

Modelska analiza I

Naloga 104

3. 11. 2022



4. naloga – Populacijski modeli

1. **Model epidemije:** populacijo razdelimo v tri razrede: (D) zdravi in dovzetni, (B) bolni in klicenosni, (I) imuni: nedovzetni in neklicenosni. Bolezen se širi s stiki med zdravimi in bolnimi. Bolnik preide s konstantno verjetnostjo med imune (ozdravi ali umre).

$$\begin{aligned}\dot{D} &= -\alpha DB \\ \dot{B} &= +\alpha DB - \beta B \\ \dot{I} &= \beta B\end{aligned}$$

V epidemiji nas zanima njen vrh (maksimalno trenutno število obolelih), čas nastopa maksimuma in celotno število obolelih. S cepljenjem lahko vnaprej preselimo določen del populacije med imune. Kako vpliva delež cepljenih na parametre epidemije?

Kako se spremeni potek epidemije, če obolele razdeliš na več stadijev okužbe? Poskusilahko s 3 stadiji: najprej so okuženi, a ne širijo epidemije (inkubacijska doba), potem so močno kužni, potem pa so v izolaciji in jim kužnost pade.

2. Preuči standardni standardni deterministični **model zajci-lisice** (model Lotka-Volterra) v obliki

$$\begin{aligned}\dot{Z} &= \alpha Z - \beta ZL, \\ \dot{L} &= -\gamma L + \delta ZL.\end{aligned}$$

- Nariši in preišči fazni diagram (brezdimenzijska oblika, zastojne točke, stabilnost . . .).
- Oglej si obhodne dobe v odvisnosti od začetnega stanja. Zadošča, da preiščeš stanja, v katerih ima ena komponenta ravnovesno vrednost.

3. Analiziraj fazni portret za **populacijski model laserja** s konstantnim črpanjem.

$$\begin{aligned}\dot{f} &= -\alpha f + B_1 af, \\ \dot{a} &= -\beta a - B_2 af + R\end{aligned}$$

Določi ravnovesno stanje v odvisnosti od moči črpanja. Kako se s tem parametrom spreminja frekvenca in karakteristični čas relaksacijskih oscilacij?

Sklopljen sistem linearnih enačb prvega reda $\dot{y}_i(x) = f_i(x, y_1, \dots, y_N)$ lahko rešujemo z integracijskimi metodami družine Runge-Kutta. V zbirki *GSL* integratorje najdemo v modulu `gsl_odeiv.h`, v Pythonu pa v modulu `scipy.integrate`, kjer ustvarite objekt razreda `ode` in mu tip integratorja nastavite z metodo `set_integrator`.

Nalogja 1:

- Lastnost vrha epidemije od α, β, I, O
- Mahotnultvo števlo obaleloh od I, O
- Stadiji epidemije
- Vpliv v "loch damma"
- Vnitrjnica prečpljivost
- Analitičen rezult.

UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
MODELSKA ANALIZA 1
NALOGA 4

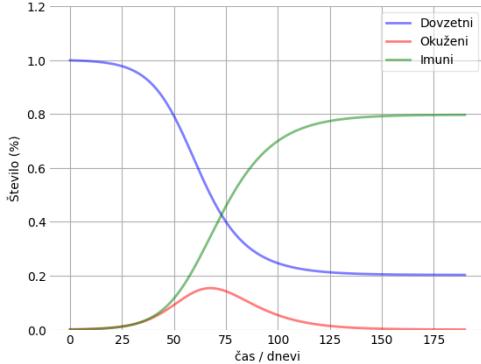
Jan Gobec VPŠ=28222067

Populacijski modeli

Model epidemije, zajci-lisice in laser

1. semester 2022/23

Ljubljana, 2022



Slika 1: Prikaz osnovnega modela epidemije, kjer imamo vso populacijo dovzetno za okužbo in 1 okuženega.

Uvod

Pri populacijskih modelih sem se v prvem delu ukvarjal z modelom epidemije. Na osnovnem primeru SIR (ang. susceptible, infected and recovered) sem preučil različne spremnелjivke in odvisnost od koeficientov a in b . Sistem linearnih diferencialnih enačb sem reševal z metodo odeint v pythonu.

Drugi del je bil populacijski model zajcev in lisic. Tukaj sem preučil fazne diagrame modela, pogledal stacionarne točke in si ogledal obhodne dobe v odvisnosti od začetnega stanja.

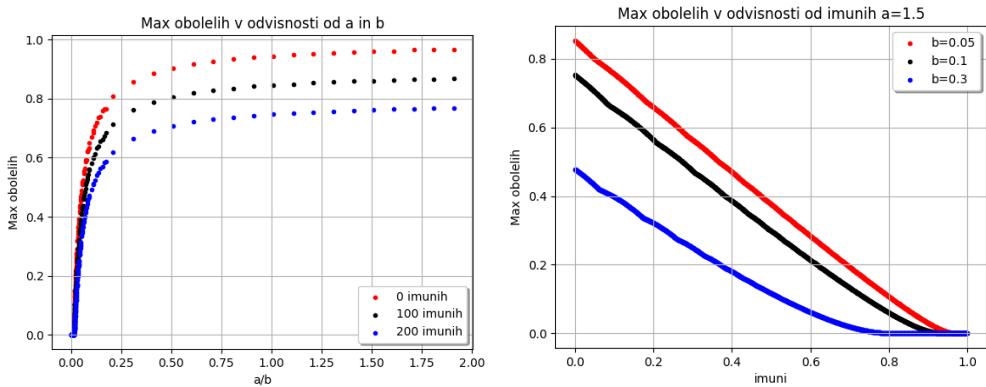
Kot zadnji populacijski model sem preučil delovanje populacije fotonov in atomov za laser, ki ima konstantno črpanje. Tukaj me je zanimalo spreminjanje frekvence in karakterističnega časa relaksacijskih oscilacij.

1 Orientacija modela epidemije iz predavanj

1.1 Enačbe in rezultati

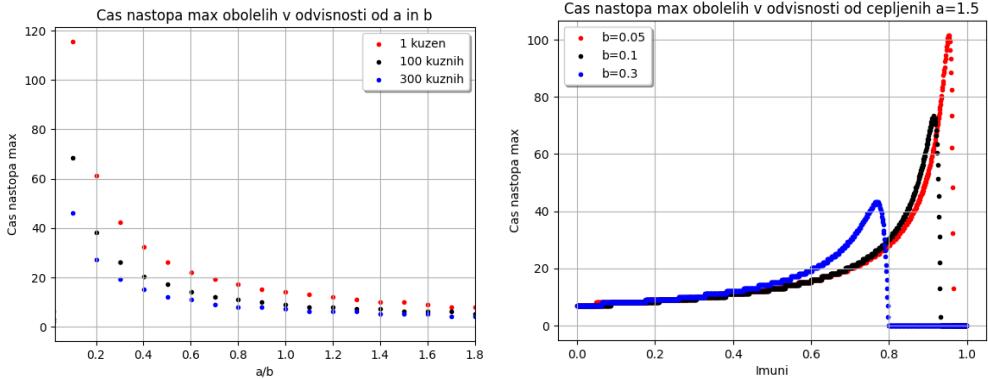
Dvonivojski model epidemije je osnoven populacijski model, ki ga zapišemo preko sistema diferencialnih enačb. Prehod v nov nivoj je sestavljen iz verjetnosti za prehod, hitrosti prehajanja in populacije, ki prehaja. Z D označim dovzetne za okužbo, z B bolne, ki prenašajo virus in z I imune.

$$\begin{aligned}\dot{D} &= -aDB \\ \dot{B} &= aDB - bB \\ \dot{I} &= bB\end{aligned}\tag{1}$$



Slika 2: Maksimalno število obolelih v odvisnosti od a z b in števila imunih.

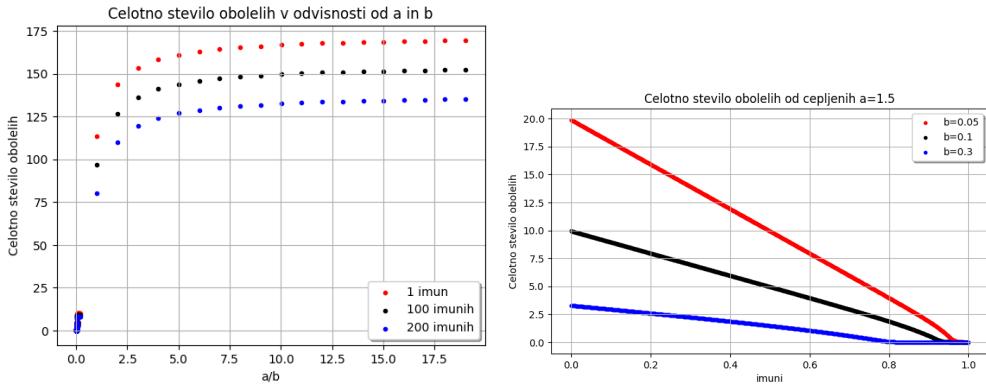
Slika 1 prikazuje spremenjanje števila dovezetnih za okužbo, imunih in bolnih. V populacijo, ki je celotna dovezetna za okužbo pride 1 okužen. V nadaljevanju sem si ogledal spremenjanje koeficientov prehajanja/hitrosti in števila okuženih ter imunih v primerih ko izoliram eno od spremenljivk, saj tako bolj nazorno pokažem vplive parametrov in začetnih pogojev, kot če bi spremenjal parametre na sliki 1. Zanimam me predvsem vrh epidemije z drugimi besedami maksimum obolelih ali celotno število obolelih v odvisnosti od koeficientov hitrosti in števila imunih (cepljenih). Pri nekaterih primerih sem gledal tudi odvisnot od začetnega števila okuženih.



Slika 3: Čas nastopa maksimuma obolelih v odvisnosti od a z b za različno število okuženih in števila imunih.

Na sliki 2 levo, cepljeni prestavijo del dovzetnih med imune. Na obeh slikah je začetna vrednost 1 okužen. Desna slika je podbna levi, le da je prezentirana na drug način. Tukaj spremjam število imunih za fiksen a in tri različne koeficiente b . Strmine premic so zmeraj bolj položne, bolj kot je manjše razmerje hitrosti prehodov.

Na sliki 3 faktor števila okuženih za nizke a z b povzroči, da je čas nastopa maksimuma hitrejši, saj več okuženih za isto vrednost parametrov prej razširi okužbo med populacijo. Za visoke a z b faktor začetnih okuženih vedno manj vpliva na čas nastopa maksimuma, saj je hitrost spremenjanja dovzetnih v okužene zmeraj hitrejša. Na desni sliki ponovno podobna prezentacija levi sliki, le da gledam na x osi spremjam število imunih oziroma cepljenih. Več kot je cepljenih, kasneje bomo dosegli vrh epidemije, torej je bomo lažje kontrolirali.

