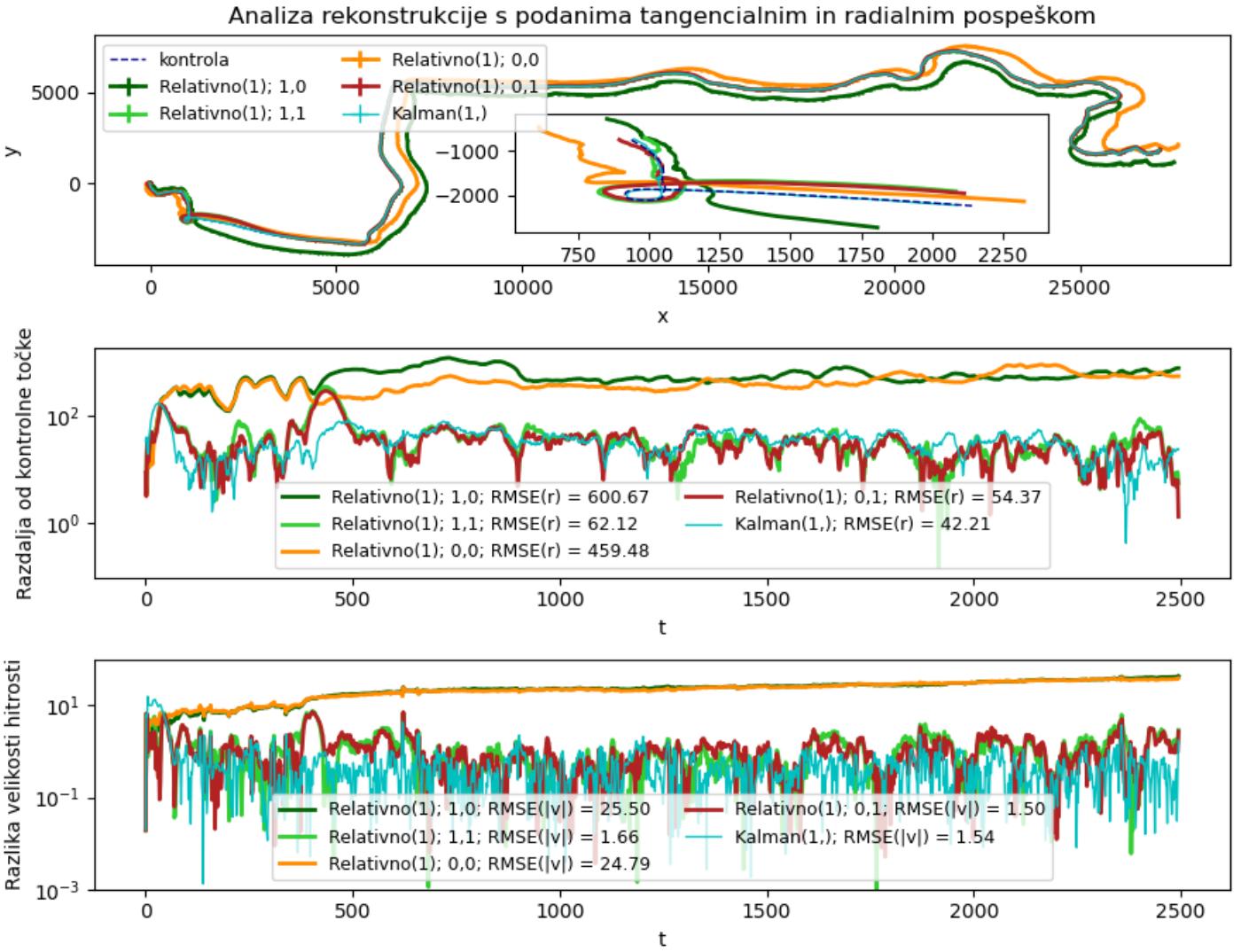
$$Q_n^{vv} = \Delta t^2 \left\{ \sigma_a^2 I_{2x2} + \frac{v_n^\perp P_n^{vv} v_n^\perp}{\|v_n\|^4} \left[(B_n^{vv} a_n^\perp) \otimes (B_n^{vv} a_n^\perp) \right] \right\}, \quad (3)$$

kjer sta to prvi in drugi 2×2 diagonalni blok v matriki Q . Položajni blok sem dodal, saj, kot sem omenil že na začetku, se mi ne zdi smiselno da meritev uporabimo le za hitrost, če jo lahko tudi za položaj.

Ker sem spremenil matriko Q , sem moral spremeniti tudi šum napovedi w , ki sem ga sedaj v vsakem koraku izžrebal na novo, kot Gaussovsko porazdeljen s povprečjem 0 in σ koren iz diagonalnih elementov Q .

Čeprav se mi je zdelo bolje, da uporabim meritve pospeška tudi pri napovedi položaja, sem vseeno uporabil obe možnosti, torej tudi z blokom položaja enako 0. Drug pomislek, ki sem ga imel pa je bil pri spremjanju napovedi z uporabo meritev. Ker v tem primeru nimamo hitrosti se mi je zdelo, da hitrostnih komponent v stanju ne smemo popravljati. Zato sem z meritvami popravljal le položajni komponenti stanja. Izkazalo pa se je, da je ta razmislek napačen, saj tudi z meritvami položaja popravljamo hitrostni komponenti, matrika K (oz. bolj direktno H) pa poskrbi, da meritev pospeška ne vključimo direktno k popravku stanja hitrosti. Rezultati vseh 4 možnosti so prikazane na grafu 7.

Najbolj očitno dognanje je, da je zelo pomembno da meritve položaja uporabimo za popravek stanja hitrosti. Drugo dognanje je, da dodaten blok v Q in B ne prispevata znatno k izboljšanju napovedi. Tretje dognanje je, da je napoved z relativnima pospeškoma relativno dobra in primerljiva z napovedjo pri kartezičnih komponentah brez meritev hitrosti, a je ta tako po RMSE, kot po povečanem delu grafa na 7 zgoraj, precej boljša od relativnih meritev pospeška. V tem scenariju imamo največ težav pri napovedovanju tega krožnega zavoja. Tam so očitno, ali pospeški najmanj natančno izmerjeni, ali pa pre malo pogosto, saj se spreminjajo zelo hitro. Tega hitrega spremjanja pa s tem filtrom in temi meritvami težko rekonstruiramo.

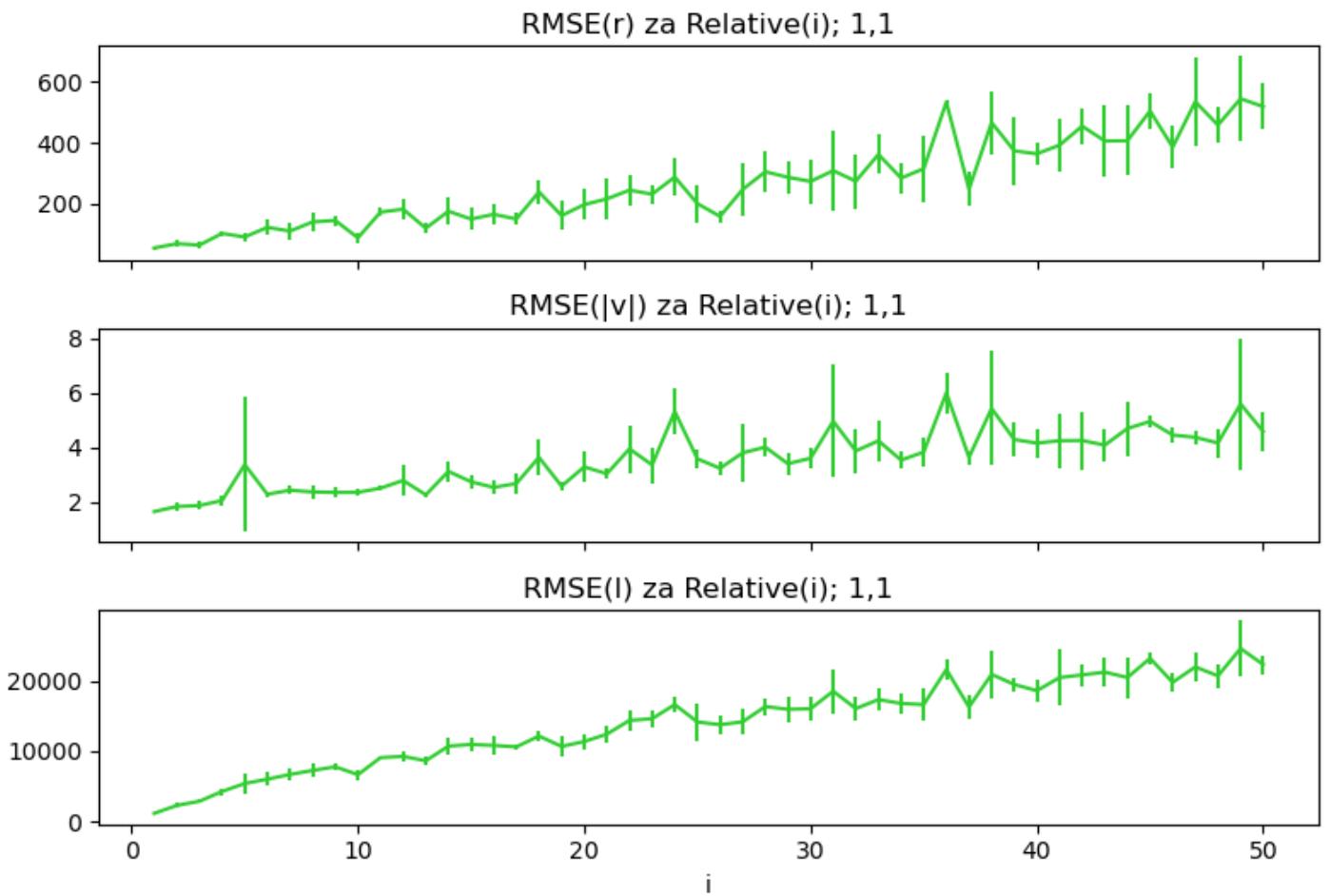


Slika 7: Na grafih so prikazani rezultati rekonstrukcije s 5 različnimi nastavitevami. *Kalman(1,)* pomeni, da so uporabljene kartezične meritve pospeška brez meritve hitrosti, *Relativno(1)*, da so uporabljene meritve tangencialnega in radialnega pospeška z uporabljenim vsako meritvijo položaja. Prva številka pove ali je bil uporabljen dodatek položajnih blokov v filtru (1=da,0=ne), druga pa ali so bile komponente stanja hitrosti popravljene z meritvami položaja (1=da, 0=ne).

Predstavljeni so trajektorija vožnje, napaka razdalje in velikosti hitrosti. Vidimo, da je zelo pomembno, da v filtru stanje hitrosti popravimo z meritvami položaja, saj tako močno izboljšamo napovedi. Zelo malo vpliva pa ima dodaten položajni blok v matriki B in Q , kar me je presenetilo. Vidimo, da sta napovedi z relativnima pospeškoma in brez meritve hitrosti približno enako dobra, kot napoved s kartezičnimi pospeški in brez meritve hitrosti. Glede na vrednost RMSE in povečan plot na zgornjem grafu pa so kartezične koordinate vseeno boljše za napovedovanje.

4.1 Relativni pospeški z vedno manj meritvami položaja

Tudi v tem primeru sem poskusil manjšati število meritov in opazovati kako se spreminja RMSE pri napaki položaja in velikosti hitrosti. Tokrat sem uporabil sorodno notacijo kot v prejšnjem primeru: *Relativno(i)* pomeni rekonstrukcijo z meritvami relativnega pospeška z uporabljeni vsako i -to meritvijo. Rezultati so prikazani na grafu 8. Uporabil sem scenarij z neničelnim položajnim blokom v Q in spremenjanjem hitrosti z meritvami položaja. Ker imamo v tem primeru večji šum kot pri kartezičnih pospeških, je tukaj več razlike pri napovedovanju, zato sem naredil 5 rekonstrukcij pri vsakem i in narisal povprečje in standardno deviacijo. Napaka se pričakovano veča pri napaki razdalje, velikosti hitrosti in celotne prepotovane poti. Večanje napake pa je skoraj linearno in precej manj zanimivo kot pri kartezičnih pospeških. To je verjetno posledica, da so napake precej večje kot na grafu 2.



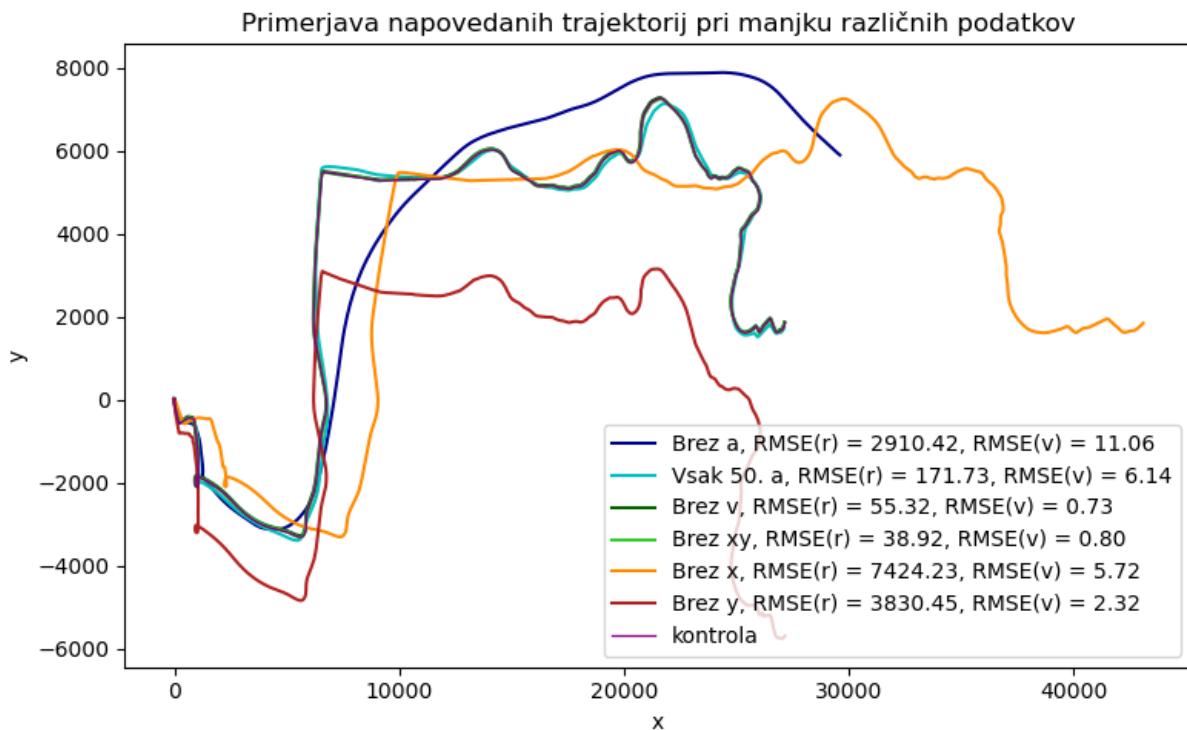
Slika 8: Prikazane so povprečne vrednosti RMSE 5 rekonstrukcij s relativnimi meritvami pospeška za napake položaja, velikosti hitrosti in celotne prepotovane poti. Uporabljen je filter z neničelnim položajnim blokom pri Q ter spremenjeno stanje hitrosti pri meritvah položaja. Vse napake so precej večje kot pri kartezičnih koordinatah (glej graf 2) in odvisnosti od števila uporabljenih podatkov tudi manj zanimive.

