

# Modelska analiza I

---

## Naloga 108

1. 12. 2022

---

---

---



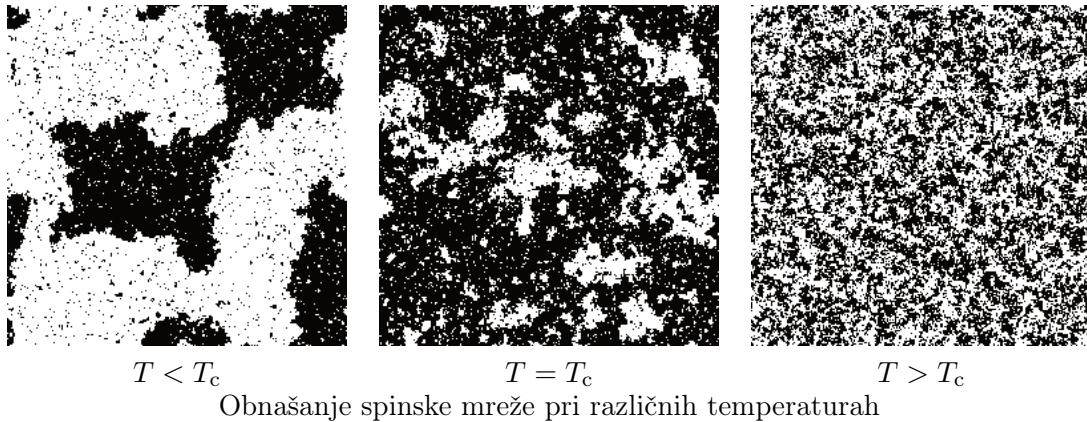
## 8. naloga – Metropolisov algoritem

- Molekularna verižnica:** 17 členkov dolga nitkasta molekula je obešena za oba konca. Vsak členek se lahko povesi od ničelne lege na poljubnega od 19 nivojev in si s tem zmanjša potencialno energijo za eno enoto na nivo. Če pa s tem prenategne vezi do sosedov, plača s prožnostno energijo, ki je za vsakega sosedja enaka kvadratu razlike v nivojskem številu. Določi ravnovesno energijo v odvisnosti od temperature. Za poteze lahko uporabiš spremembo za en nivo na izbranem slučajnjem mestu.
- Isingov model:** feromagnetne in antiferomagnetne snovi v dveh dimenzijah v približku dveh stanj opišemo s Hamiltonovim operatorjem

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle ij \rangle} s_i s_j - H \sum_i s_i, \quad J = \pm 1$$

kjer je  $s_i = \pm 1$  in vsota teče le po vezeh  $\langle ij \rangle$  med najbližjimi sosedji. Če ni zunanjega polja ( $H = 0$ ), temperatura  $T_c$  faznega prehoda pri feromagnetu zadošča enačbi

$$\sinh \frac{2J}{k_B T_c} = 1 \implies T_c \approx 2.269185 \frac{J}{k_B}$$



Določi povprečno energijo  $\langle E \rangle$  in lastno magnetizacijo  $\langle S \rangle$  v odvisnosti od temperature.  $S = \sum_i^N s_i$  je celotna magnetizacija sistema. Oglej si tudi spinsko susceptibilnost in specifično toploto pri različnih jakostih magnetnega polja.

$$\chi = \frac{\langle S^2 \rangle - \langle S \rangle^2}{N k_B T} \quad c = \frac{\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2}{N k_B T^2}$$

\* (neobvezno) Analiziraj zanesljivost Metropolisovega algoritma na **modelu trgovskega potnika**, tako da rezultate primerjaš s točnimi rezultati pri majhnem številu mest. Tablico razdalj lahko kar izžrebaš.

## Naloga 1:

1. Raznovesna energija v odvisnosti od temperature
2. Vredanca energije v odvisnosti od temperature.
3. Odvisnost  $\langle E \rangle$  od  $\alpha$ ?
4. # sprejetih potek
5.  $\infty$  število navajev
6. Je ta veritvena?

# 8. naloga: Metropolisov algoritem

VITJA BELTRAM

VPISNA ŠTEVILKA: 28212063  
10.12.2021

## 1 Naloga

- Molekularna verižnica:** 17 členkov dolga nitkasta molekula je obešena za oba konca. Vsak členek se lahko povesi od ničelne lege na poljubnega od 19 nivojev in si s tem zmanjša potencialno energijo za eno enoto na nivo. Če pa s tem prenategne vezi do sosedov, plača s prožnostno energijo, ki je za vsakega sosedja enaka kvadratu razlike v nivojskem številu. Določi ravnovesno energijo v odvisnosti od temperature. Za poteze lahko uporabiš spremembo za en nivo na izbranem slučajnem mestu.
- Isingov model:** feromagnetne in antiferomagnetne snovi v dveh dimenzijah v približku dveh stanj opišemo s Hamiltonovim operatorjem

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle ij \rangle} s_i s_j - H \sum_i s_i; \quad J = \pm 1 \quad (1)$$

kjer je  $s_i = \pm 1$  in vsota teče le po vezeh  $\langle ij \rangle$  med najbližjimi sosedji. Če ni zunanjega polja ( $H = 0$ ), temperatura  $T_c$  faznega prehoda pri feromagnetu zadošča enačbi

$$\sinh \frac{2J}{k_B T_c} = 1 \quad \rightarrow \quad T_c \approx 2.269185 \frac{J}{k_B}. \quad (2)$$

Določi povprečno energijo  $\langle E \rangle$  in lastno magnetizacijo  $\langle S \rangle$  v odvisnosti od temperature.  $S = \sum_i^N s_i$  je celotna magnetizacija sistema. Oglej si tudi spinsko susceptibilnost in specifično toplost pri različnih jakostih magnetnega polja.

$$\chi = \frac{\langle S^2 \rangle - \langle S \rangle^2}{N k_B T}, \quad c = \frac{\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2}{N k_B T^2} \quad (3)$$

\* (neobvezno) Analiziraj zanesljivost Metropolisovega algoritma na **modelu trgovskega potnika**, tako da rezultate primerjaš s točnimi rezultati pri majhnem številu mest. Tablico razdalj lahko kar izžrebaš.

## 2 Molekularna verižica

Opazujemo položaje členkov na verižici, ki lahko zasedajo diskretne nivoje. Skupna energija verižice z  $N$  členi je

$$E = \sum_{i=0}^{N-1} \alpha h_i + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-2} (h_{i+1} - h_i)^2, \quad (4)$$

kjer je  $h_i$  višina  $i$ -tega člena in  $\alpha = mg/(kd^2)$  razmerij med prožnostnim in gravitacijskim koeficientom. V resnici je ta energija deljena s prožnostno konstanto, ki pa jo bom postavil na 1 in se z njo ne bom obremenjeval. Od  $N$  členov sta začetni in končni člen pritrjena z robnim pogojem na  $h_0 = h_{N-1} = 0$ , tako da imamo  $N - 2$  prostih koncev.

Sedaj bomo uporabili Metropolisov algoritem za minimizacijo energije (4). V vsaki potezi bomo naključno izzrebali člen, ki ga bomo potem naključno premaknili za  $\delta = \pm 1$ . Če do sprememba energije

$$\Delta E = \delta^2 - \delta(h_{i+1} - 2h_i + h_{i-1} - \alpha) \quad (5)$$

negativna, potezo sprejmemo. Če pa je  $\Delta E > 0$ , potezo sprejmemo, če  $\xi < \exp(-\Delta E/T)$ , kjer je  $\xi \sim U(0, 1)$ . Konstanto  $k_B$  sem postavil na 1, tako da delam v brezdimenzijski obliki.

Na grafu 1 sta prikazani poziciji vseh členov verige in energija pri vsaki potezi. Na spodnjem grafu je prikazana energija v odvisnosti od zaporedne številke zaporedne poteze, ki je poleg x osi prikazana tudi z barvo. Na zgornjem grafu pa so prikazane sprejete poteze na verižici. Barva prikazuje zaporedno potezo, rdeča krivulja začetno stanje in zelena končno. Vsaka pikica torej prikazuje kam se je premaknil določen člen po potezi, ki je prikazana z barvo (vsaka pikica ima drugačno barvo). Pikice za posamezen člen so zamaknjene v x smeri za  $\pm 0.2$  glede na njihovo določeno vrednost, da se lažje opazi potek potez. Na zgornjem grafu na sliki 1 lahko vidimo, kako so se vertikalni položaji točk spreminjali s potezami. Vidimo lahko, kako so se nekateri členi (npr.  $x = 7, 12, 15, 16$ ) najprej malo dvigovale in šele nato začele spuščati. Še bolj nenavadno (a ne nepričakovano) pa je spremicanje člena ( $x = 11$ ), ki je najprej šel v pravo smer potem pa si za trenutek premislil in za par potez krenil v napačno smer, potem pa odkorakal proti končni poziciji.

Nato me je zanimalo, ali se so končni položaji verig podobni pri različnih minimizacijah. Torej če naredim minimizacijo večkrat zapored, ali dobim enako končno razporeditev višin členov. Na grafu 2 so predstavljeni rezultati. Z modro so predstavljene vsote kvadratov razlik višin posameznih členov glede na referenčni poskus. Vidimo, da se položaji spreminjajo in niso ves čas enaki. Po drugi strani pa je energija končnega stanja, ki je prikazana z oranžno ves čas enaka. Torej višine členov se rahlo spreminja na tak način, da je končna energija vedno enaka.

Malo me je presenetilo, da so energije tako poravnane, zato sem pogledal še kakšno odvisnost dobim, če povečam največjo dovoljeno višino na 80. Po pričakovanjih se energije sedaj ne ujemajo več tako dobro zaradi razpoložljivega prostora. Rezultati so prikazani na grafu 3.

Poglejmo si kako se spreminja povprečna energija v odvisnosti od temperature in parametra  $\alpha$  (glej sliko 4). Povprečno energijo sem dobil tako, da sem povprečil vsako 100 točko, v predelu, kjer se je energija že ustalila (od 3000 koraka naprej). Poleg tega sem pri vsaki temperaturi vzel tudi 5 različnih poskusov in rezultate povprečil. Za napako sem vzel standardno deviacijo povprečne energije pri 5 poskusih. Vzel sem 17 členov (15 gibljivih) in 19 nivojev ( $h_{max} = -19$ ), 20.000 korakov. Na grafu 4 lahko vidimo linearno odvisnost med ravnovesno energijo in temperaturo.

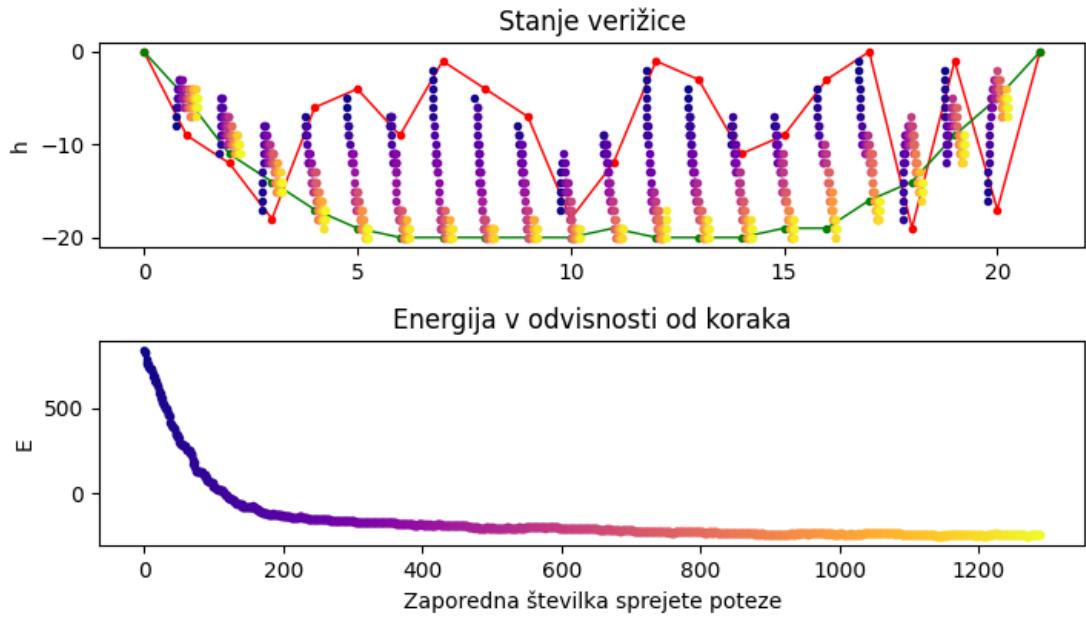
Na grafu 5 pa vidimo, da odvisnost ni linearna med energijo in  $\alpha$  čez celotno območje. Pri majhnih  $\alpha$  se linearnost zlomi in dobimo parabolično obliko.

Z izračunom variance energije v vsaki 100 točki na platoju sem lahko dobil tudi specifično toplotno sistema

$$c = \frac{\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2}{NT^2}. \quad (6)$$

Graf je narisani na sliki 6. Pri specifični toplotni pa za razliko od ravnovesne energije ne opazimo drugih kakšnega posebnega obnašanja razen zmanjševanja z  $\alpha$ .

Molekularna verižica z 20 prostimi členi,  
 $T = 1$ ,  $h_m = 20$ , alfa = 1.0 in n = 3000



Slika 1: Oblika molekularne verižice in energija v odvisnosti od poteze. Z barvo je prikazana zaporedna številka poteze, kar je tudi abscisna os na spodnjem grafu.

Na spodnjem grafu je prikazana energija v odvisnosti od poteze. Na zgornjem pa je z rdečo črto prikazano začetno stanje in z zeleno končno. Vmesne točke pri posameznem členu so predstavljeni sprejete poteze, kako se je položaj člena spremjal s potezami. Te točke so zamaknjene glede na določeno pozicijo na abscisni osi, da se lepše vidi njihovo vertikalno premikanje.