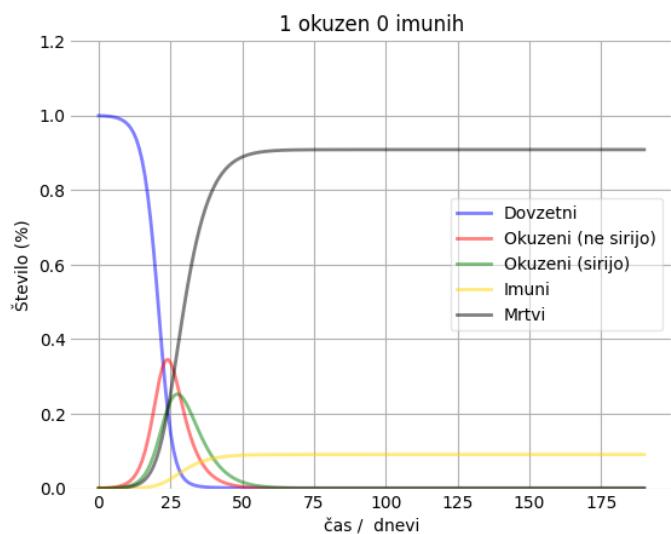


Slika 4: Celotno število obolelih v odvisnosti a z b in števila imunih.

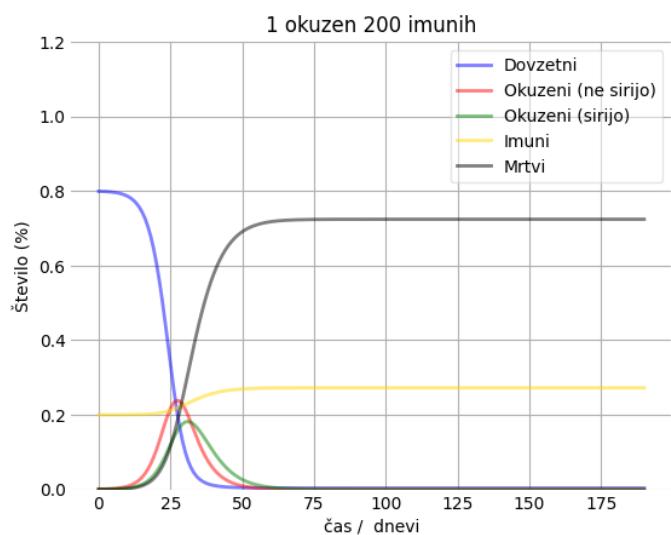
Na sliki 4 me zanima spreminjanje celotnega števila obolelih v epidemiji. Število imunih na levem grafu zmanjša celotno število obolelih, tako je epidemija bolj obvladljiva. To tudi pokaže desni graf. Strmine premic pa so zmeraj bolj položne, bolj kot je manjše razmerje hitrosti prehodov.

Epidemijo še nadgradim in vpeljem večnivojski sistem. Bolne razdelim na B1 in B2, B1 so okuženi a še ne prenašajo okužbe, B2 pa so okuženi, ki prenašajo okužbo. Skupino imunih iz osnovnega modela pa razdelim na mrtve in preživele oziroma nove imune. Nov model je sledeč.

$$\begin{aligned}
 \dot{D} &= -\alpha \cdot \frac{D}{N} \cdot B2 \\
 \dot{B1} &= \alpha \cdot \frac{D}{N} \cdot B2 - \beta \cdot B1 \\
 \dot{B2} &= \beta \cdot B1 - \gamma \cdot smrtnost \cdot B2 - \omega \cdot (1 - smrtnost) \cdot B2 \\
 \dot{I} &= \gamma \cdot smrtnost \cdot B2 \\
 \dot{M} &= \omega \cdot (1 - smrtnost) \cdot B2
 \end{aligned} \tag{2}$$



Slika 5: Več nivojev epidemije.



Slika 6: Več nivojev epidemije 2.

Modelska analiza 1

Populacijski modeli

4. naloga

Črtomir Perharič

Vpisna številka: 28222056

Asistent: doc. dr. Miha Mihovilovič

28. oktober 2022

1 Zastavitev problema

1.1 Model epidemije

Preučujemo časovni razvoj epidemije, kjer opazovano populacijo razdelimo v skupine dovzetni (D), bolni (B) in imuni (I). Obravnavamo preprost model, kjer se bolezen širi preko stika med balno in dovzetno osebo, hkrati pa se število imunih oseb lahko le povečuje. Tak model opišemo s sistemom sklopljenih diferencialnih enačb

$$\begin{aligned}\dot{D} &= -\alpha BD \\ \dot{B} &= \alpha BD - \beta B, \\ \dot{I} &= \beta B\end{aligned}\tag{1}$$

kjer sta $\alpha, \beta \in [0, 1]$ parametra, ki določata verjetnost, da dovzetni zbolji in, da bolni ozdravi. To lahko prepisemo v brezdimenzijsko obliko, če definiramo nove spremenljivke

$$D = \mathcal{D}N_0 \quad B = \mathcal{B}N_0 = \quad I = \mathcal{I}N_0 \quad t = \tau t_0,$$

kjer je N_0 celotna populacija, ki se s časom ne spreminja in t_0 ne karakteristični čas. Sistem enačb (1.1) lahko sedaj zapišemo kot

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{D}} &= -\alpha \mathcal{D}\mathcal{B} \\ \dot{\mathcal{B}} &= \alpha \mathcal{D}\mathcal{B} - \beta \mathcal{B}, \\ \dot{\mathcal{I}} &= \beta \mathcal{B}\end{aligned}\tag{2}$$

kjer smo uporabili transformaciji $t_0\alpha \rightarrow \alpha$ in $t_0\beta \rightarrow \beta$. Modelu lahko seveda poljubno kompleksno nadgrajujemo, kar si bomo ogledali kasneje.

1.2 Model zajci – lisice

Standardni model zajci – lisice oz. model Lotka-Volterra opišemo s sistemom sklopljenih diferencialnih enačb

$$\begin{aligned}\dot{Z} &= \alpha Z - \beta ZL \\ \dot{L} &= -\gamma L + \delta ZL,\end{aligned}$$

kjer je Z število zajcev, L število lisic, α in δ rodnost zajcev in lisic ter β in γ poginjanje zajcev in lisic. Model lahko prepisemo v enoparametrično brezdimenzijsko obliko

$$\begin{aligned}\dot{z} &= pz(1 - l) \\ \dot{l} &= \frac{l}{p}(z - 1),\end{aligned}\tag{3}$$

kjer je $p = \sqrt{\alpha/\gamma}$.

1.3 Populacijski model laserja

Populacijski model laserja s konstantnim črpanjem R opišemo s sistemom sklopljenih diferencialnih enačb

$$\begin{aligned}\dot{f} &= -\alpha f + B_1 a f \\ \dot{a} &= -\beta a - B_2 a f + R,\end{aligned}$$

kjer α predstavlja izgube fotonov f , β pa spontane razpade atomov a . Sistem lahko prevedemo v brezdimenzijsko obliko

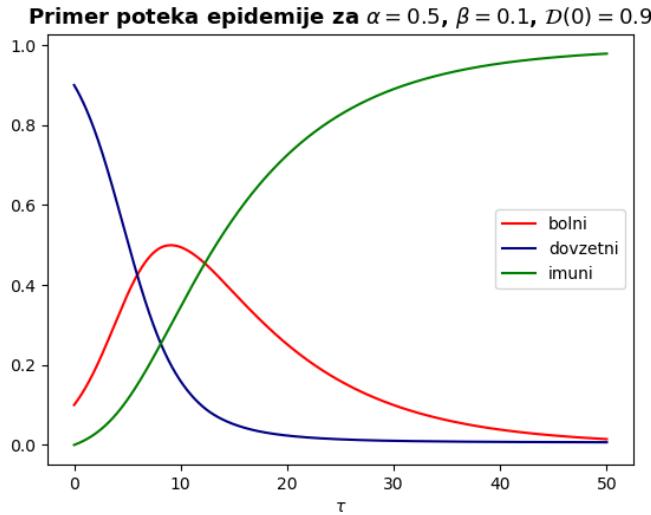
$$\begin{aligned}\dot{A} &= r - pA(1 + F) \\ \dot{F} &= \frac{F}{p}(A - 1),\end{aligned}\tag{4}$$

kjer sta $p = \sqrt{\beta/\alpha}$ in $r = BR/\sqrt{\alpha^3\beta}$.

2 Model epidemije

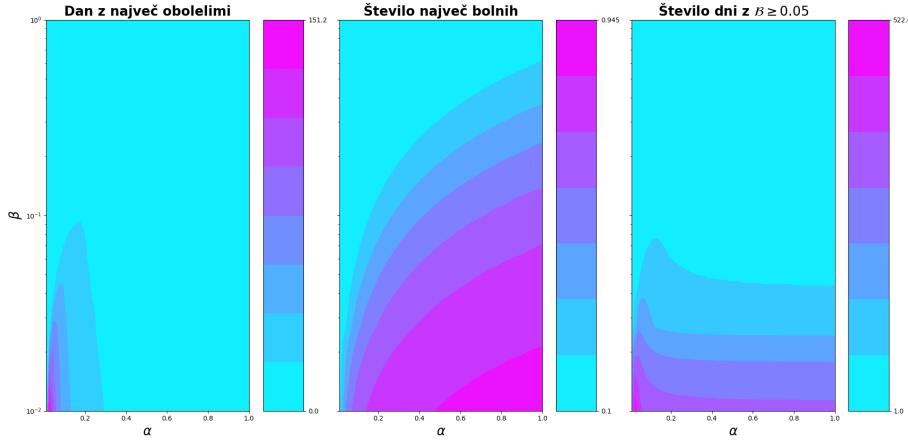
2.1 Preprost model

Začnimo torej s preučevanjem preprostega modela opisanega v odseku 1.1. Za zčetek si oglejmo primer poteka epidemije, prikazanega na sliki 1.



Slika 1: Razvoj epidemije za dane parametre $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.1$ in $D_0 = 0.9$.

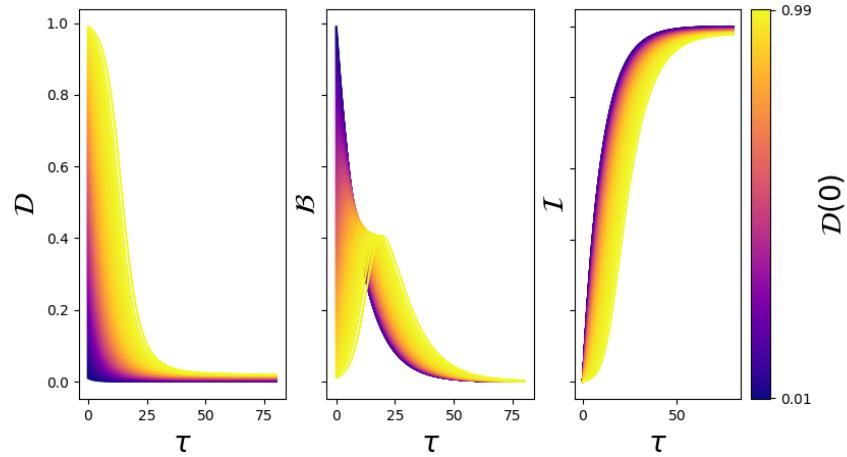
Opazimo, da bolni najprej eksponentno rastejo, saj jih nič ne zavira. Zatem zaradi večanja deleža imunih dosežejo ekstremin in počasi padejo nazaj na 0. Sedaj si oglejmo vpliv parametrov α in β na potek epidemije (slika 2).