5 Izpuščanje podatkov in možne nadgradnje

Razmišljal sem o možnosti, da bi med posameznimi meritvami opravil več kot en korak kalmanovega filtra. Razmišljal sem, da bi s tem izboljšal natančnost, saj bi naredil več manjših korakov, a sem se prepričal, da je to nesmiselno početje, saj bi dobil točno enak rezultat, saj bi bili koraki le množenje matrik z manjšim časom, ki bi se na koncu seštel v originalnega.

Razmišljal sem tudi o dodajanju linearnega upora v sistem ali kakšni drugi izboljšavi modela, a se v to nisem spustil, saj nimamo podanih meritev, za generiranje svojih pa nisem imel časa.

Nadalje sem razmišljal o meritvah, ki so le za x oz. y komponento položaja hitrosti in pospeška, brez meritev pospeška ali z manjšo frekvenco meritev pospeška. Te možnosti sem narisal na graf 9. Ugotovil sem, da je meritev pospeška zelo pomembna, saj brez njega ne spremojamo hitrosti, kar pa je glavno kar nas vodi na poti. Presenetilo me je, kako dobre rezultate dobimo že, če dobimo le vsako 50. meritev pospeška. Če ne dobivamo podatka o hitrosti in položaju v eni od smeri se vedno napoved v tej smeri precej pokvari, oblika pa ostane dokaj v redu. Najbolje se obnese če izpustimo meritve položaja, ker, kot sem že omenil, je hitrost bolj pomembna od položaja.



Slika 9: Na grafu so prikazane napovedane trajektorije s Kalmanovim filtrom z različnim izpuščanjem podatkov. Izpuščal sem meritve pospeška, hitrosti, položaja, x komponent položaja in hitrosti ter y komponente položaja in hitrosti. Filter se najbolje odreže, če izpustimo meritve položaja. V legendi sta še podatka o RMSE vrednosti oddaljenosti od kontrolne točke in velikosti hitrosti.

Na koncu sem ugotovil, da sem mogoče naredil manjšo napako pri vseh rekonstrukcijah. Pri vseh sem za začetno vrednost vzpel začetno točko v datoteki *kalman_cartesian_data.dat* in potem naredil korak Kalmanovega filtra ter pri tem uporabil isto točko kot meritev, čeprav sem že naredil prvi korak. Mislim, da bi moral začeti z drugo meritvijo iz iste datoteke, saj sem prvo že uporabil. S tem se naredil napako, a mislim, da ne bi smela veliko vplivati na rezultate, saj se je filter prilagodil na podane meritve.

6 Zaključek

Pri tej nalogi smo se ukvarjali s Kalmanovim filtrom, s katerim smo poskusili napovedati trajektorijo vožnje avtomobila. Najprej sem poskušal napovedati trajektorijo z različno gosto vzorčenimi meritvami. Ugotovil sem, da so meritve hitrosti bolj pomembne od meritve položaja. Kot merilo za primerjanje sem izbral RMSE oddaljenosti napovedanih položajev od kontrolnih in napovedane velikosti hitrosti od kontrolnih. Nato sem še pogledal kako se napake spreminjajo in ugotovil, da so precej konstante po začetnem iskanju, oscilirajo pa zaradi prihajanja novih meritiv z različno frekvenco. Zanimivo se mi je zdelo, da so residuali približno enako veliki. Pri meritvah s tangencialnim in radialnim pospeškom smo dobili precej slabše rezultate, saj nimamo podatkov o hitrosti, ki so ključni za smer pospeška in s tem napovedi. Na koncu sem pogledal še kako se napovedi spreminjajo če izvzamemo različne meritve.

UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
ODDELEK ZA FIZIKO

MODELSKA ANALIZA I
11. naloga: Optimalno filtriranje

Žiga Šinigoj, 28222025

Ljubljana, januar 2023

1 Rekonstrukcija poti in hitrosti vozila s Kalmanovim filtrom

Veliko bolj natančno kot samo z GPS podatki lahko določim oziroma rekonstruiram pot vozila, če uporabim Kalmanov filter. Celoten opis Kalmanovega filtra je že v navodilih, sam bom izpisal samo relevantne podatke, ki sem jih uporabil v nalogi. Vektor stanja je

$$\mathbf{x}_n = (x_n, y_n, v_{x,n}, v_{y,n})^T , \quad (1)$$

kontrolni vektor:

$$\mathbf{c}_n = (a_{x,n} \frac{\Delta t^2}{2}, a_{y,n} \frac{\Delta t^2}{2}, a_{x,n} \Delta t, a_{y,n} \Delta t)^T . \quad (2)$$

Kovariančna matrika modelskega šuma je

$$Q = Q_n = \begin{bmatrix} \mathbb{1}_{2 \times 2} \frac{\Delta t^4}{4} & \mathbb{1}_{2 \times 2} \frac{\Delta t^3}{2} \\ \mathbb{1}_{2 \times 2} \frac{\Delta t^3}{2} & \mathbb{1}_{2 \times 2} \Delta t^2 \end{bmatrix} \sigma_a^2 , \quad (3)$$

kjer je $\sigma_a = 0.05 \text{ ms}^{-2}$. Kovariančna matrika detektorskega šuma je kar diagonalna

$$R_n = \begin{bmatrix} \mathbb{1}_{2 \times 2} \sigma_{x,y}^2 & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_{2 \times 2} \sigma_{v,n}^2 \end{bmatrix} , \quad (4)$$

kjer je absolutna napaka položaja $\sigma_{x,y} = 25 \text{ m}$ in napaka hitrosti $\sigma_{v,n} = \max\{0.01 \text{ v}_n, 1 \text{ km/h}\}$. Za začetni vektor stanja sem vzel začetne meritve, začetna kovariančna matrika pa je

$$P_0 = \begin{bmatrix} \mathbb{1}_{2 \times 2} \sigma_{r,0}^2 & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_{2 \times 2} \sigma_{v,0}^2 \end{bmatrix} , \quad (5)$$

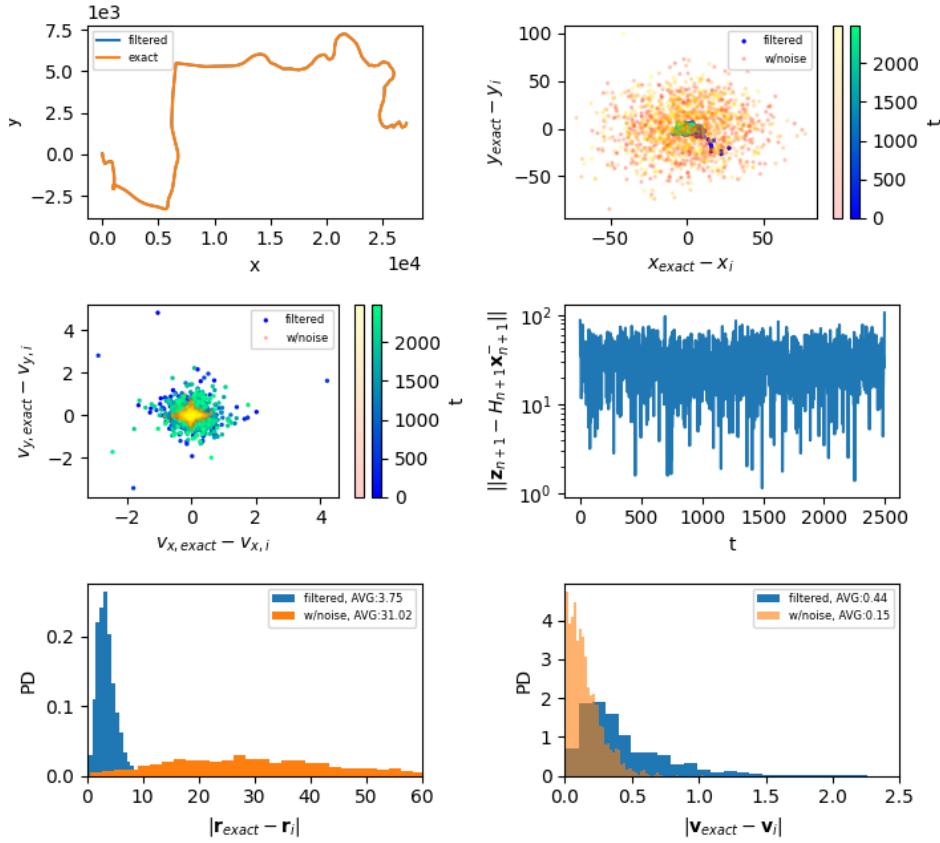
kjer je $\sigma_{r,0} = 10 \text{ m}$ in $\sigma_{v,0} = \sqrt{5} \text{ m/s}$. V napovedi modela sem upošteval tudi vektor Gaussovega šuma $\mathbf{w}_n \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, Q)$.

OPOMBA: Ko bom razpravljal o rezultatih bom grafe indeksiral kot matrične elemente, npr. slika 1(0,0) predstavlja graf v zgornjem levem kotu na sliki 1, slika 1(2,0) predstavlja graf v spodnjem levem kotu itd.

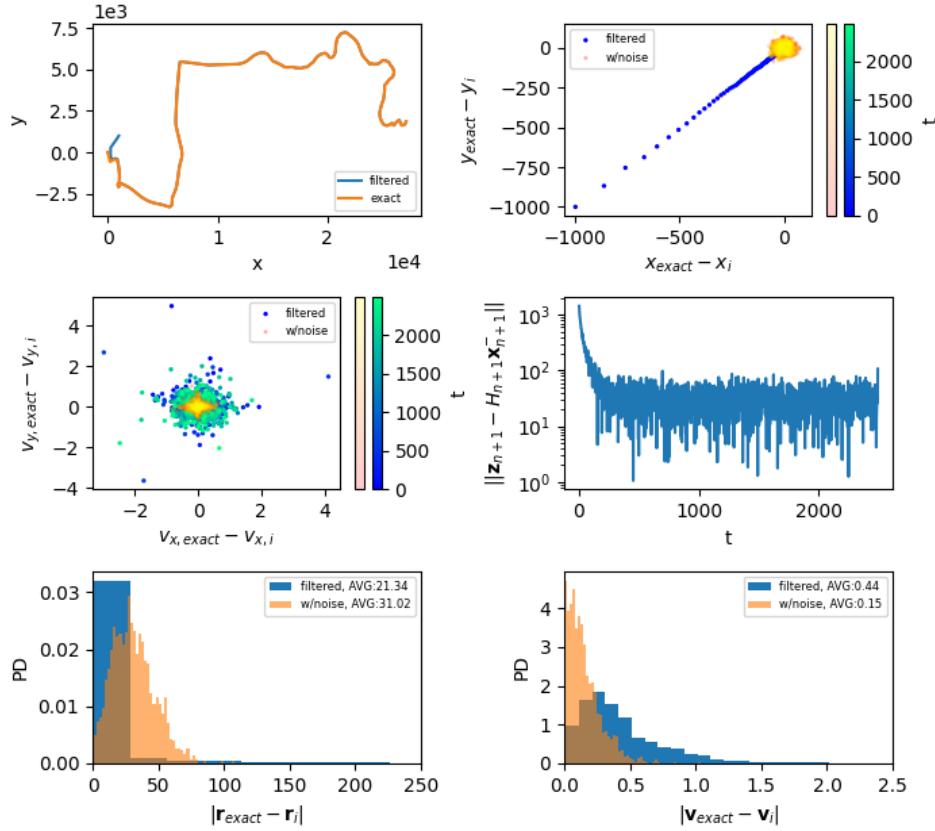
1.1 S podanimi podatki o lokaciji, hitrosti in pospeški

Najprej sem filtriral primer, kjer sem imel na voljo vse meritve (položaj, hitrost, pospešek). Rezultati filtriranja so prikazani na sliki 1,3,4. Ko uporabim vse možne meritve dobim najbolj natančne rezultate. Slika 1(0,0) prikazuje točno rešitev in filtrirano rešitev. Na tako veliki skali ne vidimo morebitnih odstopanj, zato je smiselno pogledati odstopanja od pravih rešitev. Odstopanja položajev in hitrosti od pravih vrednosti v odvisnosti od časa prikazujeta grafa 1(0,1) in (1,0). Vidim lahko očitno razliko v natančnosti, če uporabim filter in če uporabim samo zašumljene GPS podatke. Filtrirani podatki na začetku odstopajo vendar hitro padejo v območje minimalnega odstopanja. Veliko nam pove tudi histogram odstopanj položajev in hitrosti 1(2,0), (2,1). Pričakovana vrednost odstopanja od pravilne rešitve se bistveno zmanjša v primeru položaja vozila, skoraj za deset krat. V primeru hitrosti pa Kalmanov filter nekoliko poslabša natančnost, saj je pričakovana vrednost odstopanja velikosti hitrosti nekoliko večja, kar je nekoliko presenetljivo. Mogoče je to tudi posledica premajhne variance detektorskega šuma.

Pogledal sem tudi primer, ko začetni položaj zelo odstopa od pravnega. Za začetni položaj sem vzel $x_0 = 1000$, $y_0 = 1000$. Rezultati filtriranja so prikazani na sliki 2. Filtrirani rezultati hitro konvergirajo k natančni rešitvi slika 2(0,1). Tudi residuali 2(1,1) se zmanjšajo na vrednosti v prejšnjem primeru. Pričakovana vrednost oddaljenosti od prave rešitve se poveča, saj je oddaljenost začetnih nekaj položajev od pravih položajev velika in ti povečajo povprečno razliko med filtriranim in pravim položajem.

