

Modelska analiza I

Naloga 101

13.10.2022



Sporočni napotnik:

1. Upoštevajte navodila na spletnih učilci
2. Vedno dodajte vprasanje Številko.
3. Pritevka imena datotek.
4. Roh !

1. naloga – Model vožnje skozi semafor: variacijska metoda

Varčno vožnjo lahko definiramo s pogojem, da je pospeševanja in zaviranja čim manj. To lahko dosežemo z minimizacijo kumulativnega kvadrata pospeška. Iščemo optimalni režim vožnje v situaciji, ko poskušamo razdaljo do semaforja prevoziti ravno v trenutku, ko se prižge zelena luč.

1. Prepiši problem v brezdimenzijsko obliko.
2. Variacijski račun daje možnost, da določimo ekstrem tudi brez (enega) robnega pogoja: temu je ekvivalentna zahteva $d\mathcal{L}/dy = 0$ v drugi robni točki. Kakšna je torej optimalna vožnja pri poljubni končni hitrosti?
3. Kaj dajejo še druge možnosti izbire funkcionala, na primer višje potence absolutne vrednosti pospeška? Zanimiv praktični pomen ima limita, ko gre eksponent proti neskončnosti.
4. Kakšna je pa optimalna vožnja, če poleg pospeška tudi velikost hitrosti omejimo s kvadratičnim členom v funkcionalu? Koliko je zdaj prostih parametrov problema?
5. Zanimivo je tudi iskanje rešitve za zaporedne semaforje. Kako bi zagotovili zveznost pospeška ob prehodu semaforja?

101:

- Smisluost dobgemili reiter (negative histrasi)
- Linute su analitidm iżorrjan
- Prifikz $v(t)$. Koj pa $v(x)$, $x(t)$?
- Brx+dlmen+ijse kalkulax.
- Razluax brx+dlmen+ijse enote.
- Mod, mokkotvalua mod
- Periodikax reżitue
- Verjetnostne parzelutue.

Nalogia 1+2:

Maks Koncilja

Modelska analiza 1

*1. naloga- Model vožnje skozi semafor:
variaciska metoda*

prof. dr. Simon Širca, doc. dr. Miha Mihovilovič

1.

l dolžina do semaforja, v_0 začetna hitrost, t_0 čas ko se bo prižgala zelena luč.

1. pogoj:

do semaforja moramo priti natanko tedaj, ko se prižge zelena $\int_0^{t_0} v(t) dt \leq l$

2. pogoj:

Pogoj vdobnosti vožnje zadostimo z minimizacijo integrala kvadrata pospeška $\int_0^{t_0} \dot{v}(t) dt = \min$.

Opravka imamo z izoperimetričnim problemom variacijskega računa, ki ga rešujemo z Lagrangeovimi multiplikatorji:

zapišemo kot funkcional z lagrangeeve funkcijo

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(v, \dot{v}) = \dot{v}^2 - \lambda v \quad F = \int_0^{t_0} \mathcal{L}(v, \dot{v}) = \text{ekstremno}$$

Uporabimo E-L enačbe in iščemo stacionarnost funkcionala, sledi: $\ddot{v} = -\frac{\lambda}{2}$
dvakrat integriramo in dobimo $v(t) = -\frac{\lambda}{4}t^2 + At + B$
zaradi začentega pogoja $v(0) = v_0 \rightarrow B = v_0$

3. pogoj:

Če želimo semafor prevoziti pri ekstremni hitrosti mora veljati
 $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{v}}|_{t_0} = 0 \rightarrow 2\dot{v} = 0 \rightarrow \dot{v}(t_0) = 0 \rightarrow A = \lambda \frac{t_0}{2}$

4. pogoj:

v času t_0 mora prepotovati razdaljo l . S pomočjo tega določimo λ
 $\int_0^{t_0} v(t) dt = l \rightarrow \lambda = \frac{6(l - v_0 t_0)}{t_0^3}$

Končni izraz za hitrost je

$$v(t) = v_0 + \frac{3(l - v_0 t_0)}{2t_0^3} (2t_0 t - t^2)$$

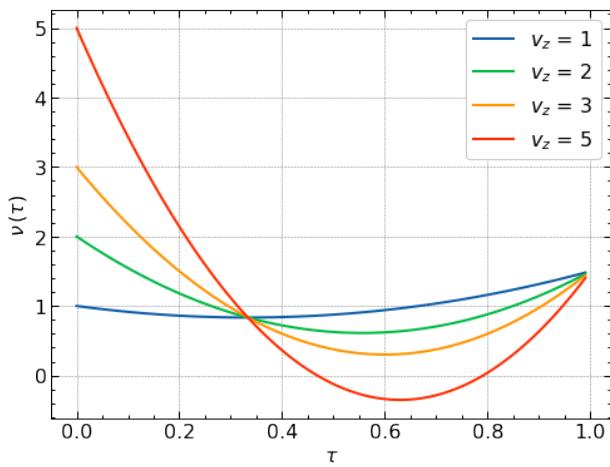
in brezdimenzijska oblika kjer je $\tau = \frac{t}{t_0}$, $\nu = \frac{t_0}{l}$, $\mathcal{X} = \frac{x}{l}$

v brezdimenzijsko obliko za splošne pogoje

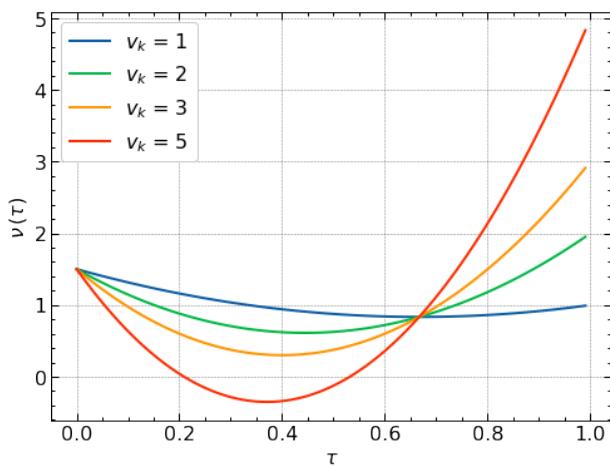
$$\nu(0) = \nu_z, \quad \nu(1) = \nu_k, \quad \int_0^1 \nu(\tau) d\tau = 1$$

se sprehodimo po podobnem postopku kot zgoraj in dobimo:

$$\nu(\tau) = \nu_z - 3(2 - (\nu_k + \nu_z))\tau^2 - 2(\nu_k + 2\nu_z - 3)\tau$$



Graf brezdimezijske hitrosti v odvisnosti od časa, različnih začetnih hitrostih v_z in fiksni končni hitrosti $v_k = 1.5$



Graf brezdimezijske hitrosti v odvisnosti od časa pri fiksni začetni hitrosti $v_z = 1.5$ in različnih končnih hitrostih v_k

Z nerodno izbrano začetno in končno hitrostjo lahko pride do kar nekaj nesmiselnih situacij. Kot lahko vidimo na grafu lahko pride do primerov negativnih hitrosti avtomobila, kar je nepraktično in ne upošteva cestno prometne predpise. Intuitivno nesmiselni so tudi primeri, ko avtomobil hitrost zmanjšuje, tik preden se prižge zelena luč.

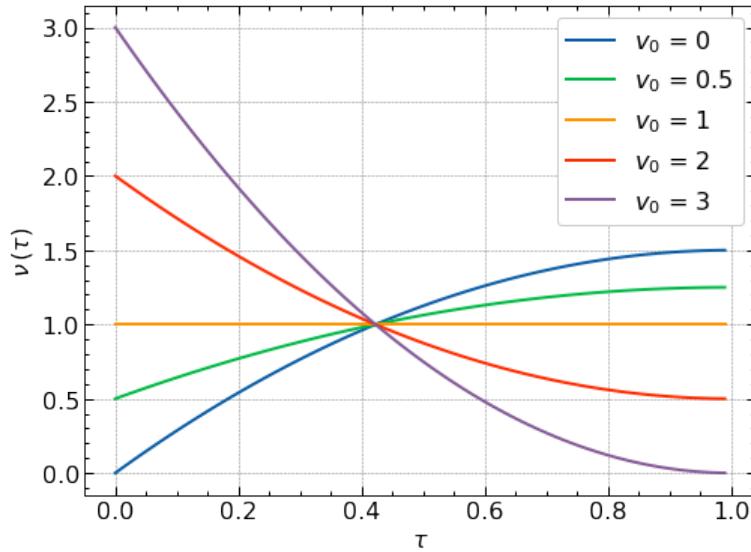
2.

v brezdimenzijsko obliko, ko imamo le en robni pogoj in velja
 $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\nu}}|_{\tau=1} = 0, \quad \nu(0) = \nu_0, \quad \dot{\nu}(1) = 0, \quad \int_0^1 \nu(t) d\tau = 1$

rešitev:

$$\nu(\tau) = \frac{3}{2}\tau^2(\nu_0 - 1) + 3\tau(1 - \nu_0) + \nu_0$$

lahko spremojamo le začetno hitrost ν_0 in opazujemo kako to vpliva na krvuljo hitrosti v času. Vozilo doseže semafor v ekstremu funkcije. Ta ekstrem je lahko minimum ali maksimum. Odvisno je od izbire prostega parametra ν_0 začetne hitrosti. Če je $\nu_0 > 1$ bo avtomobil do semaforja prispel z najmanjšo hitrostjo vožnje. V primeru $\nu_0 < 1$ pa avtomobil prevozi semafor z maksimalno hitrostjo. Kadar bo $\nu_0 > 3$ bo končna hitrost negativna, kar nima smisla.



graf brezdimenzijske hitrosti kot funkcija časa $\nu(\tau)$ z ekstremom hitrosti kot robnim pogojem $\dot{\nu}(1) = 0$

1.naloga: Model vožnje skozi semafor: variacijska metoda

Ema Mlinar

13. oktober 2022

1 Preprost primer lovljenja zelene luči na semaforju

Varčno vožnjo lahko definiramo s pogojem, da je pospeševanja in zaviranja čim manj. To lahko dosežemo z minimizacijo kumulativnega kvadrata pospeška. Iščemo optimalni režim vožnje v situaciji, ko poskušamo razdaljo do semaforja prevoziti ravno v trenutku, ko se prižge zelena luč. Problema se lotimo s pomočjo variacijskega računa, uporabimo lahko Euler-Lagrangeovo metodo. Ta metoda nam namreč da diferencialno enačbo za ekstrem funkcionala. Prav tako pa lahko uporabimo še Lagrangeovo metodo množilnikov in s tem dodamo vez oz. enačbo, ki ji mora naša optimalna funkcija zadoščati. Zapišimo problem v brezdimenzijski obliki. Imamo torej funkcional, ki ga želimo minimizirati:

$$F = \int_0^1 L(v, \dot{v}) dt = \min \quad (1)$$

$$L(v, \dot{v}) = \dot{v}^2 - \lambda v \quad (2)$$

kjer so $t = \frac{t'}{t_0}$, $l = \frac{l'}{l_0}$ in $v = \frac{v't_0}{l_0}$ brezdimenzijska hitrost, razdalja in čas; t' , l' in v' pa pripadajoče vrednosti z enotami. t_0 in l_0 sta čas od začetka do prižiga zelene luči in razdalja od začetne pozicije do semaforja. Tukaj smo uporabili λ kot novo spremenljivko, ki nam določa vez $\int_0^1 v(t) dt = 1$. Za Lagrangian L mora veljati Euler-Lagrangeeva enačba:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{v}} \right) - \frac{\partial L}{\partial v} = 0 \quad (3)$$

Prav tako pa morajo biti izpolnjeni tudi robni pogoji:

$$v(0) = v_0 \quad (4)$$

$$\int_0^1 v(t) dt = 1 \quad (5)$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{v}} \right)_{t=1} \quad (6)$$

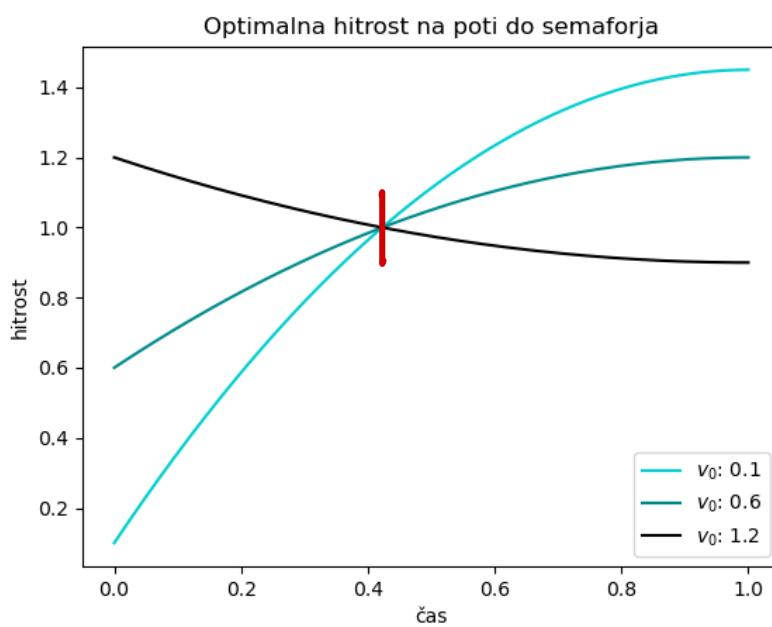
kjer v_0 predstavlja (brezdimenzijsko) začetno hitrost, enačba 6 pa nam opisuje prosti robni pogoj pri $t = 1$.

Enačba 3 nam da rešitev:

$$v(t) = -\frac{\lambda}{4} t^2 + At + B \quad (7)$$

Če pa upoštevamo še robne pogoje pa dobimo:

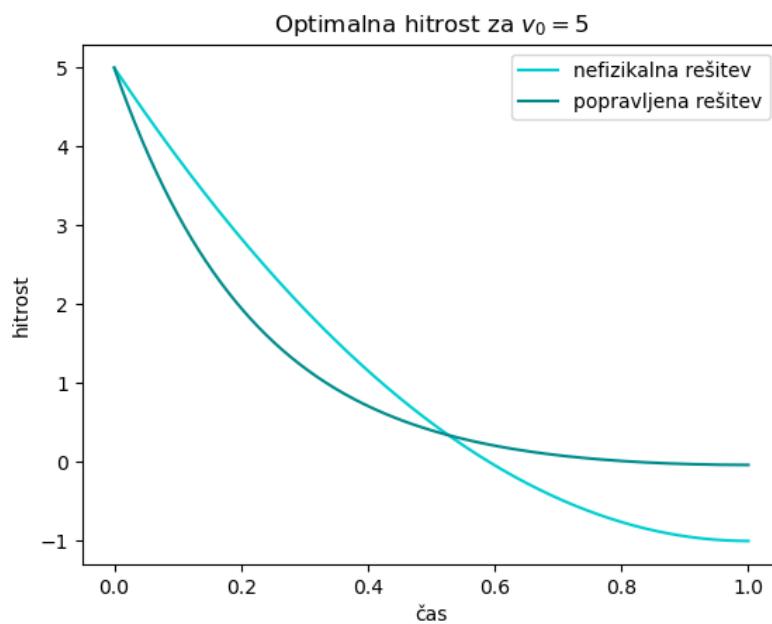
$$v(t) = v_0 + \frac{3(1-v_0)}{2} (2t-t^2) \quad (8)$$



Slika 1: Optimalna hitrost v odvisnosti od časa za različne začetne hitrosti.

Na sliki 1 je prikazana dobljena optimalna hitrost za različne začetne hitrosti.

Opazimo lahko tudi, da obstaja točka, kjer se vse krivulje sekajo. To točko dobimo, če enačimo koeficienta pred obema členoma v enačbi 8, ki vsebujeva v_0 , dobimo, da se to zgodi ob času $t = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$.



Slika 2: Primer velike začetne hitrosti, za katero s prejšnjo metodo dobimo nefizikalne rešitve ter rešitev s popravkom, da je hitrost lahko le pozitivna.

2 Ogromne hitrosti

Če pretiravamo z začetno hitrostjo pa nam da prejšnji postopek nefizikalne rešitve, primer tega je na grafu 2. V tem primeru moramo uvesti dodatno vez, ki preprečuje negativne hitrosti. V ta namen lahko definiramo družino funkcij:

$$g(v, \alpha) = \left(1 - \frac{v}{v_{max}}\right)^\alpha \quad (9)$$

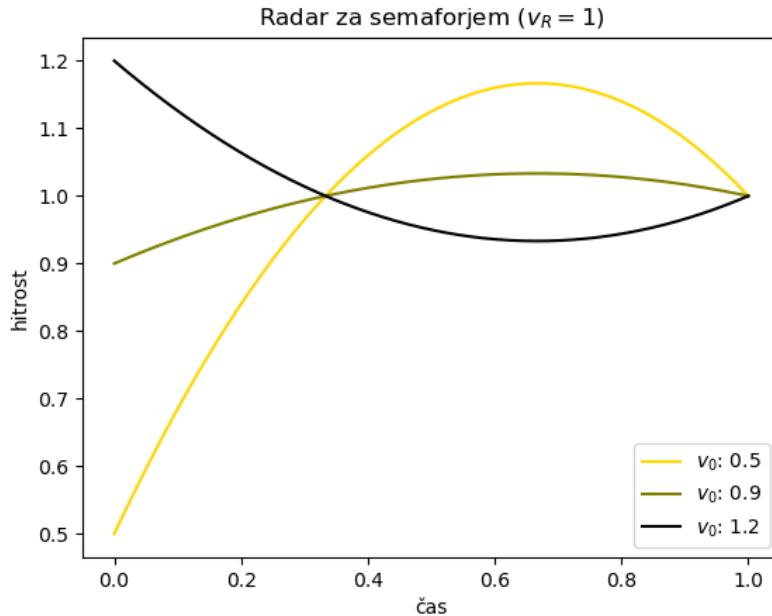
Količina v_{max} predstavlja najvišjo vrednost, ki jo hitrost doseže, ki pa je v našem primeru kar v_0 , saj je hitrost daleč najvišja na začetku (sicer ne bi zadostili pogoju o konstantni ploščini pod grafom). Limita te družine je funkcija:

$$G(v) = \begin{cases} \infty, & \text{če } v < 0 \\ 1, & \text{če } v = 0 \\ 0, & \text{če } v > 0 \end{cases} \quad (10)$$

Če torej G odamo kot vez v Lagarngian, se obnaša kar kot neke vrste prepustni filter, ki prepusti le pozitivne hitrosti.

3 Radar takoj za semaforjem

Namesto prostega robnega pogoja pri $t = 1$, lahko uporabimo tudi fiksne robne pogoje. Zamislimo si na primer, da takoj za semaforjem stoji radar. Ker nočemo plačati kazni, moramo našo hitrost po poti prilagoditi tako, da do semaforja pridemo ravno s hitrostjo, ki jo radar še dopušča (v_R). Primer take vožnje je na sliki 3. Opazimo lahko, da so na tem grafu parabole veliko bolj ukrivljene, prav tako pa se stikajo v isti točki (poleg tiste pri semaforju), kar pokažemo s podobnim argumentom kot pri začetnem preprostem primeru.