Slika 2: Vpliv parametrov α, β na potek epidemije. Levi graf prikazuje dan z največjim deležem bolne populacije, sredinski število bolnih na ta dan, desni pa število dni, ko je bolne več kot 5% celotne populacije.

Opazimo, da večja verjetnost za okužbo povzroči hitrejši in bolj izrazit ekstreem, na dolžino epidemije pa ne vpliva znatno, vsaj za $\alpha \gtrsim 0.2$. Za večjo verjetnost, da bojni ozdravi pa vse tri količine padajo, kar se zdi intuitivno. Slika 3 prikazuje še vpliv začetnih pogojev na potek epidemije.

Odvisnost razvoja v odvisnosti od začetnih pogojev



Slika 3: Vpliv začetnega pogoja D_0 na potek epidemije za konstantna $\alpha = 0.4$ in $\beta = 0.1$.

Opazimo, da z večjim D_0 dobimo nižji in kasnejši vrh B , a bolj počasno večanje I . Za velike $B_0 \gtrsim 0.8$ je vrh epidemije že kar na začetku in potem zelo

hitro pade.

2.2 Model s časovno spremenljivimi parametri

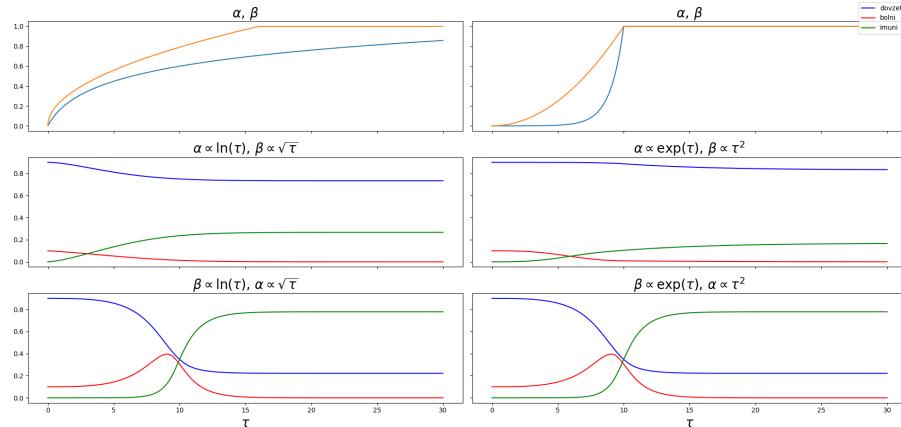
Poglejmo, kako poteka epidemija, če se tako α kot β s časom povečujeta. To lahko razumemo kot, da virus mutira v manj hudo različico in se zato hitreje pozdravimo, hkrati pa se strah pred bolezni jo zmanjša, zato se osebe več družijo in posledično boljn pogosto zbolijo. Zamislimo si 4 različne načine spremenjanja parametrov:

$$\alpha = \begin{cases} \ln(\tau + 1)/4; & \text{če } \tau < e^4 - 1 \\ 1; & \text{sicer.} \end{cases} \quad \text{in} \quad \beta = \begin{cases} \sqrt{\tau}/4; & \text{če } \tau < 16 \\ 1; & \text{sicer.} \end{cases}$$

ter

$$\alpha = \begin{cases} \exp \tau - 10; & \text{če } \tau < 10 \\ 1; & \text{sicer.} \end{cases} \quad \text{in} \quad \beta = \begin{cases} \tau^2/100; & \text{če } \tau < 10 \\ 1; & \text{sicer.} \end{cases}$$

oz. obratno. Rezultate prikazuje slika 4.



Slika 4: Potelek epidemije za časovno odvisna α, β . Na zornjih dveh grafih sta prikazana časovna poteka parametrov, na sredinskih grafih primera, kjer je $\alpha < \beta$ za $\forall \tau$, na spodnjih pa za $\alpha > \beta$ za $\forall \tau$. Začetno število dovzetnih je v vseh primerih $D_0 = 0.9$.

Opazimo, da se na sredinskih grafih epidemija relativno hitro konča, saj je α na začetku premajhen, na spodnjih dveh pa večina prebivalstva zboli. Na sredinskih grafih opazimo še, da je padec bolnih hitrejši za $\beta \propto \sqrt{\tau}$ kot za $\beta \propto \tau^2$, kar se prav tako zdi intuitivno, saj tako β na začetku hitro naraste, nato pa se ustali.

2.2.1 Harmonično spreminjanje parametrov

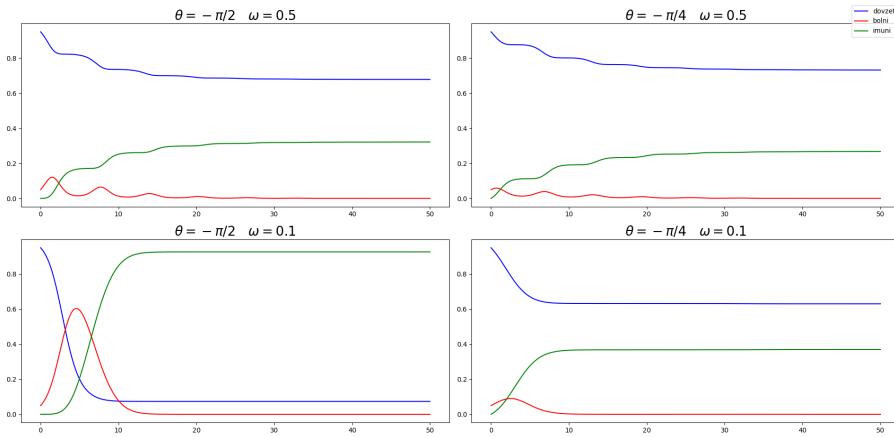
Oglejmo si še primer, kjer se parametra spremojata harmonično kot

$$\alpha = \cos^2(\tau\omega)$$

in

$$\beta = \cos^2(\tau\omega + \theta),$$

kjer je θ fazni zamik. Rezultate prikazuje slika 5.

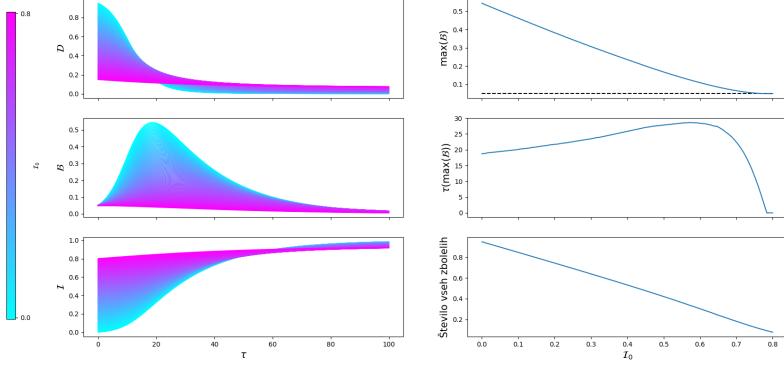


Slika 5: Prikaz rešitev za harmonično spreminjanje parametrov α, β . V zgornjem primeru α za $\pi/2$ prehiteva β , v spodnjem pa za $\pi/4$. Začetno število dovzetnih je za vse primere enako 0.95.

Opazimo, da tako frekvenca kot fazni zamik vplivata na potek epidemije. Na zgornjih dveh grafih, kjer je frekvenca višja, se za oba fazna zamika parametra spreminja na takšen način, da se epidemija hitros konča. Spodaj pa opazimo, da za $\theta = -\pi/2$ epidemija poteče na nam znani način, za fazni zamik $-\pi/4$ pa se epidemija prav tako hitro zaključi, saj se parametra očitno spet ravno "odštevata".

2.3 Cepivo

Zanima nas kako se spremenijo karakteristike epidemije, če je že na začetku nekaj populacije imune, saj so prejeli cepivo. Rezultate prikazuje slika 6.



Slika 6: Vpliv deleža cepljenih na potek epidemije. Začetni delež bolnih je vselej 5%.

Opazimo, da se vrh epidemije niža z večjim I_0 (*flatten the curve*) in nastopi kasneje. To velja dokler ne cepimo že takšen delež populacije $\gtrsim 0.6$, da vrh nastopi praktično takoj, saj se delež bolnih le zmanjšuje. Prav tako se manjša število vseh obolelih.

Morebitna nadgradnja: Ker načeloma potrebujemo določen čas, da razvijemo cepivo, bi lahko diferencialne enačbe (1.1) raje zapisali kot

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{D}} &= -\alpha \mathcal{D} \mathcal{B} - H(\tau - \tau_c) \mathcal{D} \gamma \\ \dot{\mathcal{B}} &= \alpha \mathcal{B} \mathcal{D} - \beta \mathcal{B} \\ \dot{\mathcal{I}} &= \beta \mathcal{B} + H(\tau - \tau_c) \mathcal{D} \gamma\end{aligned}$$

Dodali smo torej Heaviside-ovo funkcijo, ki bo od dneva nastanka cepiva τ_c naprej, vsak dan nek delež dovezetne populacije prestavila med imune. V splošnem je γ verjetno neka naraščajoča funkcija časa.