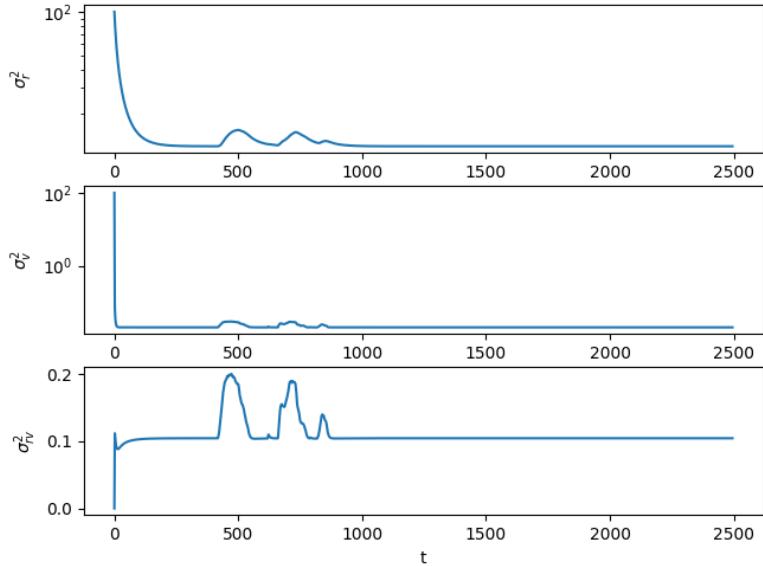


Slika 1: Rezultati filtriranja v primeru, ko upoštevam vse meritve.

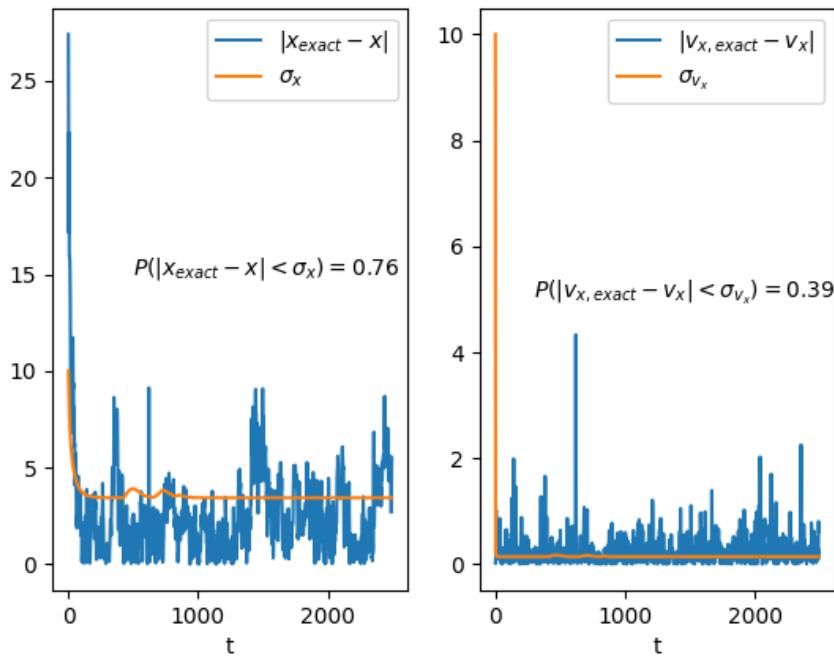


Slika 2: Rezultati filtriranja v primeru ko upoštevam vse meritve in začnem filtriranje z začetnim položajem $(x_0, y_0) = (1000, 1000)$.

Kovariance $\sigma_{x,y}$, $\sigma_{v_x,vy}$ so ničelne, zato sem v kovariančni matriki pogledal samo njene neničelne elemente. Izkaže se tudi, da je v tem primeru matrika simetrična (slika 11). Poteke neničelnih varianc prikazuje slika 3. Varianca položaja se pričakovanoma manjša in tako dosežem natančnost položaja na približno $\sigma_r = 3 \text{ m}$. Še hitreje pada varianca hitrosti. Kovarianca σ_{rv}^2 naraste na konstantno vrednost 0.1. Manjši skoki v variancah nastanejo pri ostrem zavijanju vozila na poti. Ker imam podane tudi pravo pot vozila sem pogledal kako dobro filtrova varianca oz. standardna deviacija zaobjame dejanska odstopanja (slika 4). V standardno deviacijo položaja pade 76 % odstopanj, kar je precej dobra ocena, ki nam jo poda filter. V primeru hitrosti pa samo 40 %, kar pomeni, da filter podaja malo podcenjeno varianco.



Slika 3: Časovna odvisnost varianc in kovarianc, $\sigma_r^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$, $\sigma_v^2 = \sigma_v, x^2 + \sigma_v, y^2$.



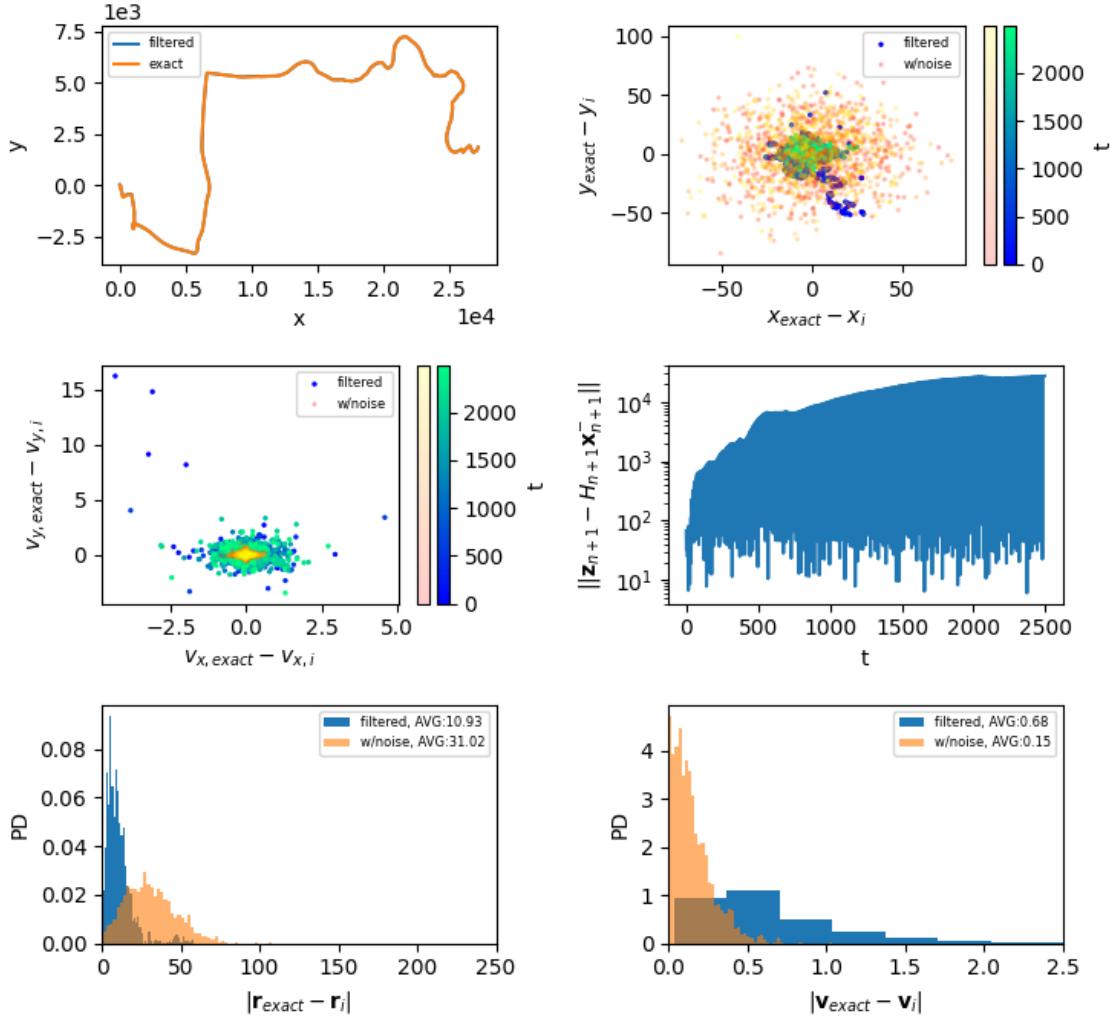
Slika 4: Odstopanja x-komponent filtriranih rezultatov od pravih in standardni odklon položaja ter hitrosti.

1.2 Z redkejšim vzorčenjem

Zanima me kako dobro filter rekonstruira pot, če mu podam samo vsako deseto meritev položaja in vsako peto meritev hitrosti. Katere meritve so na voljo v n-tem koraku določim z matriko H_n . Če želim npr. samo meritve hitrosti bo matrika oblike

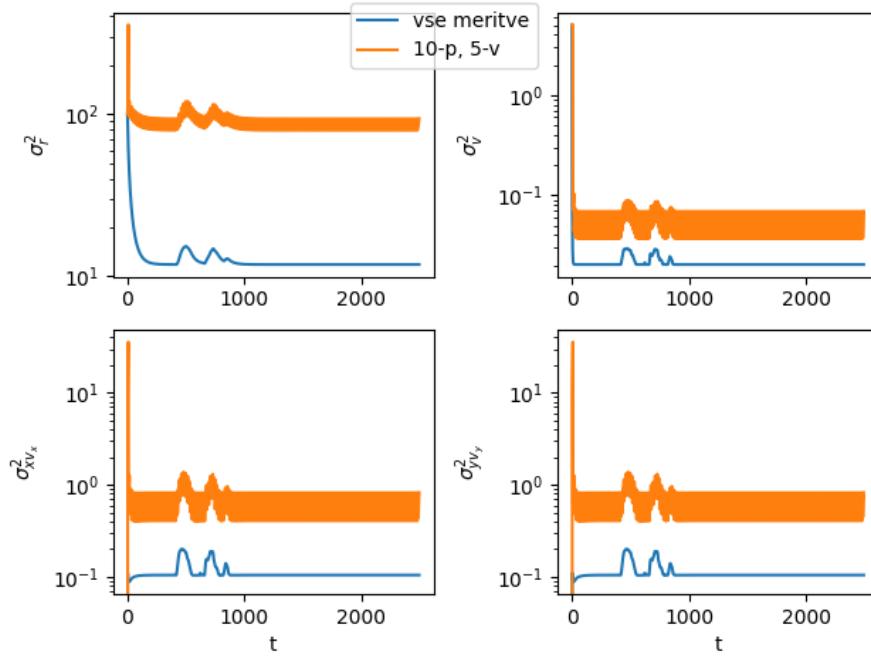
$$H_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_{2 \times 2} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Rezultate filtriranja prikazujejo slike 5,6,7. Pričakovano dobim slabše rezultate. Odstopanja položaja postanejo večja, pričakovana vrednost odstopanja se poveča za približno tri krat (slika 5(2,0)). Prav tako se poslabšajo hitrosti, pričakovana vrednost odstopanja hitrosti od pravih hitrosti se poveča za približno tretjino (slika 5(2,1)). Residuali se s časom povečujejo, na mestih kjer dobimo podatek o meritvi pa strmo padejo, zato dobimo tako krivuljo kot na sliki 5(1,1). Variance in kovariance se pričakovano povečajo. Ko

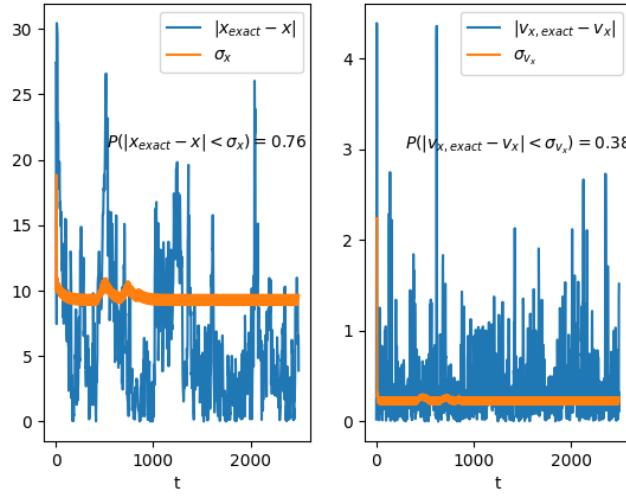


Slika 5: Rezultati filtriranja v primeru, ko vsako deseto meritev položaja in vsako peto meritev hitrosti.

nimamo simetričnega vzorčenja se potem tudi kovarianci med hitrostjo in položajem malce razlikujeta sliki 6, 11. Variance in kovariance začnejo nihati okrog povprečne vrednosti. Odstopanja x komponent vektorja stanja in standardne odklone prikazuje slika 7.



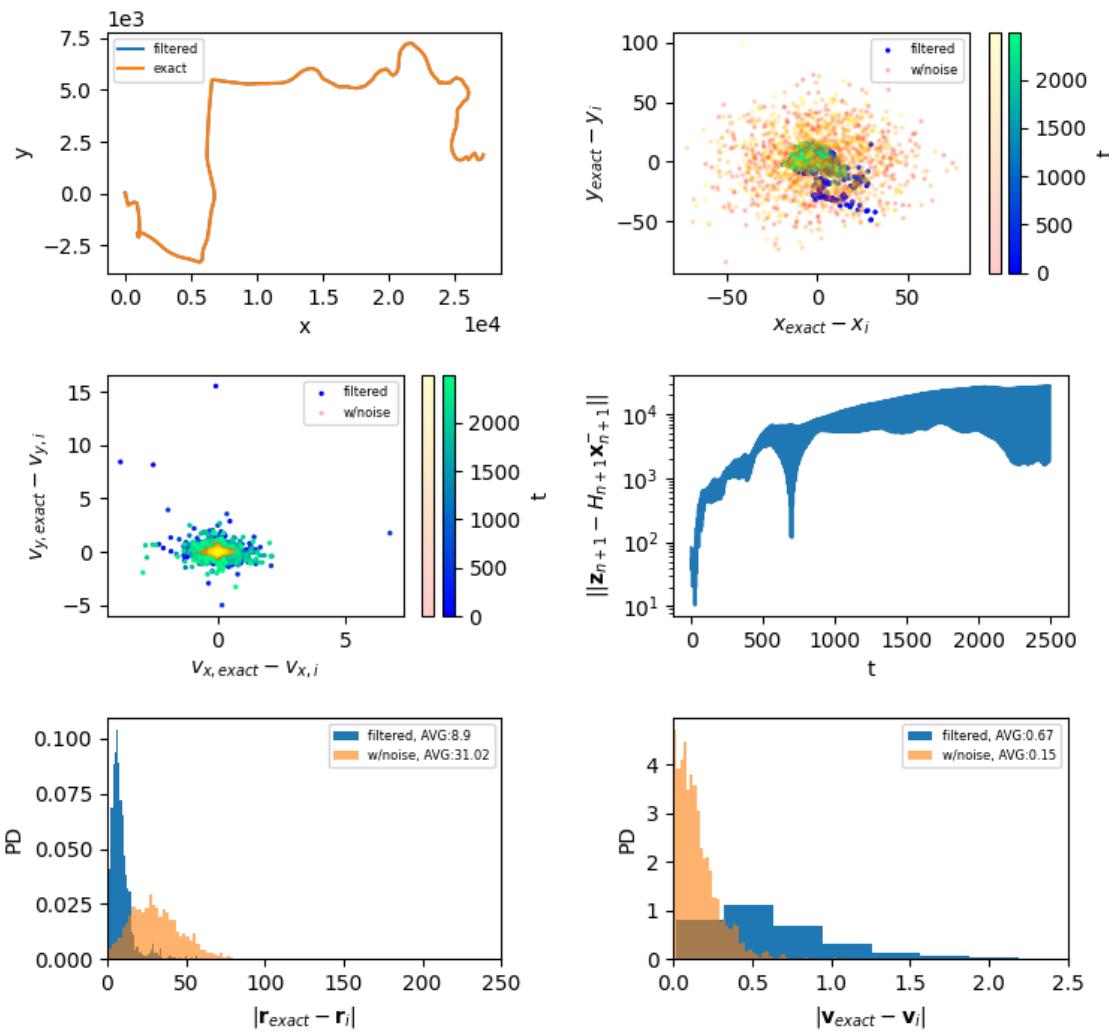
Slika 6: Časovna odvisnost neničelnih elementov kovariančne matrike. Oranžna krivulja podaja rezultate redkejšega vzorčenja.