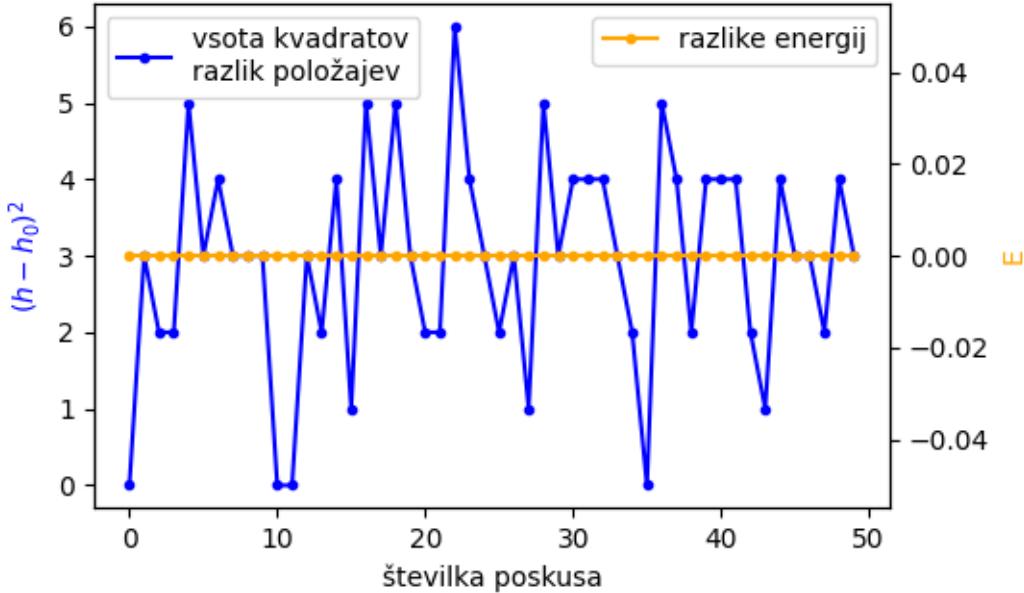
Kot smo videli na grafu 1, se osrednji člen usedejo na dno našega območja. S povečevanjem območja, bi se lahko te členi tudi bolj znižali in bi s tem dobili lepšo krivuljo in nižjo energijo. Rezultati poskusa so prikazani na grafu 7.

Pri raziskovanju sem si narisal tudi histogram sprejetih sprememb energije. Ta mi je izgledal zelo podoben krivulji normalne porazdelitve, zato sem jo prilagodil na histogram in v odvisnosti od temperature opazoval varianco (glej graf 8). Kot vidimo na grafu je odvisnost zelo dobro linearна, česar ne znam pojasniti. Je pa logično, da se verianca povečuje s temperaturo, saj imamo večjo verjetno za sprejetje večjih sprememb energije.

Zakaj pride ravno gaussova krivulja bi sklepal, da je posledica centralnega limitnega izreka, saj imamo tukaj veliko naključnih dogodkov in spremenljivk (položaj sosedov, smer premika), ki potem privedejo preko konvolucije med njimi do gaussove porazdelitve. Povečevanje variance pa je logično, saj imamo pri višji temperaturi večjo verjetnost, da izzrebamo večjo spremembo energije.

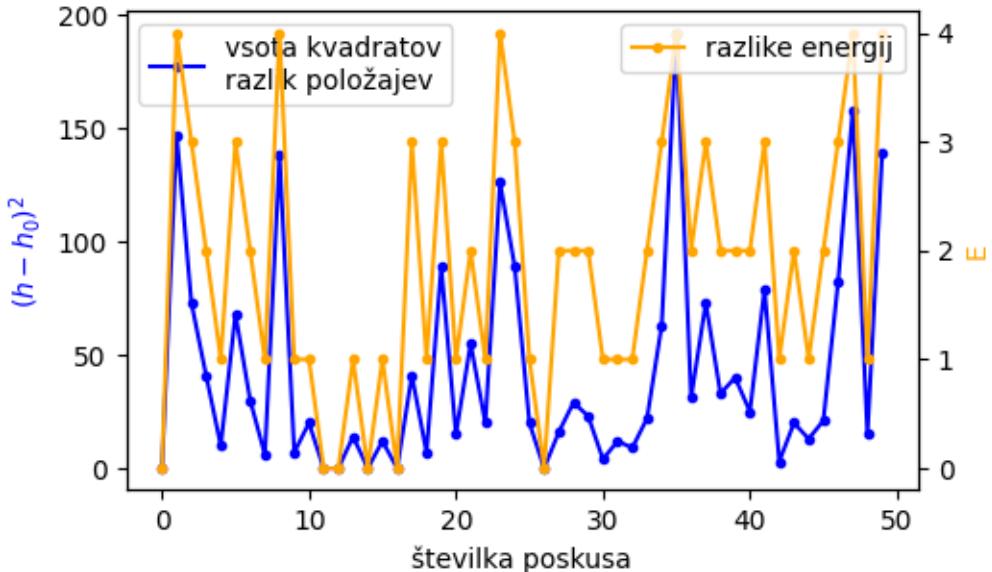
Opazil sem še, da se največja sprejeta sprememba energije seveda povečuje s temperaturo, ampak ne tako monotono, ker je seveda odvisna od posamezne relaksacije ogllice. Prav tako naključnost velja pri najmanjši sprejeti spremembi energije, ki ne bi smela biti odvisna od temeprature, ampak od posamezne relaksacije. Se pa najmanjša sprejeta sprememba energije vseeno poveča s temperturo, kar je verjetno posledica, da imamo pri višji temperaturi večji nabor možnih stanj ogllice in tako višje razlike v energijah. Za te ugotovitve nisem narisal grafa, ampak le pogledal vrednosti.

Razlike med končnimi položaji in energijami pri  
20 prostimi členi,  $T = 300$  K,  $h_m = 20$ , alfa = 1.0 in n = 5000

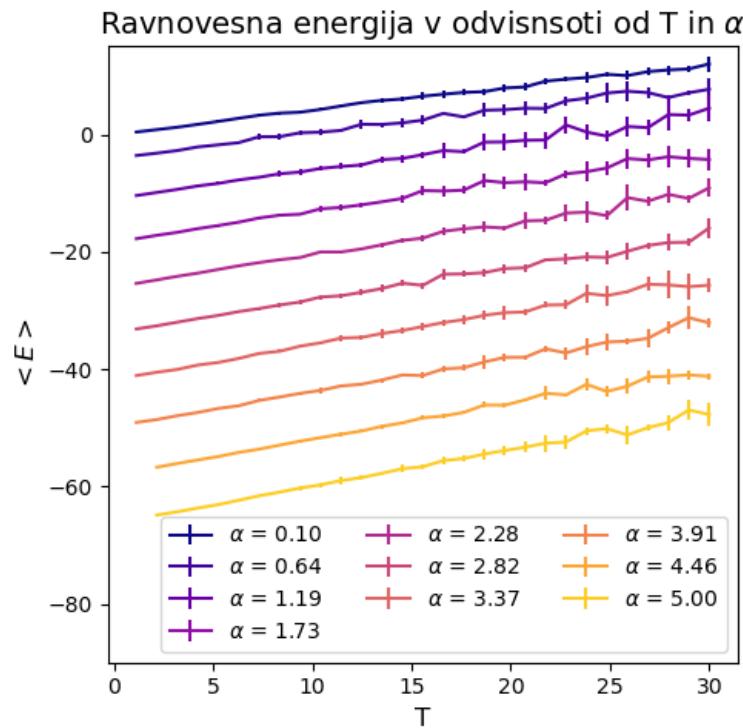


Slika 2: Razlike položajev končnih stanj verige in energij glede na referenčno stanje. Z modro so prikazane vsote kvadratov razlik višin členov za 50 poskusov. Z oranžno pa je predstavljena razlika energije glede na referenčno stanje. Končni položaji verig se sicer malo spreminja, a energija končnega stanja je enaka. Razlike so vedno manjše od 7, kar zelo verjetno predstavlja razliko 1 višine na 6 členih, kar je relativno malo.

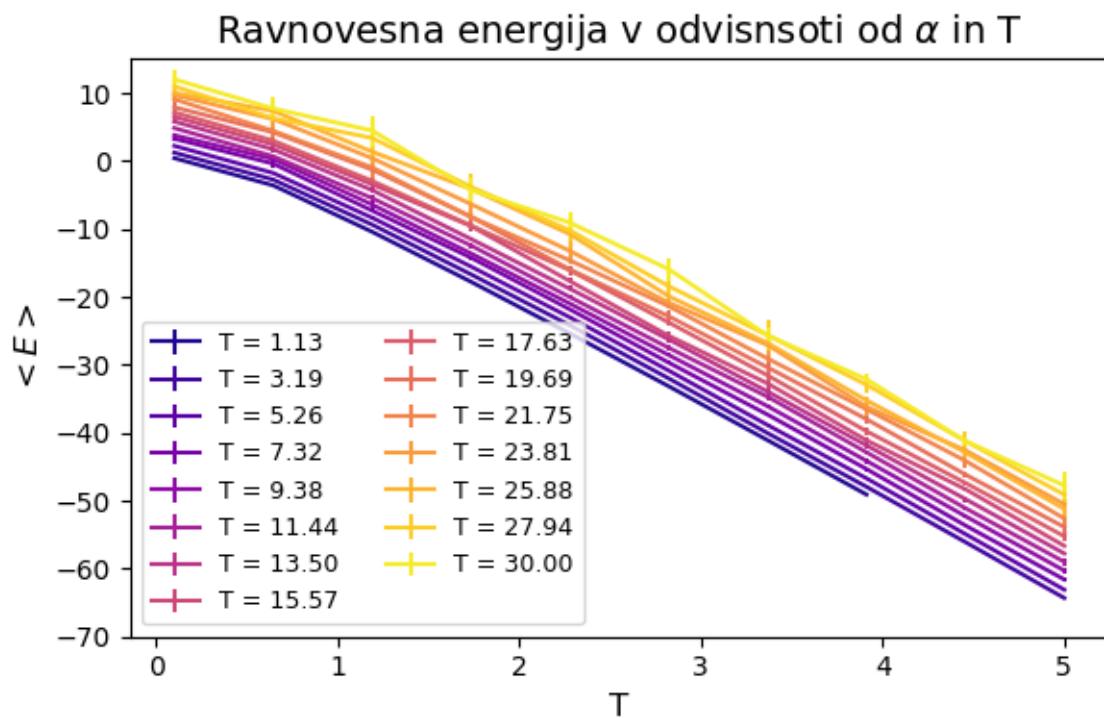
Razlike med končnimi položaji in energijami pri  
20 prostimi členi,  $T = 300$  K,  $h_m = 80$ , alfa = 1.0 in n = 5000



Slika 3: Graf predstavlja vsote razlik položajev in razlik energij glede na referenčno vrednost pri 50 poskusih. Največja dovoljena višina je sedaj 80, kar precej poveča razpoložljiv prostor in tako poveča možnosti razporeditev. Razlike so večje, saj sedaj pomeni sprememba ene vertikalne stopnje za en člen precej manj ker je toliko več razpoložljivega prostora.

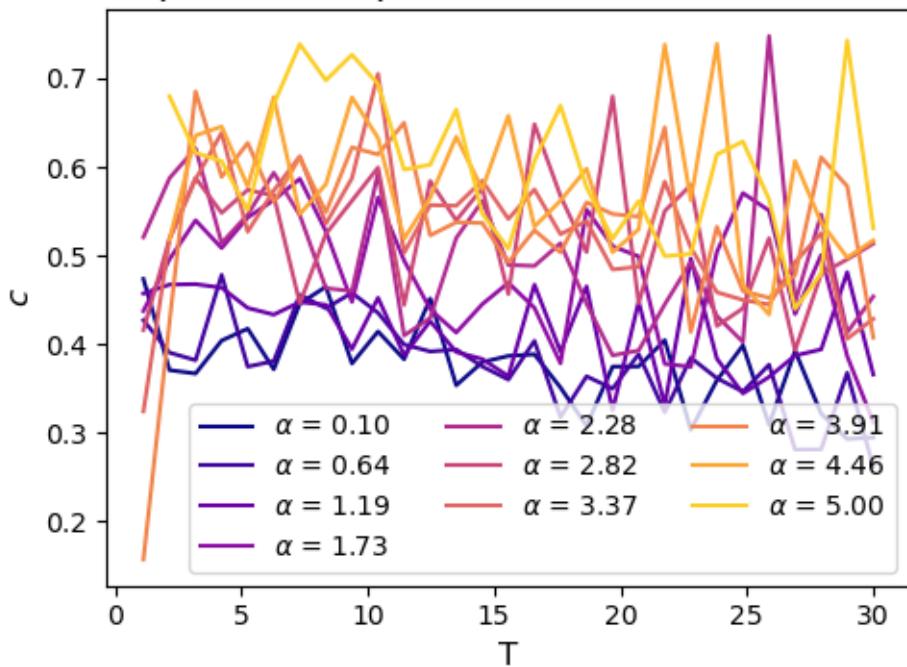


Slika 4: Ravnovesna energija v odvisnosti od temperature pri različnih  $\alpha$ . Odvisost je linearna pri vseh  $\alpha$  z enakim naklonom.

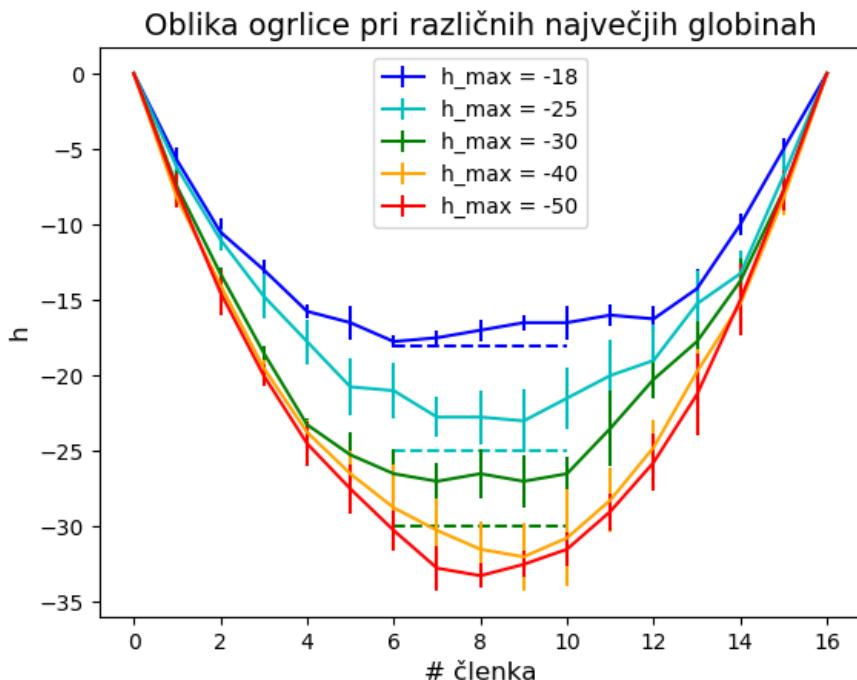


Slika 5: Ravnovesna energija v odvisnosti od  $\alpha$  pri različnih temperaturah. Vidimo, da odvisnost ni linearna na celotnem območju. Nelinearnost opazimo pri  $\alpha < 1$ .