2.4 Dodatne kategorije bolnih

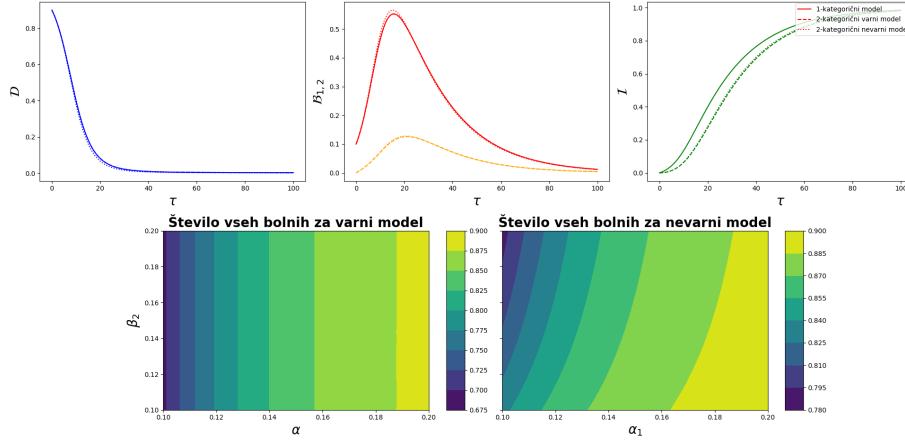
Kot vemo iz epidemije Covid-19 pri kužnih obstaja določena inkubacijska doba. Zato je bolj pravilno, če bolne razdelimo v več kategorij. V tej razpravi se bomo omejili na dve kategoriji \mathcal{B}_1 in \mathcal{B}_2 . Najprej si oglejmo model, kjer se del populacije \mathcal{B}_2 vede korektno do doveztnih in zato ostanejo doma. Diferencialne enačbe s katerimi opišemo celoten sistem so

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{D}} &= -\alpha \mathcal{D} \mathcal{B}_1 \\ \dot{\mathcal{B}}_1 &= \alpha \mathcal{B}_1 \mathcal{D} - \beta_1 \mathcal{B}_1 \\ \dot{\mathcal{B}}_2 &= \beta_1 \mathcal{B}_1 - \beta_2 \mathcal{B}_2 \\ \dot{\mathcal{I}} &= \beta_2 \mathcal{B}_2\end{aligned}$$

Ker pa se v praksi tudi nek delež \mathcal{B}_2 požvižga na ukrepe, lahko tudi oni okužijo dovzetne. Diferencialne enačbe potem zapišemo kot

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{D}} &= -\alpha_1 \mathcal{D} \mathcal{B}_1 - \alpha_2 \mathcal{D} \mathcal{B}_2 \\ \dot{\mathcal{B}}_1 &= \alpha_1 \mathcal{D} \mathcal{B}_1 + \alpha_2 \mathcal{D} \mathcal{B}_2 - \beta_1 \mathcal{B}_1 \\ \dot{\mathcal{B}}_2 &= \beta_1 \mathcal{B}_1 - \beta_2 \mathcal{B}_2 \\ \dot{\mathcal{I}} &= \beta_2 \mathcal{B}_2\end{aligned}$$

Rešitve v odvisnosti od zgornjih parametrov prikazuje slika 7.



Slika 7: Rešitve in lastnosti 2-kategoričnega problema. Na zgornjih grafih je prikazan potek epidemije za različne modele pri $\mathcal{D}_0 = 0.9$, $\alpha = \alpha_1 = 0.3$, $\beta = \beta_1 = 0.05$, $\alpha_2 = 0.1$ in $\beta_2 = 0.2$. Z rdečo je označena kategorija \mathcal{B}_1 , z oranžno pa \mathcal{B}_2 . Varen model imenujemo model, kjer je $\alpha_2 = 0$. Spodnja dva grafa pa prikazujejo vpliv parametrov na celotno število bolnih. V obeh primerih je $\beta_1 = 0.05$, v drugem primeru pa je $\beta_2 = 0.1$.

OPazimo, da v obeh modelih na število vseh bolnih najbolj vpliva velikost α_1 , v drugem modelu pa opazimo tudi rahlo odvisnost od β_2 . To se zdi intuitivno, saj z velikim α_1 vsi zbolijo preden bi lahko \mathcal{B}_2 padel na 0. Odvisnosti od \mathcal{B}_2 za prvi model seveda ne pričakujemo, saj se oseba iz \mathcal{B}_2 ne mora srečati z osebo iz \mathcal{D} .

2.5 Zamik

Obravnavajmo še reševanje diferencialnih enačb z zamikom, kjer predpostavimo, da bolni postanejo kužni šele po nekem času τ_i , hkrati pa imuni ponovno po-

Kewda Jahnstraße

$$\dot{D} = -\alpha D \cdot B$$

$$\dot{B} = \alpha D B - \beta B$$

$$\dot{I} = \beta \cdot B$$

$$D + B + I = N = \text{konst} / \frac{d}{dt}$$

$$\underline{\dot{D} + \dot{B} + \dot{I} = 0 \quad (\text{Populacija se održava})}$$

Kaj pa je gledamo samo dozvetne slučajev:

$$\dot{D} = -\alpha D B$$

$$\dot{B} = \alpha D B - \beta B$$

\downarrow Tj. nekam počinju

$$D(t) + B(t) = N(t) \leftarrow \text{Ta populacija nus zadržava}$$

$$\dot{D} + \dot{B} = \dot{N} \neq 0!$$

Uredimo brojne uvođe spremnopravke:

$$x = \frac{D}{N}, \quad y = \frac{B}{N} \quad ; \quad x + y = 1$$

$$\frac{\dot{B}}{B} = \frac{\alpha D B - \beta B}{-\alpha D B} = -1 + \frac{\beta}{\alpha} \frac{1}{D} / \cdot \frac{\dot{D}}{N}$$

$$\frac{\dot{B}}{N} = -\frac{\dot{D}}{N} + \frac{\beta}{\alpha} \frac{1}{N} \cdot \frac{\dot{D}}{D} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{To ne moremo} \\ \text{lepo integrirati, negi} \\ \text{jed } N = N(t)! \end{array} \right.$$

Ozirama:

$$\dot{B} = -D + \frac{\beta}{\alpha} \frac{\dot{D}}{D} \left| \int dt' \right.$$

$$B(t) = -D(t) + \frac{\beta}{\alpha} \cdot \ln D(t) \Big|_0^t$$

$$B(t) - B(0) = -D(t) + D(0) + \frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{D(t)}{D(0)}$$

$$\underline{B(t) = D(0) + B(0) - D(t) + \frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{D(t)}{D(0)}}$$

Brechungsoffene
Spannungsfläche

$$N_0 = D_0 + B_0$$

$$x = \frac{D}{N_0}, \quad y = \frac{B}{N_0} \quad \left\{ \Rightarrow x + y = \frac{N}{N_0} \leq 1 \right.$$

$$y = 1 - x + \frac{\beta}{N_0 \alpha} \ln \frac{x}{x_0} \quad ; \quad A = \frac{\alpha N_0}{\beta}$$

$\frac{1}{A}$

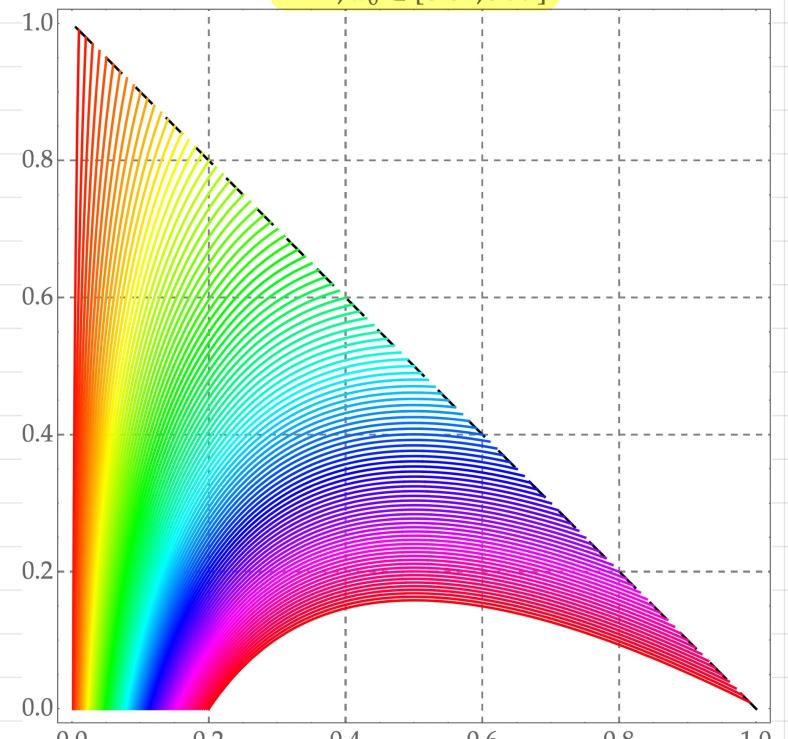
$$y = 1 - x + \frac{1}{A} \ln \frac{x}{x_0}$$