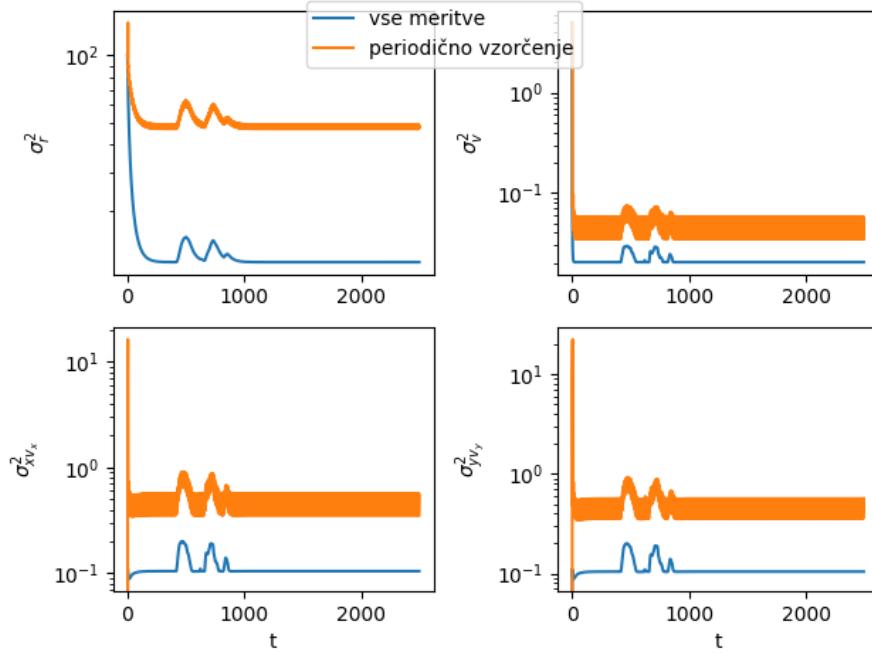
Slika 7: Odstopanja x-komponent filtriranih rezultatov od pravih in standardni odklon položaja ter hitrosti.

1.3 S periodičnim vzorčenjem

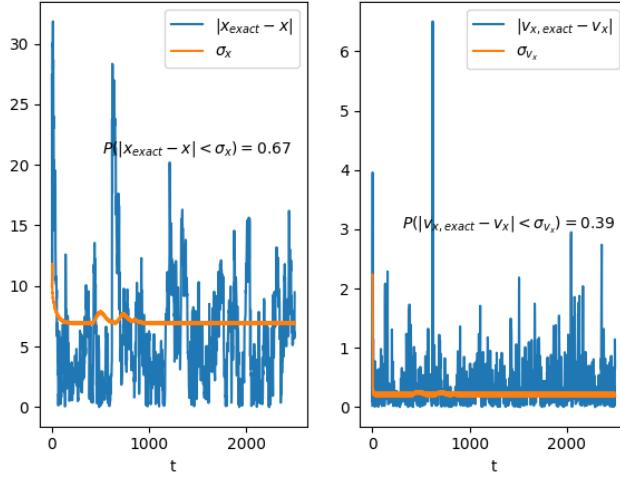
Zanimalo me je kako dobro lahko rekonstruiram pot, če lahko v vsakem koraku dobim samo meritev ene količine v periodičnem vrstnem redu. V n-tem koraku dobim meritev x položaja, v n+1 meritev y položaja, v n+2 v_x meritev in v n+3 meritev v_y . Ker imam periodičen pogoj dobim v $n + 4$ spet x-meritev. Rezultati filtriranja so prikazani na slikah 8, 9, 10. Kljub temu, da je povprečna vrednost residualov (slika 8(1,1)) večja kot v primeru redkejšega vzorčenja, dobim boljše rezultate. V desetih korakih dobim v primeru redkejšega vzorčenja 4 vzorce, v primeru periodičnega vzorčenja pa 10 vzorcev, kar izboljša rekonstrukcijo poti. Pričakovana vrednost odstopanja razdalje je manjša, odstopanje hitrosti pa približno enako kot v primeru redkejšega vzorčenja. Variance in kovariance so manjše kot v primeru redkejšega vzorčenja (slika 9), tudi nihanja varianc okrog povprečne vrednosti se zmanjšajo, ko se zmanjša varianca. Odstopanja x komponent vektorja stanja in standardne odklone prikazuje slika 10. Kovariančne matrike na koncu poti za vse tri primere vzorčenja prikazuje slika 11



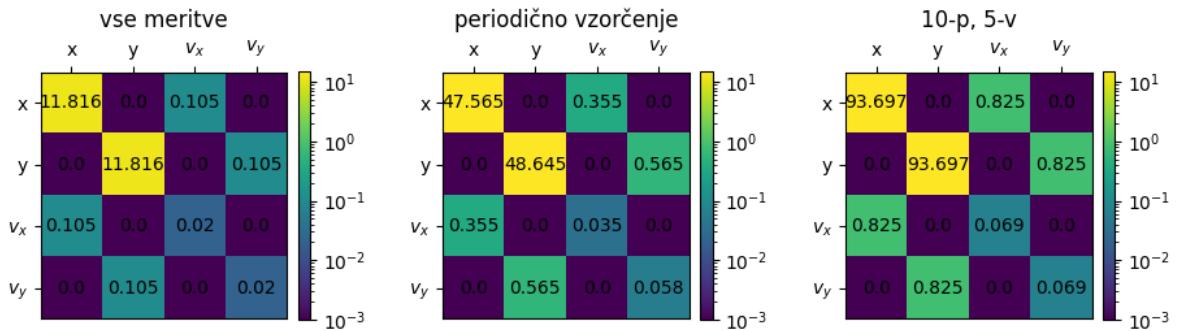
Slika 8: Rezultati filtriranja v primeru periodičnega vzorčenja.



Slika 9: Časovna odvisnost neničelnih elementov kovariančne matrike. Oranžna krivulja podaja rezultate periodičnega vzorčenja.



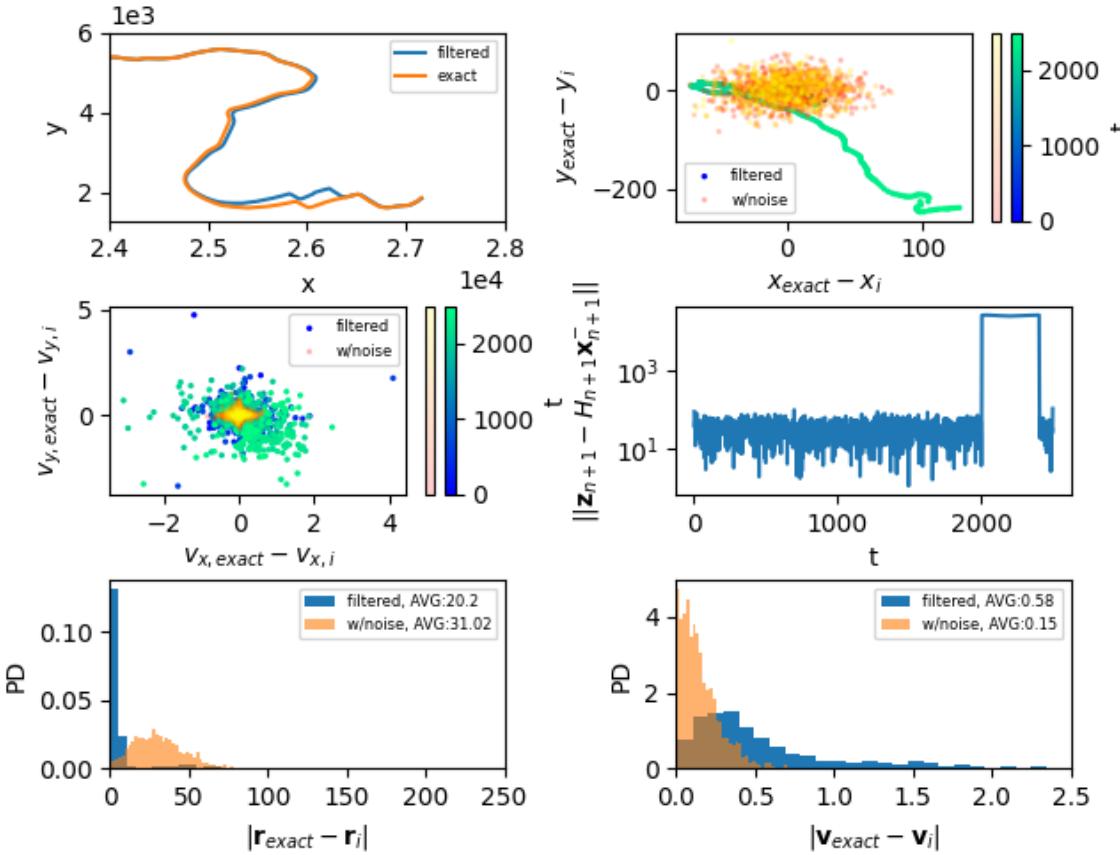
Slika 10: Odstopanja x-komponent filtriranih rezultatov od pravih in standardni odklon položaja ter hitrosti.



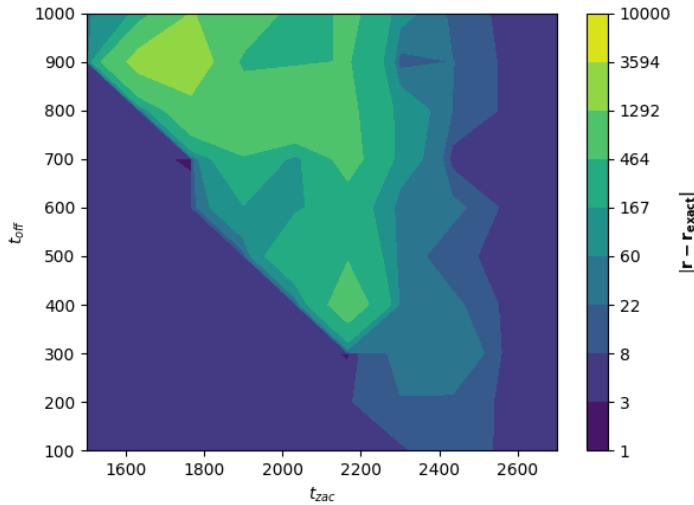
Slika 11: Kovariančne matrike ob na koncu poti za vse tri primere vzorčenja.

1.4 Ob izgubi signala

Zanimivo je tudi pogledati kako dobro filter rekonstruira pot, če se vmes izgubi signal. V ta namen sem odstranil meritve v intervalu $t \in [2000, 2400]$. Približan konec poti (slika 12(0,0)) prikazuje kako se poveča odstopanje od prave poti, ko izgubimo signal. Kljub temu da ni signala 400s in samo nekaj 100s pred koncem poti, filter dobro ujame pravo pot, ko se signal vrne. Obdobje, ko ni signala dobro prikazujejo residuali, saj tam vrednosti močno poskočijo (slika 12(1,1)). Kar je pomembno pri potovanju je, da pridemo na željeno mesto. To, da lahko mogoče opravimo daljšo pot, ali se vmes izgubimo je manjšega pomena, če na koncu pridemo do željene destinacije. V ta namen sem pogledal odstopanja končnega položaja od pravega v odvisnosti od časa, ko izgubimo signal in velikosti intervala, ko ni signala. Odvisnost za določeno območje prikazuje slika 13. Zanimivo je, da če izgubimo signal približno 100 s pred koncem poti, pridemo na pravi cilj.



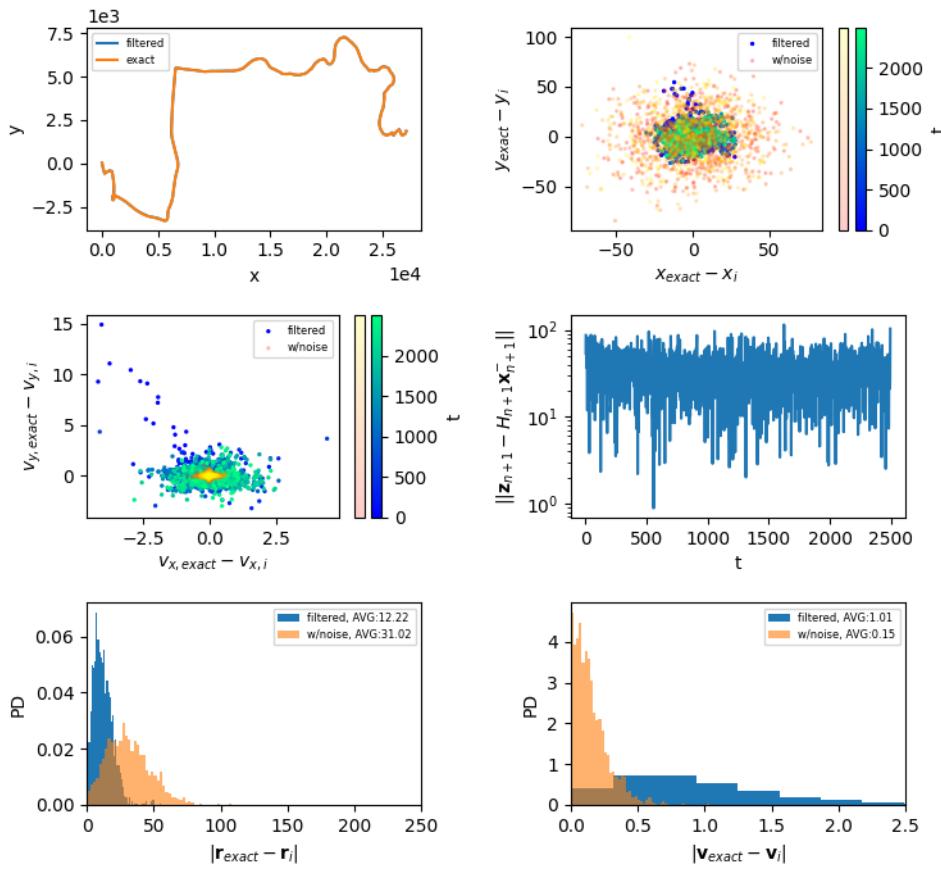
Slika 12: Rezultati filtriranja v primeru, ko izgubimo signal v časovnem intervalu $t \in [2000, 2400]$.