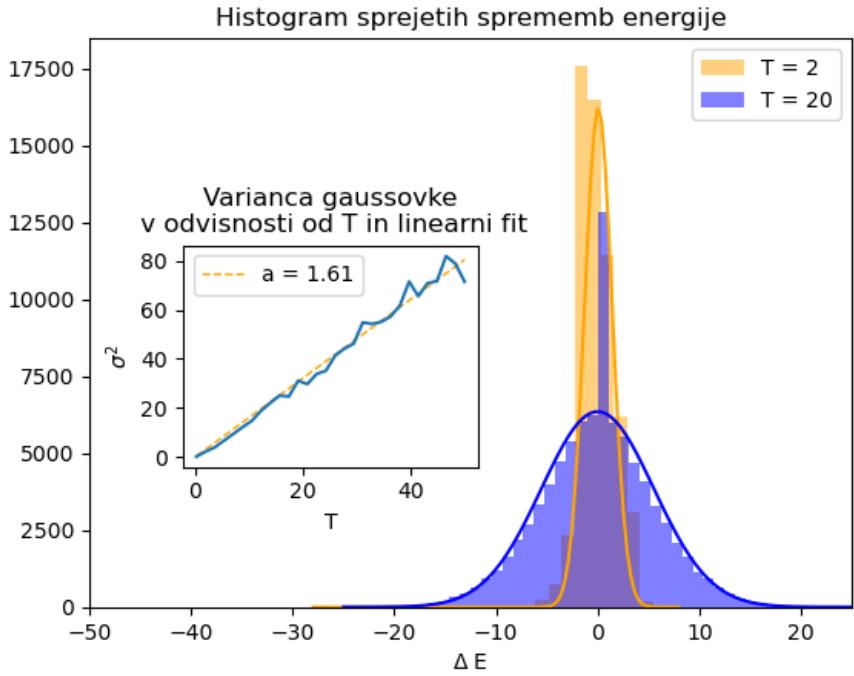
Specifična toplota v odvisnosti od  $T$  in  $\alpha$



Slika 6: Specifična toplota v odvisnosti od  $T$  pri različnih  $\alpha$ . Razen zmanjševanje pri z  $\alpha$  drugih oblik ne opazim.



Slika 7: Povprečna oblika ogrlice pri različni maksimalni globini. Z errorbari je predstavljena standar-dan deviacija pri 5 poskusih. Graf prikazuje, da se oblika ogrlice spreminja do neke največje globina, ko pa je ta presežena je oblika ogrlice enaka pri nadalnjem povečevanju največje globine.



Slika 8: Na večjem grafu sta prikazana histograma sprejetih sprememb energije pri temperaturah 2 in 5. S črtama sta prikazani prilagojeni gaussovi krivulji s povprečjem zelo blizu 0. Vse prilagojene gaussove krivulje imajo povprečje v intervalu [-0.2, 0.2]. V manjšem grafu pa je prikazana odvisnosť variance od temperature. Z oranžno krivuljo je narisana regresija linearne funkcije  $\sigma^2 = aT + b$ , ki se zelo dobro prilega.

## 2.1 Nadgradnje algoritma

Naš algoritem bi lahko posplošil, da bi pri izbiranju naključnega člena, ki bi mu spremenil višino, uporabil porazdelitev, ki ne bi bila enakomerna, a bi bila še vedno neodvisna od stanja v katerem smo. To poudarjam, saj se nam v tem primeru pogoj za sprejetje poteze v Metropolisovem algoritmu ne spremeni. Ker se večinoma pozicije osrednjim členom najbolj popravljajo glede na začetno stanje (glej graf 1), bi lahko vzel gaussovsko porazdelitev s povprečjem polovice členov in varianco polovice členov. V primeru manjše variance, bi imeli členi ob robu že zelo majhne možnosti za spremjanje. Druga nadgradnja pa bi bila, da bi namesto med +1 in -1, velikost poteze pravtako izbirali po gaussovski porazdelitvi. S tem bi verjetno algoritem pohitrili.

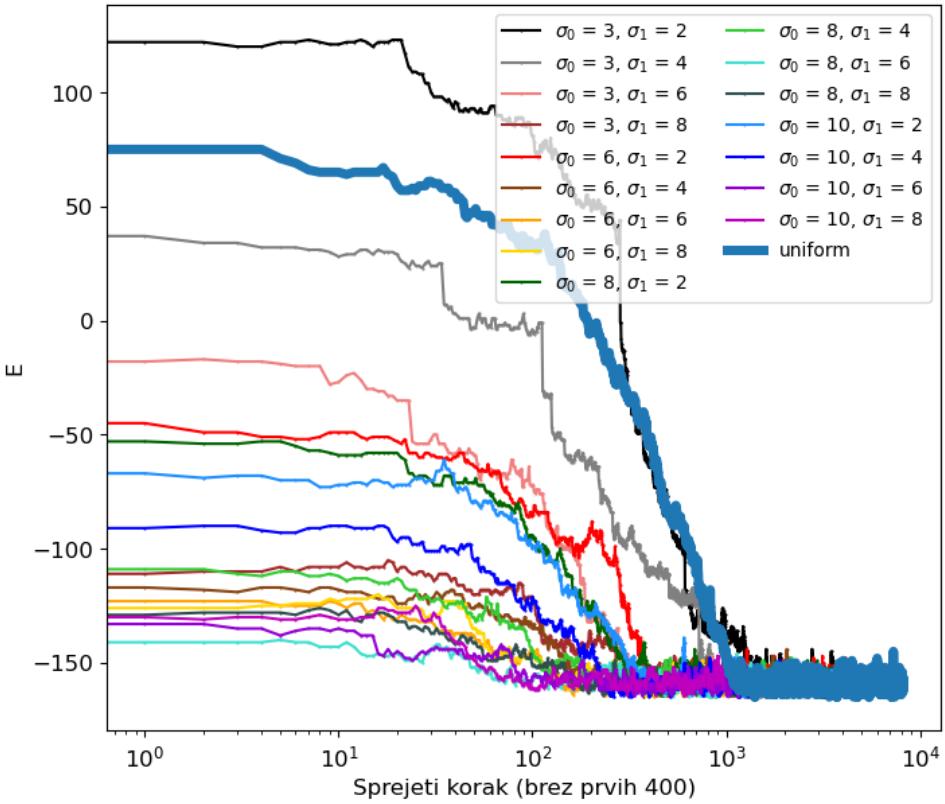
Za poskus sem res obe naključni spremenljivki izbiral po gaussovski porazdelitvi. Izbiro člena sem izbiral po  $\mathcal{N}(N/2, \sigma_0)$ , izbiro koraka pa po  $\mathcal{N}(0, \sigma_1)$ . Pri tem sem sem v primeru rezultata 0 izbiro ponovil, kar je malo podaljšalo algoritem. Za referenco sem seveda uporabil algoritem pri konstantni izbiri spremenljivk. Pri obeh načinu pa sem uporabil enako začetno porazdelitev členov. Rezultati so prikazani na grafu 9.

Ugotovil sem, da lahko pridem do ravnovesne energije v manj korakih če uporabim obe gaussovski porazdelitvi dokaj široki, torej  $\sigma_0 = 8$  ter  $\sigma_1 = 6$ .

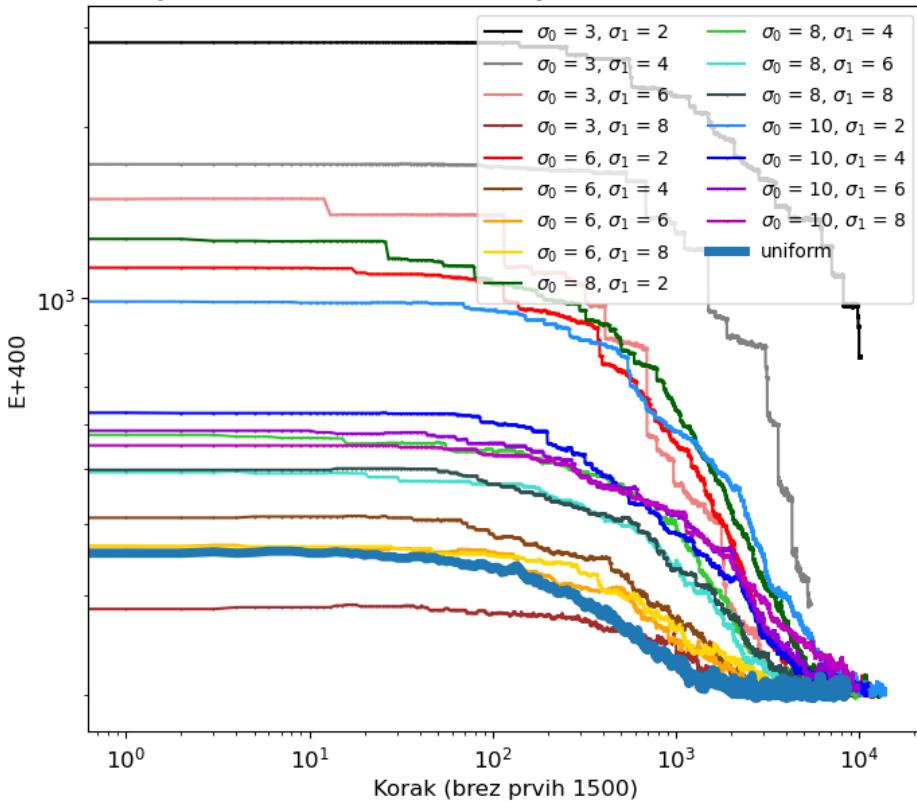
## 2.2 Nadgradnja modela

Da bi popestril naš model verižnice, sem namesto enakomerno razporedjene mase po členih vzel nehomogeno razporeditev. V prvem primeru sem vzel gaussovsko razporeditev, v drugem pa parabolično. V obeh primerih sem celotno maso uteži ohranil konstantno. Ker sem spremenjal parameter  $\alpha \propto m/k$ , bi si lahko mislili tudi, da sem spremenjal konstante vzmeti. Rezultati so prikazani na grafu 10. Prikazana je le končna oblika oglice in porazdelitev mase. Končna oblika oglice je pričakovana za obe

Metropolisov algoritem za verižnico z normalno porazdeljenimi izbirami naključnih števil,  $T = 1, \alpha = 1, N = 18, h_{max} = -19$

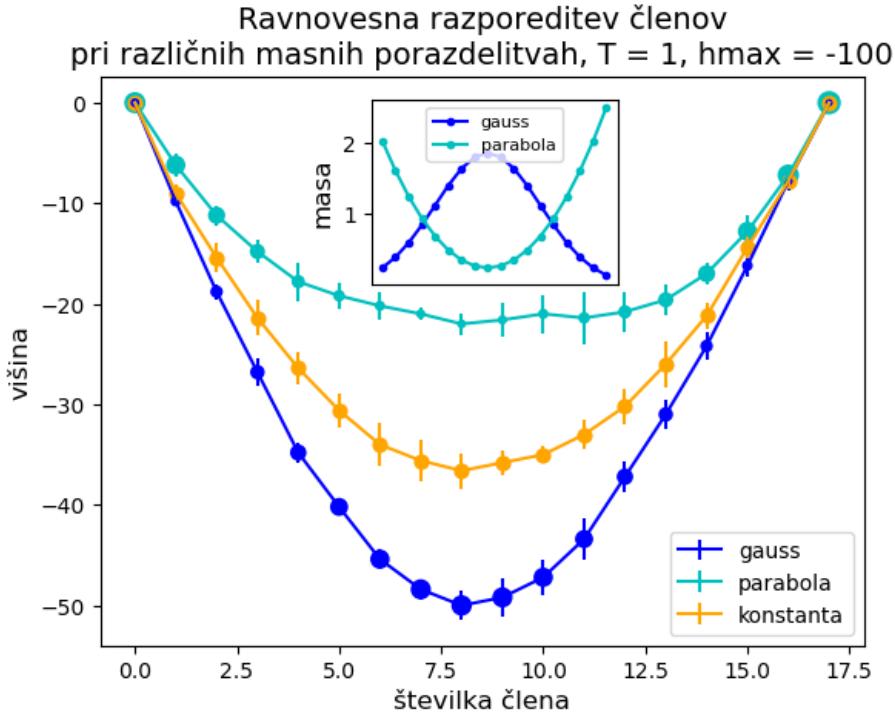


Metropolisov algoritem za verižnico z normalno porazdeljenimi izbirami naključnih števil in DOPISOVANJEM,  $T = 1, \alpha = 1, N = 18, h_{max} = -50$



Slika 9: **zgoraj**: Na grafu je prikazana energija v odvisnosti od sprejete poteze. Z različnimi standarnimi deviaciami sem poskušal najti optimalno, ki bi me pripeljala do ravnovesne energije najhitreje. Žal sem ugotovil, da če pri napačnih izbirah obeh konstant prepišem prejšnjo energijo, je število korakov najmanjše pri uniformni porazdelitvi. Če pa ne prepisujem členov, je najbolje pri  $\sigma_0 = 8$  in  $\sigma_1 = 6$ .

porazdelitvi, saj imamo pri gaussovski težje kroglice na sredini, kar pomeni, da so raje nižje kot pri konstantni porazdelitvi. Pri parabolični, pa so težje na robovih, kar pomeni, da so srednje kroglice raje skupaj in tako zmanjšajo prožnostno energijo.



Slika 10: Končne pozicije členov v verižnici za 3 različne porazdelitve mase z enako vsoto. Nekonstantni porazdelitvi sta natančneje prikazani na manjšem grafu. Errorbar predstavlja standardno deviacijo 5 poskusov.