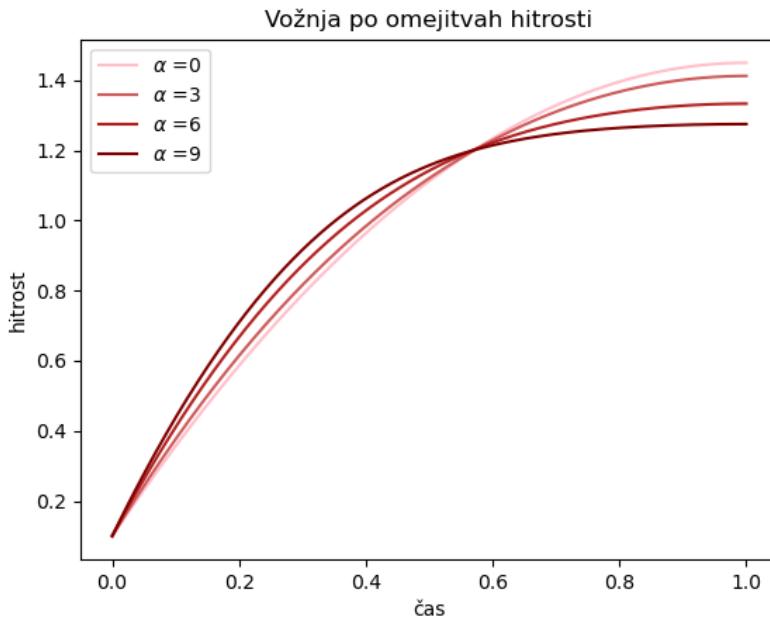
Slika 3: Primer vožnje v primeru, da je za semaforjem radar za različne začetne hitrosti.

4 Zmeraj zgledni vozniki

Seveda pa prejšnji primer ne označuje odgovornega voznika, saj je po omejitvah treba voziti ves čas in ne samo tam, kjer je radar. Tega smo se spet lotili z limitami kot v poglavju 2, le da bomo tokrat uporabili družino funkcij:

$$h(v, \alpha) = \left(\frac{v}{v_{max}} \right)^\alpha \quad (11)$$

Na sliki 4 lahko vidimo, kako ta družina funkcij konvergira k tisti funkciji, kjer ves čas vozimo pod omejitvijo hitrosti. Ker diferencialna enačba, ki jo dobimo ni enostavno rešljiva, se lahko zatečemo k numeričnemu reševanju. Uporabila sem Pythonovo metodo *odeint* (da enačbo rešimo s to metodo najprej razstavimo diferencialno enačbo drugega reda na sistem diferencialnih enačb prvega reda). Potem pa sem še izvrednostila s pomočjo robnih pogojev.



Slika 4: Konvergiranje Lagrangiana z dodanimi funkcijami 11 k limiti, ki predstavlja vožnjo pod omejitvijo hitrosti.

5 Višje potence absolutne vrednosti pospeška

V Lagrangianu 2 lahko kvadrat pospeška zamenjamo za višje potence. Kot rešitev Euler-Lagrangeeve enačbe dobimo:

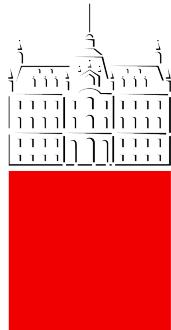
$$v(t) = \frac{2p-1}{\lambda} \left(C - \frac{\lambda t}{2p} \right)^{\frac{2p}{2p-1}} + D \quad (12)$$

S pomočjo robnih pogojev podobnih kot v prejšnji nalogi določimo konstante C , D in λ .

Na sliki 5 lahko vidimo, kako izgleda spremicanje hitrosti za različne take potence. Opazimo lahko, da so krivulje vedno bolj ravne in v limiti $p \rightarrow \infty$ preidejo v popolne premice. To je logično, saj vsako ukrivljenost neskončno kaznujemo, zato je optimalna le ravna črta.

Opazimo pa lahko, da se program pri višjih začetnih hitrostih (> 0.4) hitro sesuje. Za določanje konstant namreč moramo zaradi nelineranosti sistema enačb uporabiti numerične metode. Prvi problem, ki se pojavi v Pythonu je ta, da ulomke zapiše kot decimalno število s končnim številom decimalk. To-rej v primeru $p = 2$ v eksponentu dobimo vrednost $\frac{3}{4}$. Tretji koren od negativnega števila je enostavno

Univerza v Ljubljani
Fakulteta za *matematiko in fiziko*



MODELSKA ANALIZA I

**1. naloga: Model vožnje skozi semafor -
variacijska metoda**

Rok Kovač

vpisna številka: 28171063

Predavatelj: prof. dr. Simon ŠIRCA
Asistent: doc. dr. Miha MIHOVILOVIČ

13. oktober 2022

1 Uvod

V nalogi smo modelirali vožnjo skozi semafor. Želeli smo optimizirati vožnjo, da pridemo do semaforja ravno, ko se prižge zelena luč, in to kar se da udobno. V nekem trenutku se nahajamo na razdalji l_0 pred semaforjem in vemo, da bo rdeča luč gorela še t_0 . Sedaj na različne načine optimiziramo vožnjo. Vedno zapišemo Lagrangeovo funkcijo in ob izbranih vezeh in robnih pogojih rešimo Euler-Lagrangeovo enačbo. Pri tem udobnost upoštevamo kot minimizacijo integrala izbrane količine z variacijskim pristopom.

2 Osnovni primer

Najprej rešimo osnovni primer, kjer upoštevamo dano začetno hitrost in zahtevo, da do semaforja pridemo ravno po času t_0 . Udobno vožnjo definiramo kot minimizacijo integrala kvadrata pospeška po času potovanja:

$$\int_0^{t_0} a^2 dt = \int_0^{t_0} \dot{v}^2 dt.$$

Dobimo LDE 2. reda za hitrost, rešitev je parabola, ki ima torej tri proste parametre. Naša naloga je poiskati optimalne parametre. Ker ne poznamo končne hitrosti, upoštevamo prosti robni pogoj, torej, da ima parabola tam ekstrem. Dobimo:

$$v = -\frac{\lambda}{4}t^2 + At + B; B = v_z, A = \frac{\lambda t_0}{2}, \lambda = \frac{6}{t_0^3}(l - v_z t_0).$$

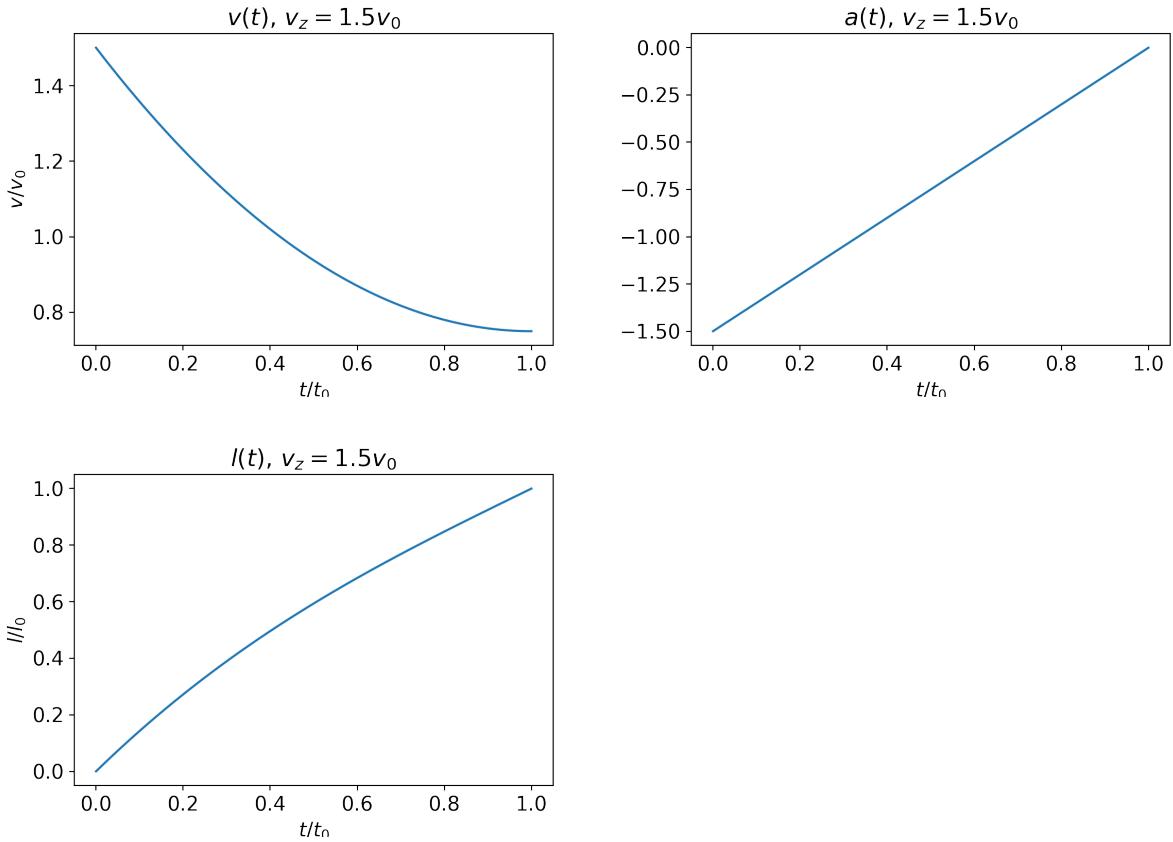
Pospešek je časovni odvod hitrosti in ga dobimo že tekom postopka:

$$a = \dot{v} = -\frac{\lambda}{2}t + A.$$

Celotno enačbo še prepišemo v brezdimenzijsko obliko recimo z uvedbo $l \rightarrow l/l_0, t \rightarrow t/t_0, v \rightarrow v/v_0; v_0 = l_0/t_0$:

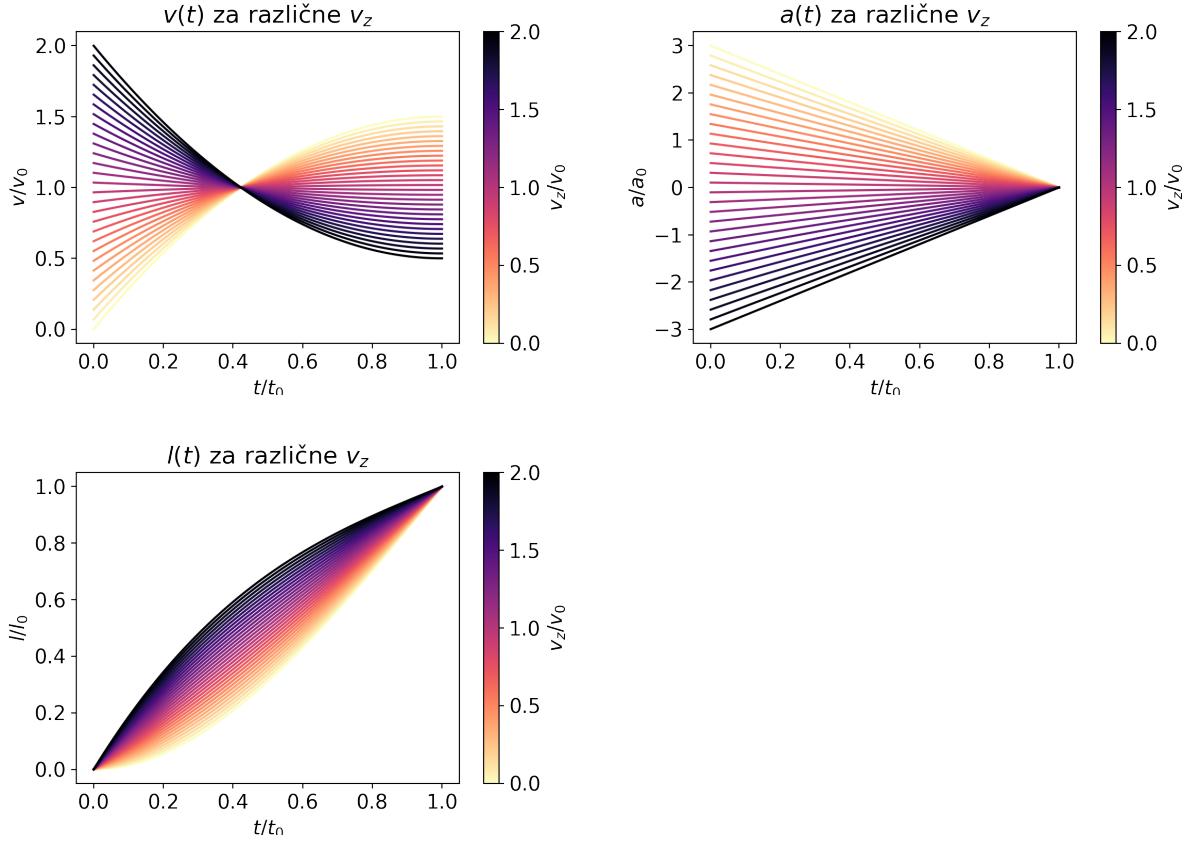
$$\frac{v(t)}{v_0} = \frac{v_z}{v_0} + \left(3 \frac{l}{l_0} - \frac{v_z}{v_0} \right) \left(\frac{t}{t_0} - \frac{1}{2} \left(\frac{t}{t_0} \right)^2 \right).$$

Opozoriti velja še enkrat, da je začetna hitrost označena z v_z , v_0 pa je hitrost, s katero bi nepospešeno optimalno potovali do semaforja. Narišimo najprej en primer za izbrane robne pogoje, da dobimo predstavo (slika 1). Rišemo hitrost, ki je parabola, pospešek, ki je torej linearna funkcija in pot, ki je polinom 3. stopnje. Slednjega lahko izračunamo z analitičnim integriranjem hitrosti po času, lahko pa tudi numerično izračunamo.



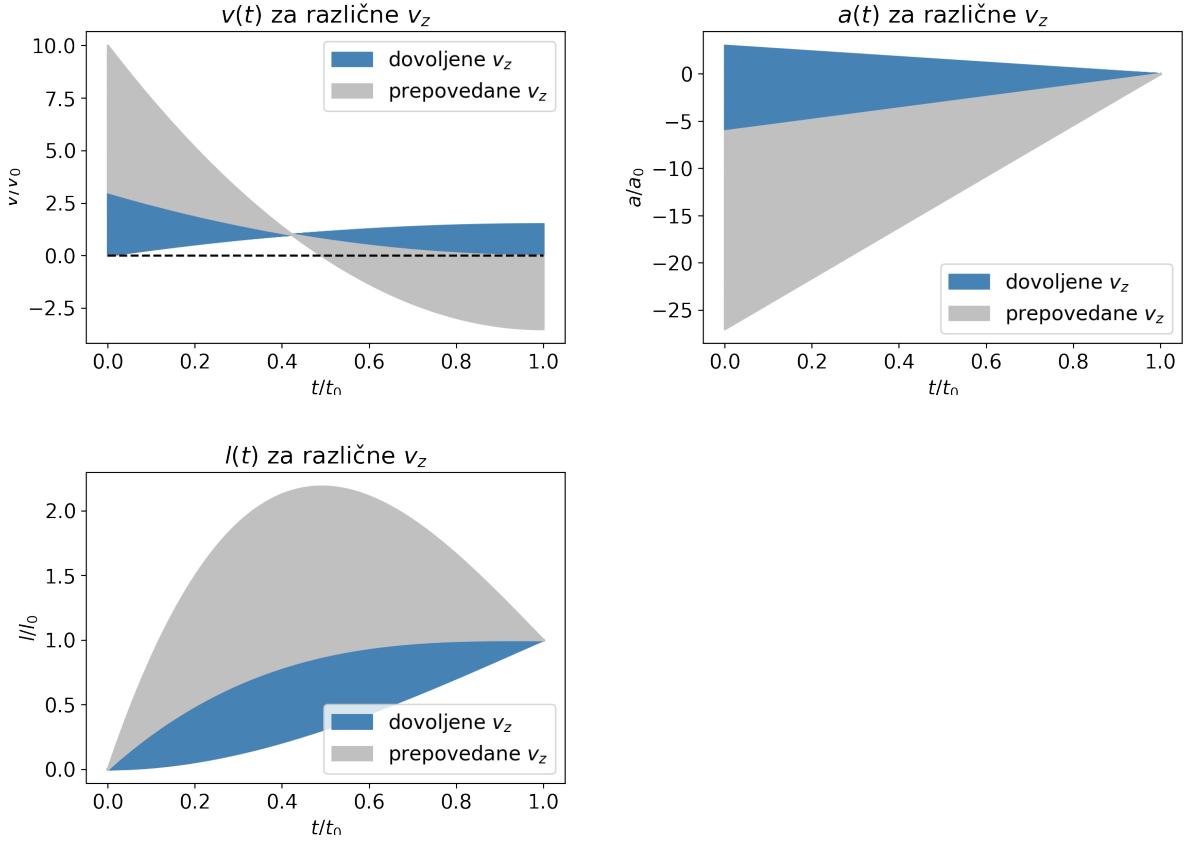
Slika 1: levo zgoraj: hitrost v odvisnosti od časa je tu parabolična funkcija. Desno zgoraj: pospešek je linearna funkcija časa. Spodaj: pot je polinom tretje stopnje. Grafi so narisani za $v_z = 3/2v_0$, kjer je v_0 hitrost optimalne enakomerne vožnje do semaforja $v_0 = l_0/t_0$.

Sedaj si bolj splošno poglejmo družino rešitev in sicer si poglejmo odvisnost rešitev od začetne hitrosti v_z , kar prikazuje slika 2. Vidimo, da je rešitev za $v_z = v_0$ kar enakomerno premo gibanje, okoli tega pa je družina rešitev simetrična. Opazimo, da ne glede na začetno hitrost rešitve dosežejo $v(t) = v_0$ v isti točki v času. Kjer je $v_z > v_0$, je pospešek negativen in obratno, kar je tudi pričakovano. Graf poti rišemo tudi za možnost preverjanja rešitev algoritma, ki je tako zelo enostavna, saj mora graf zavzeti vrednost $l(t_0) = l_0$, torej se morajo vse funkcije sekati v tej točki, kar lepo vidimo na tretjem grafu slike 2.



Slika 2: levo zgoraj: vse rešitve se sekajo v isti točki, torej ob istem času hitrost pade na v_0 . Desno zgoraj: Če je naša začetna hitrost višja od v_0 , je pospešek negativen in obratno. Spodaj: Vse rešitve se po pričakovanjih stekajo v isti točki, ker avto do semaforja pripotuje vedno ob istem času.

Še malo se igramo s faznim prostorom in opazimo, da seveda niso vse rešitve fizikalno smiselne. Včasih namreč dobimo negativno hitrost, torej potuje avto nazaj, včasih pa celo že prevozimo semafor in nato peljemo nazaj, da smo ob času t_0 v resnici (spet) na semaforju. Take rešitve enostavno odstranimo s tem, da tokom vožnje spremljamo, da hitrost ostane nenegativna, sicer pa rešitev zavrhemo (slika 3).