$$x \in [x_{min}, x_0]$$

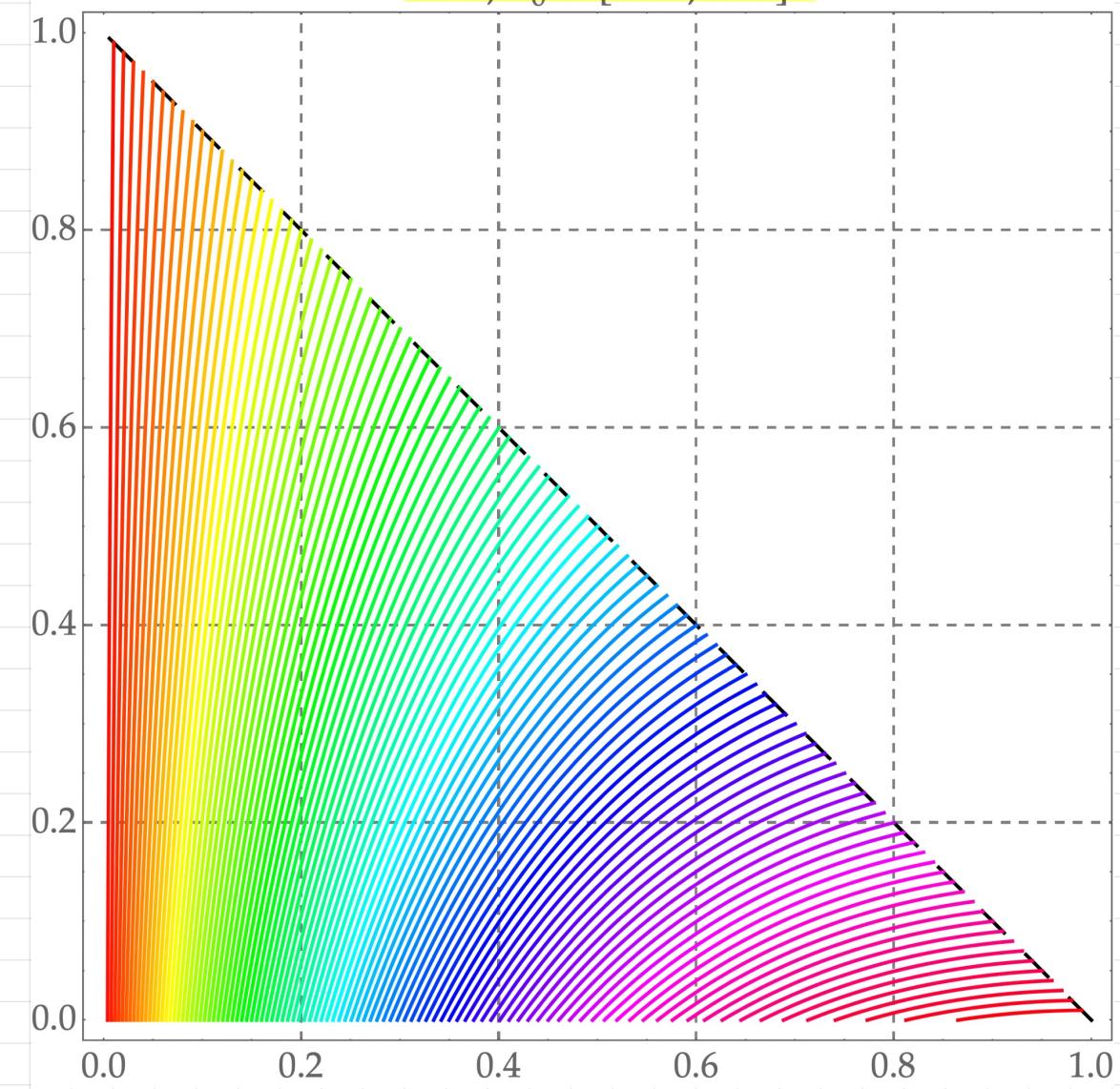
$$y \in [0, 1 - x_0]$$

$$0 = 1 - x_{min} + \frac{1}{A} \ln \frac{x_{min}}{x_0}$$

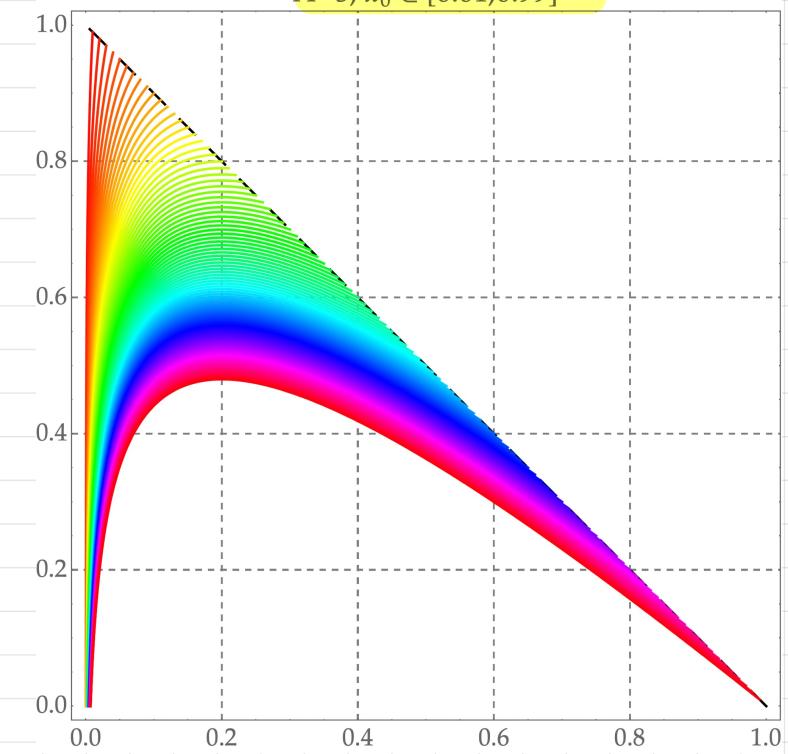
$A=2, x_0 \in [0.01, 0.99]$



$A=1, x_0 \in [0.01, 0.99]$



$A=5, x_0 \in [0.01, 0.99]$



MODELSKA ANALIZA I

4. naloga – Populacijski modeli

Ema Mlinar, vpisna št.: 28222071

1. november 2022

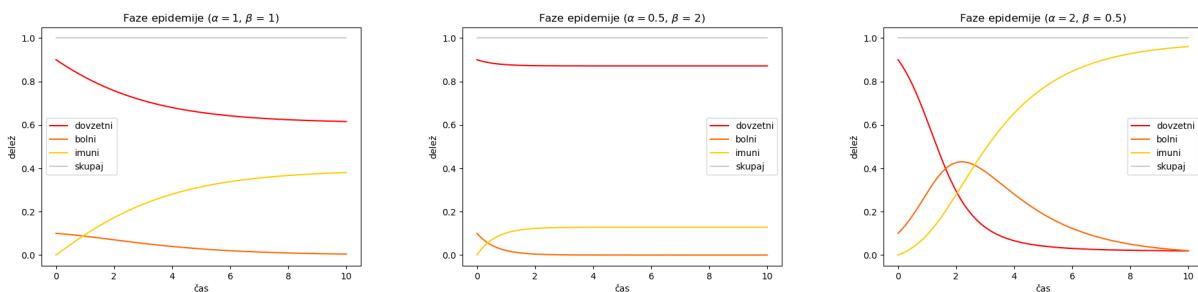
1 Model epidemije

Želimo opisati potek širjenja epidemije, v ta namen bomo napisali sistem diferencialnih enačb in jih poskusili rešiti. Populacijo najprej razdelimo v tri razrede: (D) zdravi in dozvetni, (B) bolni in kužni, (I) imuni: nedovzetni in nekužni. Bolezen se širi s stiki med zdravimi in bolnimi. Bolnik preide s konstantno verjetnostjo med imune.

$$\dot{D} = -\alpha DB \quad (1)$$

$$\dot{B} = \alpha DB - \beta B \quad (2)$$

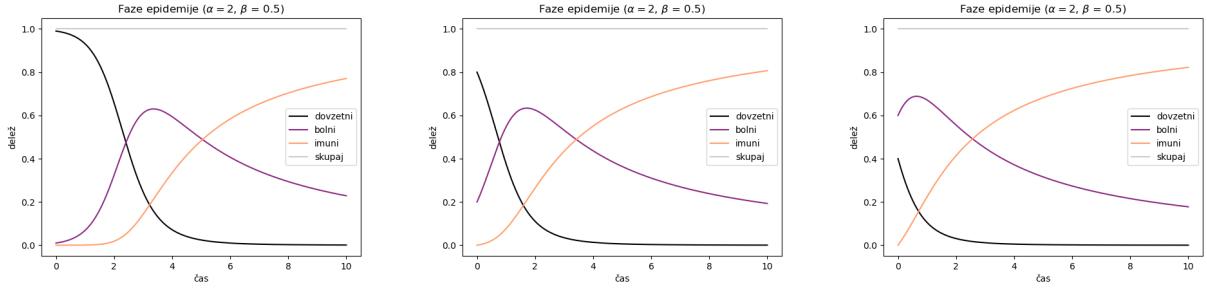
$$\dot{I} = \beta B \quad (3)$$



Slika 1: Rešitev sistema diferencialnih enačb za potek epidemije za različne vrednosti koeficientov α in β pri začetnem pogoju $B(0)=0.1$ in $D(0)=0.9$.

Ta sistem enačb lahko rešimo z metodo *odeint* v Pythonovi knjižnici *scipy*. Slika 1 kaže potek epidemije kot jo napoveduje ta model. Vidimo, da se vsota deležev ohranja, torej sklepamo, da program deluje pravilno in da ni večjih numeričnih napak. Če preverimo še več kombinacij α in β , ugotovimo, da ce velja $\beta \geq \alpha$, nikoli ne zbolijo vsi, ampak se bolezen prej zadusi, tudi delež bolnih eksponentno pada že od začetka. Pri $\beta \geq \alpha$ je torej najvišje število obolelih na začetku, pri $\beta \leq \alpha$ pa imamo nek vrh, ki nastopi kasneje, če so vrednosti α in β manjše.

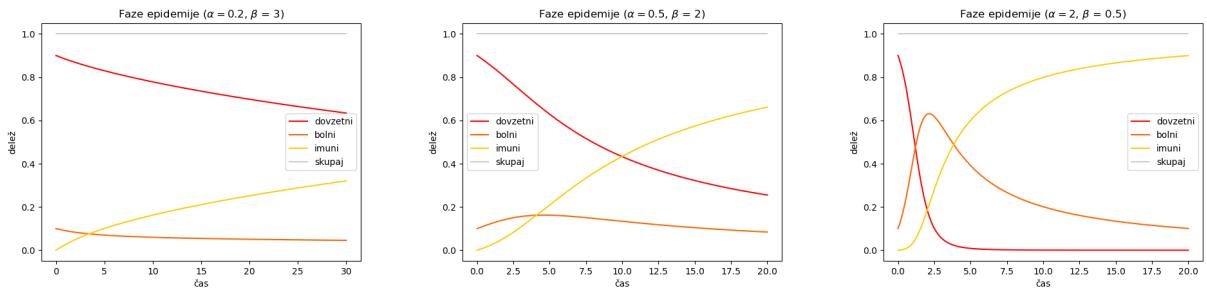
Poglejmo tudi, kako je potek odvisen od začetnega števila bolnih (glej sliko 2).



Slika 2: Rešitev sistema diferencialnih enačb za potek epidemije za vrednosti koeficientov $(\alpha, \beta) = (2, 0.5)$ in pri različnih začetnih pogojih.

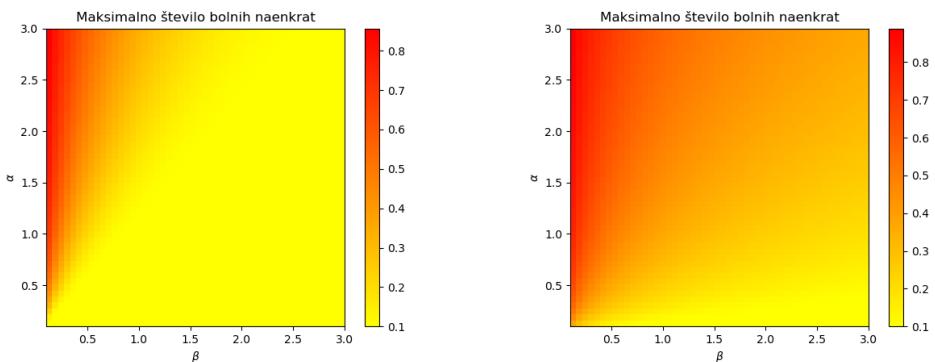
1.1 Bolniki ozdravijo s členom B^2

Poglejmo sedaj še primer, ko imamo namesto B v enačbi 3 člen B^2 . Dobimo potek epidemije kot je na sliki 3. Opazimo lahko, da z razliko od prej sedaj zboljšo prav vsi v populaciji ter da je vrh precej višji in ožji. Poglejmo.



Slika 3: Rešitev sistema diferencialnih enačb za potek epidemije s členom βB^2 namesto βB pri začetnem pogoju $B(0)=0.1$ in $D(0)=0.9$.

1.2 Višek bolnih in čas viška

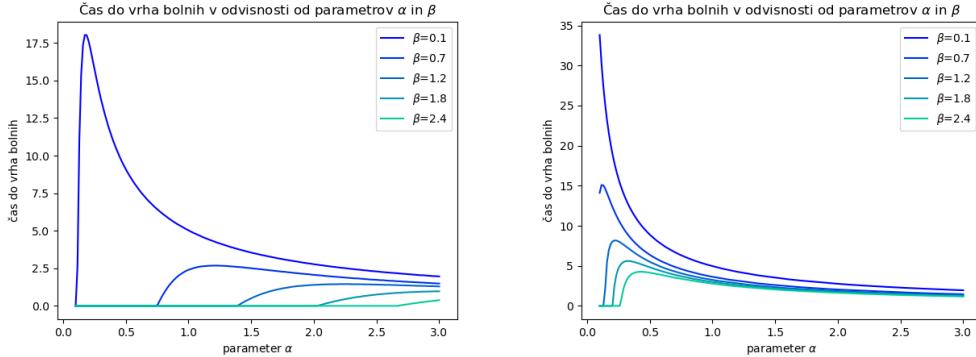


Slika 4: Prikaz viška bolnih za primer člena βB (levi graf) in člena βB^2 (desni graf) v odvisnosti od parametrov α in β .