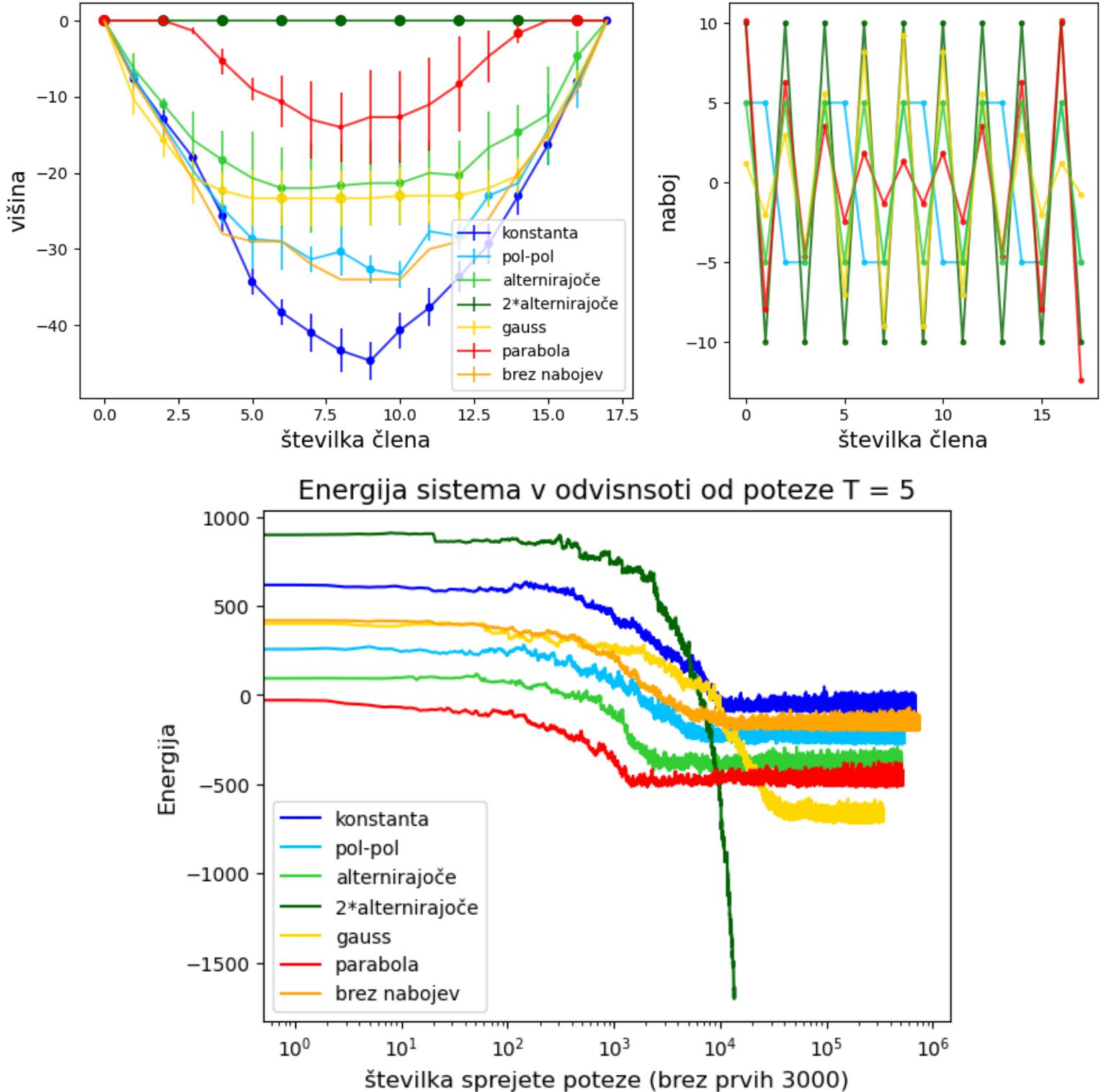
Poglejmo sedaj kako se verižica oblikuje, če členom v verigi dodamo tudi naboje, maso pa pustimo konstantno. Dobimo torej verigo nabojev, ki so med sabo povezani v harmoničnem potencialu (vzmeti). Njihovo energijo sem računal kot vsoto potencialne, prožnostne in elektrostatične

$$E = \sum_i \left[ \alpha h_i + \frac{1}{2} (h_{i+1} - h_i)^2 + \frac{\gamma_i \cdot \gamma_{i+1}}{\sqrt{(h_{i+1} - h_i)^2 + 1}} + \frac{\gamma_i \cdot \gamma_{i+2}}{\sqrt{(h_{i+2} - h_i)^2 + 2^2}} \right], \quad (7)$$

kjer je energija napisana z upoštevanjem elektrostatične energije med najbližjimi in drugimi najbližjimi sosedji. Poskus sem naredil tako z upoštevanjem najbližjih sosedov, kot tudi drugih najbližjih. Ker imamo lahko pri nabojih tudi negativne vrednosti, je dosti več možnosti kako razporedimo naboje, katerega povprečje mora ostati 0. Domisil sem se 6 različnih načinov razporeditve naboja in končne lege nariral na graf 11. Pri upoštevanju le najbližjih sosedov opazimo precejšnja odstopanja končnega položaja verige. Na primer, za dvakrat alternirajočo razporeditev nabojev je najbolj ugodno, da se kar postavi v ravno vrsto, saj bi kakršen koli odmik pomenil večje povečanje elektrostatične energije kot bi se potencialna energija zmanjšala. Iz istega principa sledijo tudi ostalih razporeditev - kjer so naboji večji je bolj ugodno ostati najbliže skupaj, pri manjših pa je bolje zmanjšati potencialno energijo. Pri razporeditvi z enakimi naboji pa opazimo, da je bolje, da so bolj narazen, s čimer zmanjšajo tako elektrostatično kot potencialno energijo. Vse poskuse sem delal pri isti temperaturi  $T = 5$  in  $h_{max} = -100$ .

Pri upoštevanju tudi drugih najbližjih sosedov pa so končne lege bolj podobne tisti brez nabojev, saj se pri alternirajočih nabojih, drugi sosedje začnejo odvračati, kar zmanjša vpliv privlaka prvih sosedov in tako privede do manj togih oblik (glej graf 12 levo zgoraj).

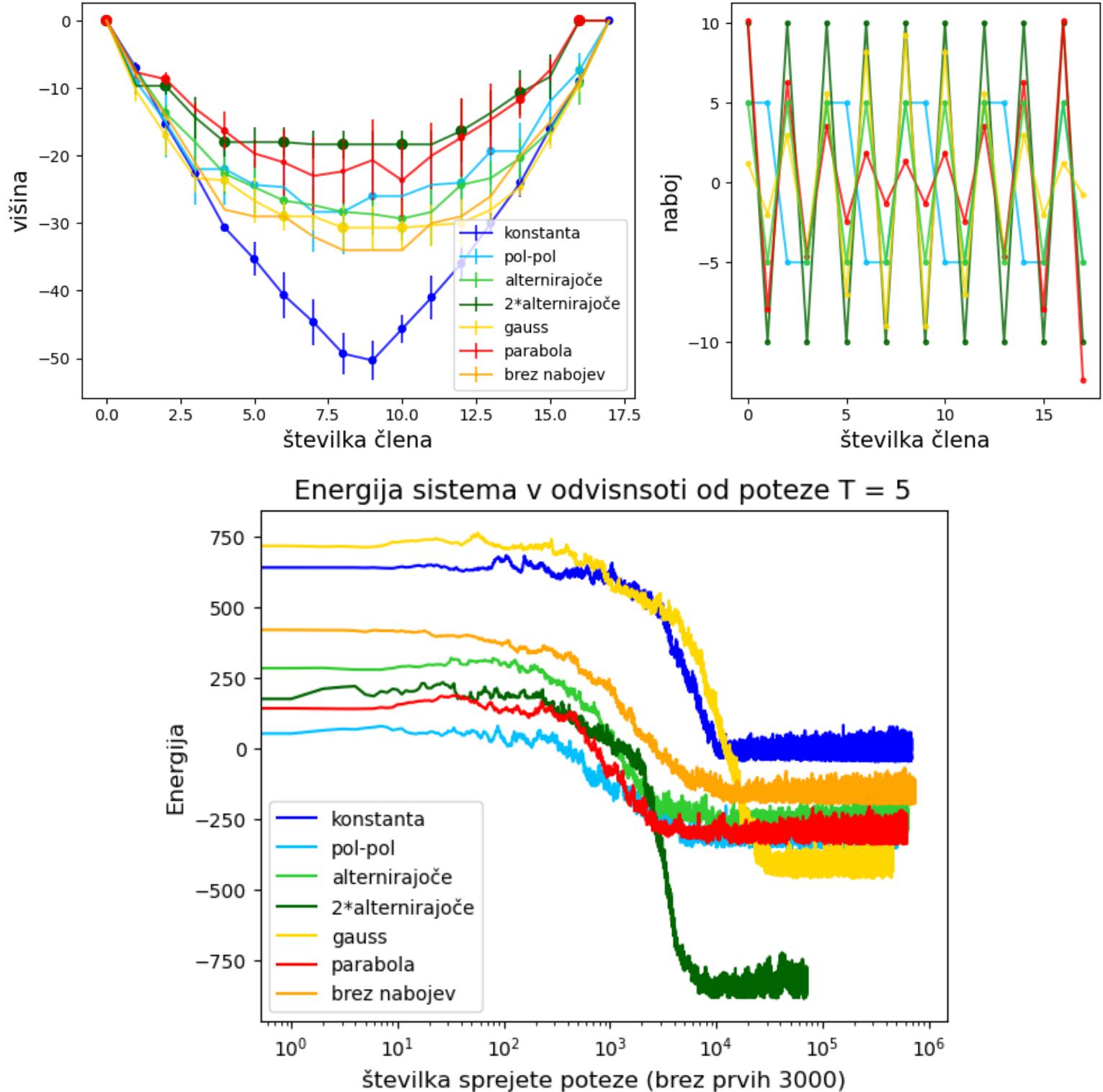
## Ravnovesna razporeditev členov pri različnih masnih porazdelitvah, $T = 5$ , $h_{\max} = -100$



Slika 11: Levo zgoraj: Prikaza povprečja končnih pozicij verižnice pri 5 poskusih za različne razporeditve naboja, ki so prikazane levo zgoraj (legenda velja za oba grafa). Opazimo, da se večji naboji držijo najbližje možno, manjši pa imajo vseeno možnost nekoliko zmanjšat potencialno energijo na račun elektrostatične. Z velikostjo točk je prikazana velikost naboja posameznega člena, s tem da so negativni naboji predstavljeni z velikostjo 0.

Energija v odvisnosti od sprejetih potez. Priložil sem jo kot dokaz, da so oblike na grafu zgoraj levo res ravnovesna. Čeprav se zdi, da bi lahko energija pri 2\*alternirajoči še padala, pa vidimo, da je stanje na levo zgoraj povsem v minimumu.

**Ravnovesna razporeditev členov  
pri različnih masnih porazdelitvah,  $T = 5$ ,  $h_{\max} = -100$**



Slika 12: Levo zgoraj: Vidimo, da so končne oblike bolj podobne tisti brez nabojev, kar je posledica oboja med drugimi najbližjimi sosedji, kar zmanjša vpliv privlaka med najbližnjimi. Na grafu desno zgoraj so predstavljene razporeditve naboja po členih.

Na graf spodaj so prikazane energije v odvisnosti od sprejete poteze. Dodal sem ga, da pokažem, da so stanja na grafu levo zgoraj res ravnovesna.

## Naloga 2:

1.  $\langle E \rangle$ ,  $\langle S \rangle$  v odvisnosti od T.
2. X, C v odvisnosti od H.
3. Kritična temperatura
4. Odvisnost od  $N$  ( $N^2$ )
5. Odvisnost od raznih pogojev
6. Feromagnet / Antiferomagnet

Maks Koncilja  
št: 28191075

# Modelska analiza 1

*8. naloga – Metropolisov algoritem*

doc. dr. Miha Mihovilovič, prof. dr. Simon Širca

## 2. Isingov model

Tekom naloge obravnavam feromagnet z Isingovim opeartorjem:

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle ij \rangle} s_i s_j - \bar{\mu} H \sum_{i=1}^N s_i, \quad J = \bar{\mu} = 1$$

Večino naloge bomo obravnavali brez prisotnosti zunanjega polja  $H = 0$ . Modelirali bomo analitično rešitev za dvodimensionalno mrežo, ki jo je leta 1944 izpeljal Lars Onsager:

$$\sinh \frac{2J}{k_B T_C} = 1 \rightarrow T_c \approx 2.269185 \frac{J}{k_B}$$

Tekom naloge bomo določili povprečno energijo  $\langle E \rangle$ , lastno magnetizacijo na spin  $\langle m \rangle$ , spinsko susceptibilnost  $\chi$  in specifično toploto  $c$  kot funkcijo teperature.

### Definirajmo posamezne opazljivke

#### Povprečna energija

$$E = -J \sum_{\langle ij \rangle} s_i s_j$$

#### Lastno magnetizacija na spin

$$m = \frac{1}{N} \sum_i s_i = \frac{S_{TOT}}{N}$$

#### Specifična toplota

Specifično toploto izpeljemo iz prvega zakona termodinamike.

$$dU = \delta Q + \delta W$$

legendrova transformacija enatalpije:

$$dE = dU - MdH - HdM = TdS + HdM - MdH - HdM$$

$$dE = T dS - M dH$$

$$c = \frac{dE_H}{dT_H} = \frac{dE}{d\beta} \Big|_H \frac{d\beta}{dT}, \text{ kjer } \beta = \frac{1}{kT} \text{ in } \frac{d\beta}{dT} = -\frac{1}{kT^2}$$

$$c = -\frac{1}{kT^2} \frac{dE}{d\beta} \Big|_H$$

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{Z} \sum_{\{s_i\}} H e^{-\beta H} \\
c &= - \left\{ \frac{1}{Z^2} \sum_{\{s_i\}} H e^{-\beta H} \frac{dZ}{d\beta} + \frac{1}{Z} \sum_{\{s_i\}} (-H^2 e^{-\beta H}) \right\} \left( -\frac{1}{kT^2} \right) \\
\frac{\partial Z}{\partial \beta} &= \sum_{\{s_i\}} -H e^{-\beta H} \\
c &= -\frac{1}{kT^2} \left\{ \frac{1}{Z^2} \left[ \sum_{\{s_i\}} H e^{-\beta H} \right]^2 - \frac{1}{Z} \sum_{\{s_i\}} H^2 e^{-\beta H} \right\} \\
c &= -\frac{1}{kT^2} \left( \langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2 \right)
\end{aligned}$$

### Spinska susceptibilnost

Ispeljimo jo:

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle ij \rangle} s_i s_j - \bar{\mu} H \sum_{i=1}^N s_i = \mathcal{H}_0 - \bar{\mu} H \sum_{i=1}^N s_i$$

$$Z = \sum_{\{s_i\}} e^{-\beta \mathcal{H}}$$

$$M(T, H) = \frac{\sum_{\{s_i\}} \bar{\mu} S_{TOT} e^{-\beta \mathcal{H}}}{Z}$$

kjer je  $S_{TOT} = \sum_{i=1}^N s_i$ . Definicija spinske susceptibilnosti je  $\chi = \lim_{H \rightarrow 0} \frac{\partial M(T, H)}{H} |_T$ .

$$\chi = -\frac{1}{Z^2} \sum_{\{s_i\}} \bar{\mu} S_{TOT} e^{-\beta \mathcal{H}} \frac{\partial Z}{\partial H} + \frac{1}{Z} \sum_{\{s_i\}} \bar{\mu} S_{TOT} \frac{\partial e^{-\beta \mathcal{H}}}{\partial H}$$

$$\frac{\partial (e^{-\beta \mathcal{H}})}{\partial H} = -\beta \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial H} e^{-\beta \mathcal{H}} = \beta \bar{\mu} S_{TOT} e^{-\beta \mathcal{H}}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial H} = \sum_{\{s_i\}} e^{-\beta \mathcal{H}} (\beta \bar{\mu} S_{TOT})$$