Slika 3: Nekatere rešitve niso fizikalno smiselne, saj vključujejo negativne hitrosti. Avto semafor že prevozi, nato pa se pravi čas vrne na končno lego. Na grafih $v(t)$, $a(t)$ in $l(t)$ so s sivo označene prepovedane rešitve, z modro dovoljene, črtkana črta pa nakazuje mejo med dovoljenimi in prepovedanimi reštvami. Ker imajo tu parabole ekstrema na desnem robu, lahko za pogoj vzamemo, da je $v(t_0) \geq 0$.

3 Radar ob semaforju

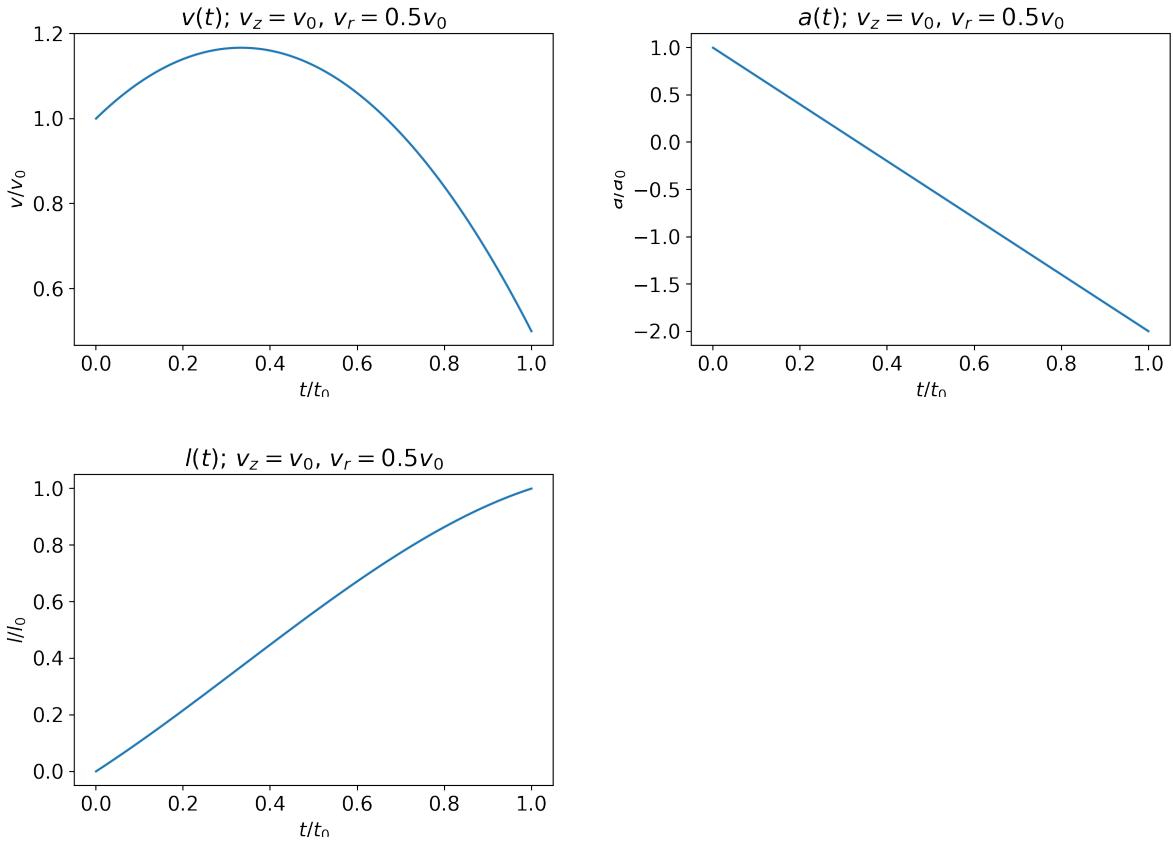
Obravnavajmo sedaj nekoliko drugačen primer, kjer radar ob semaforju meri hitrost in ne želimo prekoračiti dovoljene hitrosti v_r oziroma postavimo za pogoj namesto ekstrema kar $v(t_0) = v_r$. Funkcije so še vedno parabole, se pa spremenijo koeficienti:

$$v = -\frac{\lambda}{4}t^2 + At + B; B = v_z, A = \frac{v_r - v_0}{t_0} + \frac{\lambda t_0}{4}, \lambda = \frac{12}{t_0^3}(2l - v_z t_0 - v_r t_0).$$

Pospešek je časovni odvod hitrosti in ga dobimo že tekom postopka:

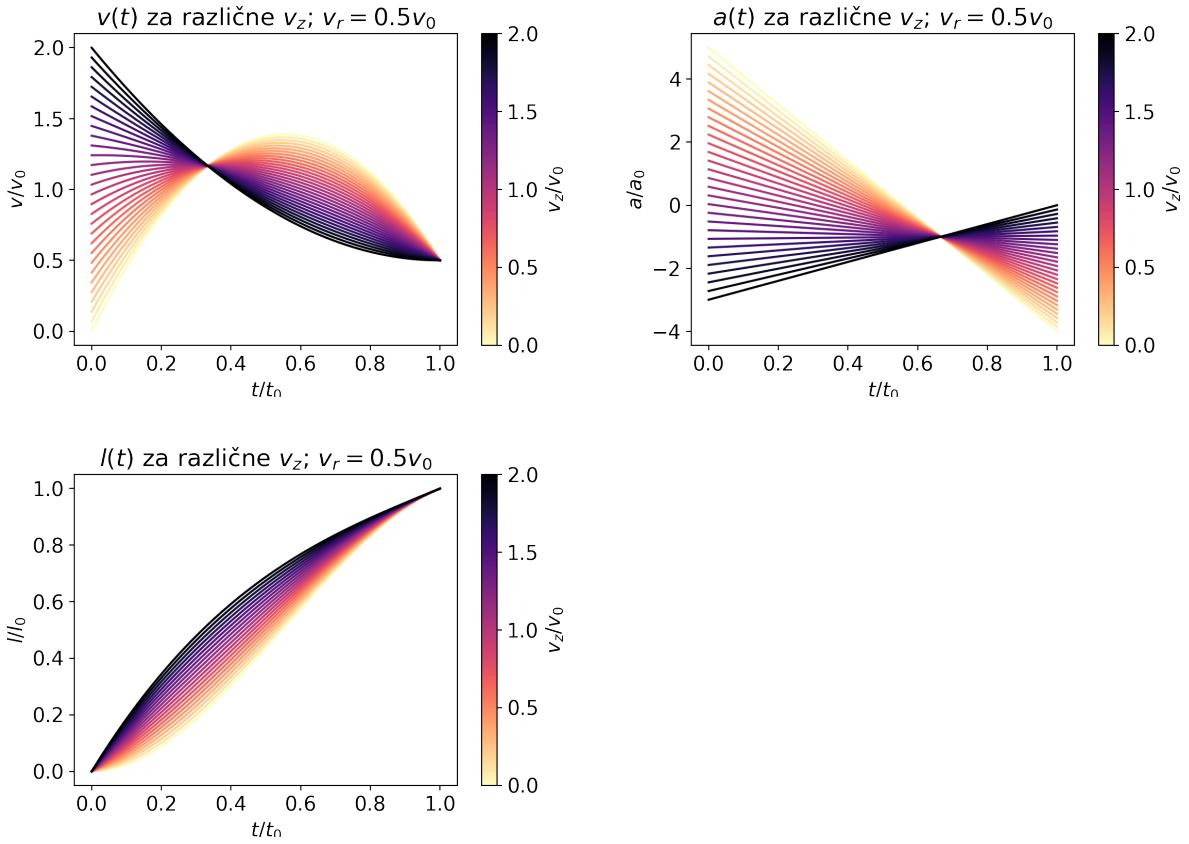
$$a = \dot{v} = -\frac{\lambda}{2}t + A.$$

Ker parabola nima več (nujno) ekstrema na robu, je fazni prostor nekoliko kompleksnejši. Spet si poglejmo najprej neko rešitev (slika 4).



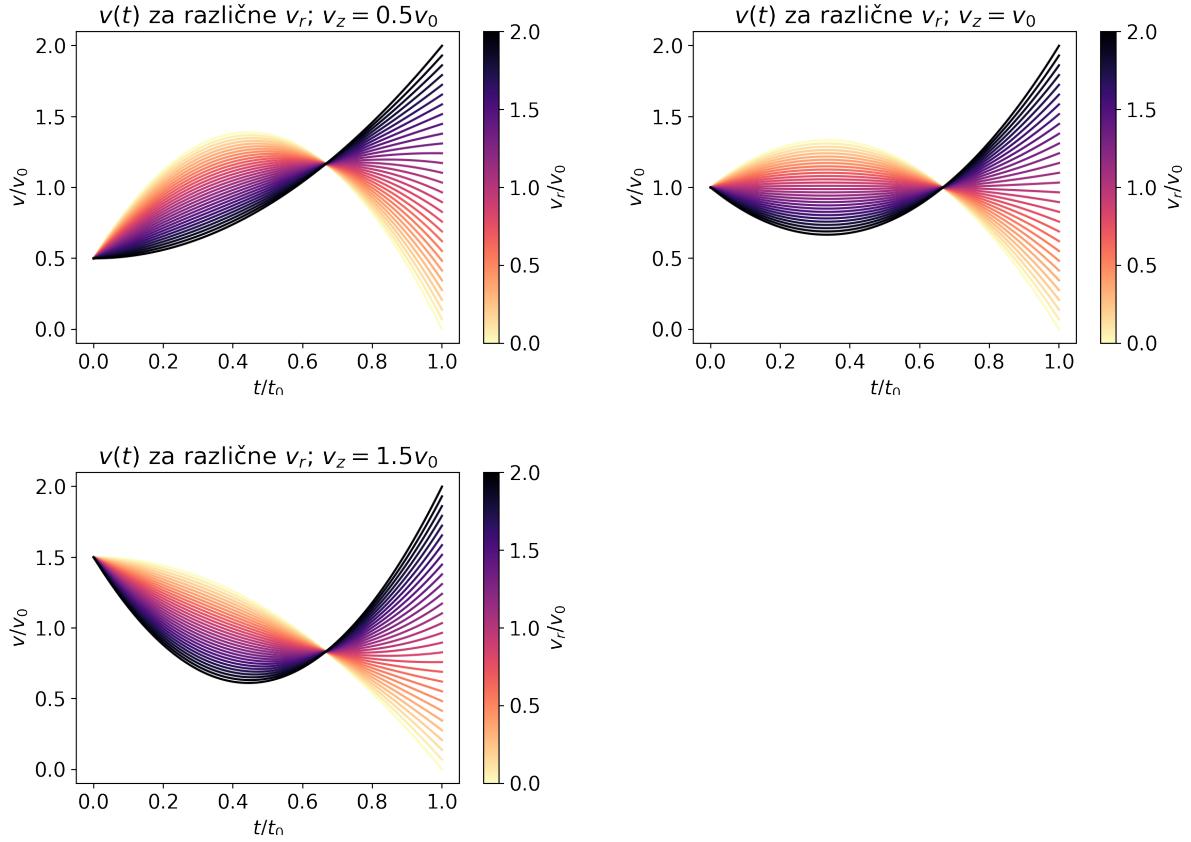
Slika 4: Brezdimenzijski grafi $v(t)$, $a(t)$ in $l(t)$ za primer z radarjem, kjer želimo, da je končna hitrost polovica v_0 , začetna pa v_0 . Vidimo, da ekstrem parabole tu ni na robu, temveč nekje na sredini. Torej tudi pospešek nima ves čas enakega predznaka.

Sedaj si poglejmo še bolj podrobno družino rešitev (slika 5). Najprej obravnavajmo grafe za različno začetno hitrost v_z pri konstantni končni hitrosti $v_r = 0.5$. Tudi tu v vseh primerih tekom poti hitrost dobi vrednost v_0 ob istem času. Tudi vse krivulje pospeškov (premice) se sekajo v isti točki. Po pričakovanjih je v vseh primerih končna pot dolga l_0 , kar nakazuje na pravilno rešitev.

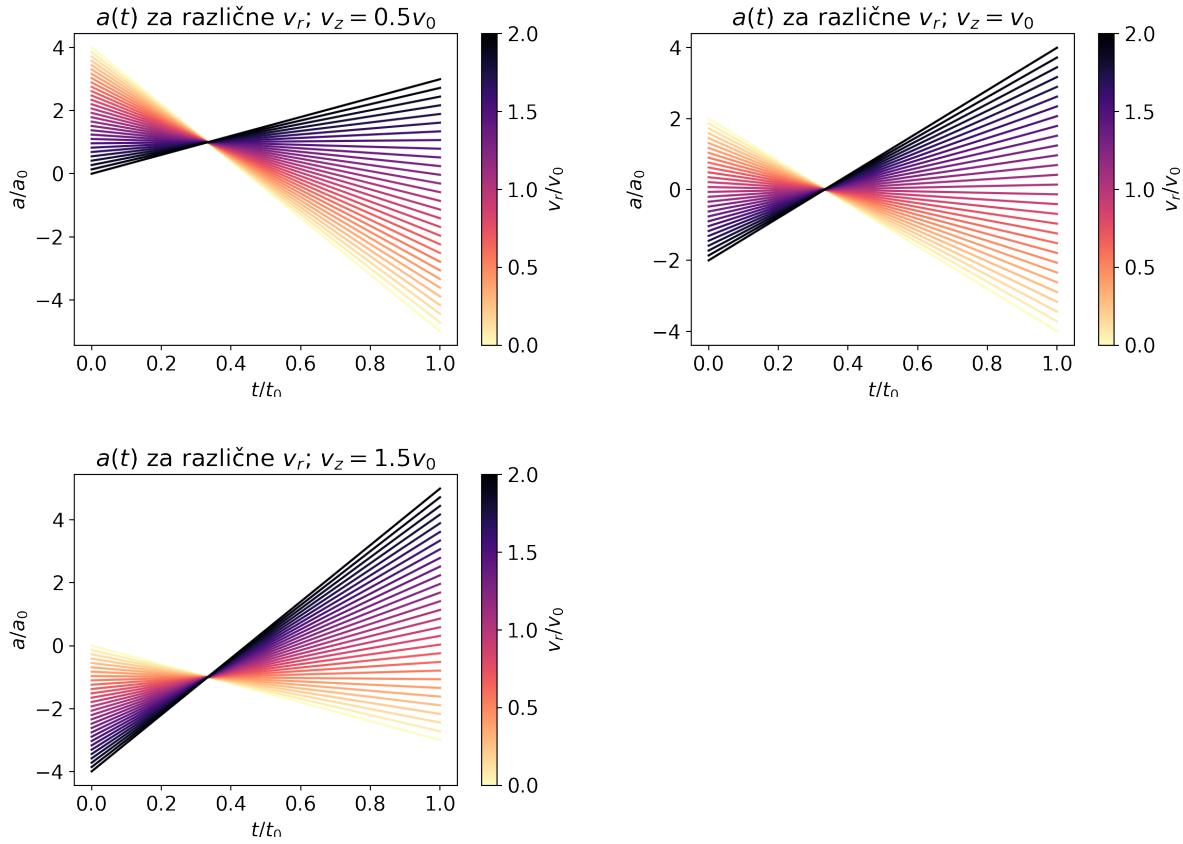


Slika 5: Brezdimenzijski grafi $v(t)$, $a(t)$ in $l(t)$ za primer z radarjem, kjer želimo, da je končna hitrost polovica v_0 , začetno pa spremojamo. Spet v vseh primerih sočasno hitrost doseže vrednost v_0 , tudi premice pospeškov se vse v istem trenutku sekajo. Pol je na koncu vedno dolga l_0 , tako kot mora biti.

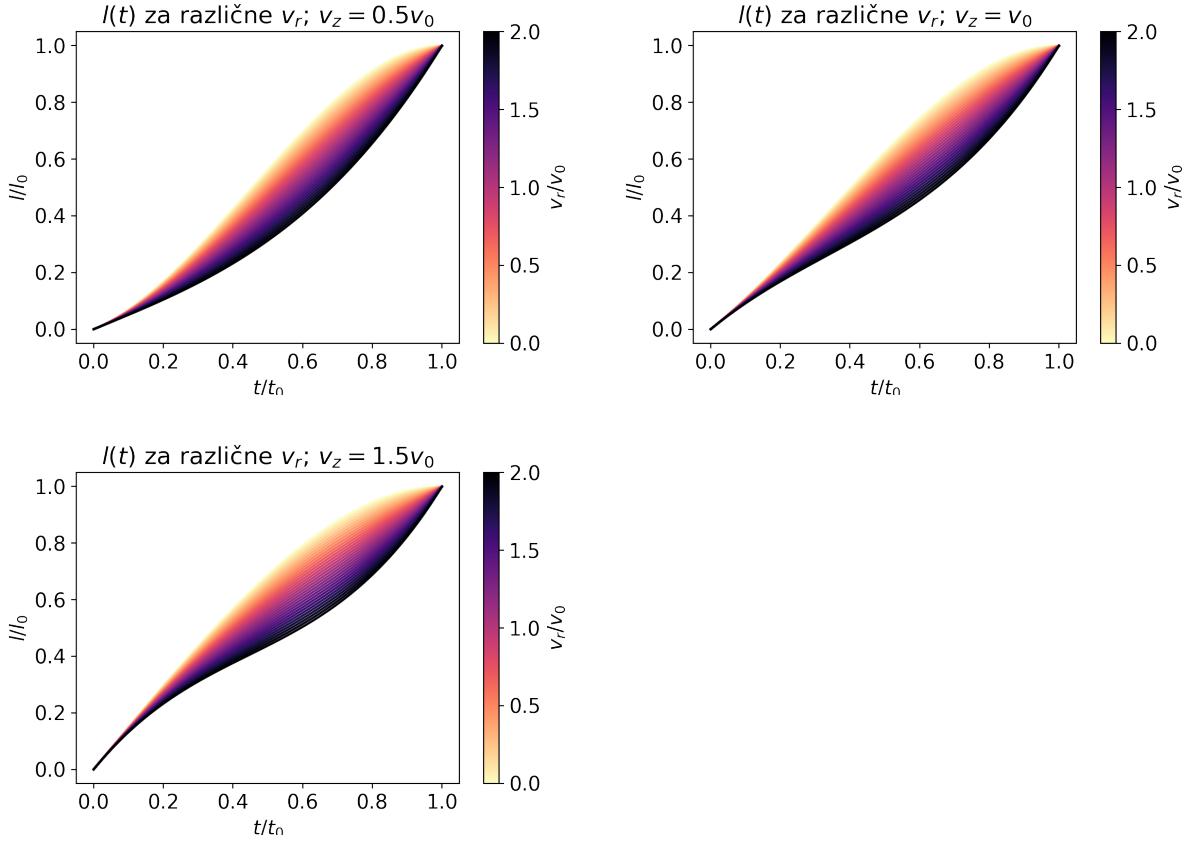
Lahko pa pri izbranih začetnih hitrostih spremojamo omejitev - t.j. končno vrednost hitrosti $v(t_0)$, kar prikazujejo slike 6, 7, 8. Grafi so precej podobni, le začetne hitrosti so zamaknjene, tako kot smo jih izbrali ($v_z = 0.5v_0$, $v_z = v_0$ in $v_z = 1.5v_0$), zaradi česar so vsi grafi nekoliko povlečeni navzgor ali navzdol. Abscisa presečišč različnih grafov $v(t)$ in $a(t)$ je neodvisna od vrednosti v_z in v_r , ordinata pa se spreminja.