Kot epidemiologe nas najbolj zanima maksimalno število bolnih in kdaj ta vrh nastopi, saj moramo pravočasno pripraviti zadostno količino postelj in drugih potrebnih pripomočkov v bolnicah. Poglejmo. Višek bolnih za člen βB^2 in člen βB je prikazan na sliki 4. Poleg tega, da je vrh višji pri βB^2 opazimo

tudi, da je višji vrh tu tudi razprostrt čez veliko večje območje parametrov α in β . V obeh primerih pa so kritične kombinacije parametrov, kjer je α precej večji od β .

Sedaj ko vemo, kolikšen je vrh pa nas zanima še kdaj nastopi. To nam povesta grafa na sliki 5.

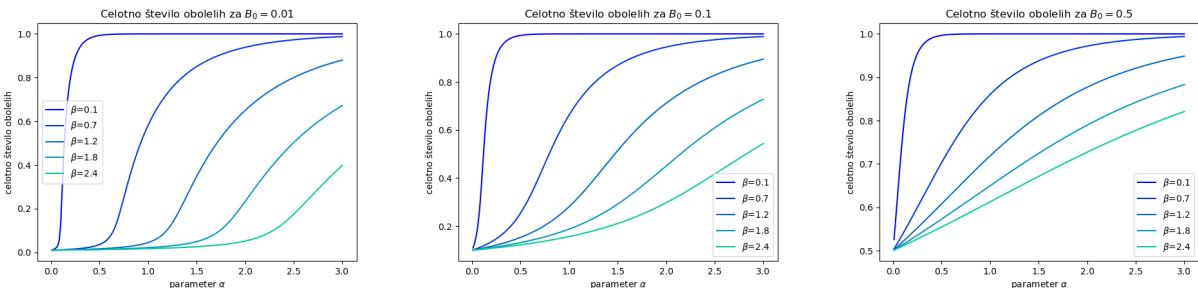


Slika 5: Prikaz kdaj nastopi višek bolnih za primer člena βB (levi graf) in člena βB^2 (desni graf) v odvisnosti od parametrov α in β .

Vidimo, da se grafa za B in B^2 precej razlikujeta. Pri B^2 je pri večjih parametrih α potek skoraj neodvisen od parametra β . Pri B pa vidimo, da ko večamo β , je čas do viška vedno dlje na ničli. To pomeni, da ni viška in da se epidemija sama zaduši. Maksimalno število bolnih je torej na začetku.

1.3 Celotno število obolelih

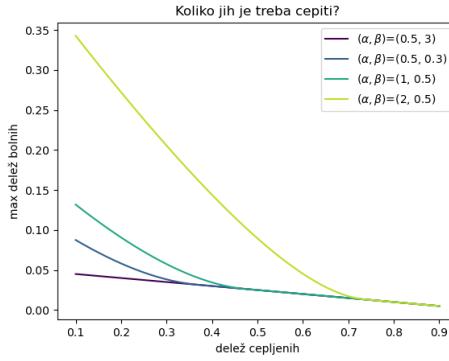
Videli smo že, da pri členu B^2 zboli prej ali slej celotna populacija. To pa ne velja za člen B , odvisnost števila vseh obolelih (in prebolelih) od parametrov je prikazana na sliki 6. Vidimo, da ni močno odvisno od začetnih pogojev (predvsem za manjše β), bolj ali manj le toliko, da ne more biti končno število obolelih manjše od začetnega. Vidimo, da pri majhnih β zadošča že zelo majhen α , da prekužimo celotno populacijo.



Slika 6: Celotno število obolelih v odvisnosti od začetnih parametrov ter parametrov α in β .

1.4 Koliko jih je treba cepiti?

S cepljenjem premaknemo določen del populacije med imune že takoj na začetku, tako da imamo efektivno manj ljudi in tako tudi manj ljudi, za katere je epidemija nevarna. Na sliki 7 je prikazano kolikšen delež populacije mora biti precepljen, da dobimo željeno majhno maksimalno število bolnih. Vidimo, da se vse krivule sčasoma asymptotsko približajo premici. Na tej premici so točke, kjer delež dovezetnih in imunih ostanejo praktično taki kot so na začetku, le tistih malo bolnih eksponentno pade.



Slika 7: Prikaz viška bolnih v odvisnosti od precepljenosti za različne vrednosti parametrov α in β .

1.5 Izboljšan model z različnimi tipi bolnih

Naš osnovni modele lahko izboljšamo s tem, da bolne razvrstimo v tri podskupine: najprej so bolniki okuženi, a ne širijo epidemije (inkubacijska doba) - B1, potem so močno kužni - B2, potem pa so v izolaciji in jim kužnost pade - B3.

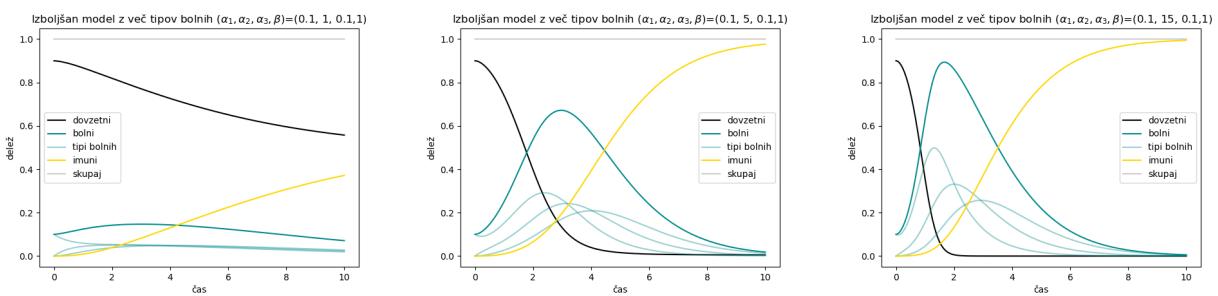
$$\dot{D} = -\alpha_1 DB_1 - \alpha_2 DB_2 - \alpha_3 DB_3 \quad (4)$$

$$\dot{B}_1 = \alpha_1 DB_1 + \alpha_2 DB_2 + \alpha_3 DB_3 - \beta B_1 \quad (5)$$

$$\dot{B}_2 = \beta B_1 - \beta B_2 \quad (6)$$

$$\dot{B}_3 = \beta B_2 - \beta B_3 \quad (7)$$

$$\dot{I} = \beta B_3 \quad (8)$$



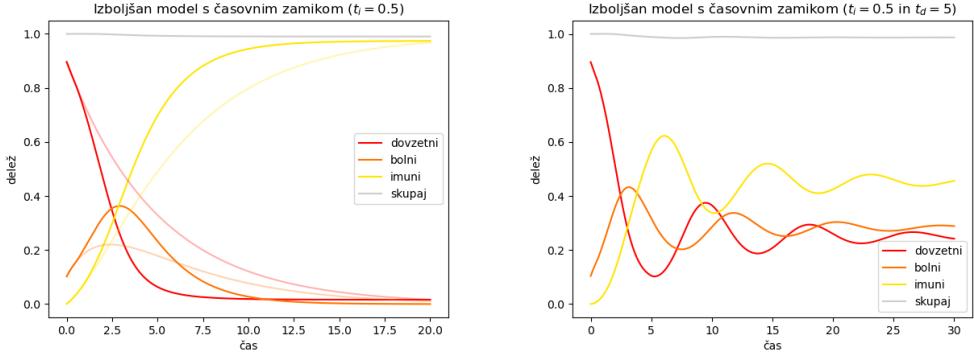
Slika 8: Izboljšan model z različnimi tipi bolnih, ki različno močno kužijo. Na prvi sliki je potek za vrednost parametra $\alpha_2 = 1$, nato $\alpha_2 = 5$ in $\alpha_2 = 15$.

Parametra α_1 in α_3 sta torej majhna, parameter α_2 pa je velik. Na sliki 8 je prikazan potek epidemije za izboljšan model. Velikost parametra α_2 zelo vpliva na potek epidemije (efektivno zviša število bolnih). Če primerjamo izboljšan model z osnovnim, opazimo, da dodatek podaljša potek epidemije.

1.6 Izboljšan model s časovnim zamikom

Bolj korektno kot zmanjšati delež α_1 (saj to tudi upočasni spremenjanje B1 \rightarrow B2) je, da enostavno dodamo časovni zamik med tem, ko se oseba okuži in tem, ko začne kužiti (t_i). Dobimo levi graf na sliki 9.

Kot pričakovano vrh nastopi kasneje kot v osnovnem modelu brez zamika. Posledično število bolnih precej naraste, kar povzroči hiter upad dovzetnih. Ker je bolnih veliko, poteka epidemija precej hitreje, kljub temu, da se to sliši rahlo neintuitivno.

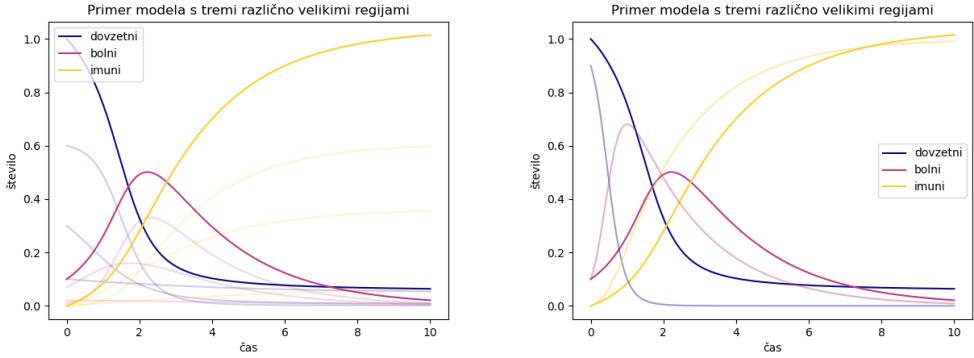


Slika 9: Izboljšan model s časovnim zamikom. Na levem grafu upoštevamo samo inkubacijsko dobo, na desnem pa še to, da imuni po nekem času izgubi imunost. Svetlejša črta predstavlja model brez zamika.

Lahko pa upoštevamo tudi to, da imuni niso za vedno imuni, ampak da se po nekaj času premaknejo med dovezetne. Tako dobimo graf na desni strani slike 9. Opazimo, da sedaj dobimo valove, ki pa sčasoma limitirajo k neki konstantni vrednosti.

1.7 Model z omejitvijo gibanja na regije

Med epidemijo Covida so kot enega glavnih ukrepov navajali omejitev gibanja na regije. Poglejmo, če ta omejitev kaj pomaga. Na sliki 10 je predstavljena primerjava med modelom z regijami in brez njih. V modelu sem uporabila tri različno velike regije ter začetne bolne naključno porazdelila med njimi. Vidimo, da uvedba regij močno upočasni razvoj epidemije in posledično tudi povzroči nižji maksimum bolnih.