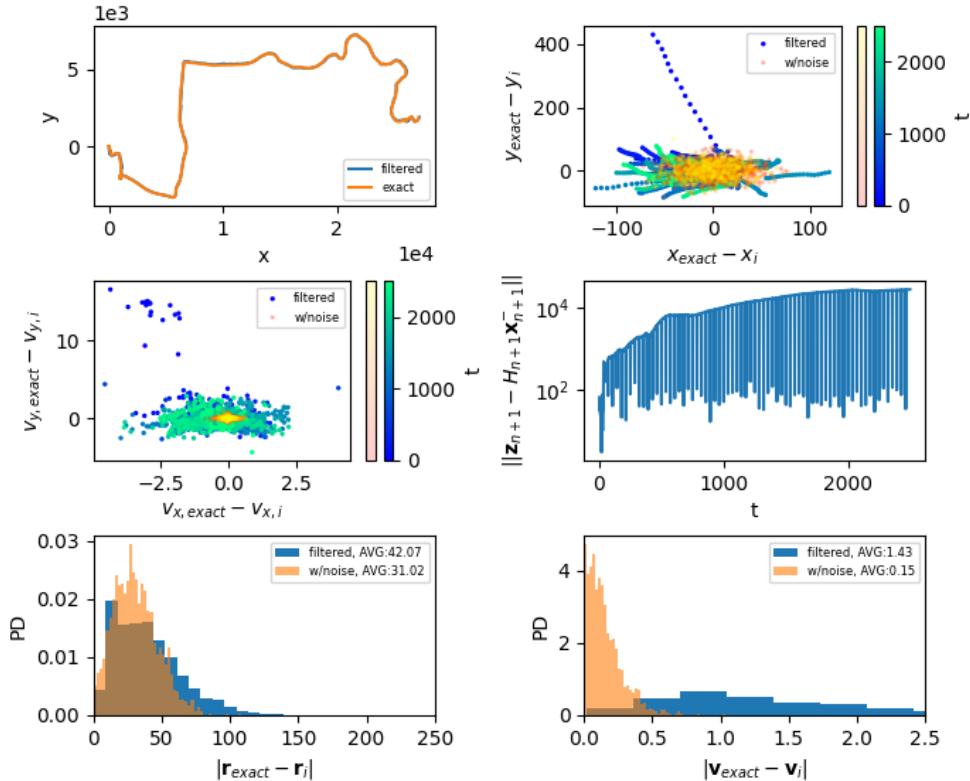
Slika 13: Razdalja med končnim položajem rekonstruirane in prave poti v odvisnosti od začetnega časa izgube signala t_{zac} in trajanja izgube signala t_{off} .

1.5 Brez meritev hitrosti

V primeru ko nimam podanih meritev hitrosti sem pogledal rekonstrukcijo poti, če imam podane pospeške in lokacije in če imam podane pospeške in vsako dvajseto meritev lokacije. Modelska nedoločenost hitrosti sem povečal na $\sigma_v = 10 \text{ m/s}$. Rezultate prikazujejo slike 14, 15. V primeru ko imam podane vse meritve lokacije Kalmanov filter dobro rekonstruira pot. Veliko bolje kot če imam podane samo meritve lokacije. Pričakovana vrednost odstopanja filtriranega položaja od pravega položaja je skoraj tri krat boljša s filtriranjem (slika 14(1,0)). Modelske hitrosti precej odstopajo od pravih, nekoliko bolj kot same zašumljene meritve. V



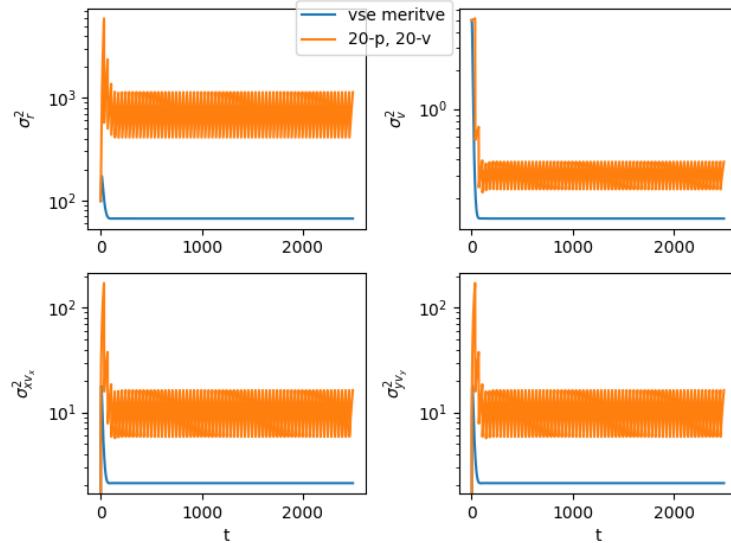
Slika 14: Rezultati filtriranja v primeru, ko imam podane meritve o lokacijah in pospeških.



Slika 15: Rezultati filtriranja v primeru, ko imam podane meritve o pospeških in vsako dvajseto meritev o lokaciji.

skrajnjem primeru, ko imam podano vsako dvajseto meritev lokacije se natančnost precej poslabša. V tem primeru se lepo vidi zmanjšanje residualov v primeru ko dobimo dvajseto meritev lokacije (slika 15(1,1)).

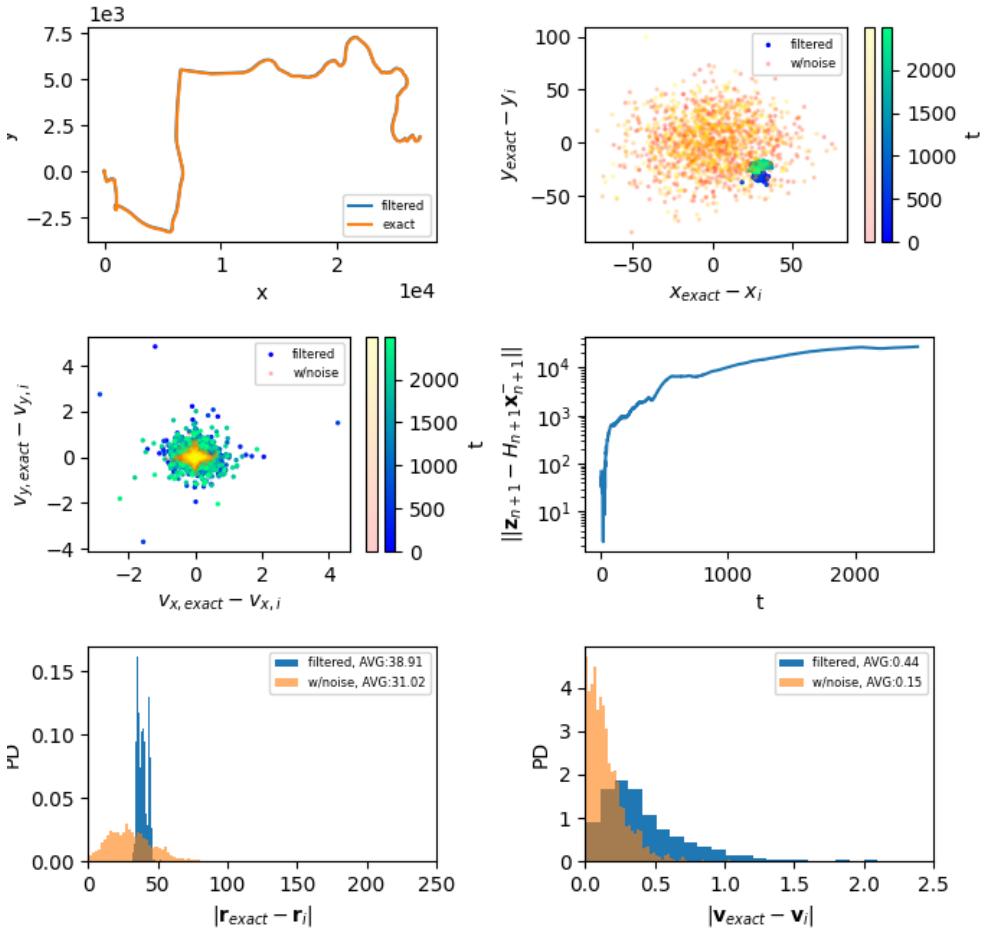
Pričakovana vrednost razlike razdalj (slika 15(2,0)) je večja kot če imam podane vse meritve lokacije. V tem primeru postane Kalmanov filter nekoliko slabši od dejanskih meritev, v primeru da imam podane vse zašumljene meritve lokacije, kar je precej impresivno. Če bi vzel vsako 10 meritev lokacije bi še vedno dobil boljšo rekonstrukcijo poti kot če imam samo zašumljene podatke lokacije. Variance in kovariance v primeru ko imam podane samo meritve o lokacijah in pospeških in ko imam podane pospeške in vsako dvajseto meritev lokacije prikazuje slika 16.



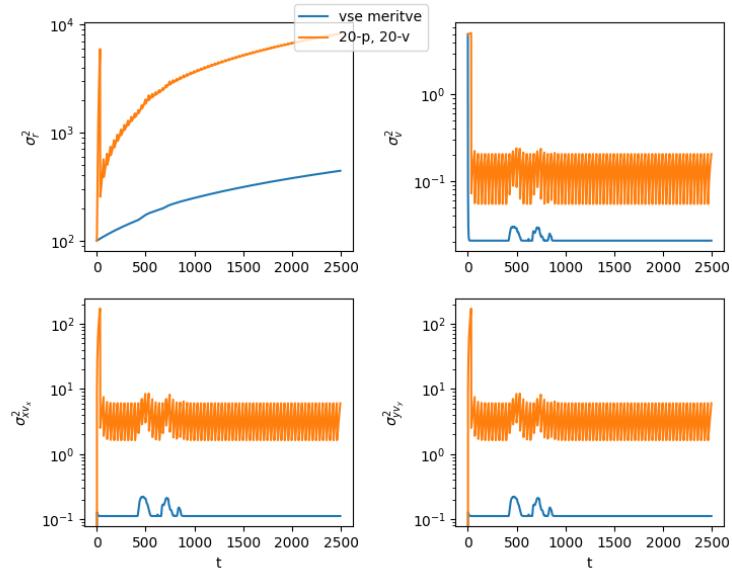
Slika 16: Časovna odvisnost neničelnih elementov kovariančne matrike. Oranžna krivulja podaja rezultate v primeru ko imam podano vsako dvajseto meritev lokacije. Modra krivulja predstavlja rezultate ko imam podane vse meritve lokacije. V obeh primerih imam podane pospeške.

1.6 Brez meritev lokacije

Bistveno bolj natančna je rekonstrukcija poti v primeru ko nimam podanih hitrosti. V primeru ko nimam podanih lokacij so rezultati precej slabši. Tudi tukaj sem pogledal primer ko imam vsako dvajseto meritev hitrosti, vendar so rezultati zelo slabi, zato sem narisal samo časovno odvisnost varianc 18. V primeru, ko imam podane samo meritve hitrosti in pospeške 17, Kalmanov filter ne izboljša odstopanj s časom. Pričakovana razlika razdalj (slika 17(2,0)) je okrog 40 m. Residuali s časom naraščajo in vsaka 20 meritev hitrosti na njih ne bistveno vpliva, tako kot v prejšnjem primeru. Zanimivo je, da se s filtriranjem ne približujem pravi rešitvi, ampak ostajam na približno konstantni oddaljenosti od nje (slika 17(0,1)). Časovno odvisnost varianc in kovarianc prikazuje slika 18. Kovariančni elementi in varianca hitrosti hitro padejo na neko povprečno vrednost in okrog nje krožijo. Varianca položaja se s časom veča.



Slika 17: Rezultati filtriranja v primeru, ko imam podane meritve o pospeških in hitrostih.



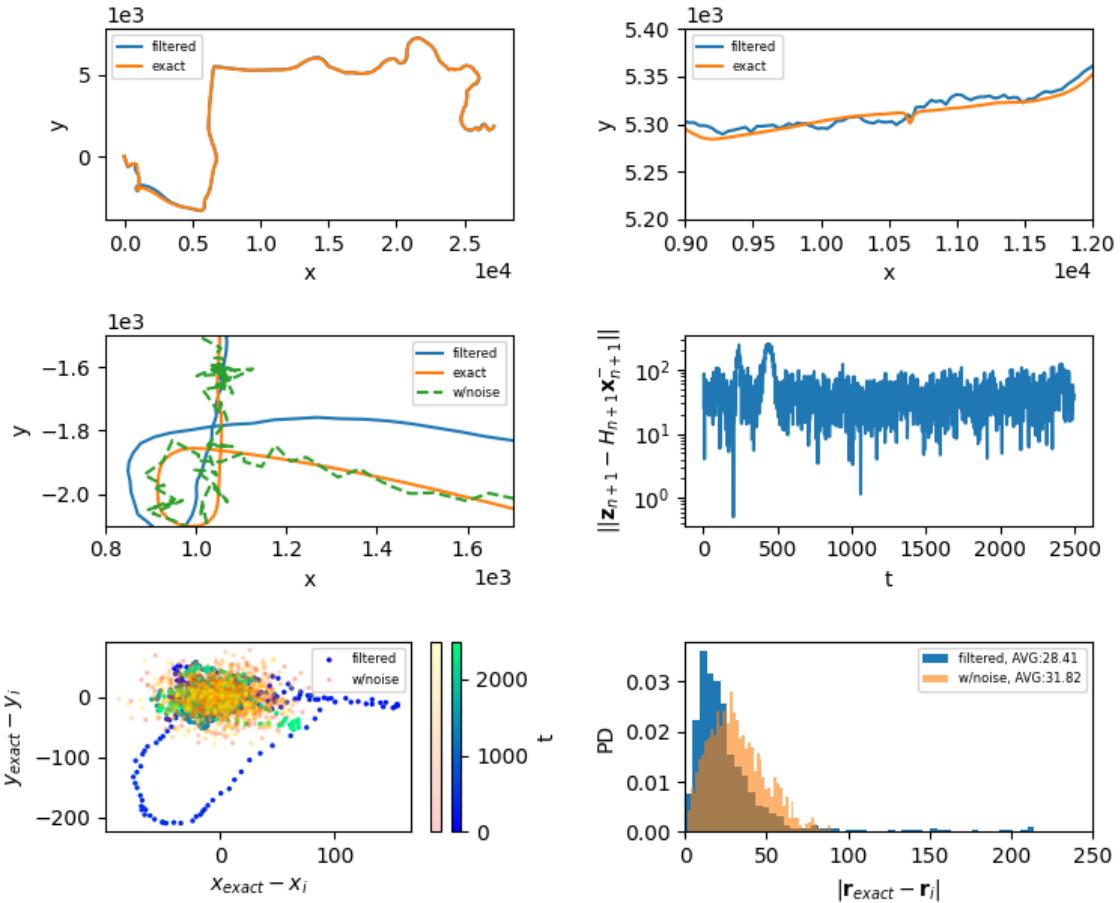
Slika 18: Časovna odvisnost neničelnih elementov kovariančne matrike. Oranžna krivulja podaja rezultate v primeru ko imam podano vsako dvajseto meritev hitrosti. Modra krivulja predstavlja rezultate ko imam podane vse meritve hitrosti. V obeh primerih imam podane pospeške.