Slika 6: Brezdimenzijski grafi $v(t)$ za tri različne začetne hitrosti $v_z = 0.5v_0$, $v_z = v_0$ in $v_z = 1.5v_0$. Grafi so podobni, le da je izhodišče v drugi (izbrani) točki. Točke presečišč vseh krivulj sestavljajo premico, vzporedno z ordinatno osjo.

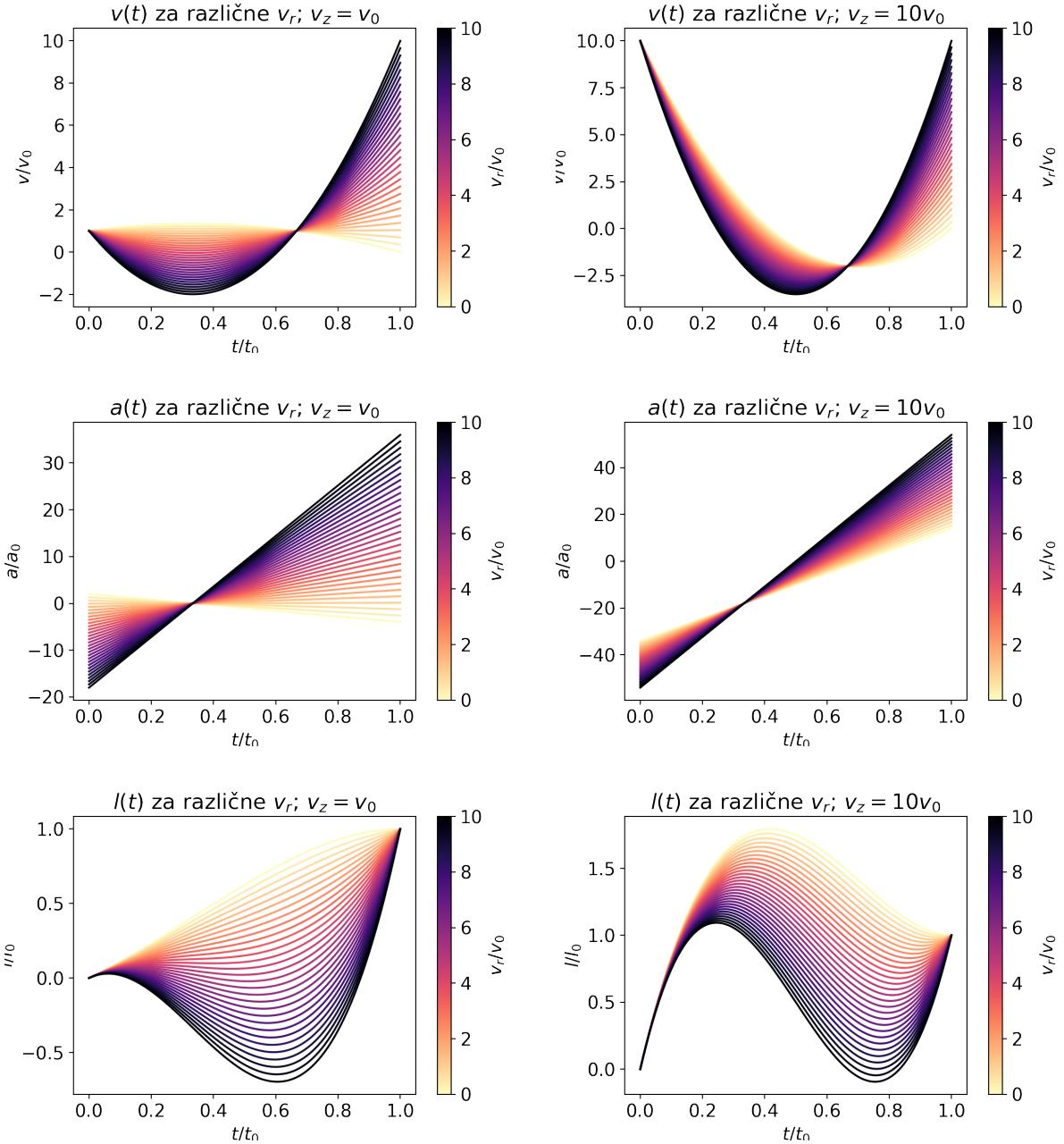


Slika 7: Brezdimenzijski grafi $a(t)$ za tri različne začetne hitrosti $v_z = 0.5v_0$, $v_z = v_0$ in $v_z = 1.5v_0$. Točke presečišč vseh krivulj sestavljajo premico, vzporedno z ordinatno osjo.



Slika 8: Brezdimenzijski grafi $l(t)$ za tri različne začetne hitrosti $v_z = 0.5v_0$, $v_z = v_0$ in $v_z = 1.5v_0$.

Tudi tu obstajajo prepovedane rešitve, kjer je občasno hitrost negativna (slika 9). Opravnavamo primera $v_z = v_0$ in $v_z = 10v_0$ in opazimo, da v prvem primeru marsikakšna rešitev odpotuje celo v bolj negativno lego, kot je bila na začetku, druga pa vmes močno prekorači lego semaforja in se nato vrne. Spet je smiselno zavreči vse rešitve, kjer se pojavi negativna hitrost.



Slika 9: Primerjava rešitev za $v_z = v_0$ in $v_z = 10v_0$. Izkaže se, da so poti z negativno (vmesno) hitrostjo precej pogoste, vsekakor pa niso zelo fizikalne rešitve. Smiselno je zavreči vse poti, kjer se pojavijo negativne hitrosti.

4 Stranpot: radar sredi poti

Problem z radarjem pa lahko posplošimo, če sprostimo lego radarja, da se lahko nahaja tudi na katerikoli vmesni točki. Spet dobimo parabolično rešitev, se pa nekoliko spremenijo parametri, saj se namesto robnega pogoja $v(t_0) = v_r$ pojavi $v(t_r) = v_r$, kjer je $t_r \in [0, t_0]$. Posledično se členi ne

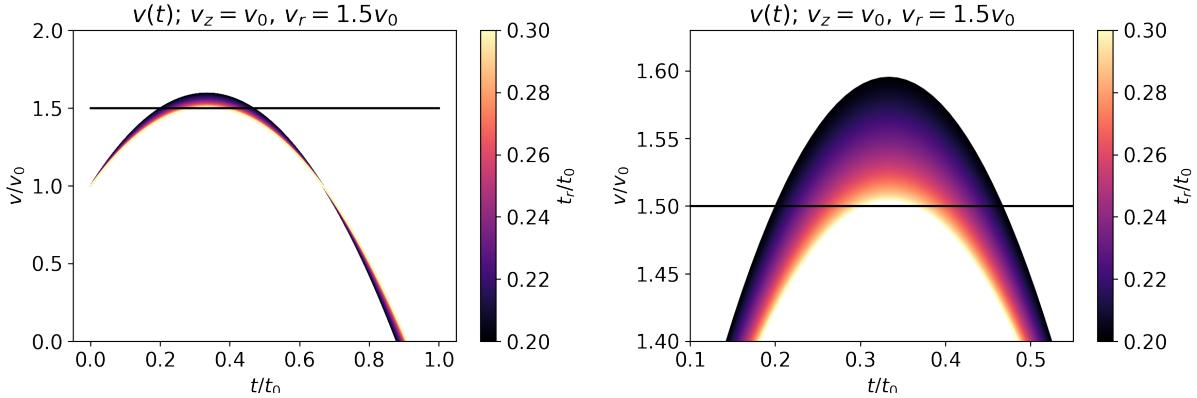
pokrajšajo tako lepo in dobimo:

$$v = -\frac{\lambda}{4}t^2 + At + B; B = v_z, A = \frac{v_r - v_0}{t_r} + \frac{\lambda t_r}{4}, \lambda = \frac{l - v_z t_0 - \frac{v_r - v_0}{t_r} \frac{t_0^2}{2}}{\frac{t_0^2 t_r}{8} - \frac{t_0^3}{12}}.$$

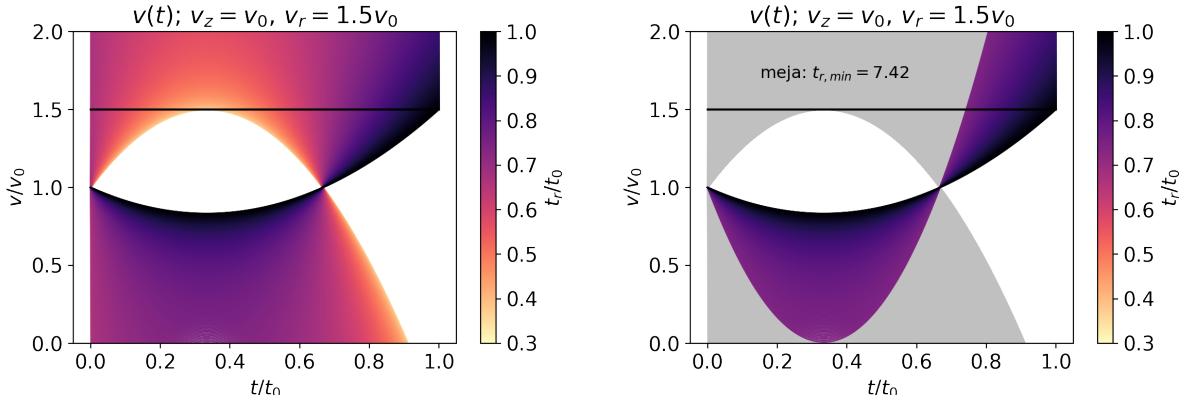
Pospešek dobimo že tekom postopka:

$$a = \dot{v} = -\frac{\lambda}{2}t + A.$$

Ta rešitev torej namesto končne hitrosti določa hitrost ob nekem vmesnem času t_r . Poglejmo si družino funkcij, ko t_r spremojamo. Opazujmo sistem pri izbrani začetni hitrosti v_z in omejitvi v_r . Iz slik 10, 11 je lepo razvidno, da vse krivulje res zavzemajo izbrano vrednost $v_r(t_r)$. Ker se sicer grafi prekrivajo, smo interval $[0, t_0]$ razdelili na območje $[0, 0.3t_0]$, kjer rešitev ne spremojamo, ker glede na ostale preveč divergirajo, $[0.2t_0, 0.3t_0]$ (10) in $[0.3t_0, t_0]$ (11). Vse krivulje na sliki 10 imajo v zadnjem delu negativno hitrost, torej odpadejo. Tudi nekatere rešitve iz slike 11 imajo negativno hitrost, šele, ko radar dovolj odmaknemo od začetne pozicije, imamo dovolj časa, da udobno zmanjšamo hitrost na največjo dovoljeno, in rešitve postanejo veljavne.



Slika 10: Levo: Rešitve za radar ob času t_r pri izbrani začetni hitrosti $v_z = v_0$ in omejitvi $v_r = 1.5v_0$. Desno: približno polje najbolj zanimivega dela. Vodoravna črna črta prikazuje vrednost v_r , ki jo krivulje ob času t_r zavzamejo. Vidimo, da vse krivulje res potekajo skozi točke $v_r(t_r)$. Vse te krivulje ($[0.2t_0, 0.3t_0]$) pa so v zadnjem delu negativne, torej rešitve zavrzemo.



Slika 11: Levo: Rešitve za radar ob času t_r pri izbrani začetni hitrosti $v_z = v_0$ in omejitvi $v_r = 1.5v_0$ za $t_r \in [0.3t_0, t_0]$. Desno: s sivo barvo je so označene rešitve, ki so prepovedane zaradi negativnih hitrosti na delu svojega tira. Vodoravna črna črta prikazuje vrednost v_r , ki jo krivulje ob času t_r zavzamejo. Graf kaže, da če je radar preveč blizu začetne lege, voznik ne uspe udobno dovolj hitro upočasniti avta, ne da bi ga optimalna krivulja prisilila v negativno hitrost.

5 Sode potence p

Pri vseh teh primerih smo minimizirali kvadrat pospeška. S spremenjanjem potence pa lahko spremimo utež, ki jo ima minimizacija na končni tir. Izpeljimo najprej splošno enačbo za sode potence 2p. Izkaže se, da je nastavek za hitrost:

$$v(t) = -\frac{2p-1}{\lambda} \left(C - \frac{\lambda t}{2p} \right)^{\frac{2p}{2p-1}} + D.$$

Z odvajanjem dobimo še:

$$\dot{v} = -\frac{2p}{\lambda} \left(C - \frac{\lambda t}{2p} \right)^{\frac{1}{2p-1}}.$$

Konstante dobimo iz robnih pogojev: začetne hitrosti, integrala hitrosti in iz ekstrema hitrosti ob t_0 . Ko poračunamo enačbe, lahko izrazimo:

$$C = \frac{\lambda t_0}{2p}, D = v_z + \frac{2p-1}{\lambda} C^{\frac{2p}{2p-1}}, \lambda = \left((l - v_z t_0) (2p)^{\frac{1}{2p-1}} \frac{4p-1}{2p-1} t_0^{-\frac{4p-1}{2p-1}} \right)^{2p-1}$$

. Vstavim p = 1 in preverim, če dobim enak izraz kot prej. Se izide, tako da sklepam, da sem pravilno izpeljal. narišimo sedaj nekaj grafov. Zanima nas limita, ko gre $p \rightarrow \infty$. Pričakujemo, da se bo v limiti parabola izravnala v premico, ker pospešek močno kaznjujemo. Narišemo graf (slika 12) za tri različne začetne hitrosti: $v_z = 0.2v_0, v_z = 0.5v_0, v_z = 0.8v_0$. Vidimo, da v vseh primerih limitira v premico, ko potenca p narašča. Opazimo pa pri tem pristopu težavo: ne deluje za vse rešitve. Deluje samo, ko je $v_z < v_0$. Veljalo bi še neposredno izpeljati limitni primer $p \rightarrow \infty$ in pokazati, da premica nastopa tudi v enačbah.

Naloga 3 :

Bluž Lepus del:

4 Višje potence absolutne vrednosti pospeška

Poglejmo si, kaj se zgodi, če predlagamo drugačno definicijo udobne vožnje. V temu poglavju bom uporabil sledeči Lagrangian

$$\mathcal{L} = |\dot{v}|^p - \lambda v.$$

Ko ga vstavimo v EL enačbo $\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{v}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}$ dobimo

$$p(p-1)|\dot{v}|^{p-2}\ddot{v} + \lambda = 0.$$

Ob uvedbi novih spremenljivk $u = \dot{v}$ in $du = \ddot{v}dt$ lahko zgornji izraz integriramo in dobimo

$$\frac{|\dot{v}|^p}{\dot{v}} = -\frac{\lambda}{p}t + C.$$

Če se najprej omejimo na sode potence, $p = 2k$, potem lahko absolutno vrednost izpustimo. Po še eni integraciji dobimo

$$v = -\frac{2k-1}{\lambda} \left(-\frac{\lambda}{2k}t + C \right)^{\frac{2k}{2k-1}} + D.$$

Za lihe potence pa velja $p = 2l+1$ in enačba

$$\frac{|\dot{v}|}{\dot{v}} \dot{v}^{2l} = -\frac{\lambda}{2l+1}t + C.$$

Opazimo, da je sedaj pomemben predznak pospeška $\frac{|\dot{v}|}{\dot{v}}$. Spomnimo se grafa 1, na katerem lahko opazimo, da je ob enem prostem robnem pogoju funkcija hitrosti monotona. To pomeni, da pospešek ne spremeni predznaka in lahko naš primer za lihe potence p razdelimo na dva primera. S tem smo se omejili na en prost robni pogoj. Rešitve, ki jih dobimo so

$$v = -\frac{2l}{\lambda} \left(-\frac{\lambda}{2l+1}t + C \right)^{\frac{2l+1}{2l}} + D \quad \frac{|\dot{v}|}{\dot{v}} = 1$$

$$v = \frac{2l}{\lambda} \left(\frac{\lambda}{2l+1}t - C \right)^{\frac{2l+1}{2l}} + D \quad \frac{|\dot{v}|}{\dot{v}} = -1$$

Opazimo, da se rešitvi razlikujeta le za predznak konstante, ki ga lahko odpravimo z zamenjavo spremenljiv. Opazimo tudi, da je rešitev identična tisti za sode p . Vse rešitve lahko združimo v končno rešitev

$$v = -\frac{p-1}{\lambda} \left(-\frac{\lambda}{p}t + A \right)^{\frac{p}{p-1}} + B.$$

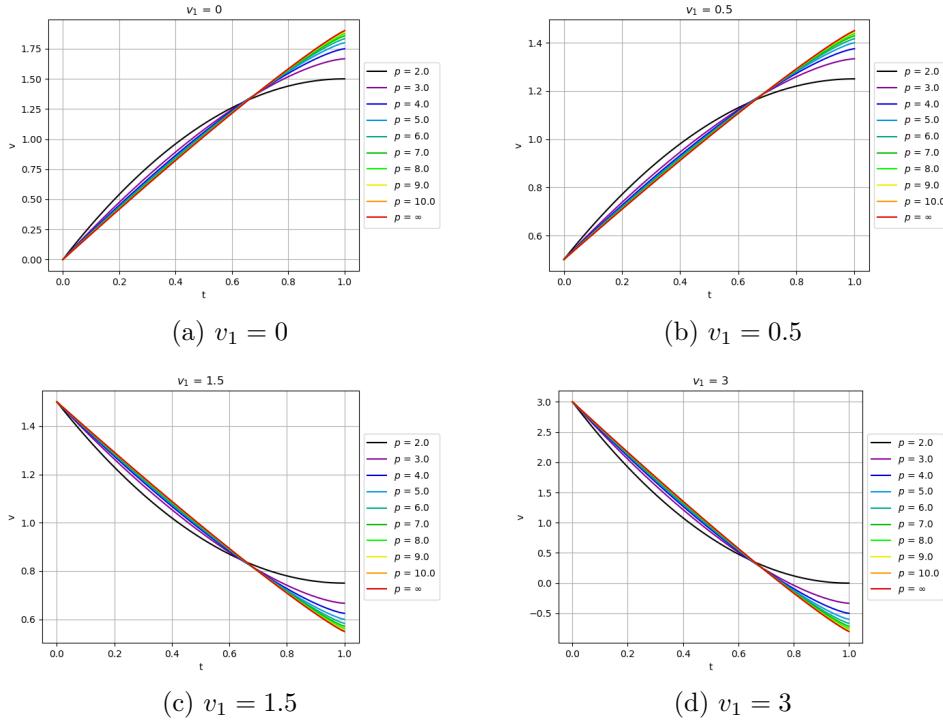
Ob upoštevanju enakih robnih pogojev kot pri prvi nalogi dobimo izraz za hitrost

$$v = v_1 + \frac{2p-1}{p}(1-v_1)\left\{1 - (1-t)^{\frac{p}{p-1}}\right\}.$$

Na grafu 3 je narisanih nekaj potekov hitrosti za različne p in v_1 . Poglejmo še limito $p \rightarrow \infty$.

$$\lim_{p \rightarrow \infty} v = v_1 + 2(1-v_1)t.$$

Tudi limita je prikazana na grafu 3. Vidimo, da je to premica.