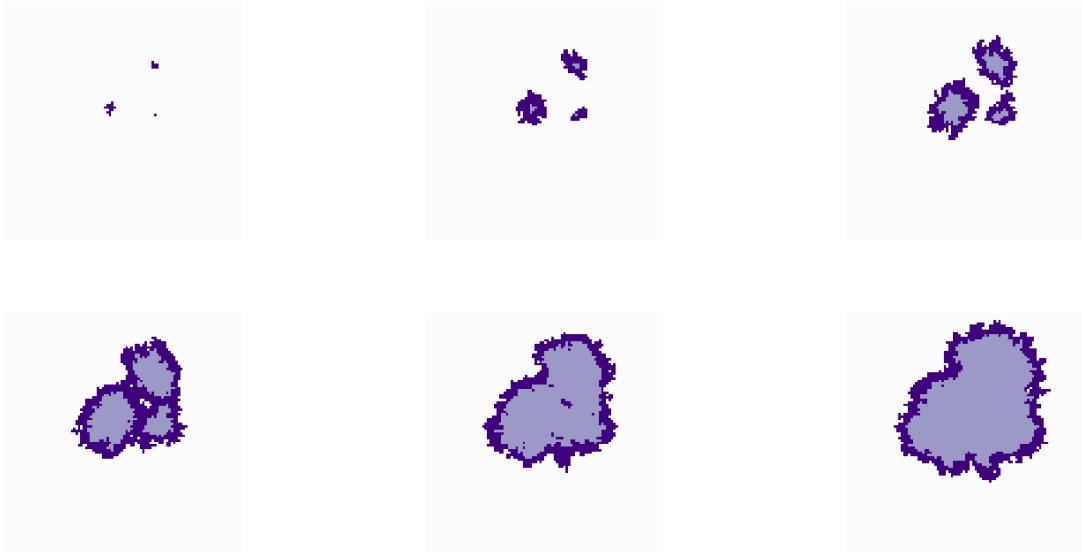


Slika 10: Model z omejitvijo gibanja na regije. Ljudi naključno razporedimo v tri različne regije. Regije imajo tako različni delež bolnih. Na levi je prikazan potek epidemije v vsaki regiji posebej (svetlejše črte) in v seštevku. Na desni sliki pa je primerjava med osnovnim modelom (svetlejša črta) in modelom z regijami (temnejša črta).

1.8 Prostorsko širjenje

Namesto regij pa lahko prostorsko omejimo epidemijo tudi tako, da prebivalce stacioniramo in rečemo, da lahko okuži vsak samo svoje sosedje. Tako dobimo model prostorskega širjenja prikazanega na sliki 11).

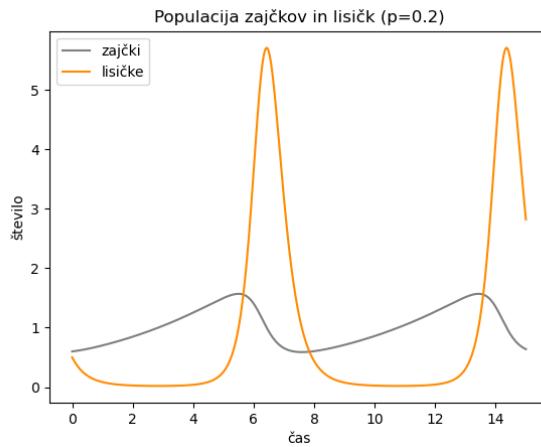
Tako širjenje je precej počasnejše od osnovnega modela, kjer je širjenje eksponentno na začetku. Model sem skonstruirala tako, da sem določila naključne štiri ljudi v celotni populaciji, ki so okuženi, nato



Slika 11: Prikaz prostorskega širjenja, kjer vsak lahko okuži le svoje sosede. S slikicami so prikazane faze epidemije in njeno širjenje. Temno vijolična predstavlja bolne, svetlo vijolična pa imune.

pa z verjetnostjo α okužijo vsakega od svojih štirih sosedov. Tako se epidemija širi. Po nekaj dneh bolezni ljudje postanejo imuni.

2 Model zajci - lisice



Slika 12: Primer spremenjanja populacije zajcev in lisic skozi čas.

Podobno kot epidemijo pa lahko tudi moduliramo ravnovesje med populacijo zajcev in lisic. Populacija zajcev se zmanjša, če je veliko lisic (ker jih pojejo), prav tako pa se populacija lisic zmanjša, če je zajcev malo (ker stradajo). Tako lahko napišemo naš model:

$$\dot{z} = pz(1 - l) \quad (9)$$

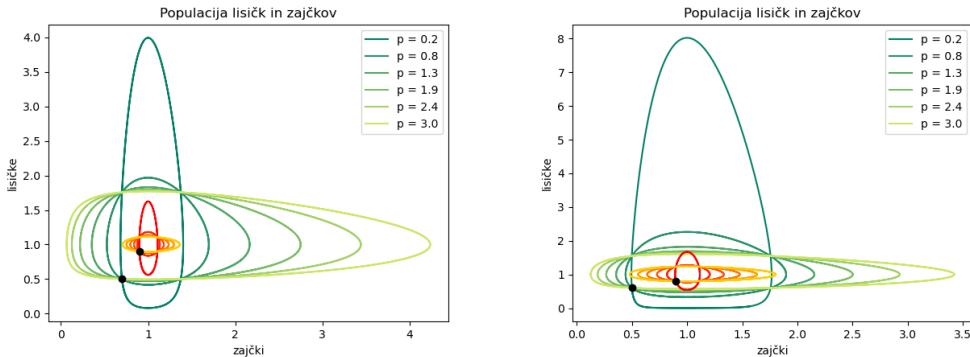
$$\dot{l} = \frac{l}{p}(z - 1) \quad (10)$$

p je parameter, od katerega je dinamika odvisna. Na sliki 12 je prikazan primer takšne dinamike.

Naloga 2:

- fazni modeli
- oblikovalci doba in njena odvisnost od α , L , p.
- začetne vrednosti
- dohodkovna populacija vs. zvezen model.

Lahko pa tudi narišemo diagram, kjer na osi nanesemo število zajcev in lisic. Ker je gibanje periodično, so krivulje sklenjene. Primer takih krivulj je na sliki 13.



Slika 13: Primer spremenjanja populacije zajcev in lisic skozi čas. Prikaz krivulj za različne parameterje p , prikazane z različnim odtenkom barve, ter za različne začetne pogoje (zajci, lisice): levi graf (0.7,0.5) - zelena in (0.9,0.9) - oranžna, desni graf (0.5,0.6) - zelena in (0.9,0.8) - oranžna. S črno piko je označena startna točka.

Ko večamo parameter p , postaja krivulja bolj in bolj sploščena v x smeri, če pa ga manjšamo, pa v y smeri (ravno tako je tudi pri harmonskem oscilatorju kot bomo videli kasneje). Če narišemo grafe za različne vrednosti začetnih parametrov, vidimo, da čim bolj gremo proti točki $(1, 1)$ tem manjše je nihanje v številu zajcev in lisic. Poglejmo, kje so stacionarne točke ($\dot{z} = 0$ in $\dot{l} = 0$). Dobimo točki $(0, 0)$ ion $(1, 1)$. Poglejmo si najprej okolico točke $(0, 0)$, tu velja:

$$\dot{z} \approx pz \quad (11)$$

$$\dot{l} \approx -\frac{l}{p} \quad (12)$$

Rešitev teh dveh enačb je:

$$z(t) = z_0 e^{pt} \quad (13)$$

$$l(t) = l_0 e^{-t/p} \quad (14)$$

Povečevanje v eni smeri in zmanjševanje v drugi definira točko $(0, 0)$ kot sedlo. V okolici točke $(1, 1)$ pa velja:

$$\dot{z} \approx -pl \quad (15)$$

$$\dot{l} \approx \frac{z}{p} \quad (16)$$

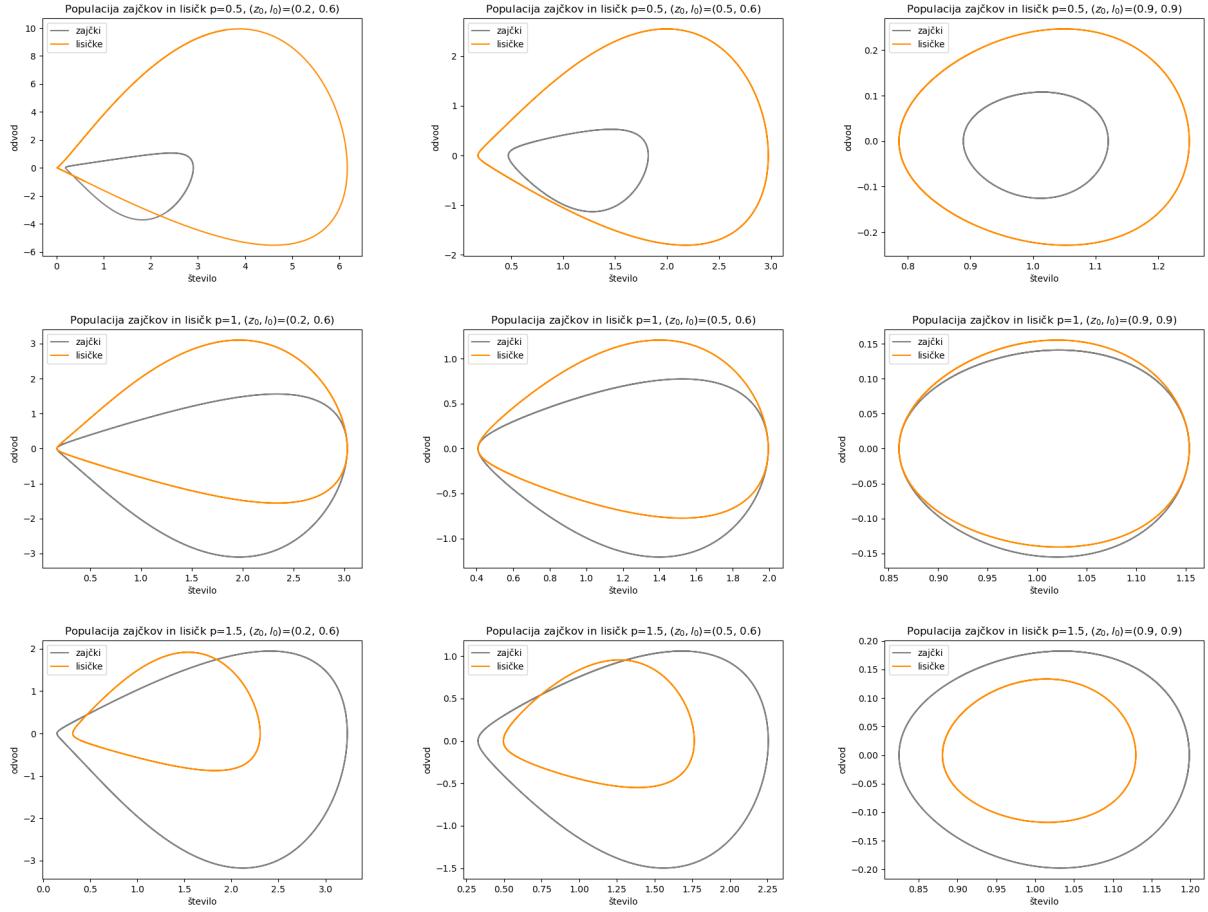
Oz. če preoblikujemo:

$$\ddot{z} \approx -z \quad (17)$$

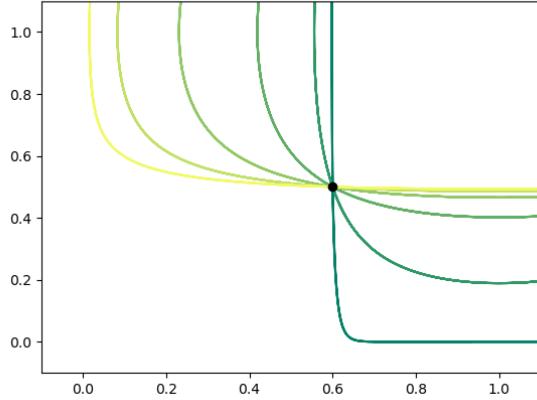
$$\ddot{l} \approx -l \quad (18)$$

To predstavlja kroženje v faznem diagramu. To lahko zelo lepo vidimo na grafu $\dot{z}(z)$ oz. $\dot{l}(l)$ na sliki 14.