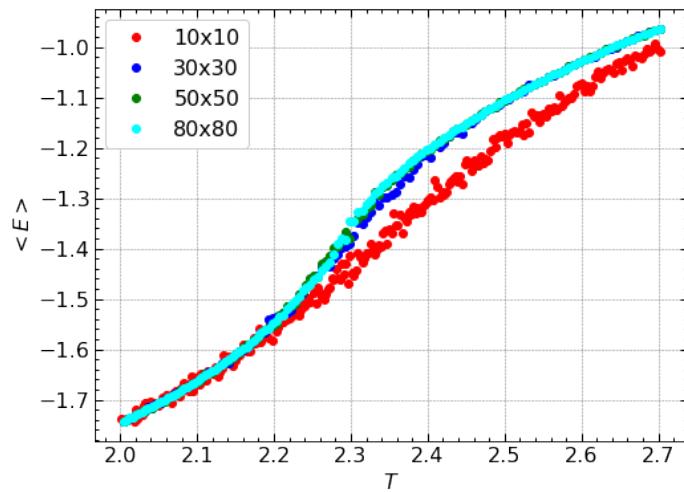
$$\chi = \frac{1}{Z} \sum_{\{s_i\}} \beta \bar{\mu}^2 S_{TOT}^2 e^{-\beta \mathcal{H}} + \frac{1}{Z^2} \bar{\mu}^2 \beta \sum_{\{s_i\}} S_{TOT} e^{-\beta \mathcal{H}} \sum_{\{s_i\}} S_{TOT} e^{-\beta \mathcal{H}}$$

$$\chi = \beta \bar{\mu}^2 \left( \langle S_{TOT}^2 \rangle - \langle S_{TOT} \rangle^2 \right)$$

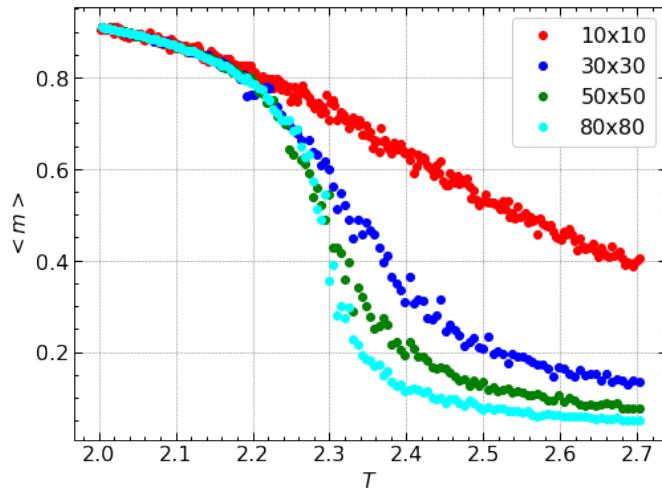
## Vrednost opazljivk v odvisnosti od temperature

Za kvadratne mreže  $n^2$  velikosti  $n \in (10, 20, 50, 80)$  si oglejmo kako se vrednosti opazljivk  $\langle E \rangle$ ,  $\langle m \rangle$ ,  $\chi$ ,  $c$  spremenljajo s temperaturo.

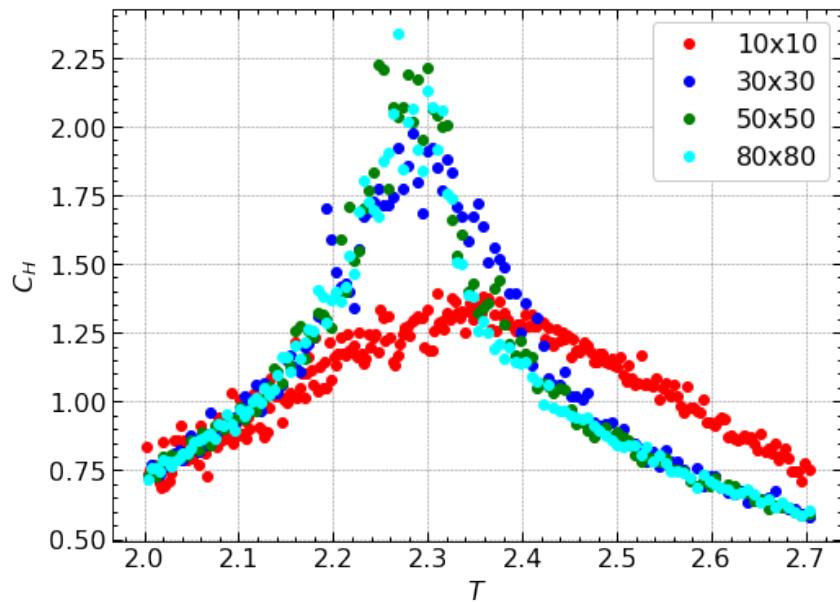
Pričnimo z mrežo naključnih spinov s periodičnimi robnimi pogoji, jo termalizirajmo z  $(n^2 * 10^2)$  MCS/na spinin in določimo opazljivke z izbiro točk, ki so dovolj narazen.



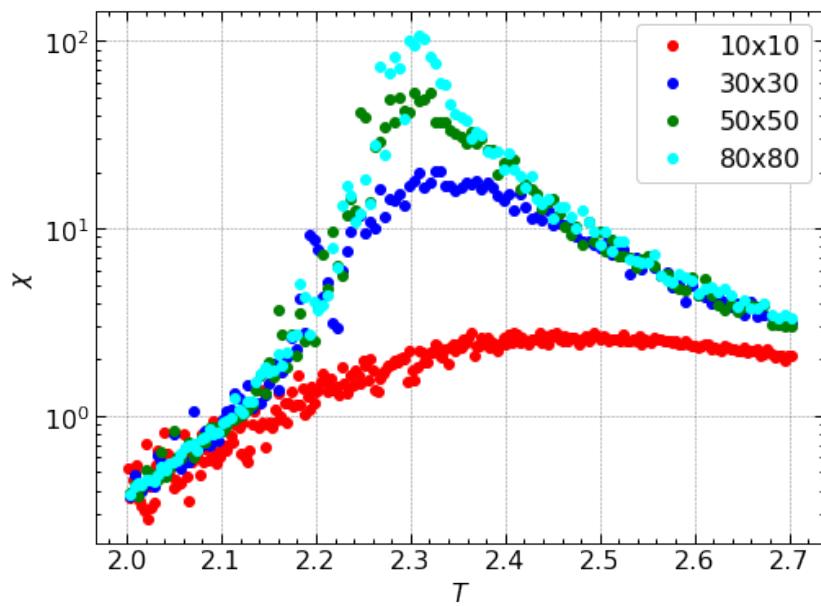
Graf  $\langle E \rangle$  pri različnih teperaturah. Za kvadratne mreže  $n^2$ , velikosti  $n \in (10, 20, 50, 80)$



Graf  $\langle m \rangle$  pri različnih teperaturah. Za kvadratne mreže  $n^2$ , velikosti  $n \in (10, 20, 50, 80)$



Graf  $C_H$  pri različnih teperaturah.  
Za kvadratne mreže  $n^2$ ,  $n \in (10, 20, 50, 80)$



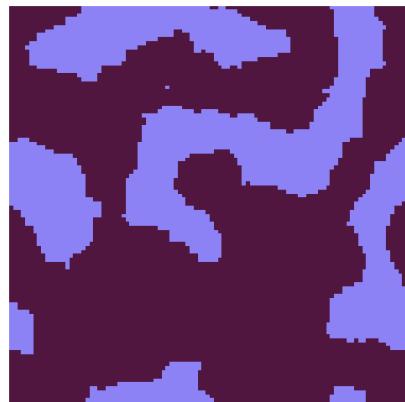
Graf  $\chi$  pri različnih teperaturah.  
Za kvadratne mreže  $n^2$ ,  $n \in (10, 20, 50, 80)$

Na vseh zgornjih grafih lahko opazimo vpliv velikosti kvadratne mreže na kitično temperaturo. Večja kot je mreža bližje smo pravi vrednosti kritične temperature  $T_c$ , pojav se imenuje efekt končne velikosti, v limiti neskončne mreže dobimo pravo vrednost  $T_c$ .

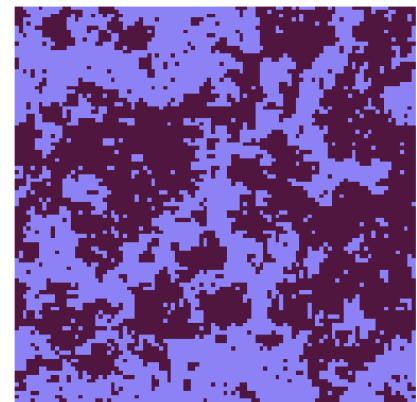
### Animacije

K poročilu sem priložil tri *.gif* datoteke termalitiranja kvadratnih mrež  $n = 100$ , [dostopne na tej povezavi](#), za temperature:

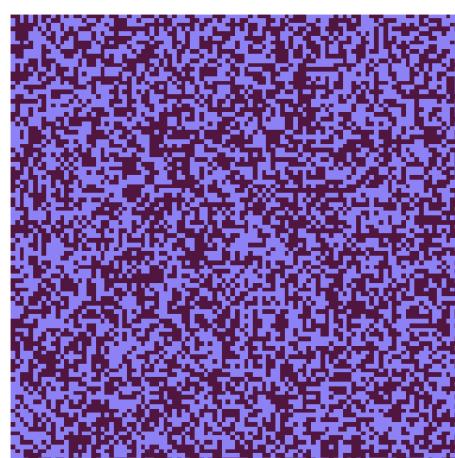
$$T = 1 \frac{J}{k_b}, \quad T = T_c, \quad T = 3 \frac{J}{k_b}$$



$$T = 1 \frac{J}{k_b}$$



$$T = T_c$$



$$T = 3 \frac{J}{k_b}$$

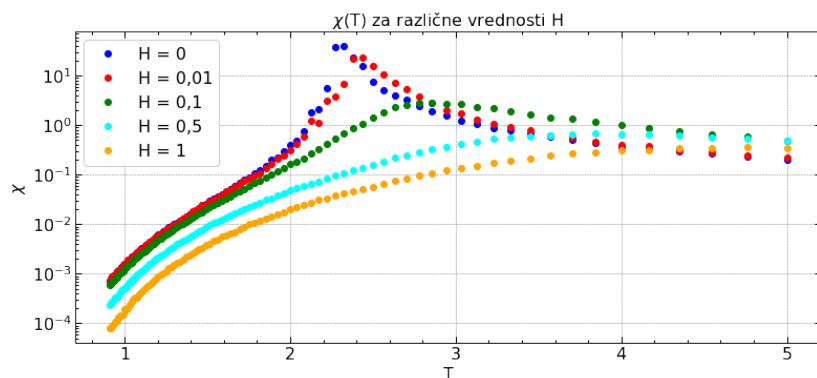
## Različne jakosti magnetnega polja

Oglejmo si spinsko susceptibilnost in specifično toploto pri različnih jakostih magnetnega polja.

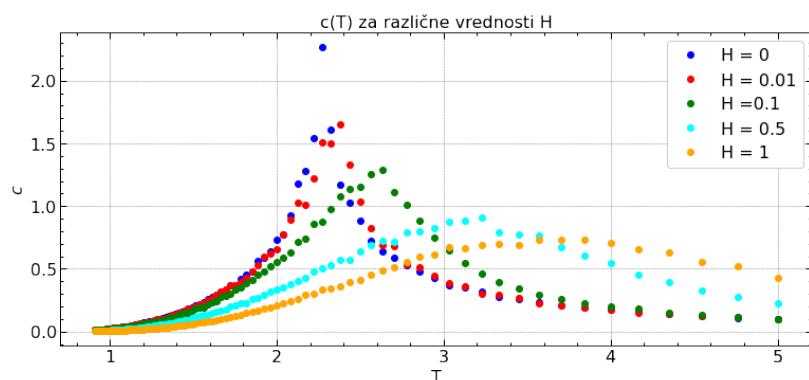
Do sedaj smo imeli zuananje magnetno polje v hamitoljanu izklopljeno, tokrat pa ga moramo upoštevati.

$$\mathcal{H} = - \sum_{\langle ij \rangle} s_i s_j - H \sum_{i=1}^N s_i$$

Oglejmo si odvisnosti  $\chi(T)$  in  $c(T)$  za vrednosti magnetnega polja  $H \in (0.01, 0.1, 0.5, 1)$ . Izberimo kvadratno mrežo velikosti  $n^2 = 30^2$ .



$\chi(T)$  za  $H \in (0.01, 0.1, 0.5, 1)$



$c(T)$  za  $H \in (0.01, 0.1, 0.5, 1)$

## Korelacijska razdalja

Oglejmo si porazdelitev velikosti otokov istega spina pri kritični temperaturi. Velikost otokov in njihovo pogostost na kvadratni mreži bomo določali s pomočjo Hoshen Kopelman-ovega algoritma.

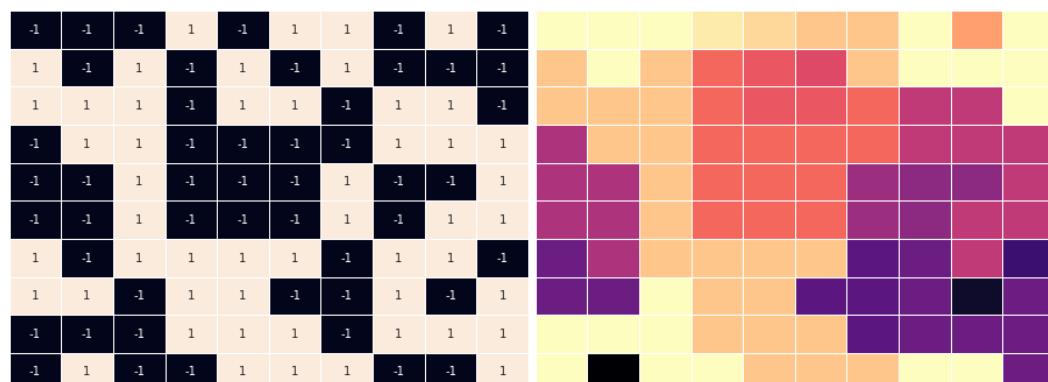
### Hoshen Kopelman algoritem

Ta algoritem se uporablja za označevanje otokov na mreži, je posebna oblika *Union – Find* algoritma.

Osnovna ideja naše implementacije je, da HK-algoritem prečešče mrežo v iskanju spinov obrnjenih navzgor, katerim pripisuje zaporedno število otoka kateremu pripada, če ta spin ne pripada nobenemu dosedanjemu otoku mu pripisuje nov indeks otoka. Če ima navzgor obrnjen spin več sosedov, ki že pripadajo otokom pripada tistem z nižjim indeksom in potrebno si je zapisati v spomin, da smo našli povezavni člen med več otoki, ki sedaj pripadajo istem otoku.