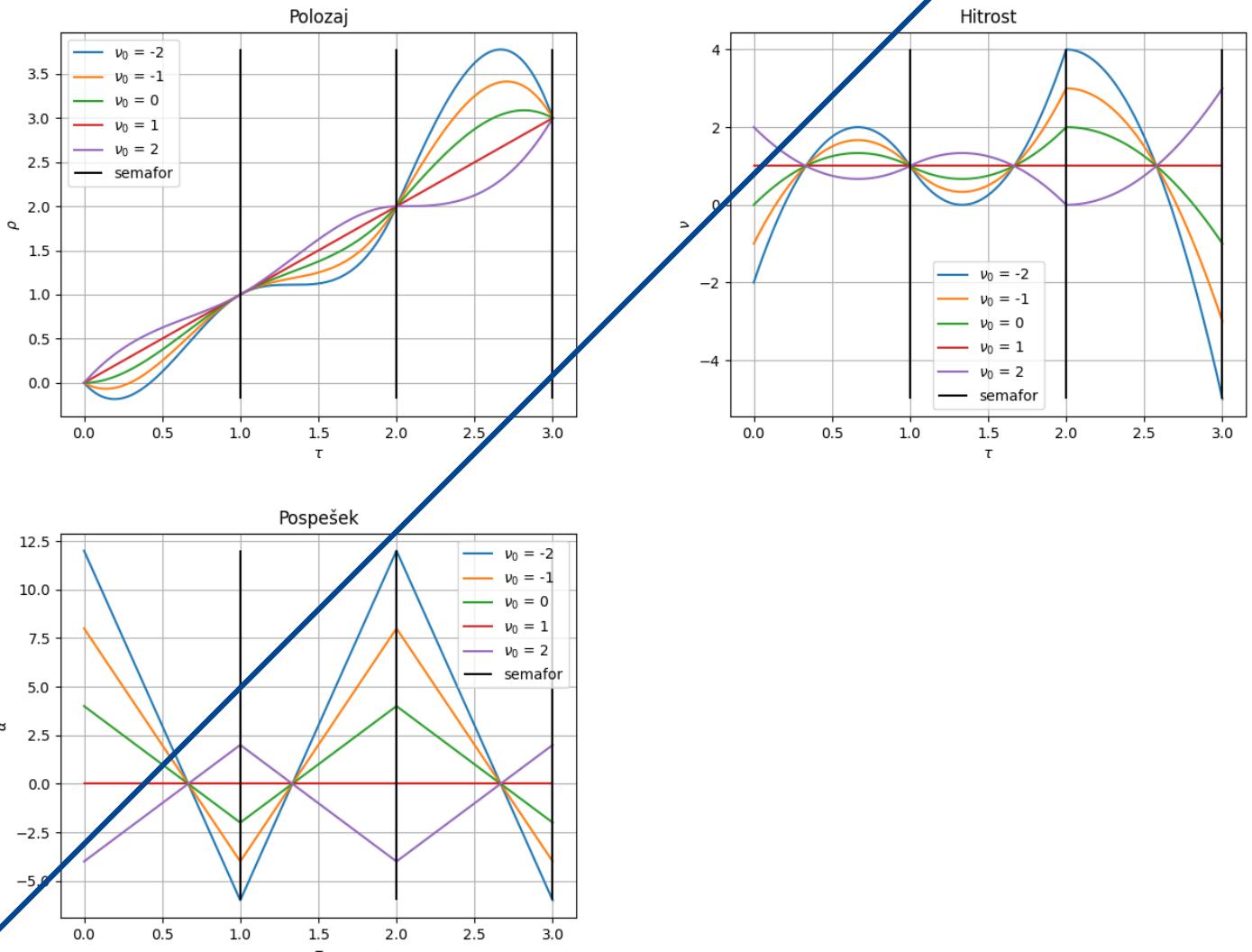


Slika 3: Na grafih so prikazani optimalni poteki hitrosti za različne začetne hitrosti in različne parametre p .

Liga Černe:

Več semaforjev

Poglejmo si še primer, ko se semaforji periodično ponavljajo. Želimo upoštevati zveznost pospeška in hitrosti po vsakem semaforju. Upoštevali bomo pogoje za razdaljo (enačba 5), začetno hitrost ($v(0) = v_0$), in začetni pospešek ($\dot{v}(0) = \dot{v}_0$), ki mora biti enak pospešku pred semaforjem.



Slika 7: Prikaz razdalje, hitrosti, in pospeška pri več zaporednih semaforjih.

Minimizacija absolutne vrednosti pospeška

Kaj pa rešitev funkcionala oblike:

$$\int_0^1 |\dot{v}| d\tau = \min \quad (16)$$

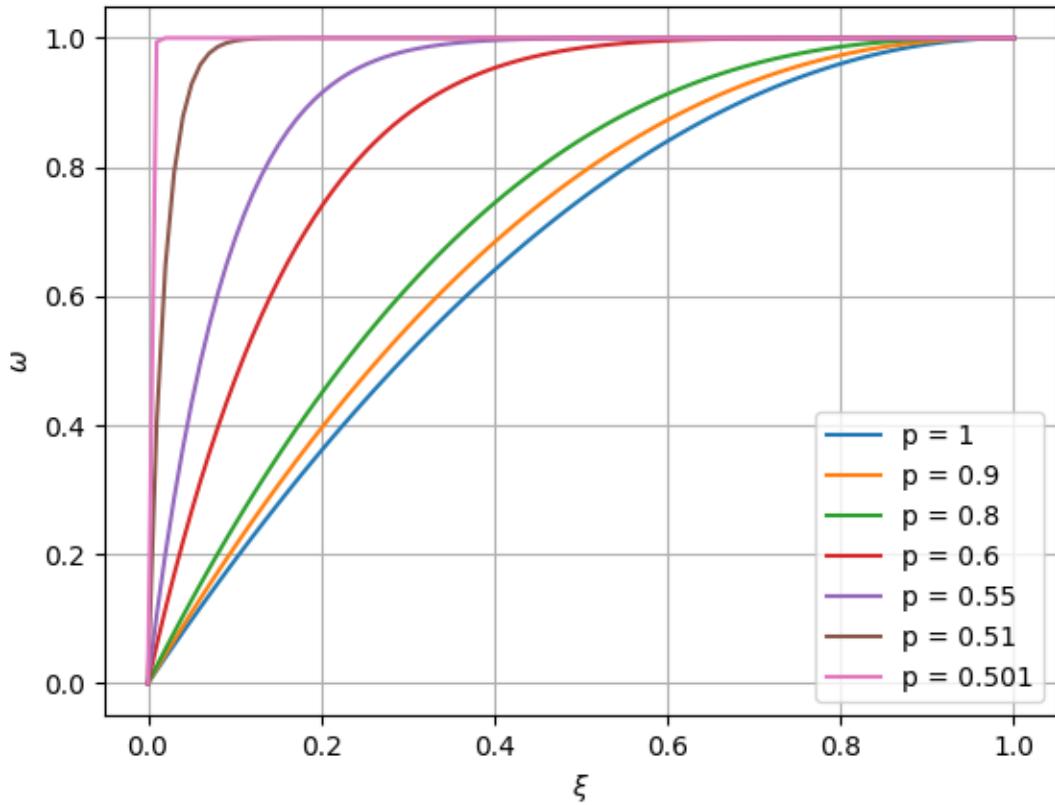
Problem lahko zapišemo tudi s pomočjo kvadrata in korena, torej:

$$\int_0^1 \sqrt{\dot{\nu}^2} = \min$$

Rešitev dobimo iz enačbe 12 za $p = \frac{1}{2}$. Ker za $p = \frac{1}{2}$ rešitev ni definirana, si grafično poglejmo ali dana funkcija konvergira k čem zanimivem.

Rešitvi se lahko približamo z limito:

$$\lim_{p \rightarrow \frac{1}{2}} -\frac{2p}{\lambda} \left(\frac{A}{2p} - \frac{\lambda t}{2p} \right)^{\frac{2p}{2p-1}} + B \quad (17)$$



Slika 8: Limita $\nu(\tau)$, ko gre $p \rightarrow \frac{1}{2}$

Očitno je optimalna rešitev v tem primeru neskončen pospešek do želene hitrosti, nato pa konstantna vožnja do semaforja.

4 Višje potence absolutne vrednosti pospeška

Lagrangeeva funkcija se glasi

$$\mathcal{L}(u, \dot{u}) = |\dot{u}|^p - \lambda u ,$$

Euler-Lagrangeeva enačba pa nam da

$$\frac{d}{d\tau} (p \dot{u} |\dot{u}|^{p-2}) + \lambda = 0$$

ozziroma

$$|\dot{u}|^{p-2} \ddot{u} = -\frac{\lambda}{p(p-1)} \equiv D . \quad (11)$$

Absolutna vrednost povzroča probleme pri reševanju diferencialne enačbe. Tudi program Wolfram Mathematica je ni znal rešiti. Najboljša rešitev, ki sem se jo spomnil za reševanje takšnega problema v splošnem, je reševanje z diferenčno shemo.

4.1 Semafor prevozimo pri ekstremni hitrosti

Lahko pa diferencialno enačbo (11) poenostavimo za primer poljubne (ekstremne) končne hitrosti. Kot smo videli v prejšnjih poglavjih, je pri takšnem robnem pogoju pospešek $\dot{u}(\tau)$ monotona funkcija časa. Potemtakem je $\operatorname{sgn}(\dot{u})$ konstanta. Ali bomo z avtomobilom pospeševali ali zavirali, je odvisno od začetne hitrosti. V primeru $u_0 < 1$ bomo z avtomobilom pospeševali, pri $u_0 > 1$ pa zavirali (pri $u_0 = 1$ pa vozili z enakomerno hitrostjo). Velja

$$|\dot{u}| = \dot{u} \operatorname{sgn}(\dot{u}) ,$$

kar za pospeševanje pomeni kar $|\dot{u}| = \dot{u}$, za zaviranje pa $|\dot{u}| = -\dot{u}$. V obeh primerih dobimo diferencialno enačbo

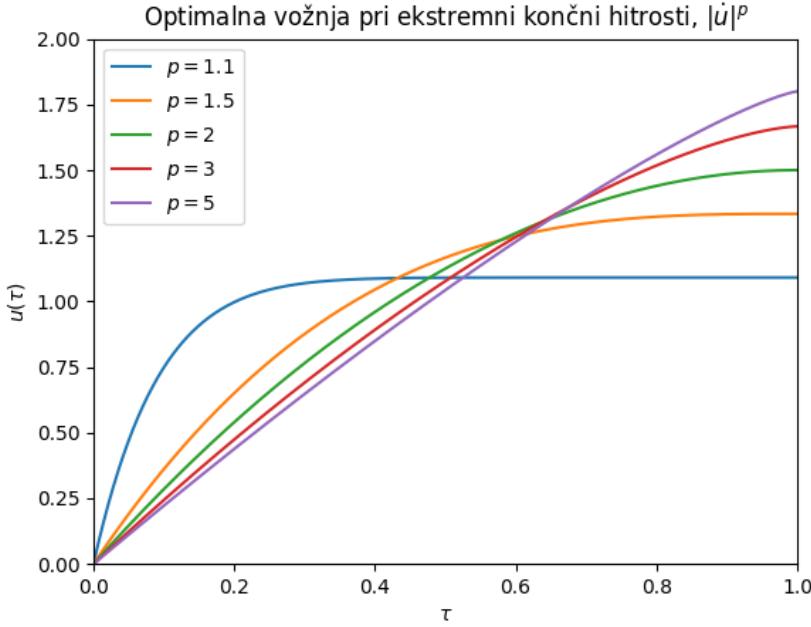
$$(\dot{u})^{p-2} \ddot{u} = D , \quad (12)$$

kjer je D neka konstanta (od D iz enačbe (11) se lahko razlikuje le za faktor -1). Rešitev te enačbe že poznamo iz poglavja 3, le da tokrat pišemo p namesto $2p$, zaradi drugačne notacije v eksponentu. Rešitev je torej

$$u(\tau) = \frac{2p-1}{p} (u_0 - 1) \left[(1-\tau)^{\frac{p}{p-1}} - 1 \right] + u_0 . \quad (13)$$

Na sliki 7 je prikazano obnašanje rešitve za nekaj različnih potenc. Obravnavamo potence $p > 1$. Opazimo, da se pri manjših potencah splača hitro pospešiti in ustaliti pri neki hitrosti.

Nedoga 4:



Slika 7: $u(\tau)$ za različne potence pri fiksni začetni hitrosti $u_0 = 0$.

5 Kvadratični člen hitrosti

V Lagrangeovo funkcijo dodamo kvadratični člen hitrosti, in tako minimiziramo še recimo energijske izgube zaradi zračnega upora,

$$\mathcal{L}(u, \dot{u}) = \dot{u}^2 + Cu^2 - \lambda u , \quad C > 0 . \quad (14)$$

Euler-Lagrangeeva enačba dá $2\ddot{u} - 2Cu + \lambda = 0$ oziroma

$$\ddot{u} - Cu = \tilde{\lambda} . \quad (15)$$

Rešitev te diferencialne enačbe je

$$u(\tau) = Ae^{\sqrt{C}\tau} + Be^{-\sqrt{C}\tau} + D . \quad (16)$$

5.1 Semafor prevozimo pri ekstremni hitrosti

Že rutinsko določimo neznane konstante.

$$u(0) = A + B + D = u_0 \quad (17)$$

$$\dot{u}(\tau) = A\sqrt{C}e^{\sqrt{C}\tau} - B\sqrt{C}e^{-\sqrt{C}\tau} \quad (18)$$

$$\dot{u}(1) = \sqrt{C} \left(Ae^{\sqrt{C}} - Be^{-\sqrt{C}} \right) = 0$$

$$\implies B = Ae^{2\sqrt{C}} \quad (19)$$

Zvezo (19) vstavimo v zvezo (17) in dobimo

$$D = u_0 - A \left(1 + e^{2\sqrt{C}} \right) . \quad (20)$$

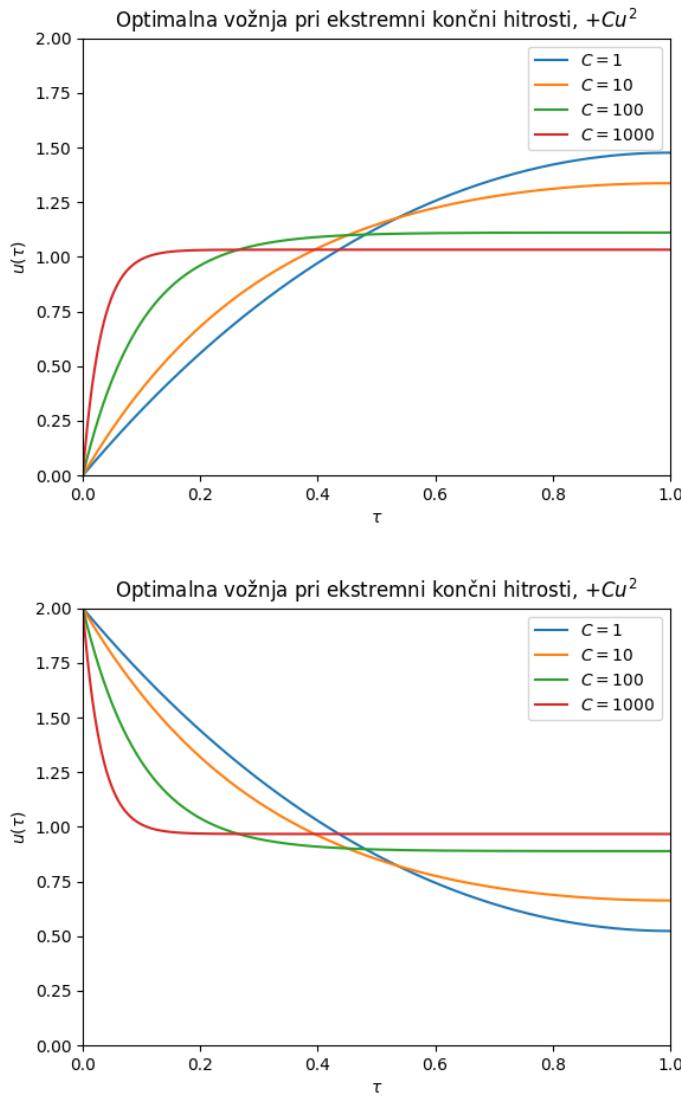
Nazadnje upoštevamo še $\int_0^1 u(\tau) d\tau = 1$ in dobimo

$$A = \sqrt{C} \frac{u_0 - 1}{\sqrt{C} + 1 + (\sqrt{C} - 1)e^{2\sqrt{C}}} \quad (21)$$

ter

$$B = \sqrt{C} \frac{u_0 - 1}{(\sqrt{C} + 1)e^{-2\sqrt{C}} + \sqrt{C} - 1}. \quad (22)$$

V enačbo (20) vstavimo enačbo (21) in že imamo izračunane vse konstante ter rešitev problema. V problemu sedaj nastopata dva prosta parametra. Poleg začetne hitrosti u_0 je rešitev odvisna tudi od parametra C , ki je recimo koeficient upora.



Slika 8: $u(\tau)$ za različne koeficiente C člena Cu^2 .

Na zgornjima prikazoma vidimo, da je pri večjih C bolje naglo pospešiti in se ustaliti pri končni hitrosti. Za $u_0 = 1$ je ponovno rešitev enakomerno gibanje.

5 Omejitev velikosti hitrosti

V Lagrangian dodamo še en člen, ki nam omeji visoke hitrosti

$$\mathcal{L} = \dot{v}^2 + Cv^2 - \lambda v.$$

Zopet to vstavimo v Euler-Lagrangevejo enačbo in dobimo

$$\ddot{v} - Cv + \frac{\lambda}{2} = 0.$$

Postavimo najprej prost robni pogoj za hitrost na koncu in z upoštevanjem vezi ter $v(0) = v_1$ dobimo

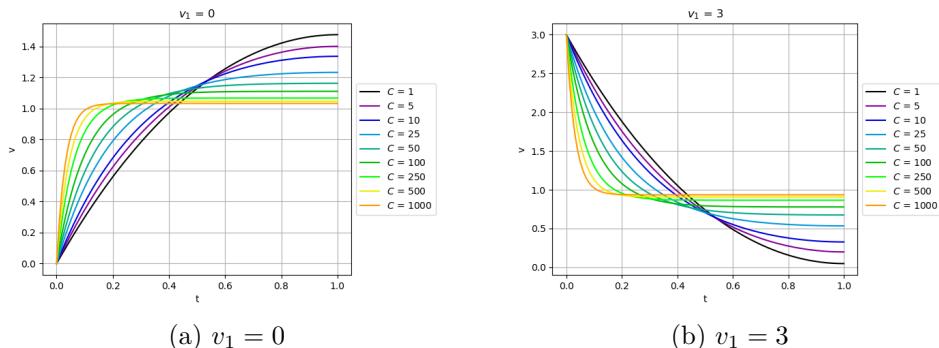
$$B = v_1 - \frac{\lambda}{2C} - A$$

$$A = \frac{2C^{\frac{3}{2}}e^{\sqrt{C}} - 2C(e^{\sqrt{C}} - 1)v_1 + \lambda(e^{\sqrt{C}} - 1) - \sqrt{C}e^{\sqrt{C}}\lambda}{2C(e^{\sqrt{C}} - 1)^2}$$

$$\lambda = \frac{2C(\sqrt{C}(e^{2\sqrt{C}} + 1) + v_1 - e^{2\sqrt{C}}v_1)}{1 + \sqrt{C} + e^{2\sqrt{C}}(\sqrt{C} - 1)}$$

$$v = \frac{\lambda}{2C} + Ae^{\sqrt{C}t} + Be^{-\sqrt{C}t}$$

Na grafu 4 lahko vidimo, da če uporabimo zelo velik koeficient C , potem je najboljše, da zelo hitro pospešimo in se nato držimo hitrosti, ki je najbližje konstantni hitrosti.