1.7 S pretvorbo pospeška

V bolj realnem modelu podaja akcelerometer tangencialno in radialno komponento pospeška. Ker je postopek opisan že v navodilih bom podal samo relevantne podatke. Kontrolni vektor je sedaj definiran preko linearne preslikave $\mathbf{c}_n = B_n \mathbf{u}_n$, kjer je

$$\mathbf{u}_n = (a_{t,n} \frac{\Delta t^2}{2}, a_{r,n} \frac{\Delta t^2}{2}, a_{t,n} \Delta t, a_{r,n} \Delta t)^T . \quad (7)$$

Sprememba matrik B_n in Q_n je podana v navodilih naloge. Rezultat filtriranja prikazujeta sliki 19 in 20. Rezultati filtriranja so malo boljši kot surovi podatki. Pričakovana razlika razdalj (slika 19(2,1)) je malo manjša. Iz residualov lahko vidim, da imam 2 skoka. Eden izmed njih je tudi zaradi odstopanj, ki sem jih prikazal na sliki 19(1,0). V primeru ostrih ovinkov Kalmanov filter slabo reproducira pravilno pot. V primeru ko je pot približno ravna pa se dobro približa pravi vrednosti (slika 19(0,1)). Časovno odvisnost varianc in kovarianc prikazuje slika 20. Variance so precej večje v primeru bolj realnega modela. Kot lahko

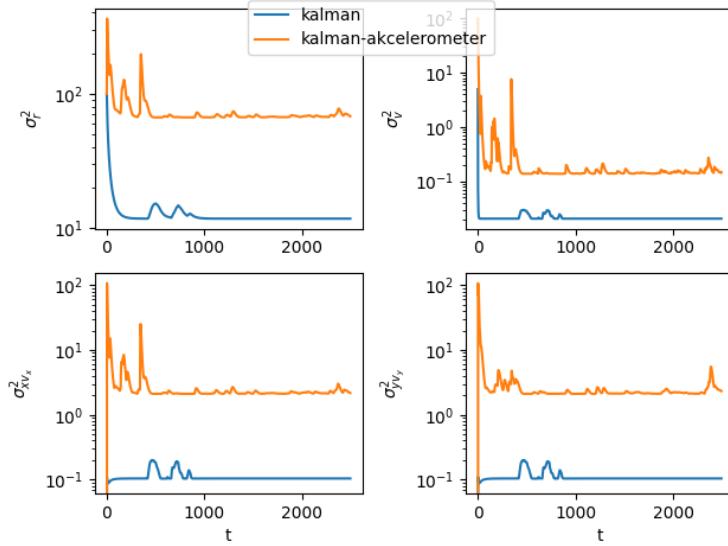


Slika 19: Rezultati filtriranja v primeru, ko upoštevam vse meritve.

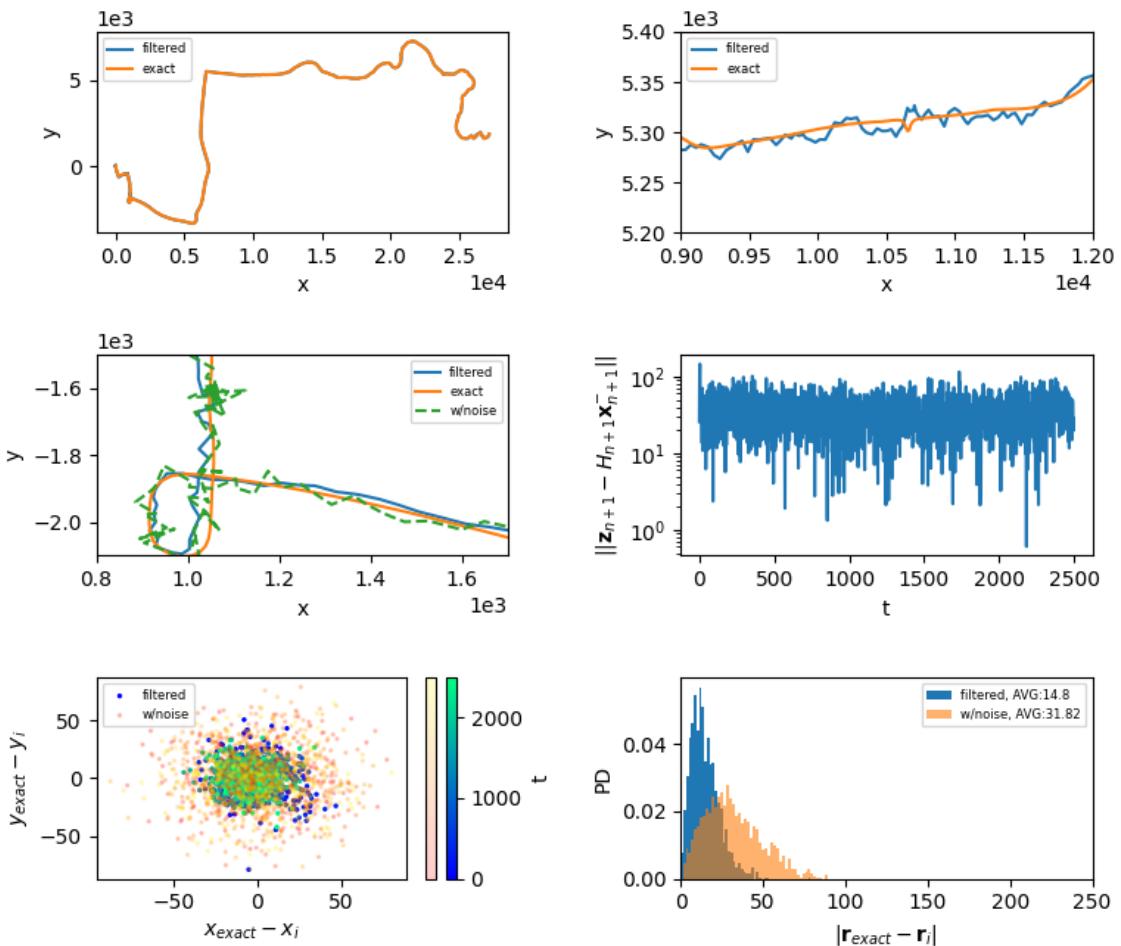
vidim iz rezultatov, model slabo opiše prave vrednosti v ovinkih. To pomeni, da ko je velik radialni pospešek je filtriranje nenatančno. Stvar lahko izboljšam tako, da v ovinku bolj upoštevam meritve in na ravnini bolj upoštevam model. To sem naredil tako, da sem dodal utež k inovaciji. Če bo utež velika v ovinkih bo filter bolj upošteval meritve in tako se lahko bolj približam pravilnim lokacijam. Posodobljen vektor stanja v naslednjem koraku je

$$\mathbf{x}_{n+1}^+ = \mathbf{x}_{n+1}^- + (1 + e^{\frac{a_{r,n}}{a_{r,max}}}) K_{n+1} (\mathbf{z}_{n+1} - H_{n+1} \mathbf{x}_{n+1}^-) \quad (8)$$

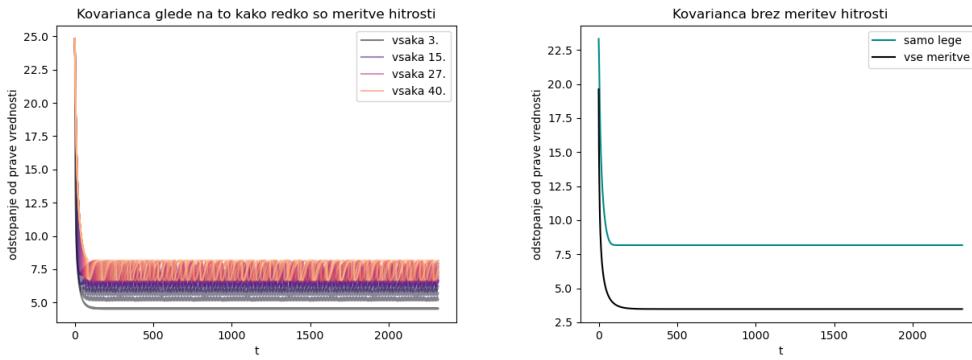
Rezultati filtriranja so prikazani na sliki 21. Rezultati so bistveno boljši. Kljub temu, da sem malo pokvaril rezultat na ravnini, je utež bistveno izboljšala rekonstrukcijo v ovinkih. V residualih so tako izginile špice (slika 21(1,1)). Pričakovana razlika razdalj med pravo in lokacijo pridobljeno s filtrom se je približno prepolovila v primerjavi z zgornjim modelom.



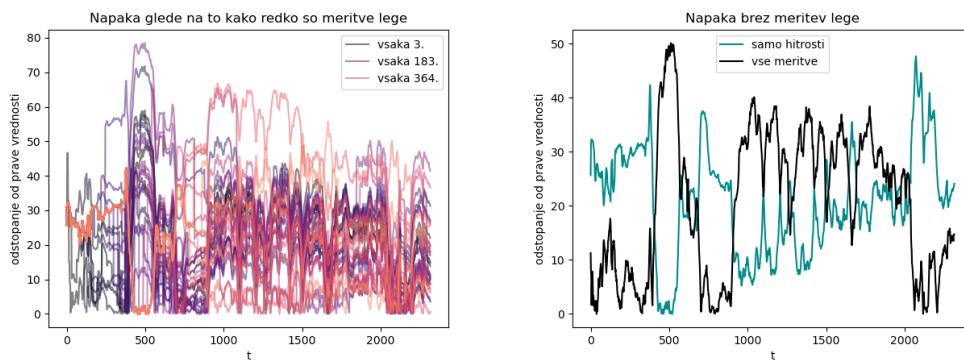
Slika 20: Časovna odvisnost neničelnih elementov kovariančne matrike. Oranžna krivulja podaja rezultate v primeru ko imam opravka z realnim akcelerometrom. Modra krivulja predstavlja rezultate originalnega Kalmanovega filtra z vsemi podanimi meritvami.



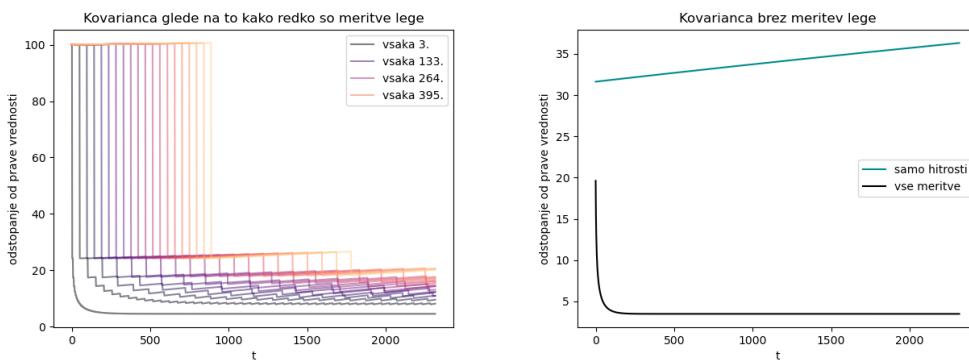
Slika 21: Rezultati filtriranja v primeru, ko upoštevam vse meritve in dodam utež k inovaciji.



Slika 14: Redčenje meritev za hitrost ob vseh uporabljenih meritvah za lego. Za merilo za napako je tu vzeta vrednost varianc za x. Na levi je prikazano redčenje, na desni pa limita, ko nimamo nobene meritve za hitrost.



Slika 15: Redčenje meritev za lego ob vseh uporabljenih meritvah za hitrost. Za merilo za napako je tu vzeta razlika s pravo trajektorijo. Na levi je prikazano redčenje, na desni pa limita, ko nimamo nobene meritve za lego.

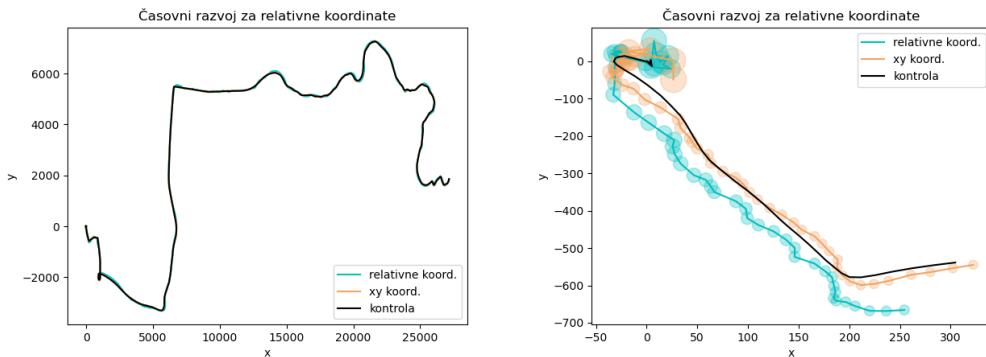


Slika 16: Redčenje meritev za lego ob vseh uporabljenih meritvah za hitrost. Za merilo za napako je tu vzeta vrednost varianc za x. Na levi je prikazano redčenje, na desni pa limita, ko nimamo nobene meritve za lego.