Ko prečeščemo mrežo in izvedemo HK-algoritem za spine obrnjene navzgor ponovimo za spine z nasprotnim spinom.

Prikažimo na primeru:



Na zgornjih slikah je vizualni prikaz označevanja otokov z enako obrnjenim spinom. V surovi kodi *numpy* matrik pa bi to izgledalo kot:

[[-1. 1. -1. -1. 1. 1. 1. -1. -1. -1.]]	[[ 1. 2. 3. 3. 4. 4. 4. 4. 1. 1. 1.]]
[ 1. 1. -1. 1. 1. -1. 1. 1. -1. 1.]]	[ 2. 2. 3. 4. 4. 8. 4. 4. 1. 2.]]
[-1. -1. 1. -1. 1. 1. -1. -1. 1. 1.]]	[ 1. 1. 10. 11. 4. 4. 12. 12. 2. 2.]]
[-1. -1. -1. 1. 1. -1. -1. 1. 1. 1.]]	[ 1. 1. 1. 4. 4. 12. 12. 2. 2. 2.]]
[-1. 1. 1. 1. 1. -1. 1. -1. -1. 1.]]	[ 1. 4. 4. 4. 4. 12. 18. 1. 1. 2.]]
[-1. -1. 1. -1. -1. 1. -1. -1. -1. 1.]]	[ 1. 1. 4. 20. 20. 21. 1. 1. 1. 1.]]
[ 1. 1. -1. -1. 1. -1. -1. -1. -1. 1.]]	[23. 23. 20. 20. 4. 1. 1. 27. 1. 1.]]
[-1. -1. 1. -1. 1. 1. -1. -1. -1. -1.]]	[ 1. 1. 4. 20. 4. 4. 1. 1. 1. 1.]]
[-1. 1. 1. 1. 1. 1. -1. -1. -1. -1.]]	[ 1. 4. 4. 4. 4. 4. 1. 1. 1. 1.]]
[ 1. -1. 1. 1. -1. -1. 1. -1. -1. -1.]]	[31. 32. 4. 4. 33. 33. 4. 1. 1. 1.]]

mreža spinov

HK-alhoritem izveden na mreži spinov

Kjer indeks predstavlja spine, ki pripadajo istemu otoku.

Korelaciska funkcija:

$$\Gamma(r) = \sum_{|i-j|=r} (\langle s_i s_j \rangle - \langle s_i \rangle \langle s_j \rangle),$$

njene limite:

$$\text{Pri } T \gg T_C \text{ je } \langle s_i s_j \rangle = \langle s_i \rangle \langle s_j \rangle \implies \Gamma(r) \rightarrow 0 \text{ za } \forall r,$$

pri zelo nizkih temperaturah  $T \ll T_C$  je večina  $s_i$  poravnanih  $\Gamma(r) \rightarrow 0$

Pri temeraturi blizu  $T_C$  je korelacijska funkcija oblike  $\Gamma(r) = \frac{e^{-r/\xi}}{r^{d-2+\eta}}$

kjer je  $d$  dimenzija (pri nas 2),  $\eta$  kritični eksponent

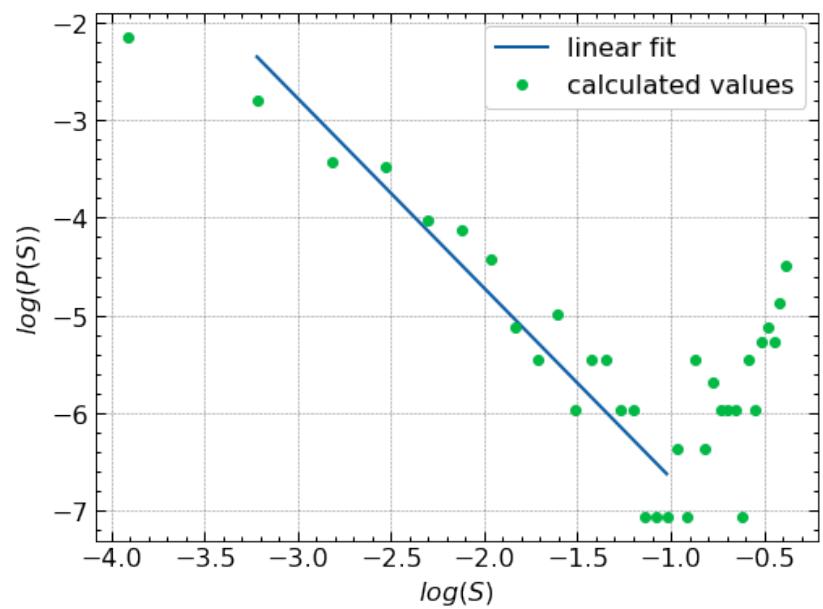
pri teperaturi točno  $T \rightarrow T_C$  je celoten sistem koreliran  $\xi \rightarrow \infty$

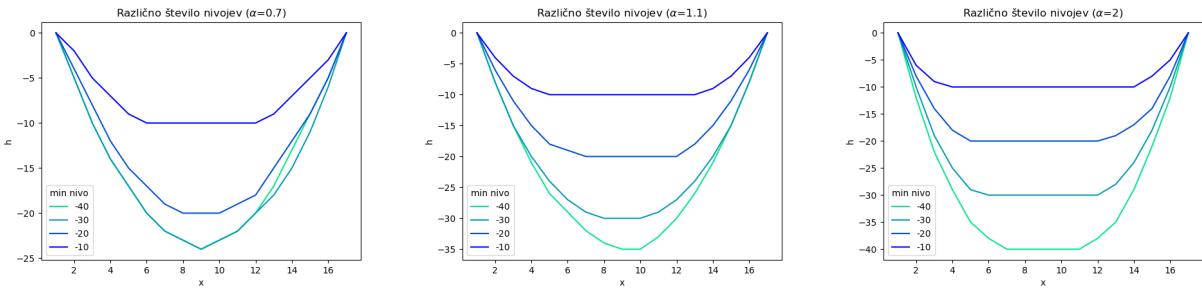
kar pomeni  $\frac{r}{\xi} \rightarrow 0$   $e^{-r/\xi} \rightarrow 1$  dobimo zvezo  $\Gamma(r) \sim \frac{1}{r^{d-2+\eta}}$

Če svojo pozprnost namenimo otokom istega spina pri kritični temeraturi in definiramo  $S$  kot normalizirana velikost otoka ( $S = n/N$ , kjer je  $n$  število spinov ki tvorijo otok in  $N$  število vseh spinov mreže). Verjetnost, da bomo našli otok velikosti  $S$  označimo kot  $P(S)$ . Pri kritični temperaturi dobimo porazdelitev:

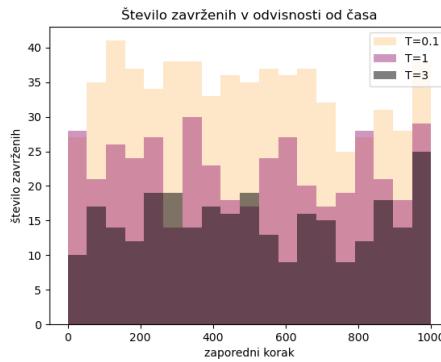
$$P(S) \sim S^{-\eta}$$

Narišimo graf  $\log(P(S)) \sim -\eta \log(S)$  za 300 termaliziranih mrež velikosti  $N = 10^4$  pri kritični temperaturi  $T_C$ . Iz strmine grafa dobimo vrednost  $\eta = 1.94$ .





Slika 9: Verižica pri različnih najnižjih nivojih ob treh različnih vrednostih parametra  $\alpha$ .



Slika 10: Odvisnost števila zavrnjenih potez pri izvajanjiju algoritma od časa ter od temperature.

Kot pričakovano jih je manj zavrnjenih pri večjih temperaturah. Opazimo pa tudi, da število zavrnjenih ni odvisno od časa.

## 2 Isingov model

Isingov model je eden najenostavnnejših modelov feromagneta, ki opiše fazni prehod. Tukaj bomo najprej obravnavali Isingov model v dveh dimenzijah. Predpostavimo, da imamo samo dve možnosti za spin ( $\pm 1$ ) ter da lahko interakcijo med delci opišemo s Hamiltonovim operatorjem:

$$\mathcal{H} = -J \sum_{i,j \text{ sosed}} S_i S_j - H \sum_i S_i \quad (2)$$

kjer smo vzeli le vsoto po najbližjih sosedih. Nadalje za  $J$  vzamemo  $\pm 1$ . Drugi člen v izrazu predstavlja zunanje magnetno polje ter interakcijo spinov z njim.

Poglejmo si za začetek nekaj slikic konvergencije algoritma, glej sliko 11.

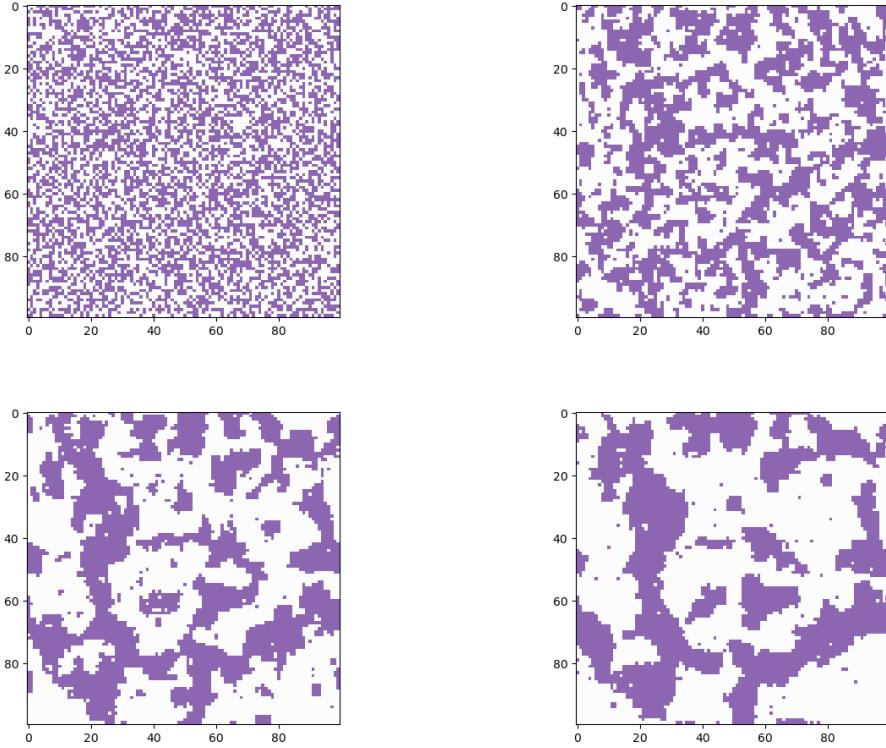
Po kar precej korakih dobimo zanimivo otočkasto strukturo. Ti otoki nastanejo, ker je za sistem bolj optimalno imeti čim krajšo mejo med pozitivnimi in negativnimi spini, torej je takšna struktura bolj ugodna za sistem kot pa naključna porazdelitev spinov. Če pa imamo dovolj veliko temperaturo pa vidimo, da termične fluktuacije povozijo urejeno strukturo.

Tvorbo otočkov lahko vidimo že pri zelo malo iteracijah, glej sliko 12.

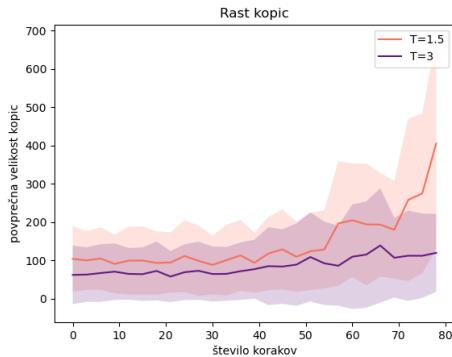
Opazimo lahko, da je pri nižjih vrednostih temperature tvorba otočkov precej vidna že takoj na začetku, medtem ko pri višjih  $T$  te tvorbe praktično ni opaziti.

Če vključimo polje dobimo več spinov skladnih z magnetnim poljem, glej sliko 13.

Ob poganjaju programa ob različnih začetnih parametrih ugotovimo, da algoritem skonvergira v različnem času glede na parametre. To je prikazano na sliki 14.



Slika 11: Konvergenca Metropolisovega algoritma za Isingov model, posnetki so narejeni vsakih 30 000 korakov. Vzeli smo  $T=1.5$  ter  $H=0$ .

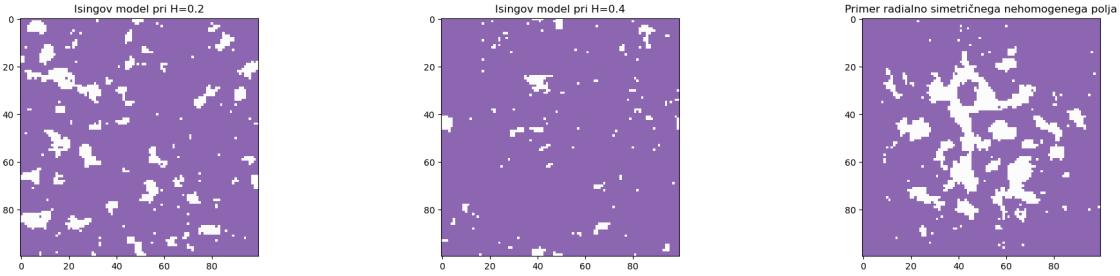


Slika 12: Prikaz tvorbe otočkov pri prvih iteracijah. Prikazano je povprečno število spinov, ki pripadajo nekemu otočku. Temperatura  $T=1.5$  naj bi bila pod faznim prehodom (ki je okoli 2.3), temperatura  $T=3$  pa nad njim.

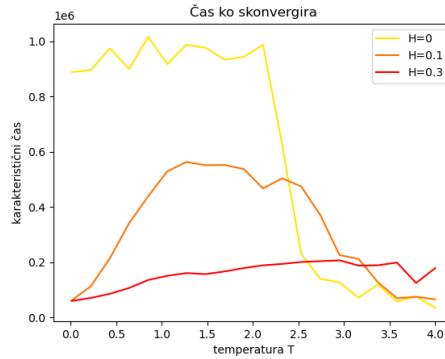
Najprej opazimo, da pri večjih vrednostih  $H$  algoritem prej skonvergira. Opazimo pa tudi, da obstaja na grafu nek vrh, ki je pri nižjih  $H$  bolj levo.