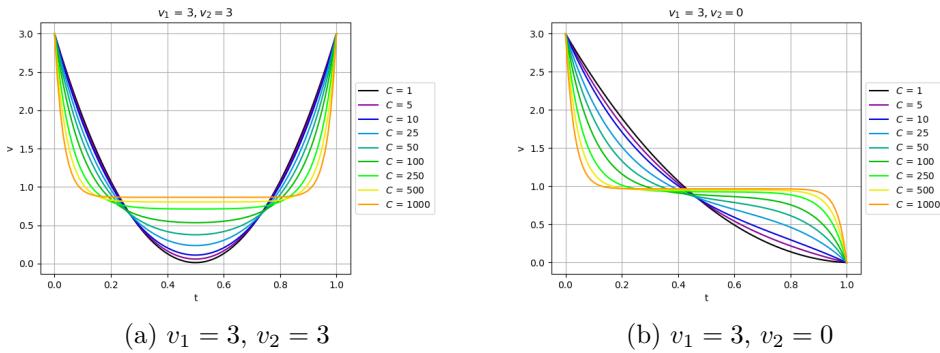


Slika 4: Na grafih sta prikazana optimalna poteki hitrosti za različne začetne hitrosti in različne parametre C z enim robnim pogojem.

Če sedaj predpostavimo še omejitev v križišču $v(t = 1) = v_2$ se spremeni samo definicija parametra λ in sicer

$$\lambda = \frac{2C(\sqrt{C}(e^{\sqrt{C}} + 1) - (e^{\sqrt{C}} - 1)(v_1 + v_2))}{2 + \sqrt{C} + e^{\sqrt{C}}(\sqrt{C} - 2)}$$

Na grafu 5 lahko vidimo, da ob takšni definiciji Lagrangiana in robnih pogojev na obe straneh vidimo, da ob večanju C moramo na ceno hitrejšega pospeševanja in zaviranja čim dlje voziti s hitrostjo čim bližje povprečni hitrosti $v = 1$.



Slika 5: Na grafih sta prikazana optimalna poteki hitrosti za različne začetne hitrosti in različne parametre C z obema robnima pogojem.

6 Zaporedni semaforji

Poglejmo, kako bi morali voziti, da bi prišli optimalno skozi več zaporednih semaforjev. Vsi semaforji imajo enako medsebojno razdaljo, na n -tem semaforju pa se prižge zelene luč ob času $t_n = t_0 n$. Najprej poizkusimo z uvedbo zveznosti hitrosti $v(0) = v(1) = v_1$. Uporabil sem isto družino rešitev, kot pri prvi nalogi

$$v(t) = -\frac{\lambda}{4}t^2 + At + B.$$

Z upoštevanjem robnih pogojev ter vezi dobimo

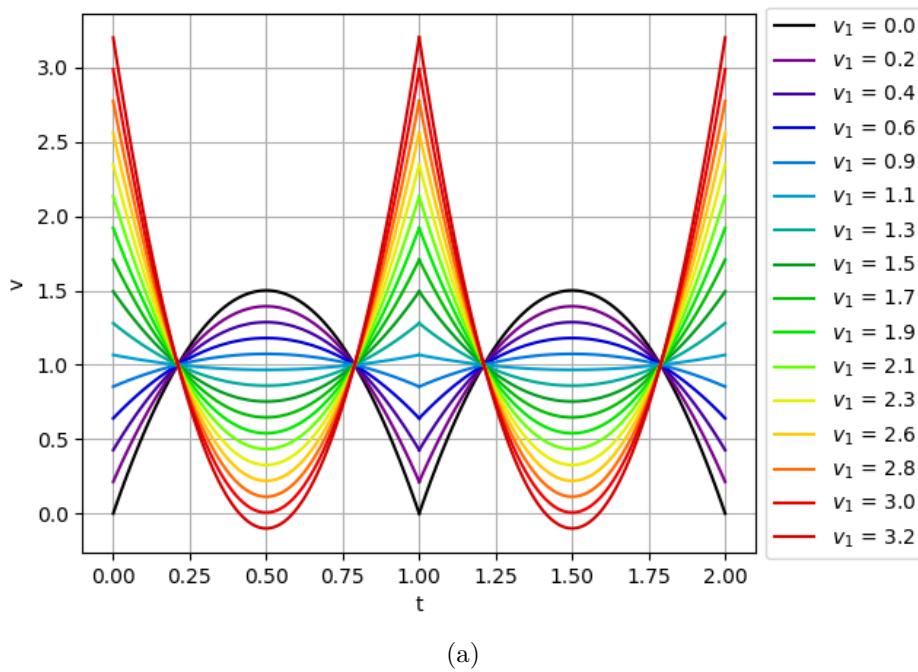
$$\lambda = 24(1 - v_1) \quad A = \frac{\lambda}{4} \quad B = v_1.$$

Rešitve so prikazane na grafu 6. Takšna vožnja izgleda vse prej kot udobna. Nezveznost hitrosti pomeni zelo močno pospeševanje in zaviranje. Prva rešitev, ki mi je padla na pamet je bila zahtevanje zveznosti pospeška $v'(0) =$

Naloga 5

Blaz Lepniček:

$v(1)$. Ampak to je možno samo, če je $\lambda = 0$. Če ob tem zahtevamo še zveznost hitrosti se moramo skozi semaforje voziti enakomerno s hitrostjo $v(t) = 1 = v_1$.



(a)

Slika 6: Na grafu je prikazan potek hitrosti za zaporedne semaforje.

Zgoraj sem se problema zaporednih semaforjev lotil tako, da sem vožnjo minimiziral na vsakem intervalu posebej in nato hitrosti skupaj zlepil. Sedaj bom poiškusil poiskati optimalno vožnjo za celoten interval na enkrat.

Tokrat bomo morali minimizirati funkcional

$$F(v) = \int_0^1 v_{(1)}^2 + \lambda_{(1)} v_{(1)} dt + \int_0^1 v_{(2)}^2 + \lambda_{(2)} v_{(2)} dt + \dots,$$

kjer je $v_{(n)}$ hitrost na n -tem intervalu (po $n - 1$ semaforju in pred n -tim semaforjem). Tem hitrostim bi lahko rekli tudi generalizirane koordinate. Spomnimo se, da ob prisotnosti več generaliziranih koordinat dobimo tudi več E-L enačb

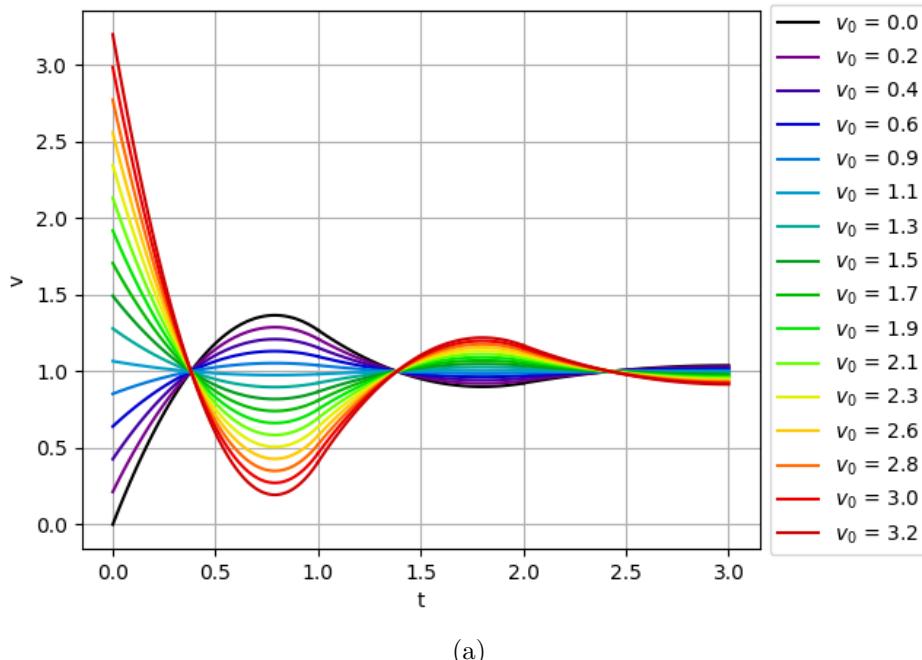
$$\ddot{v}_{(n)} = -\frac{\lambda_{(n)}}{2}.$$

Ker imamo sedaj več enačb, lahko na vsakem intervalu predpišemo robni pogoj za hitrost in za pospešek. Ker po zadnjem semaforju ni več semaforjev

ima zadnji interval 1 prost robni pogoj.

$$\begin{aligned}
 v_{(1)}(0) &= v_1 & v_{(1)}^{\dot{}}(1) &= v_{(2)}^{\dot{}}(0) \\
 v_{(2)}(0) &= v_{(1)}(1) & v_{(2)}^{\dot{}}(1) &= v_{(3)}^{\dot{}}(0) \\
 &\vdots & &\vdots \\
 v_{(N)}(0) &= v_{(N-1)}(1) & v_{(N)}^{\dot{}}(1) &= 0.
 \end{aligned}$$

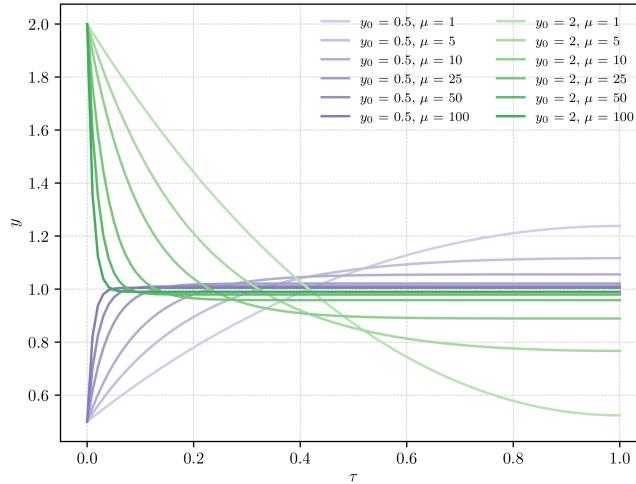
Na sliki 7 je prikazano, kako se mora spremenjati hitrost, če želimo skozi zaporedje treh semaforjev peljati "optimalno" glede na različno začetno hitrost. Vidimo, da je tendenca sistema, da se približamo enakomerni povprečni hitrosti $v = 1$. Obnašanje hitrosti izgleda podobno dušenemu nihanju.



Slika 7: Na grafu je prikazan potek hitrosti za 3 zaporedne semaforje za različne začetne hitrosti.

Dana končanost:

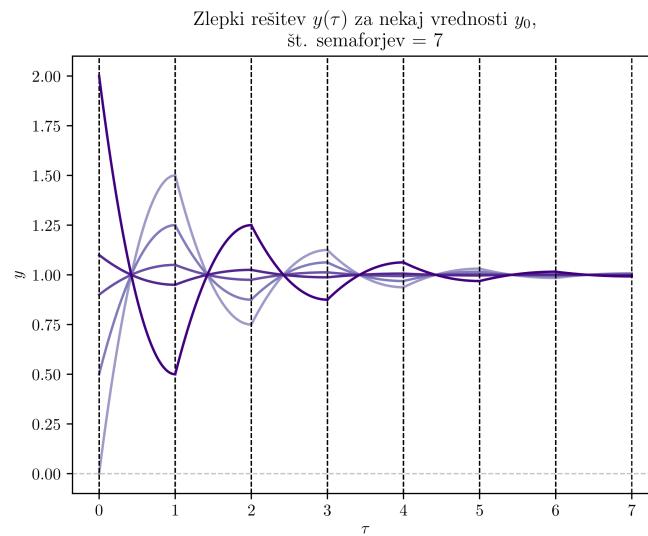
Rešitve $y(\tau)$ za nekaj vrednosti μ z ekstremom v $\tau = 1$,
model z minimizacijo hitrosti



Slika 4: Minimizacija hitrosti za nekaj parov μ in y_0 .

Zaporedni semaforji

Nazadnje se lahko vprašamo še, kako bi izgledala vožnja skozi zaporedne semaforje. Pri tem si bomo stvar nekoliko poenostavili in uporabili osnovni model ter predpostavili enake razdalje in časovne intervale med dvema zaporednima semaforjema. Ključno vlogo pri kombiniranju rešitev imajo robni pogoji, saj se morajo končni in začetni pogoji dveh sosednjih intervalov ujemati.

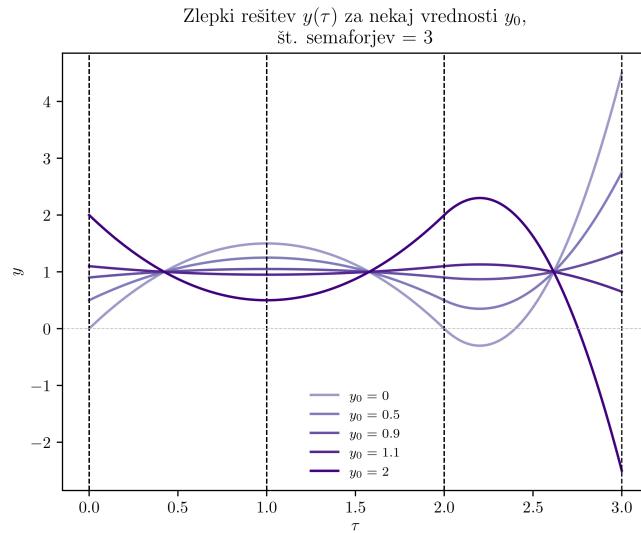


Slika 5: Zvezne rešitve $y(\tau)$ za zaporedje sedmih semaforjev.

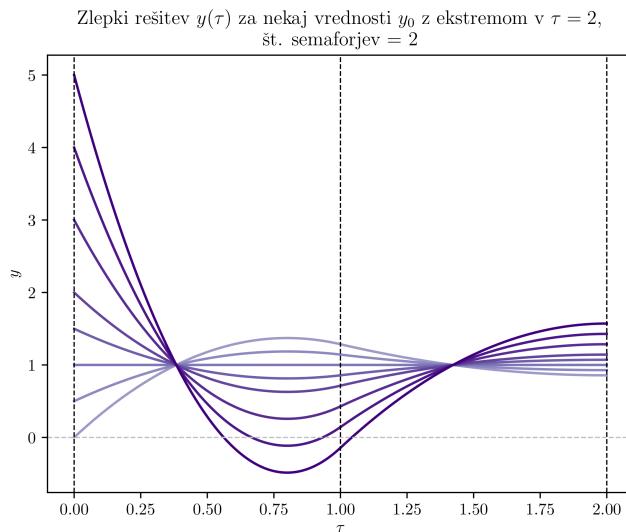
Za začetek lahko pogledamo naivno rešitev, kjer pri lepljenju upoštevamo le enakost $y_{i-1}(\tau_i) = y_i(\tau_i)$, ki zagotavlja zveznost hitrosti, ne pa tudi $\dot{y}_{i-1}(\tau_i) = \dot{y}_i(\tau_i)$, ki zagotavlja zveznost pospeška.

Rezultat je prikazan na sliki 5. Opazimo, da je rešitev stabilna, saj neodvisno od začetne vrednosti y_0 hitrost konvergira k povprečni hitrosti.

Rešitve zdaj zlepimo tako, da je hitrost $y(\tau)$ odvedljiva, $\dot{y}(\tau)$ pa zvezna funkcija. Rezultat je prikazan na sliki 6. Zdaj opazimo, da rešitve divergirajo. Za vsakim naslednjim semaforjem nastanejo večje oscilacije in hitrosti hitro postanejo negativne, kar pomeni fizikalno nesmiselne rešitve.



Slika 6: Zvezne in odvedljive rešitve $y(\tau)$ za zaporedje treh semaforjev.



Slika 7

Ker je zvezna rešitev, ki smo jo dobili precej nestabilna, razmislimo, kako bi problem reševali bolj globalno. Zanima nas ali lahko kako nadzorujemo vrednost hitrosti in pospeška v končni točki. Izberemo si začetni in končni pogoj, potem pa rešimo sistem enačb. Naš sistem so torej

enačbe (6).

$$\begin{aligned} y_0(\tau = 0) &= y_0 & y_0(\tau = 1) &= y_1(\tau = 1) & \int_0^1 y_0(\tau) d\tau &= 1 \\ \dot{y}_1(\tau = 2) &= 0 & \dot{y}_0(\tau = 1) &= \dot{y}_1(\tau = 1) & \int_1^2 y_1(\tau) d\tau &= 1 \end{aligned} \quad (6)$$

Dobili smo torej rešljiv sistem šestih enačb s šestimi neznankami $A_0, B_0, \Lambda_0, A_1, B_1$ in Λ_1 , ki so parametri funkcij hitrosti $y_0(\tau)$ in $y_1(\tau)$. Nekaj rešitev za različne vrednosti začetnih hitrosti je narisanih na sliki [7]. Za posplošitev rešitve na poljubno število semaforjev pa mi je žal zmanjkalo časa.

Zaključek

Naša naloga je bila preučiti različne modele za optimalno vožnjo skozi semfor. Najprej smo minimizirali kvadrat pospeška, potem pa še pospešek na poljubno sodno potenco. Temu smo dodali še minimizacijo hitrosti, študijo pa zaključili z vožnjo skozi zaporedne semaforje.

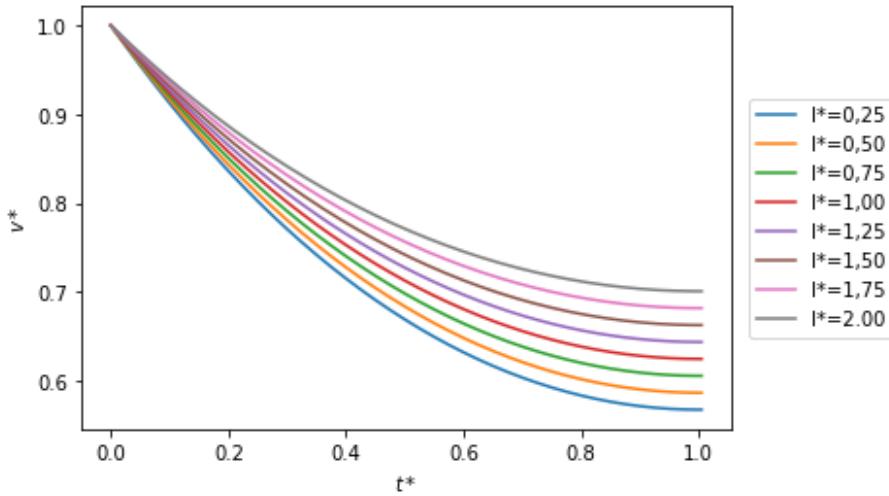
Poleg stvari, ki sem jih preučila, bi lahko pogledala tudi, kakšna je optimalna vožnja skozi zaporedne semaforje z različnimi časovnimi intervali vklapljanja zelene luči ali različnimi razdaljami od enega do drugega semaforja. Uporabljene modele bi lahko tudi poljubno združevala med seboj in z robnimi pogoji, a mi je za to nekoliko zmanjkalo časa. Sicer se mi je naloga zdela zanimiva, o obravnavanem problemu pa sem se naučila nekaj novega. Koristno je bilo tudi to, da smo pri tej nalogi obnovili znanje o Lagrangeovih multiplikatorjih in Euler-Lagrangeovih enačbah.