5 Relativne koordinate

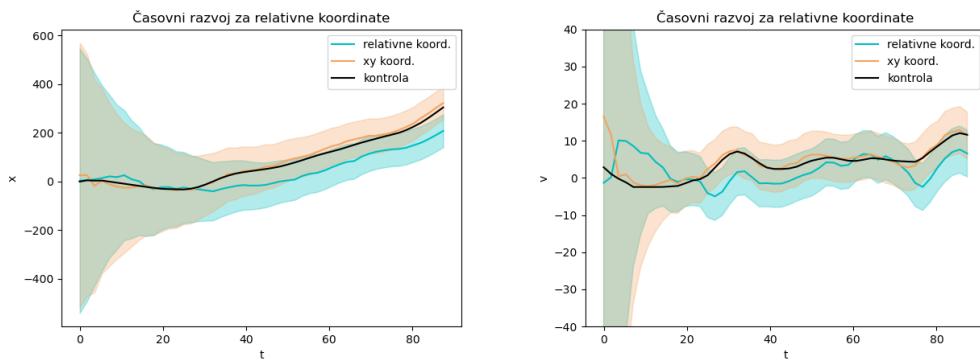
V resnici nam akcelerometer podaja pospeške glede na trenutno orientacijo vozila. Med kontrolnim vektorjem in nehomogenim delom dinamičnega modela zato stoji še ena linearna preslikava. Tudi ta model zelo dobro sledi na večjih skalah, vendar pa če pogledamo bližje precej bolj zgreši kot model iz

prve naloge, glej sliko 17.

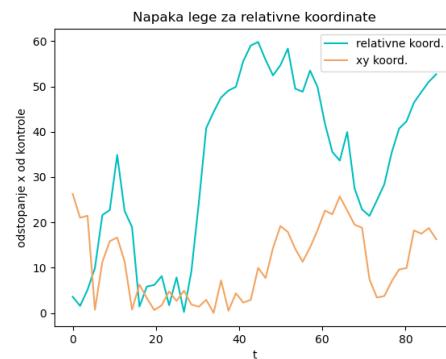


Slika 17: Prikaz rekonstrukcije poti pri relativno podanih pospeških. Levo je prikazana celotna pot, desno pa približan začetni odsek.

Še bolje lahko vidimo dinamiko na slikah 18 in 19, kjer je prikazana še hitrost. Vidimo, da lego še približno zadane, hitrost pa precej slabo lovi.



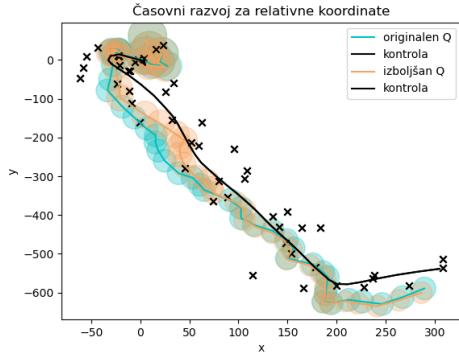
Slika 18: Prikaz rekonstrukcije poti pri relativno podanih pospeških. Levi graf prikazuje časovno odvisnost lege x, desni pa časovno odvisnost hitrosti x.



Slika 19: Razlika med rekonstruirano koordinato x ter kontrolo.

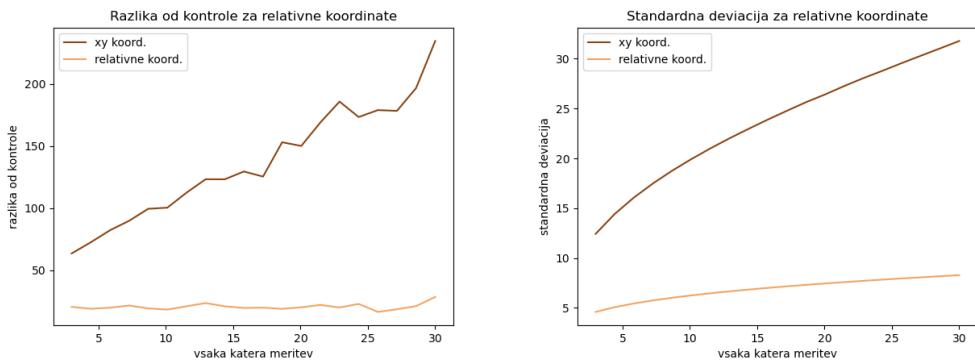
V navodilih naloge je opisano, da moramo upoštevati tudi negotovost trenutne ocene hitrosti. To se pozna v kovarianci meritve pospeška. Na sliki 20 je prikazana razlika, če upoštevamo ta popravek in če ga ne.

Vidimo, da je razlika precejšnja, velikost napake namreč vpliva na to, kakšno težo ima meritev, ki pride na novo. Ta popravek je zato dobro upoštevati in ni zanemarljiv.



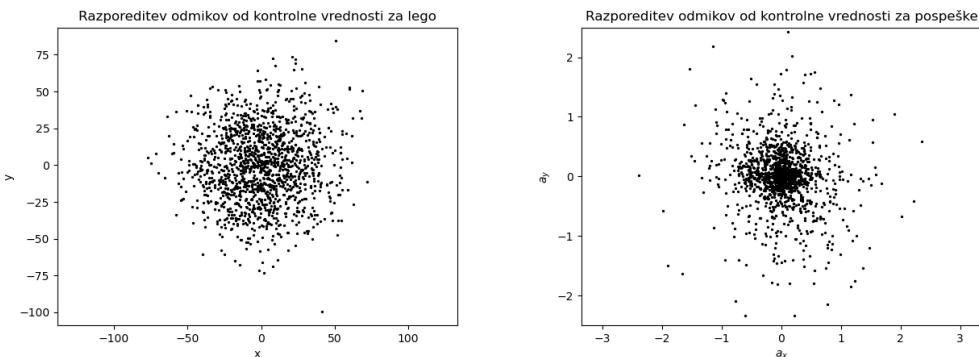
Slika 20: Prikaz rekonstrukcije poti pri relativno podanih pospeških, če upoštevamo negotovost trenutne ocene hitrosti in če je ne. (Vzeti so spremenjeni parametri za σ_{xy} in σ_a , ki jih bom pojasnila kasneje.)

Tako kot pri prejšnjem poglavju si tudi tu poglejmo, kako je, če redčimo meritve, glej sliko 21.



Slika 21: Prikaz odvisnosti napake od pogostosti vzorčenja. Odvisnost je prikazana za dva različna merila za napako: odstopanje od kontrolne vrednosti in varianca. Prikazana je tudi razlika med grafom, dobljenim v prejšnjem poglavju ter novim grafom z relativnimi podatki.

Kot smo že prej videli, tudi tu vidimo, da je napaka precej večja za relativne podatke. Obe merili za napako nam dasta zelo podobne rezultate. Kot pričakovano povsod napaka narašča, ko redčimo meritve, opazimo pa, da narašča hitreje v primeru relativnih koordinat. Ta razlika je posebej opazna, ko gledamo graf z razliko od kontrolne vrednosti.



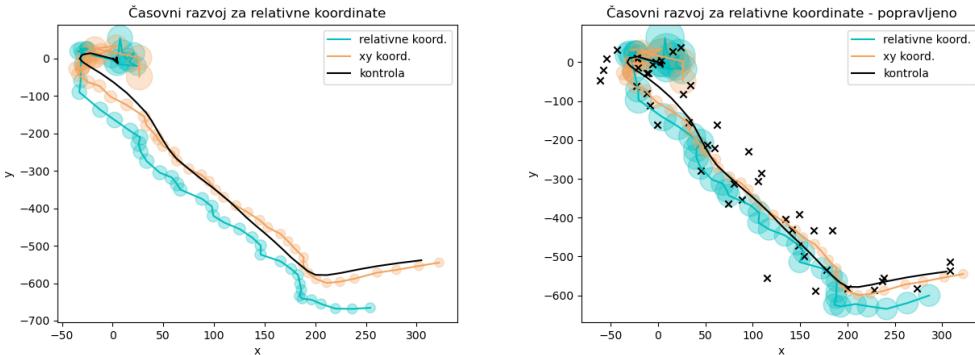
Slika 22: Razlika med kontrolno vrednostjo in meritvami za lego in pospešek.

Kot smo videli graf precej slabše sledi kontrolni vrednosti kot pri prejšnjih podatkih, poskusimo torej

to izboljšati. Sklepamo, da bi morale imeti meritve večjo težo kot jo imajo, da bi tako graf bolj zavijal v pravo smer. S tem v mislih narišemo razliko med kontrolno vrednostjo in meritvami za vsako meritve lege in pospeška, glej sliko 22. Kontrolna vrednost pospeška je določena tako, da vzamemo naklon med sosednjima hitrostima.

Obe porazdelitvi sta enakomerni in gaussovski. Izračunamo lahko torej standardno deviacijo. Standardna deviacija lege je zelo podobna vrednosti, ki smo jo vzeli za napako lege ($\sigma_{xy} = 25m$), standardna deviacija pospeška pa izgleda precej večja od vrednosti, ki smo jo vzeli ($0.3 \frac{m}{s^2}$ namesto $0.05 \frac{m}{s^2}$).

Poskusimo torej vzeti $\sigma_a = 0.3$. Razlika med prejšnjo in izboljšano potjo je prikazana na sliki 23.

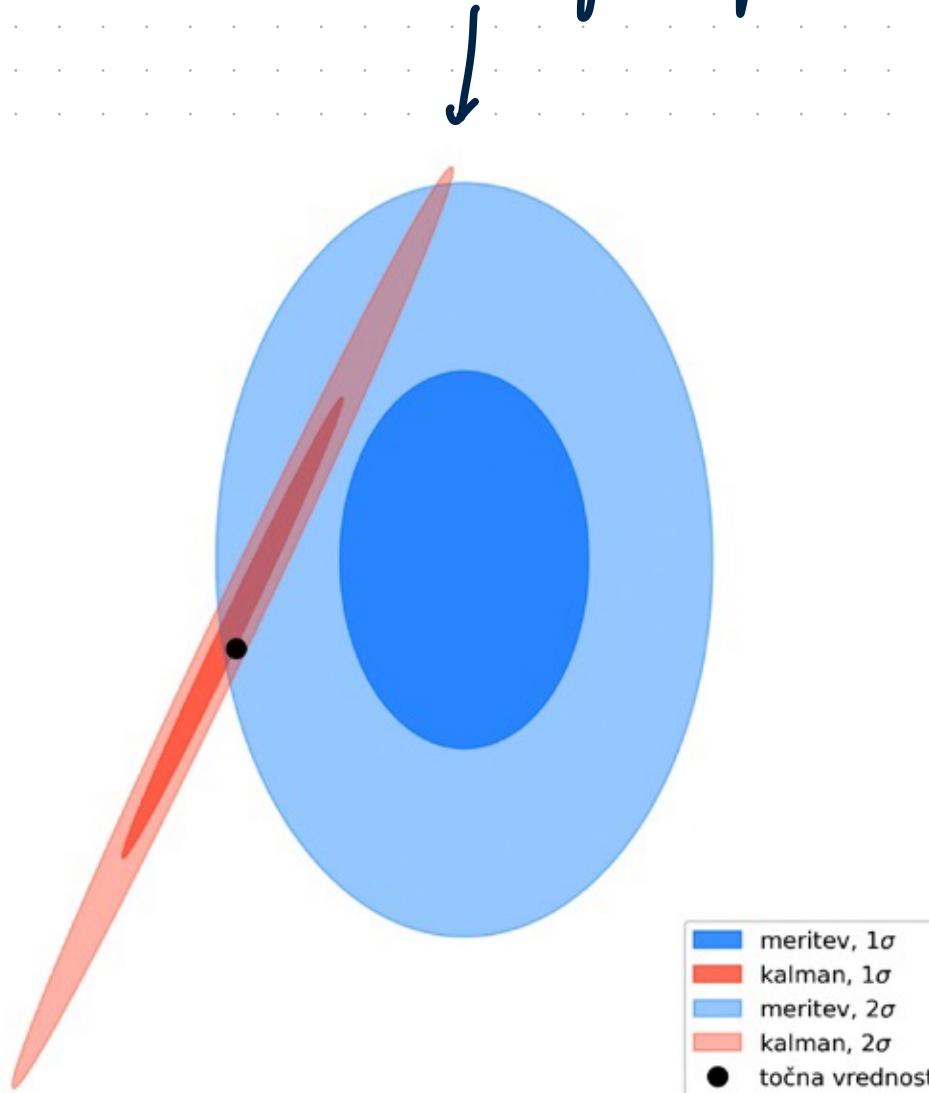


Slika 23: Prejšnja in izboljšana verzija rekonstrukcije poti.

Vidimo, da sedaj opazno bolje sledi pravi poti, sploh je razlika vidna ob koncu našega preučevanega intervala. Prav tako pa se tudi napake, ki jih ocenimo s kovarianco ujemajo z resničnimi odstopanjimi. S sprememboto parametrov smo torej dosegli, da model bolj upošteva meritve in posledično bolj sledi poti.

Matic Robomuh

Proj in pčtem



Slika 2: Kovariančne elipse meritev in kalmanovih napovedi za x komponenti lege in hitrosti. Črna pika predstavlja dejansko vrednost količin v tem trenutku.