## 2.1 Energija v ravovesju

Opazimo lahko, da je povprečna energija, ko algoritem skonvergira različna za različne temperature. To lahko narišemo na graf in opazimo značilno stopnico okoli temperature 2.3, glej sliko 15. To se zelo lepo sklada s faznim prehodom, ki ga bomo spoznali v naslednjem poglavju. Sklepamo, da je za razpad strukture potrebna določena energija in zato nastane ta skok. Pri našem modelu namreč

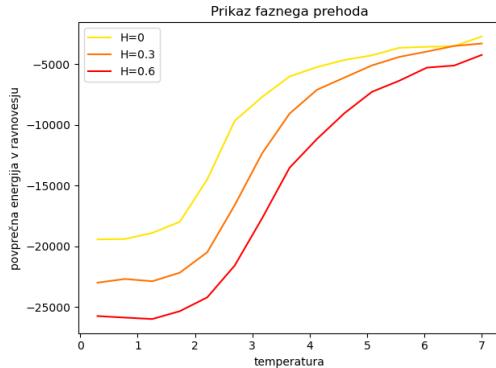


Slika 13: Prikaz otočkaste strukture, če imamo magnetno polje. Prvi dve sliki sta za homogeno magnetno polje z  $H=0.2$  in  $H=0.4$ , zadnja slika pa je pri nehomogenem, a radialno simetričnem magnetnem polju.



Slika 14: Prikaz časa do tega, ko dosežemo ravnovesje (=karakteristični čas) za različne vrednosti parametrov  $T$  in  $\alpha$ .

dobimo graf na sliki.

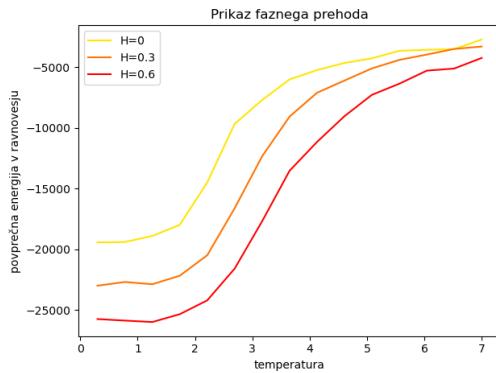


Slika 15: Odvisnost energije v ravnovesju od temperature. Graf je narisani za nekaj različnih vrednosti zunanjega polja  $H$ .

Pri  $H = 0$  dobimo prej zapisano vrednost za skok, pri neničelnih  $H$  pa se ta vrednost premakne bolj proti desni (tako za pozitivne kot za negativne  $H$ ). Sama oblika skoka pa ostaja enaka. Sprememba v energiji je za višji  $H$  manjša.

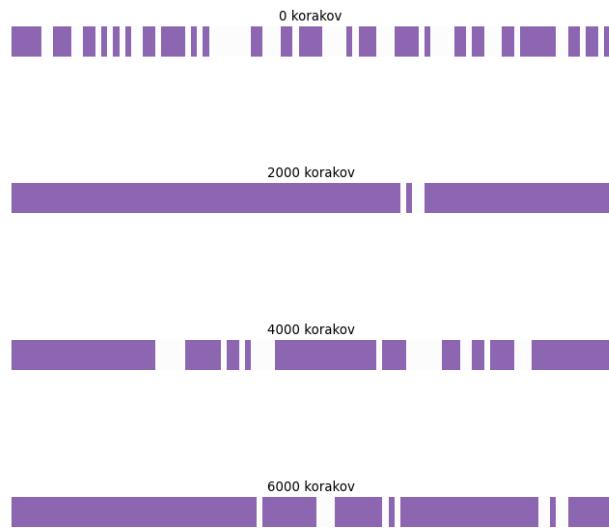
Poglejmo, kako je s skokom v drugih dimenzijah. Odvisnost povprečne energije od temperature v 3D prikazuje slika 16.

Tudi tu opazimo značilen skok, le da je tu bolj položen, ter precej bolj odvisen od zunanjega magnetnega polja.



Slika 16: Prikaz temperaturne odvisnosti povprečne energije v 3D. Graf je narisani za nekaj različnih vrednosti zunanjega polja  $H$ .

V originalu pa je bil Isingov model narejen za eno dimenzijo. Poglejmo. Na sliki 17 je prikazan časovni razvoj 1D Isingovega modela pri temperaturi  $T=1$ .



Slika 17: Dogajanje Isingovega modela v 1D.

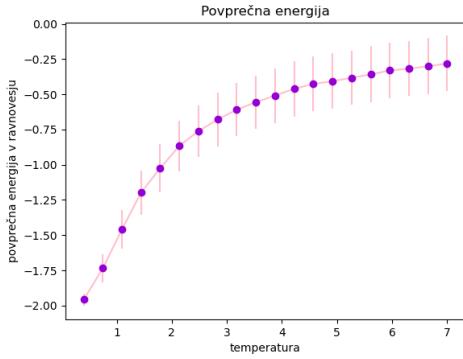
Vidimo, da je najbolj optimalno, da so vsi spini enako obrnjeni, a zaradi neničelne temperature nastajajo fluktuacije. Narišimo še odvisnost energije od  $T$ , glej sliko 18.

Tudi tukaj opazimo značilen skok v energiji, ki pa očitno ni posledica faznega prehoda, kot bomo videli v naslednjem poglavju.

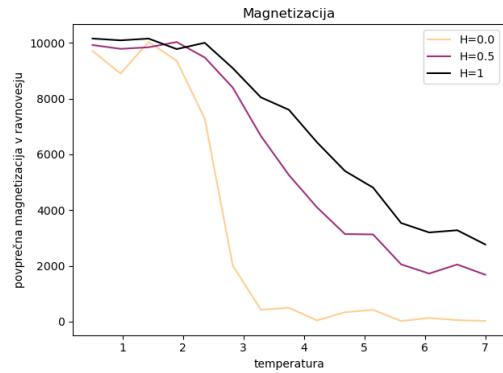
## 2.2 Magnetizacija

S pomočjo modela pa lahko določimo tudi magnetizacijo, to je le vsota vseh spinov. Vzamemo povprečno vrednost magnetizacije, ko algoritmom skonvergira. Odvisnost magnetizacije od temperature prikazuje slika 19.

Najprej je magnetizacija velika in konstantna, nato pa doživi nenaden padec, ko pade skoraj na 0. Vidimo, da je padec bolj oster pri manjših vrednostih zunanjega polja. Prav tako se pri manjših  $H$  zgodi pri nižjih temperaturah. Podobno kot smo videli pri povprečni energiji se ta skok zgodi okoli vrednosti 2.3 pri  $H = 0$ . Ta skok je fazni prehod, ki predstavlja prehod med urejenim stanjem (otočki)



Slika 18: Prikaz temperaturne odvisnosti povprečne energije v 1D. Graf je narisan za nekaj različnih vrednosti zunanjega polja H.

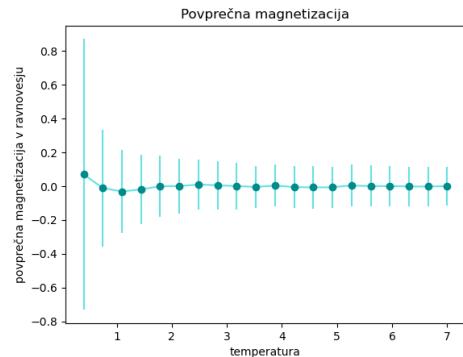


Slika 19: Prikaz temperaturne odvisnosti magnetizacije v 2D. Graf je narisan za nekaj različnih vrednosti zunanjega polja H.

in neurejenim. To vrednost pa lahko dobimo tudi analitično. Dobimo:

$$\sinh \frac{2J}{k_B T_c} = 1 \implies T_c \approx 2.269185 \frac{J}{k_B} \quad (3)$$

oz. v našem primeru, ko smo  $J$  in  $k_B$  postavili na 0, dobimo kar  $T_c \approx 2.269185$  za temperaturo faznega prehoda. To se zelo lepo ujema z vrednostjo dobljeno numerično. Podoben prehod dobimo tudi v treh dimenzijah. Ko pa pogledamo v 1D pa opazimo, da tega prehoda ni, glej sliko 20.



Slika 20: Prikaz temperaturne odvisnosti magnetizacije v 1D. Napake so dobljene z večkratnim izvajanjem algoritma.

Na začetku so sicer napake velike, a zelo jasno kaže, da ni videti nobenega prehoda. Kot vidimo je

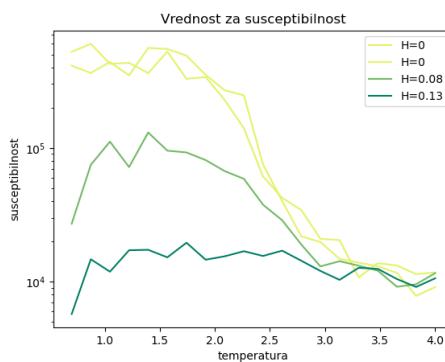
magnetizacija v okviru napake ves čas okoli 0. Načeloma bi lahko bil prehod pri zelo nizkih temperaturah, a bi bil tak sistem težko stabilen. Prav tako nam narekuje tudi teorija, kot je ugotovil že sam Ising, v 1D faznega prehoda ni.

### 2.3 Susceptibilnost in specifična toplopa

Pomemben koncept v statistični termodinamiki je tudi t. i. susceptibilnost, definirana je kot:

$$\chi = \frac{\langle S^2 \rangle - \langle S \rangle^2}{Nk_B T} \quad (4)$$

Če torej poznamo magnetizacijo v posameznih korakih, jo lahko izračunamo. Susceptibilnost v odvisnosti od temperature in zunanjega magnetnega polja lahko vidimo na sliki 21.



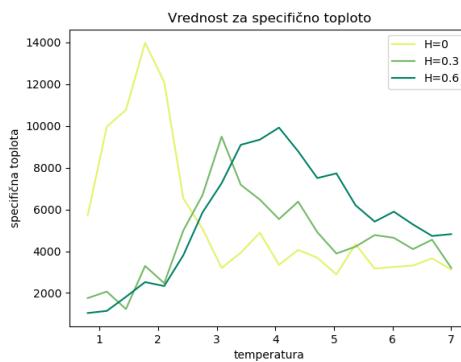
Slika 21: Susceptibilnost v odvisnosti od temperature in zunanjega magnetnega polja. Primer za  $H=0$  je zaradi slabše ločljivosti narisan dvakrat.

Vidimo, da susceptibilnost doseže nek vrh. Ta vrh je nižji pri večjih vrednostih zunanjega magnetnega polja. Ta razlika med vrhovi je zelo velika, na y-osi je namreč logaritemska skala. Pri zunanjem polju je vrh tudi rahlo bolj pomaknjen v desno.

Na podoben način lahko definiramo specifično toplopo:

$$c = \frac{\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2}{Nk_B T^2} \quad (5)$$

Odvisnost le te od temperature vidimo na sliki 22.

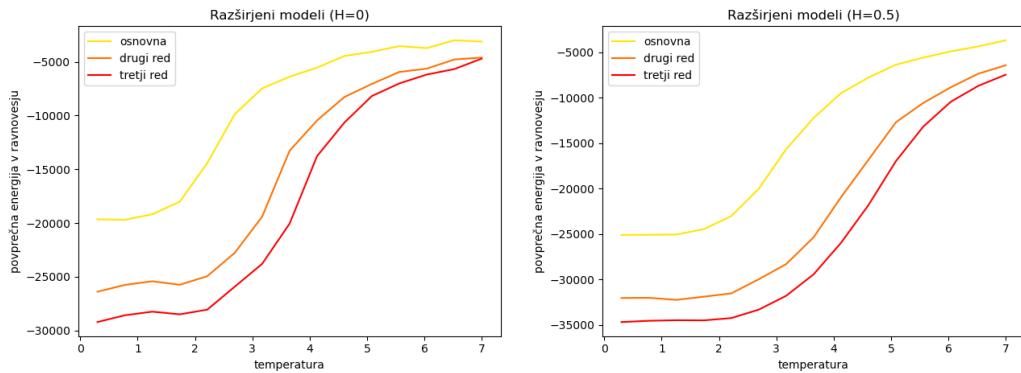


Slika 22: Specifična toplopa v odvisnosti od temperature in zunanjega magnetnega polja. Slika ima slabo ločljivost, saj je program že tako ali tako zelo počasen in bi vzelo preveč časa, a bistv se vidi.

Vidimo vrh, ki je višji pri nižjih vrednostih zunanjega magnetnega polja. Prav tako so pri večjih temperaturah vrhovi tudi vedno bolj desno.

## 2.4 Ne le najbližji sosedji

Poglejmo si, kaj se zgodi, če ne upoštevamo le bližnjih sosedov, ampak tudi naslednji red in nekaj drugih prvih redov. Ker imamo efektivno magnetni dipol in magnetno polje pada s potenco  $\frac{1}{r^3}$ , sem predpostavila, da tako pada tudi energija. Členi prvega reda so od osrednjega spina oddaljeni 1 enoto, drugi najbližji  $\sqrt{2}$  enote, tretji 2 enoti itd. Moramo upoštevati tudi, da pri višjih redih teh spinov ni le 4. Na sliki 23 je prikazana odvisnost energije v ravnovesju od temperature, če upoštevamo še višje člene.

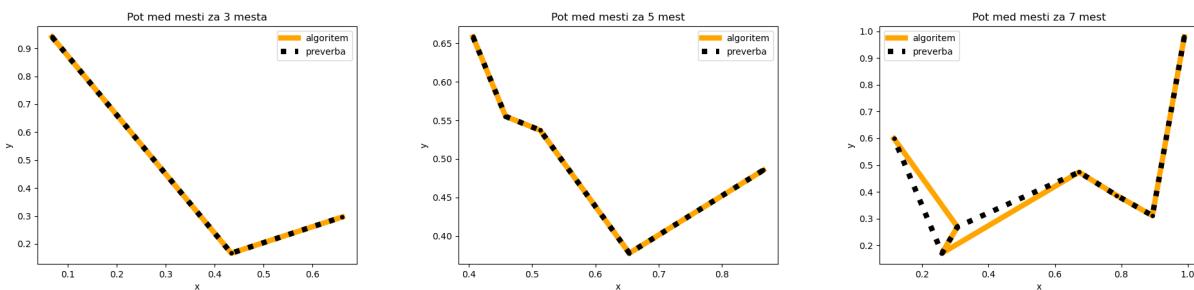


Slika 23: Odvisnost povprečne energije v ravnovesju za nekaj prvih višjih členov za  $H = 0$  in  $H = 0.5$ .

Vidimo, da je povprečna energija pri dodatnih členih bolj pomaknjena navzdol. Tudi skok je večji. Prav tako je razlika med modeli prese netljivo velika, tako da te člene težko zanemarimo. Vendar je naš začetni približek dovolj dober, če nas zanima le oblika krivulje in dogajanje v grobem.