Aleks Skah:

njene rešitve pa iščemo z nastavkom

$$v^* = \frac{\lambda}{2} + A \exp(t^*) + B \exp(-t^*). \quad (21)$$

Iz pogoja $v^*(t^* = 0) = 1$, dobimo $\lambda/2 + A + B = 1$. Iz pogoja $v^*(t^* = 1) = 0$ dobimo $A = B \exp(2)$, iz vezi pa $\lambda/2 + A(e - 1) - B(e - 1) = l^*$. Ko vse to vstavimo v enačbo za hitrost, lahko izračunamo potek hitrosti v odvisnosti od parametra l^* . Rezultati so prikazani na sliki [4]. V tem primeru bi si nalogo lahko še bolj otežili in v Lagrangevo funkcijo pred kvadratični člen hitrosti dodali še konstanto ter opazovali potek hitrosti v odvisnosti od te konstante.



Slika 4: Spreminjanje brezdimenzijske hitrosti v odvisnosti od brezdimenzijskega časa za različne vrednosti l^* ob upoštevanju kvadratičnega člena hitrosti v funkcionalu.

6 Več zaporednih semaforjev

Oglejmo si še primer, ko avto pelje po cesti, na kateri je več zaporednih semaforjev. Zaradi enostavnosti predpostavimo, da je razdalja med njimi l , vsak semafor pa se priže t_0 časa za prejšnjim. Izberemo periodičen robni pogoj $v^*(t^* = 0) = v^*(t^* = 1) = 1$. Zveznost pospeška lahko dosežemo tako, da predpostavimo $\dot{v}^*(t^* = 0) = \dot{v}^*(t^* = 1) = 0$. V prejšnji nalogi so bile rešitve eksponentne funkcije, zato poglejmo kako lahko iz tega dobimo periodične funkcije. Če bi v enačbi (20) pred v^* bil plus, bi bile rešitve sinus in kosinusi. Taki Euler-Lagrangevi enačbi ustreza Lagrangeva funkcija

$$\mathcal{L} = \dot{v}^{*2} - v^{*2} - \lambda^* v^*. \quad (22)$$

Taka Lagrangevo funkcijo ustreza temu, da želimo čim prej priti na cilj in torej želimo čim večje hitrosti, veliki pospeški pa nas motijo. Sedaj zapišimo Euler-Lagrangevo funkcijo

$$\ddot{v}^* + v^* + \lambda/2 = 0. \quad (23)$$

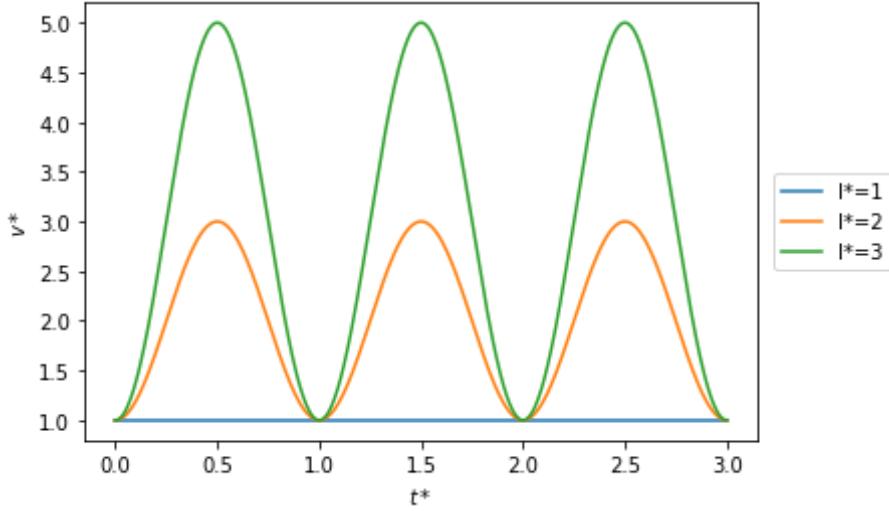
Vemo, da so rešitve te enačb oblike

$$v^* = A \sin(2\pi t^*) + B \cos(2\pi t^*) - \lambda/2. \quad (24)$$

Pogoj $v^*(t^* = 0) = v^*(t^* = 1) = 1$ nam da enačbo $B = 1 + \lambda/2$, pogoj $\dot{v}^*(t^* = 0) = \dot{v}^*(t^* = 1) = 0$ pa $A = 0$. Iz vezi dobimo še $B = 1 - l^*$. Pri teh pogojih je enačba za hitrost

$$v^* = (1 - l^*) \cos(2\pi t^*) + l^*. \quad (25)$$

Rešitve te enačbe za različne l^* so prikazane na sliki (5). Rešitve so periodične funkcije z zveznimi pospeški, kar smo tudi želeli. Večji kot je $l^* = l/(v_0 t_0)$, torej večja kot razdalja med semaforji v primerjavi z začetno hitrostjo in časom, v katerem se bo prižgala zelena luč, večjo hitrost doseže avtomobil med semaforji.



Slika 5: Spreminjanje brezdimenzijske hitrosti v odvisnosti od brezdimenzijskega časa za različne vrednosti l^* ob upoštevanju periodičnih robnih pogojev. Avto prevozi semaforje ob $t^* = [1, 2, 3]$.

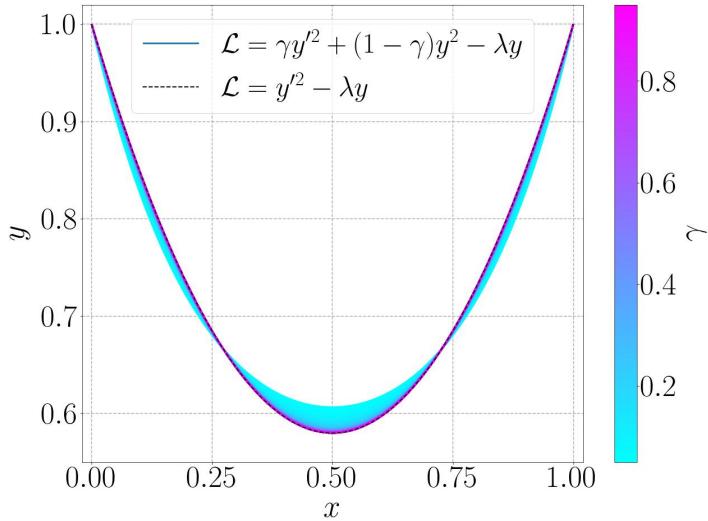
Lahko bi še poskusil najti bolj splošne rešitve, za katere velja $v^*(t^* = 0) \neq v^*(t^* = 1)$.

Dodatako:

katere rešitev se glasi

$$y = \alpha e^{kx} + \beta e^{-kx} + \mu, \quad k^2 = \frac{1-\gamma}{\gamma}. \quad (14)$$

Če uporabimo robne pogoje $y(0) = y(1) = 1$, dobimo odvisnost y za različne γ prikazano na sliki 3. Na grafu je s črtkano črno črto označena rešitev osnovnega problema z $\mathcal{L} = y'^2 - \lambda y$ in se lepo vidi kako tudi v primeru z jedrom (12) konvergira rešitev k isti funkciji, ko gre γ proti 1.



Slika 3: y pri robnih pogojih $y(0) = y(1) = 1$ za različne γ

6 Zaporedni semaforji

Zdaj ko smo vsaj za silo predelali problem z enim semaforjem, se lahko vprašamo kakšna je najoptimalnejša vožnja v primeru večih zaporednih, ki se nahajajo na razdaljah l_i med seboj in trajanji rdečih luči t_0^i , ta pa naj se na vsakem semaforju prižge ob prihodu avta do prejšnjega.

Za začetek se lotimo problema tako, da minimiziramo kvadrat pospeška v vsakem odseku posebej, in rešitve zlepimo tako, da se ujemata hitrost in pospešek na meji.

Brezdimenzijske spremenljivke v tem primeru definiramo kot $y = v/v_{00}$, $x = t/t_{00}$ in $z_i = l_i/(v_0^0 t_0^0)$.

Če torej vse zgoraj opisano povemo drugače; na i -tem intervalu je rešitev oblike $y_i = \lambda_i x_i^2 + \alpha_i x_i + \beta_i$ za $x_i \in [0, t_0^i/t_0^0]$, saj je jedro še vedno oblike $\mathcal{L} = y'^2 - \lambda y$. Za začetne pogoje pa uporabimo

$$y_i(0) = y_{i-1}(t_0^{i-1}/t_0^0) \quad \text{in} \quad y'_i(0) = y'_{i-1}(t_0^{i-1}/t_0^0), \quad (15)$$

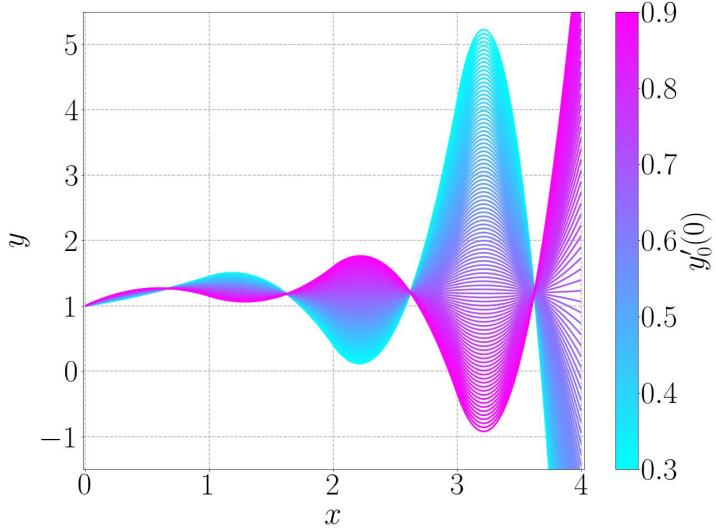
s katerimi skupaj z vezjo

$$\int_0^{t_0^i/t_0^0} y_i dx = z_i \quad (16)$$

določimo neznane koeficiente parbole za i -to območje. Za začetno vrednost v prvem intervalu vzamemo $y_0(0) = 1$, med tem ko je $y'_0(0)$ naš prosti parameter. Na sliki 4 je prikazana odvisnost

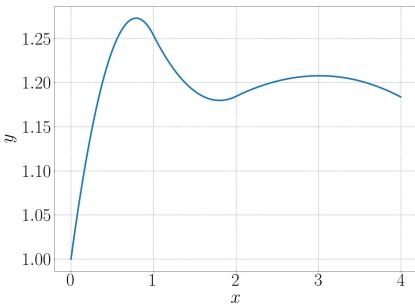
rešitve od tega. Vidmo da je ta zelo občutljiva na začetno vrednost $y'_0(0)$. Glede na pogoje je y'^2 že minimiziran v vsakemu odseku posebej, ne pa tudi globalno. Lahko bi poskusil formulirati problem tako, da bi iskal minimum na celotni abscisi, ampak ker je končna funkcije zlepek večih, postane zadeva komplikirana. Zato sem raje minimiziral

$$\sum_i \int_0^{t_0^i/t_0^0} y_i'^2 dx \quad (17)$$

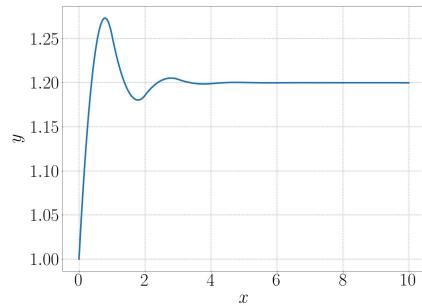


Slika 4: Rešitev 4 zaporednih semaforjev, z enakimi parametri $t_0 = 20\text{ s}$ in $l = 200\text{ m}$, $v_0 = 30\text{ km/h}$, v odvisnosti od $y'_0(0)$

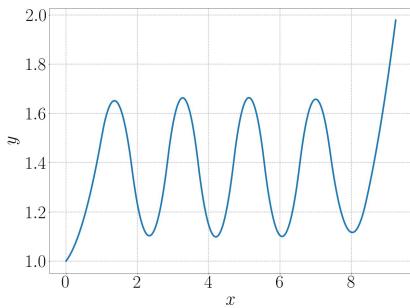
glede na $y'_0(0)$. Ker je y parabola in zato relativno lepa funkcija, bi se zgornjega problema lahko lotil analitično, ampak ker ima odvisnost vsaj na prvi pogled (slika 4), en sam lokalen minimum (in je preprostejše), sem to izvedel numerično. Optimalna rešitev je v tem primeru pri $y'(0) \approx 0.692$ (slika 5), je pa zanimivo kako za podoben primer vendar z desetimi semaforji, hitrost skonvergira k $y = z$ (slika 6). Iste pa v splošnem seveda ne opazimo, če se parametri t_0^i in l_i spreminjajo iz intervala v interval. Zanimive so tudi rešitve ko imamo semaforje z alternirajočimi parametri (slike 7-10), kjer dobimo na prvi pogled harmonično rešitev. Pri periodi $n = 3$, mi izgleda, kot da je prisotno harmonsko popačenje, kar se zdi smiselno saj se pogoji ponovijo z različnimi periodami. To sem hotel še preveriti s FFT-jem, ampak so se pojavile težave s konvergenco optimizacijskega algoritma, ko sem hotel več period za lepsi spekter, ampak mi je za to že zmanjkovalo časa, tako da mi je uspelo sproducirati samo približen spekter, iz katerega je razvideo popačenje (slika 11).



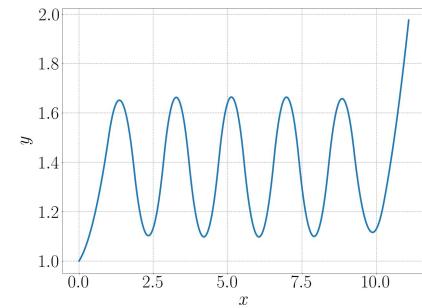
Slika 5: Optimalna rešitev 4 zaporednih semaforjev, z enakimi parametri $t_0 = 20$ s in $l = 200$ m, $v_0 = 30$ km/h



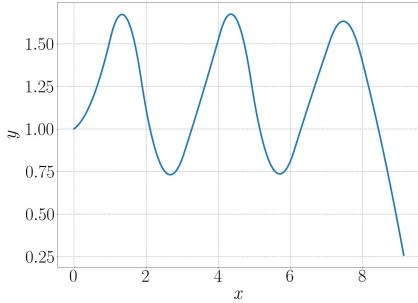
Slika 6: Optimalna rešitev 10 zaporednih semaforjev, z enakimi parametri $t_0 = 20$ s in $l = 200$ m, $v_0 = 30$ km/h



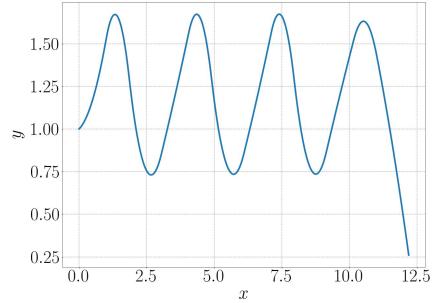
Slika 7: Optimalna rešitev 6 zaporednih semaforjev, z alternirajočimi parametri (perioda = 2)



Slika 8: Optimalna rešitev 12 zaporednih semaforjev, z alternirajočimi parametri (perioda = 2)



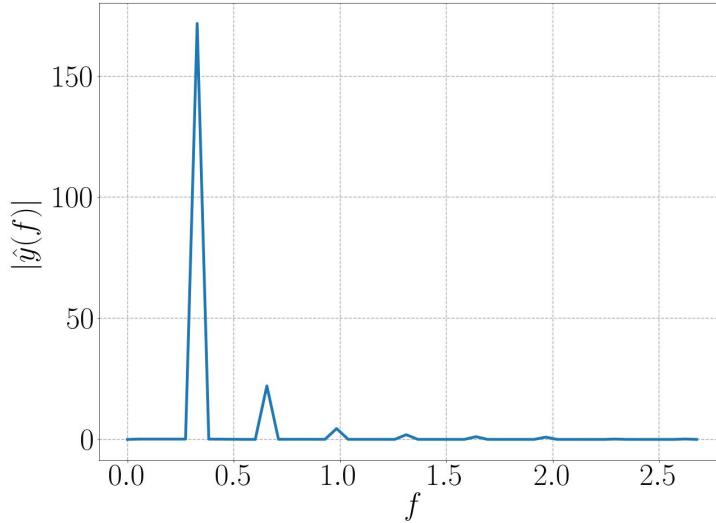
Slika 9: Optimalna rešitev 6 zaporednih semaforjev, z alternirajočimi parametri (perioda = 3)



Slika 10: Optimalna rešitev 12 zaporednih semaforjev, z alternirajočimi parametri (perioda = 3)

7 Kvadratni zakon upora

Če si želimo problem še malo otežiti in obravnavati realnejši model, lahko upoštevamo kvadratni zakon upora in nato minimiziramo kvadrat moči avta. Naša dinamična enačba je v tem primeru



Slika 11: Spekter rešitve 24 zaporednih semaforjev z alternirajočimi parametri in periodo 3

$$m\dot{v} = P/v - Av^2, \quad A = \frac{\rho C_u}{2S} \approx 1 \text{ kg m}^{-1}, \quad (18)$$

ki se v brezdimenzijski obliki glasi

$$\mathcal{P} = \delta yy' + y^3, \quad \mathcal{P} = \frac{P}{Av_0^3}, \quad \delta = \frac{m}{t_0 Av_0} \quad (19)$$

naše jedro pa je

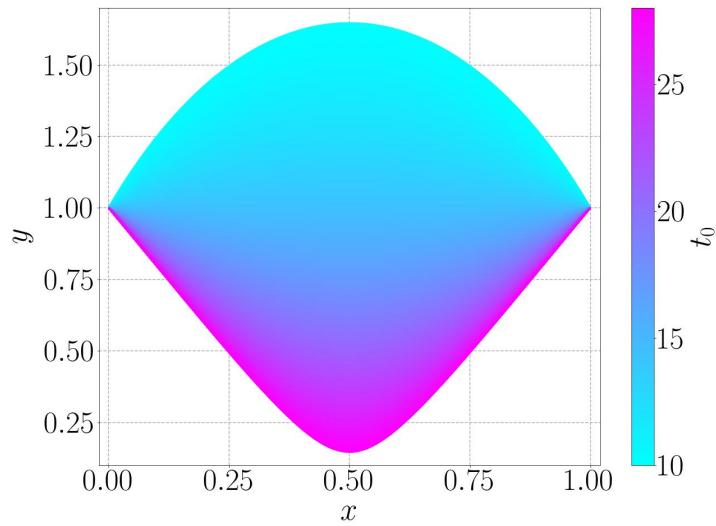
$$\mathcal{L} = \delta^2 y^2 y'^2 + \delta y' y^4 + y^6 - \lambda y, \quad (20)$$

iz katerega nato dobimo diferencialno enačbo

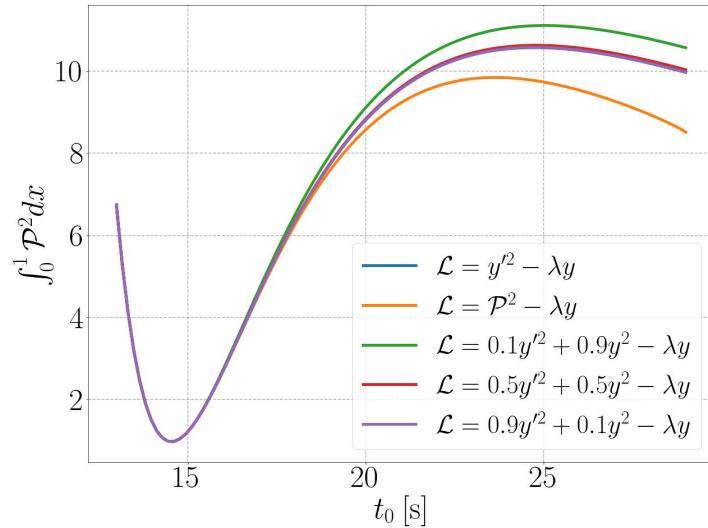
$$y'' = \tilde{\lambda} \frac{1}{y} - y'^2 - \frac{3}{\delta^2} y^4. \quad (21)$$

Za pogoje sem si tako kot pri prejšnjih poglavjih izbral $y(0) = y(1) = 1$, torej imamo opravka z nelinearnim robnim problemom. Tega sem se najprej zelo ambiciozno lotil s strelske metodo, v drugi stopnji pa bi spremenjal $\tilde{\lambda}$ dokler se ne bi ujemala tudi prevožena pot, vendar zaradi numerične nestabilnosti tega nisem uspel. Nato sem naredil kar bi moral že na začetku in uporabil Python funkcijo `scipy.integrate.solve_bvp`, ki poleg rešitve samega robnega problema, poišče tudi prosti parameter, kar je bilo kot ulito. Na sliki 12 je prikazana odvisnost y za različne parameterje t_0 .