Grašper Jelen

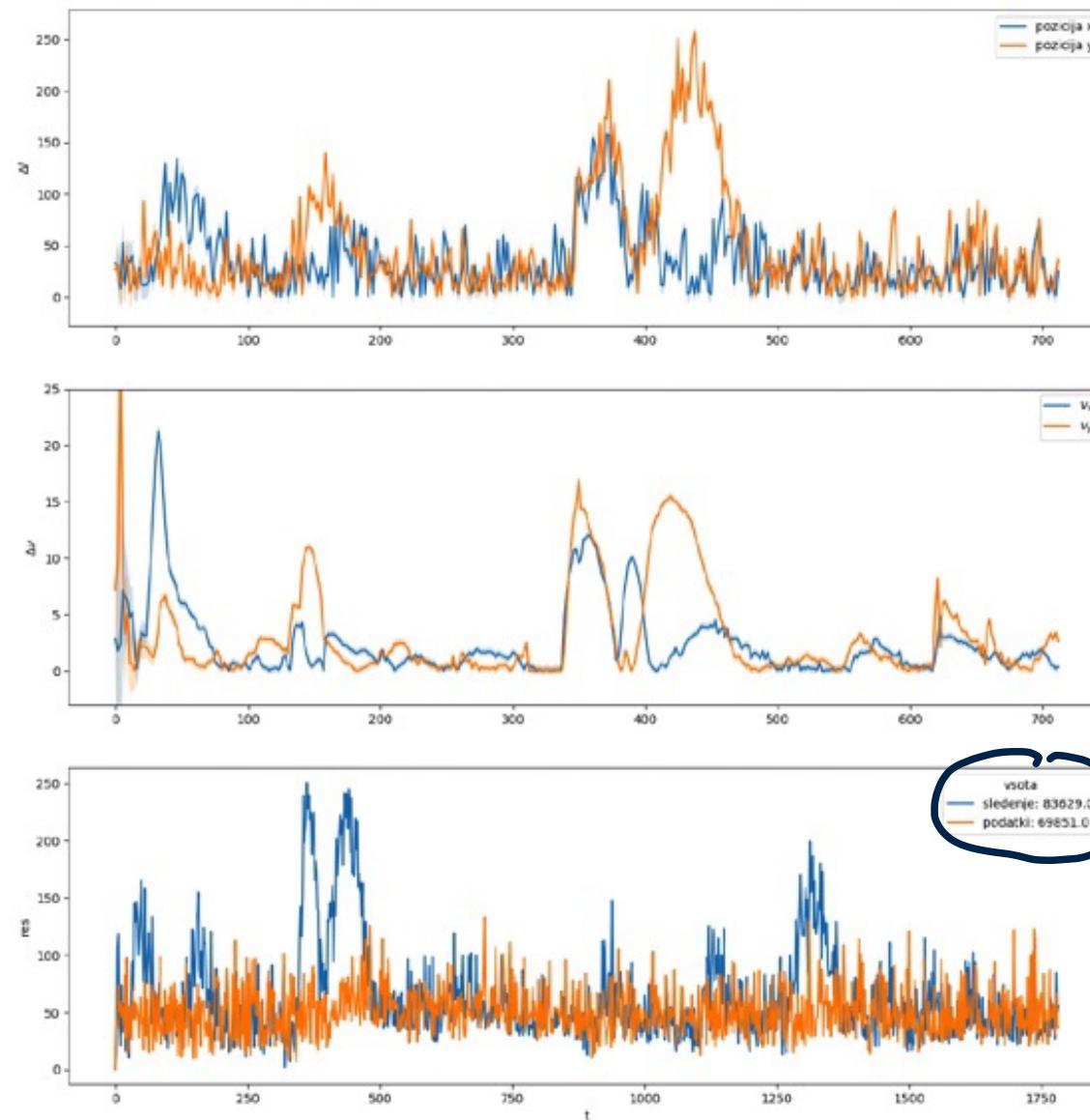
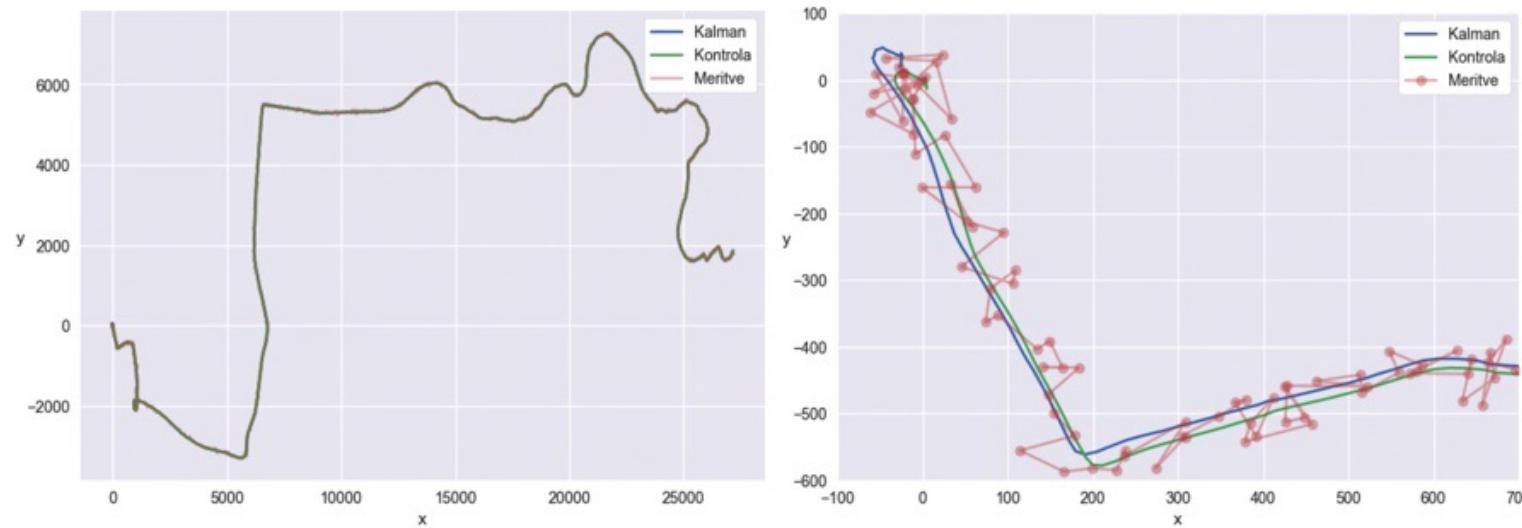
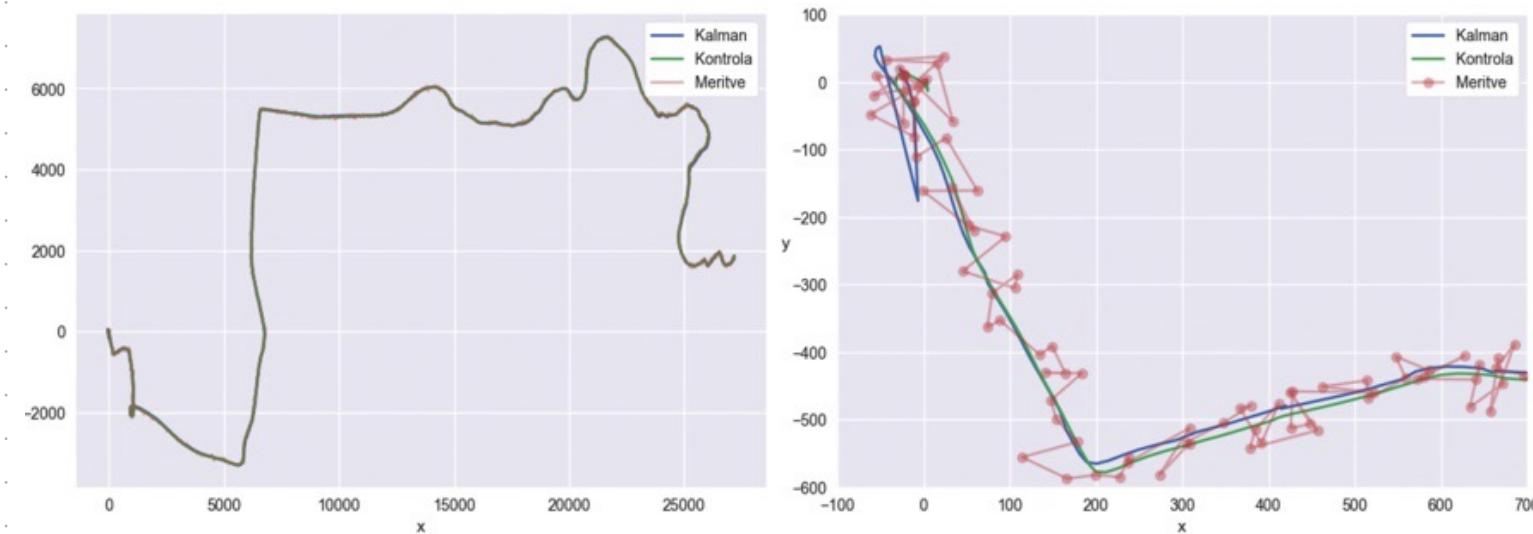


Figure 9: Odstopanja pozicije x in y od pravih vrednosti (zgoraj), odstopanje x in y komponente hitrosti (sredina) in residuali za odstopanje podatkov samih od pravih vrednosti in odstopanja izračunanih vrednosti od pravih vrednosti (spodaj).

Filip Kralj

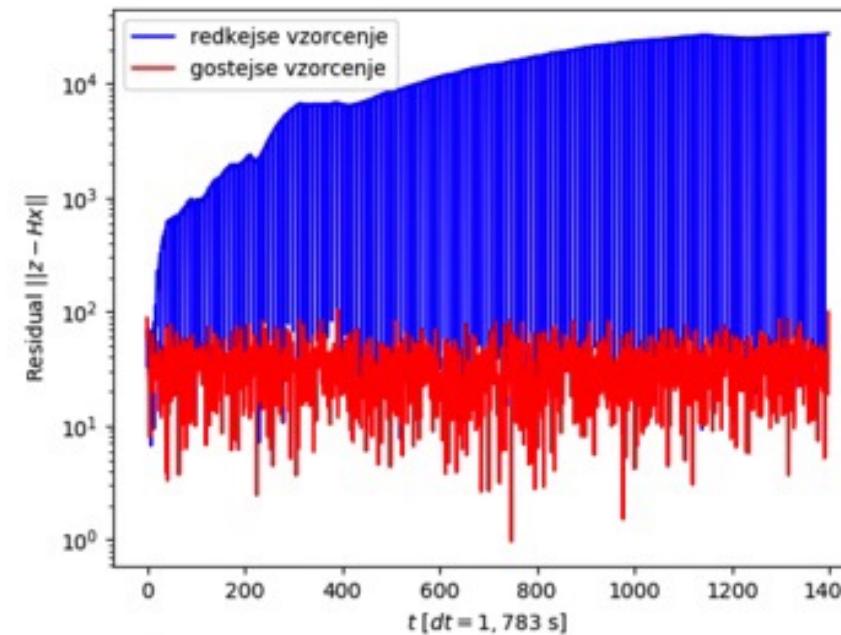
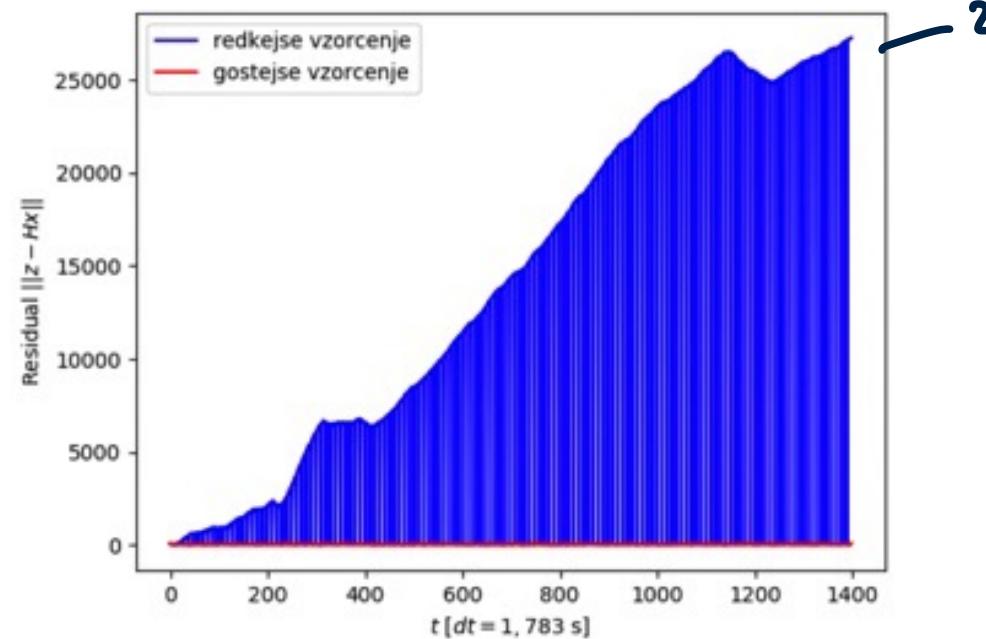


Slika 2: Prikaz napovedane poti ob upoštevanju vseh podatkov. Na desni je približan začetni del poti.



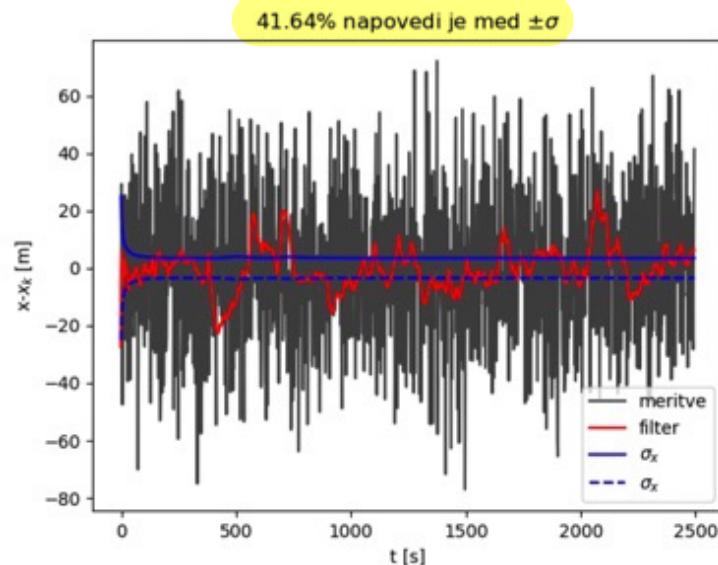
Slika 5: Prikaz napovedane poti ob upoštevanju vsake pete meritve lokacije in vsake desete meritve hitrosti. Na desni je zopet približan začetni del poti.

Andrej Koderš:

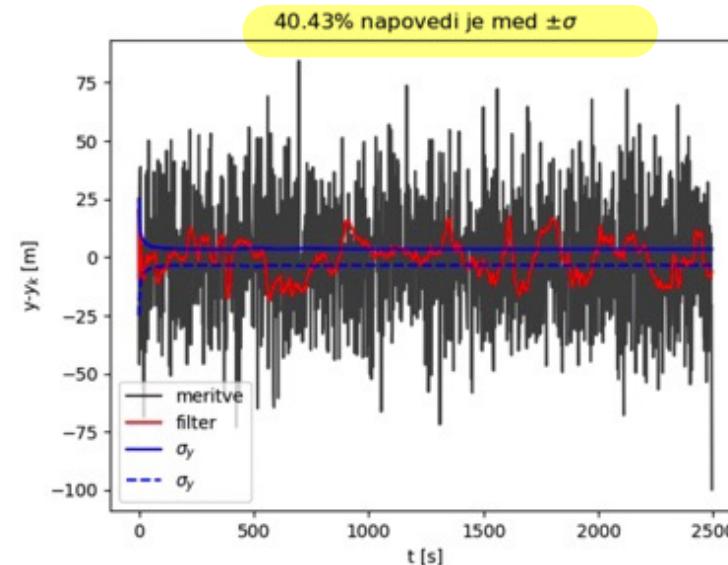


Slika 5: Residual $\|z_{n+1} - H_{n+1}x_{n+1}^-\|$ v odvisnosti od časa oziroma koraka.

Blez Lerpušček



(a) x



(b) y

Slika 2: Na grafih so prikazana odstopanja meritev in napovedi od dejanske vrednosti položaja ter σ .