## 3 Model trgovca

Metropolisov algoritem pa lahko uporabimo tudi za model trgovskega popotnika. Njegovo točnost pa lahko za manjše število mest preverimo kar tako, da enostavno preizkusimo vse možnosti in nato izberemo najkrajšo. Pozicije mest v 2D so naključno izžrebane. Na sliki 24 je prikazanih nekaj primerov poti.



Slika 24: Prikaz najdene poti za 3, 5 in 7 mest ter primerjava s pravo rešitvijo.

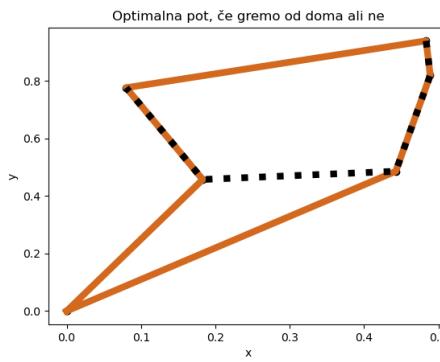
Vidimo, da ima pri številu mest okoli 7 algoritem že rahlo težave (tudi če damo veliko število korakov). Problem je namreč v tem, da je ogromno lokalnih minimumov. Če je temperatura prevelika, bomo skakali iz enega v drugega, pa pa je premajhna pa se bomo skonvergirali v nek lokalni minimum in ne bomo mogli iz njega.

Poglejmo, če se pot kaj razlikuje, če mora trgovec pot začeti doma in jo končati doma (v točki  $(0,0)$ ), glej sliko 25. Vidimo, da se pot lahko precej razlikuje.

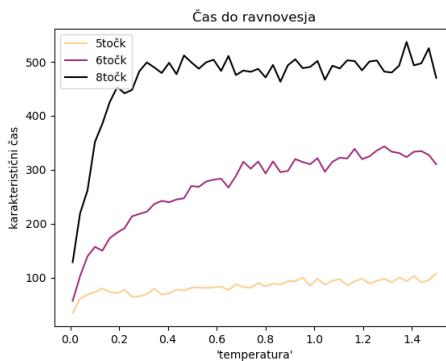
### Nalogu 3:

1. Najkraća put
2. Simultano oblikanje
3. Htrust konvergencija
4. Prehod detektor - mostnica / ovločesta / Površjena cestnina

# Emca Mlunec



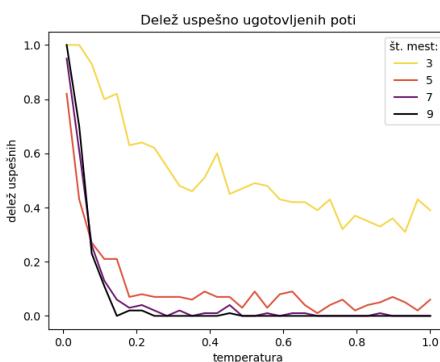
Slika 25: Primer, ko trgovec začne in konča pot doma in primer ko lahko spi kje drugje.



Slika 26: Čas do skonvergiranja glede na temperaturo in število točk.

Čas do tega, da algoritem skonvergira se tudi močno razlikuje glede na temperaturo ter število mest, glej sliko 26. Večje število mest precej poveča ta čas. Precej ga pa poveča tudi temperatura sploh pri majhnih temperaturah.

Najbolj od vsega pa nas zanima učinkovitost takega modela. Na sliki 27 je prikaz uspešno ugotovljenih poti. Kot pravilna pot se šteje pot enaka najbolj optimalni poti (če poskusimo vse poti) ter pot nasprotna tej (v obratni smeri).



Slika 27: Delež uspešno določenih poti glede na temperaturo in število mest.

Kot pričakovano, je pri manjših številih mest uspešnost večja. Ko pa gremo proti višjim številom pa zelo hitro upade. Vidimo tudi, da pri dovolj nizki temperaturi (po dolgem času) zadenejo praktično vsi ne glede na število mest.

# Prehod dež reku:

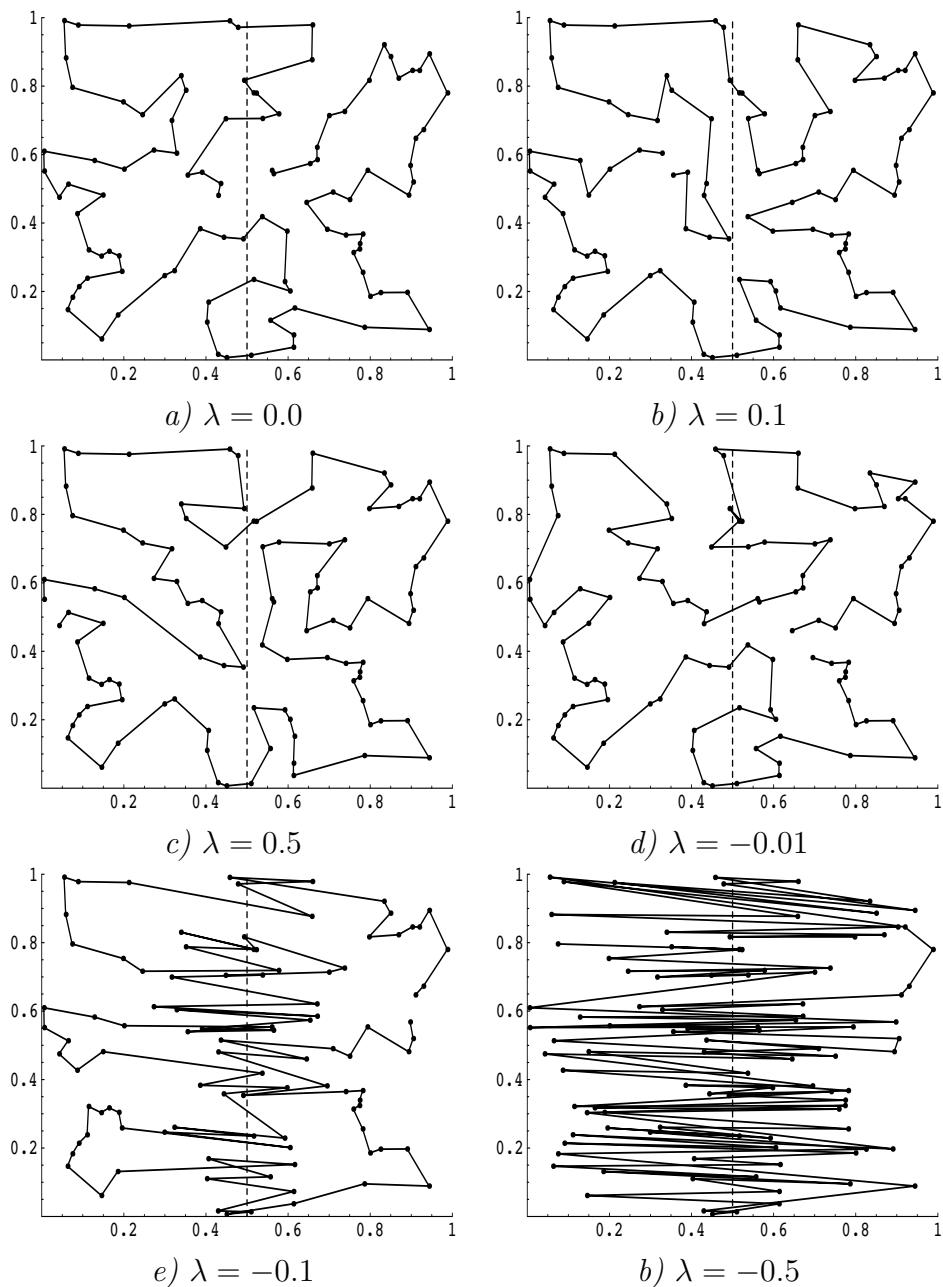


Table 7: Na slikah so predstavljene poti našega trgovskega potnika v odvisnosti od parametra  $\lambda$ . S črtkano črto je na sredini narisana reka. Slika a) predstavlja rešitev, ko prečkanje reke ni kaznovano, ko se trgovec ne boji reke. Slike b) in c) predstavljata rešitev, ko se trgovec boji reke, in je veliko rajši na bregovih. Vidimo, da tedaj prečka reko le tedaj, ko jo mora. Na slikah d), e) in f) pa so predstavljene rešitve, ko je  $\lambda < 0$ . Vidimo, da se tedaj trgovec obnaša kot tihotapec, saj kar naprej hodi cež reko, tudi ko to ni potrebno, zato lahko rečemo, da bolj kot je lambda negativen, bolj je naš trgovec izurjen tihotapec.

# Autocesta :

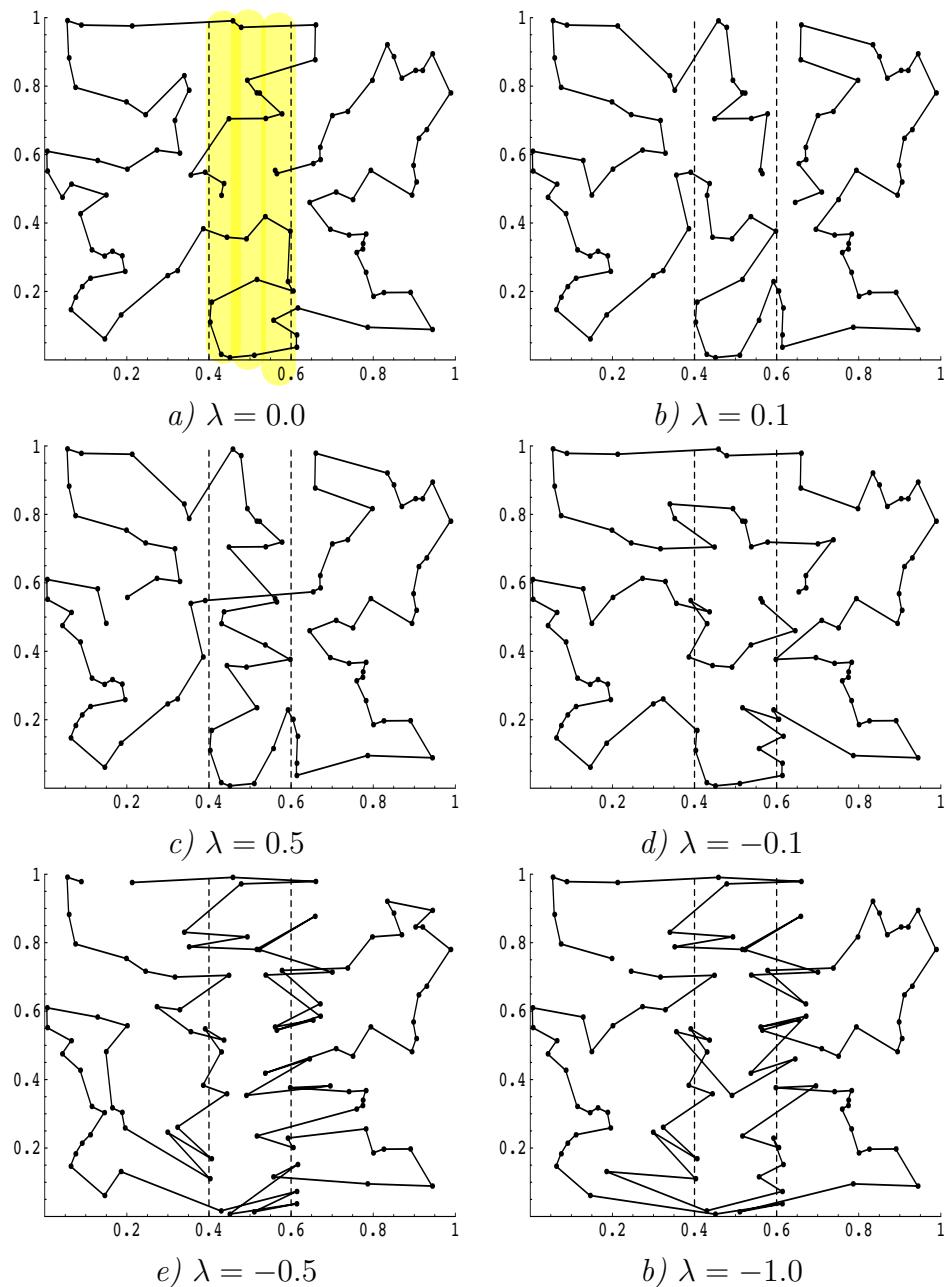


Table 8: Slika prikazuje poti našega trgovca, ko imamo na sredini države velika mesta, ki so povezana z avtocesto in se zato tam ceneje potuje. S koeficientom  $\lambda$  povemo, koliko cenejša je vožnja po avtocesti. Vidimo, da kadar je  $\lambda > 0$  vzame vsa mesta znotraj pasu avtoceste (ki je označena s črtanimi črtami) popotnik v enem kosu in se ne meni dosti za bližnje kraje zunaj tega pasu in jih obišče potem posebaj. Kadar pa je  $\lambda < 0$ , tedaj pa v bistvu na sredini države niso avtoceste, pač pa so kolovozi in je zato po njih dragi potovati. Zato se jim naš trgovec karseda tudi izogiba. To je razlog, da gre tudi vsako mesto v tem pasu obiskati vedno iz nekega žananjega mesta, ki ima do notranjega mesta dobro povezavo. Ne hodi pa iz mesta do mesta, saj so med njimi kolovozi.

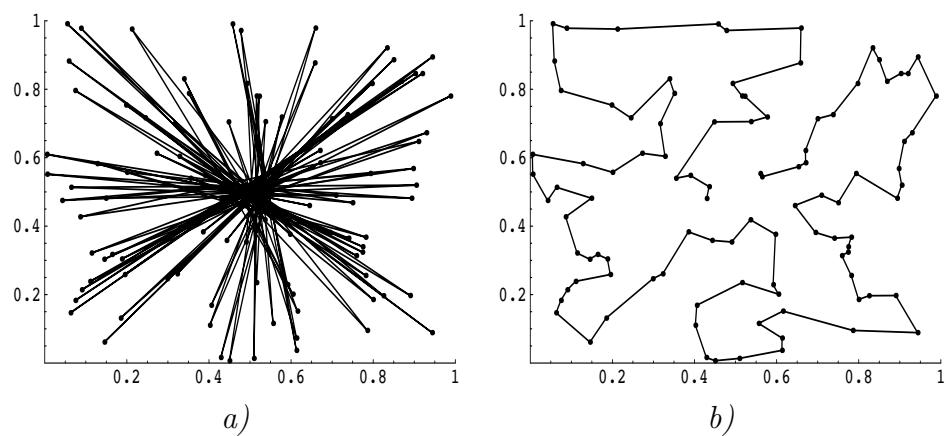


Table 9: Prva slika prikazuje trgovčeve pot, ko za svojo pot dobi povrnjene potne stroške in jo zato napne kar se le da. V drugem primeru, pa mora vsak preveč prevožen kilometr plačati podjetju in zato pazi, kod vozi.