Za konec se mi je zdelo zanimivo pogledati še, koliko se po kvadratu moči razlikujejo posamezni modeli med seboj. Primerjal sem osnovnega kjer upoštevamo samo kvadrat pospeška, kombinacijo kvadrata hitrosti in pospeška za tri različne vrednosti γ in modelom iz tega poglavja. Odvisnost od parametra t_0 za te primere je prikazana na sliki 13. Seveda je najoptimalnejši v tem pogledu model ki minimizira moč, medtem ko so za srednje vrednosti γ ostali modeli dokaj podobni. Če pa se osredotočimo na področje levo od minimuma, pa praktično ne opazimo več razlike med modeli. To je meja ko preidemo nad $z = 1$, torej da je naša začetna hitrost premajhna in moramo pospešiti, da ujamemo zeleno luč.



Slika 12: Odvisnost y za različne parametre t_0 ob upoštevanju kvadratnega zakona upora



Slika 13: Odvisnost povprečnega kvadrata moči za različne parametre t_0 in modele

8 Zaključek

Na koncu sem želel narediti še model, kjer bi se prižgala zelena luč, ki bi gorela t_0 časa, potem bi se prižgala rdeča, in nato po določenem intervalu še enkrat zelena. Tako imamo opciji da hitimo in ujamemo prvo zeleno luč, oziroma gremo počasneje in pridemo na čas druge. Vendar mi je tudi za to zmanjkalo časa. Vmes sem še poskušal z dodatnimi vezmi omejiti hitrost nad neko minimalno, ampak se mi ni izšlo.

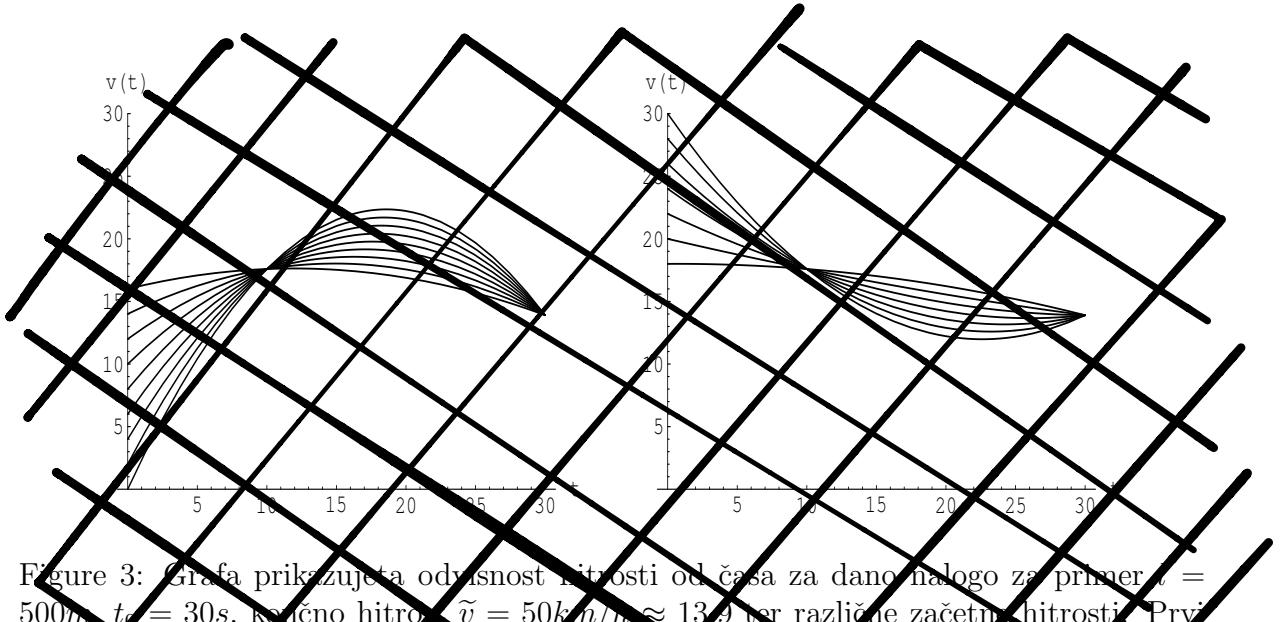


Figure 3: Grafa prikazujejoča odvisnost hitrosti od časa za dano nalogo za primer $a = 500m$, $t_c = 30s$, končno hitro $\tilde{v} = 50km/h \approx 13.9$ ter različne začetne hitrosti. Prvi graf prikazuje hitrostni profili za $v_0 = 0\dots 16m/s$, drugi pa za $v_0 = 17\dots 30m/s$. Iz slik vidimo, da je končna hitrost pri $t = t_0$ vedno fiksna.

3 Druga Naloga

Sedaj ko vemo, kakšna je najbolj optimalna vožnja se vprašajmo, kako bi upoštevali ciklično delovanje semaforja. Vemo, da će smo dovolj oddaljeni se bo bolj splačalo, da počakamo na drugo, morda tretjo zeleno luč in ne divjati za prvo. Kako to upoštevati?

Zaradi enostavnosti predpostavimo, da ima semafor le rdečo in zeleno luč. Rdeča luč naj na semaforju gori t_1 , zelena pa t_2 . Cikel na semaforju traja tako $\tau = t_1 + t_2$. Vedenje našega soferja se še ni spremenilo, kar pomeni, da ne bo šel čez križišče kadarkoli, pač pa le tedaj, ko semafor preklopi iz rdeče v zeleno luč. Recimo, da voznik v daljavi l zagleda rdeč semafor s cikлом τ in ve, da ima do prve zelene še t_0 časa. Glej sliko 4. Na kateri zeleni semafor za povrstjo se mu splača počakati, da bo vožnja čim bolj optimalna.

Čas čakanja na preklop zelene luči lahko v našem primeru zapišemo kot

$$t_c = t_0 + n\tau; \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (23)$$

Križišče bomo prepeljali po času t_c . Ker hočemo, da je vožnja še vedno optimalna lahko uporabimo rezultat iz prve naloge in za t_c zapišemo

$$v(t) = \frac{3}{2t_c^3}(l - v_0 t_c)(2t_c t - t^2) \quad (24)$$

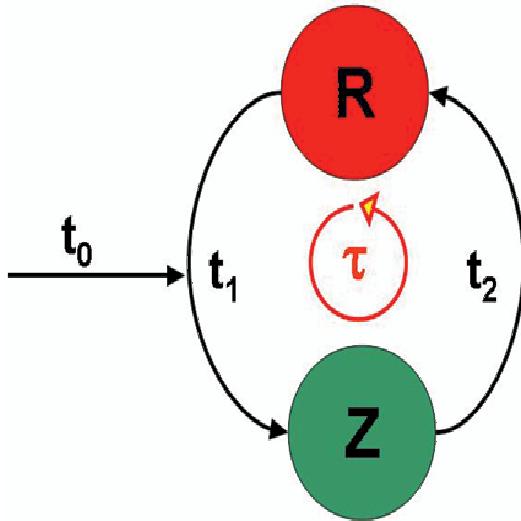


Figure 4: Na sliki je označen cikel semaforja, ki ga obravnavamo. Zelena luč traja t_2 časa, rdeča luč pa t_1 . Celoten cikel semaforja je tako dolg $\tau = t_1 + t_2$. Z ravno puščico je označen trenutek, ko zagleda šofer semafor in ugotovi, da ima še t_0 časa do prve zelene.

Hitrost $v(t)$ je odvisna od l, v_0, t_c . Fiksirajmo l in v_0 . Vemo, da će bo t_c zelo dolg, potem bomo verjetno morali zavirati, če pa je t_c kratek, pa bomo verjetno pospeševali. Nas pa sedaj zanima, kakšen naj bo t_c , da bo vožnja najbolj udobna. To ugotovimo tako, da pogledamo, pri katerem t_c bo funkcional

$$F(t_c; v_0, l) = \int_0^{t_c} \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 dt = \min. \quad (25)$$

Naj opomnim, da je pri izbranih, fiksnih parametrih t_c, v_0, l za dano gibanje F vedno minimalen, saj smo izbrali tako gibanje. Ampak funkcional je odvisen od svojih parametrov in se z njimi spreminja. Mi si ta funkcional oglejmo sedaj kot funkcijo časa $F(t_c)$ in poglejmo kje ima minimum. Iščemo:

$$\left(\frac{dF}{dt_c} \right)_{v_0, l} = 0 \quad (26)$$

Najprej izračunajmo funkcional 25 tako, da vanj vstavimo izraz 24. Dobimo

$$\int_0^{t_c} \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 dt = \int_0^{t_c} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{3}{2t_c^3} (l - v_0 t_c) (2t_c t - t^2) \right) \right]^2 dt = \frac{9}{t_c^3} (l - v_c t_c)^2. \quad (27)$$

Da bi dobili ekstrem, zgornji izraz sedaj odvajamo, izenačimo z nič in dobimo

$$\frac{dF}{dt_c} = -\frac{(l - v_c t_c)^2}{t_c^4} \left(27 + 18 \frac{v_c t_c}{(l - v_c t_c)} \right) = 0. \quad (28)$$

Od tod ven dobimo dva pogoja za lokalni ekstrem.

$$1. t_c = \frac{l}{v_0} \quad (29)$$

$$2. t_c = 3 \frac{l}{v_c} \quad (30)$$

Če si dobljeno funkcijo (odvod) narišemo (glej sliko 5), vidimo, da je v prvi točki minimum, kar seveda že vemo iz prvega dela naloge, v drugi točki pa je lokalni maksimum.

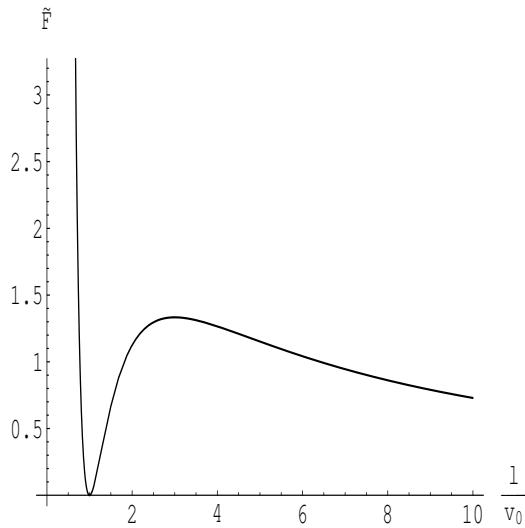


Figure 5: To je slika brezdimenzijskega funkcionala \tilde{F} v odvisnosti od časa t_c . Na sliki je dobro viden miminum pri $\frac{l}{v_0} = 1$ in maksimum pri $\frac{l}{v_0} = 3$

Sedaj ko vemo, pri katerem času t_c bo vožnja najbolj prijetna in pri katerem najmanj, lahko izračunamo na kateri semafor se nam splača čakati in na katerega ne. To storimo tako, da dobljeni zvezi vstavimo v izraz 23. Dobimo

$$n_{min} = \left[\frac{l}{v_0 \tau} - \frac{t_0}{\tau} \right]_{CeliDel} \quad (31)$$

$$n_{max} = \left[\frac{3l}{v_0 \tau} - \frac{t_0}{\tau} \right]_{CeliDel} \quad (32)$$

$$(33)$$

Dobljena izraza za n nam povesta, na kateri semafor se nam najbolj splača počakati, in na katerega najmanj. Naredimo primer. Vzemimo, da je začetna hitrost $v_0 = 36km/h =$

Naknadne dave:

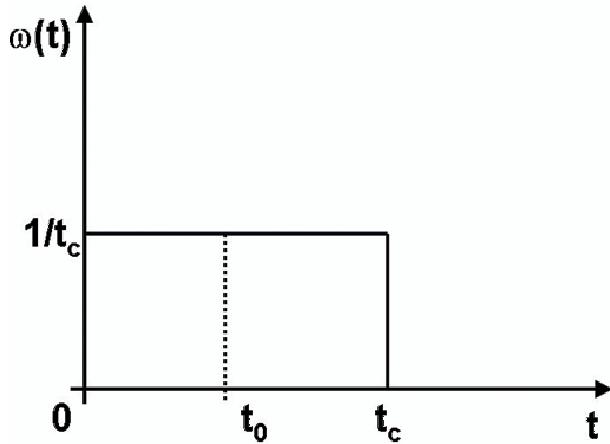


Figure 14: Čakalni časi t_0 ubogajo enakomerno porazdelitev.

Sedaj se vprašajmo, kakšna je porazdelitev po končnih hitrostih če predpostavimo, da voznik uspe zadeti tisti pravi trenutek in prepelje semafor ravno, ko se prižge zelena luč. Zanima nas torej $\frac{dw}{dv_k}$. To izračunamo kot

$$\frac{dP}{dv_k} = \frac{dP}{dt_0} \left| \frac{dt_0}{dv_k} \right| \quad (101)$$

Ker si mi še vedno želimo, da je voznikova vožnja optimalna, se pravi, da je najbolj prijetna in da ima na koncu največjo hitrost, lahko za izračun uporabimo kar rezultrat iz prve naloge:

$$v_k = v(t_0) = \frac{3}{2t_0^3} (l - v_0 t_0) (2t_0^2 - t_0^2) + v_0 = \frac{3}{2} \left(\frac{l}{t_0} - v_0 \right) + v_0 \quad (102)$$

To je izraz za končno hitrost v odvisnosti od čakalnega časa t_0 . Če ven izrazimo čakalni čas, dobimo

$$t_0 = \frac{3l}{2v + v_0} \quad (103)$$

Izraz sedaj odvajajmo in vstavimo v izraz za verjetnostno porazdelitev po hitrosti:

$$\frac{dP}{dt} = w(t_0) \left| \frac{dt_0}{dv_k} \right| = \frac{A}{t_c} \Theta(t_0) \Theta(t_c - t_0) \frac{6l}{(2v_k - v_0)^2} \quad (104)$$

Sedaj nadomestimo še čase v Heavisidovih step funkcijah s hitrostmi. Zato nam prideta

prav izraza

$$v_k = \frac{3}{2} \left(\frac{l}{t_0} - v_0 \right) + v_0 \quad (105)$$

$$v_{min} = \frac{3}{2} \left(\frac{l}{t_c} - v_0 \right) + v_0, \quad (106)$$

kjer sem z v_{min} označil minimalno hitrost, ki je še dopustna. Ker ne želimo zavirati, so vse hitrosti vedno pozitivne oz. enake nič. Zato lahko prvo Heavisidovo funkcijo kar spustimo. Določiti je treba še normalizacijsko konstanto A kot

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dP}{dv_k} dv_k, \quad (107)$$

a ko izracunamo integral vidimo, da pride $A = 1$, kar pomeni, da je naša porazdelitvena funkcija že normirana. Tako dobimo končen izraz za porazdelitev po končnih hitrostih

$$w(v_k) = \frac{1}{t_c} \Theta(v_k - (\frac{3}{2} \frac{l}{t_c} - \frac{1}{2} v_0)) \frac{6l}{(2v_k + v_0)^2} = \frac{1}{t_c} \Theta(t_c - \frac{3l}{2v_k + v_0}) \frac{6l}{(2v_k + v_0)^2} \quad (108)$$

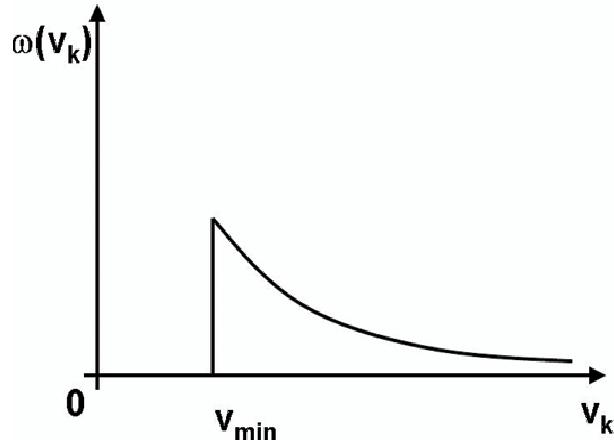


Figure 15: To je porazdelitev po končnih hitrostih v_k v primeru najbolj ugodne vožnje, če cakalni časi t_0 ubogajo enakomerno porazdelitev.

7.1 Kaj pa če dolžina semaforja ni znana?

Sedaj si nalogo še malo otežkočimo. V prejšnjem problemu nismo vedeli koliko časa bomo še čakali zeleno, vendar pa smo poznali dolžino cikla. Kaj pa če dolžine cikla t_c