Kot smo izpeljali, so krivulje vedno bolj podobne krožnicam, ko gremo $(z, l) \rightarrow (1, 1)$ (graf od leve proti desni), ko pa gremo $(z, l) \rightarrow (0, 0)$ pa postaja krivulja vedno bolj špičasta. Zanimiv primer je tudi $p = 1$, ko se grafa zajcev in lisic tangentno sekata v skrajnih dveh točkah, neodvisno od začetnih pogojev.



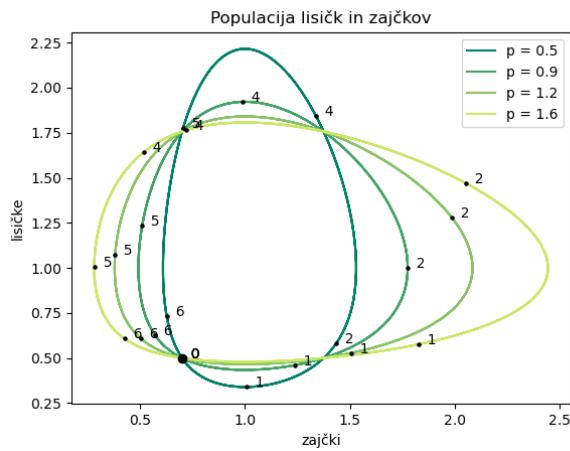
Slika 14: Diagrami število-odvod, ki prikazuje $\dot{z}(z)$ oz. $\dot{l}(l)$. Graf je narisani za različne začetne pogoje (posamezni stolpci) ter različne p (posamezne vrstice).



Slika 15: Limiti $p \rightarrow 0$ in $p \rightarrow \infty$ blizu ničle (drugje se ne dogaja nič zanimivega).

Poglejmo si sedaj obliko krivulje še od bližje. Najprej poglejmo limito, ko gre $p \rightarrow 0$ in $p \rightarrow \infty$, gľad sliku 15. Niti nam ni treba pretiravati s številkami, da že vidimo kam se krivulje približujejo. Limitirajo proti 0 in sicer proti škatlasti obliky.

Poglejmo sedaj še krivulje z vrisanimi časovnimi točkami (slika 16). Opazimo, da se vse krivulje sekajo v štirih točkah, a ne ob istem času.



Slika 16: Oblika poti, ki jo naredi čas v grafu zajci-lisice. S številkami so označeni časovni koraki.

2.1 Podobnosti s harmonskim oscilatorjem

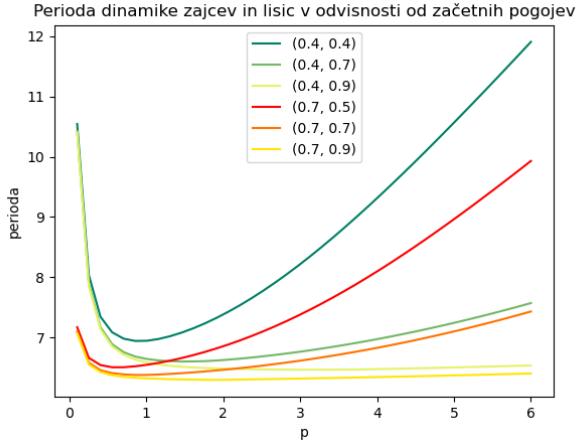
Enačbi 9 in 10 zelo spominjata na enačbi za harmonski oscilator. Namreč obe imata nek člen, ki pospešuje sistem (zajci oz. hitrost) ter člen, ki ga zavira (lisice oz. odmik). Primerjajmo torej ta dva sistema in poskusimo s pomočjo tega ugotoviti zakonitosti sistema zajci - lisice.

	HARMONSKI OSCILATOR	LISICE - ZAJCI
MODEL	$m\dot{v} + kx = 0$ $\dot{x} - v = 0$	$\dot{z} + pz(l-1) = 0$ $\dot{l} - \frac{1}{p}(z-1) = 0$
PARAMETER	k	p
1. INTEGRAL oz. ENERGIJA	$E = \int m \frac{dv}{dt} dx + \int kx dx =$ $= \int m \dot{x} dv + \int kx dx =$ $= \int mv dv + \frac{kx^2}{2} =$ $= \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2}$	$E = \int \frac{1}{pzl} \frac{dz}{dt} dl + \int \frac{1-l}{l} dl =$ $= \int \frac{1}{pzl} \dot{l} dz + \int \frac{1-l}{l} dl =$ $= \int \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2 z} \right) dz + \int \left(\frac{1}{l} - 1 \right) dl =$ $= \frac{z}{p^2} - \frac{\ln(z)}{p^2} + \ln(l) - l$
$E = \text{konst}$ (analitična povezava)	$\frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{kx_0^2}{2}$	$\frac{1}{p^2} (z - \ln(z)) + \ln(l) - l =$ $= \frac{1}{p^2} (z_0 - \ln(z_0)) + \ln(l_0) - l_0$
GRAF $E = \text{konst}$		
PRESEČIŠČA KRIVULJ	$E_k = E_k(0)$ in $E_p = E_p(0)$ $\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2}$ $\frac{kx^2}{2} = \frac{kx_0^2}{2}$ $\Rightarrow v_{1,2} = \pm v_0$ in $x_{1,2} = \pm x_0$	$E_1 = E_1(0)$ in $E_2 = E_2(0)$ $z - \ln(z) = z_0 - \ln(z_0)$ $\ln(l) - l = \ln(l_0) - l_0$ $\Rightarrow 4$ presečišča (ni analitično izrazljivo)

Videli smo torej, da je harmonski oscilator zelo podoben našemu primeru zajcev in lisic, le da je harmonski oscilator malo bolj simetričen. S pomočjo izpisa energije, lahko dobimo invarianto, ki se ohranja. Pri harmonskem oscilatorju to prepoznamo kot kinetično in potencialno energijo, za zajce in lisice pa ekvivalent temu (vsako od 'energij' sestavlja dva člena). Ta invarianta nam da pri obeh sistemih analitično zvezo med obema spremenljivkama. Pri zajcih in lisicah je to točno krivulja na grafu $l(z)$ na sliki 13. Pogoji, kjer sta obe energiji enaki tistim na začetku predstavljajo neke vrste ravnovesne lege, skozi katere gredo vse krivulje, neodvisno od parametra p oz. k . Ta pogoj je v bistvu ekvivalenten temu, da enačimo posebej člene, ki nimajo predfaktorja parametra in tiste, ki imajo (torej, da ni odvisno od parametra). Če numerično rešimo enačbo za presečišča, dobimo točno točke sekanja na sliki 13.

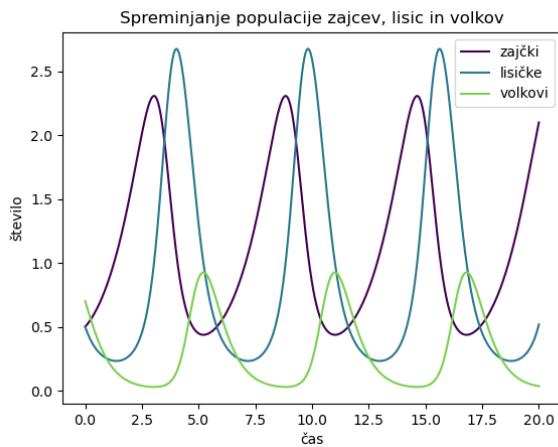
2.2 Perioda oscilacij

Kot smo že opazili, je dinamika periodična. Perioda pa je odvisna tako od p kot od začetnih pogojev, glej sliko 17.



Slika 17: Perioda dinamike za različne začetne pogoje in različne vrednosti parametra p .

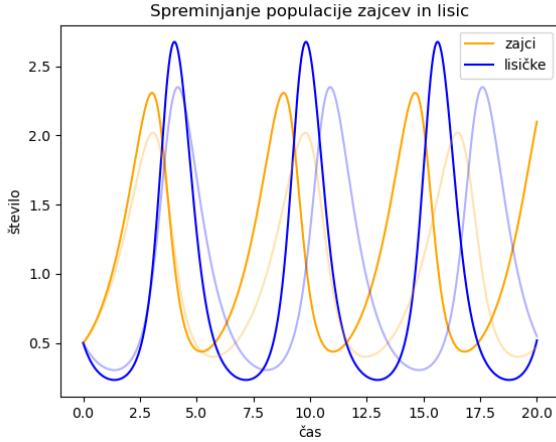
Opazimo, da zmanjšanje parametra p pod vrednost 0.5 močno podaljša periodo. Dinamike sistemov, kjer je enako število zajcev na začetku je pri nizkih p neodvisno od začetne količine lisic. Na splošno večja začetna količina lisic skrajšuje periodo prav tako tudi večja začetna količina zajcev, vendar pa je perioda močno odvisna tudi od začetnega razmerja med zajci in lisicami.



Slika 18: Spreminjanje populacije zajcev in lisic, če dodamo še volkove, ki jedo lisice.

2.3 Lačni volkovi

Poglejmo, kaj se zgodi, če dodamo tudi volkove, ki jedo lisice (menda sicer volkovi precej rajši jedo srne, ampak recimo, da srn ni), iz nekega razloga pa ne jedo zajcev. Primer dinamike je na sliki 18. Poglejmo si še, kako pojav volkov vpliva na količino zajcev in lisic, primerjava je na sliki 19. Vidimo, da volkovi skrajšujejo periodo dinamike. Hkrati pa tudi večajo nihanje populacije zajcev in lisic, tako navzdol kot navzgor.



Slika 19: Spreminjanje populacije zajcev in lisic brez in z volkov. Dinamika brez volkov je prikazana s svetlejšo barvo, z njimi pa s temnejšo.

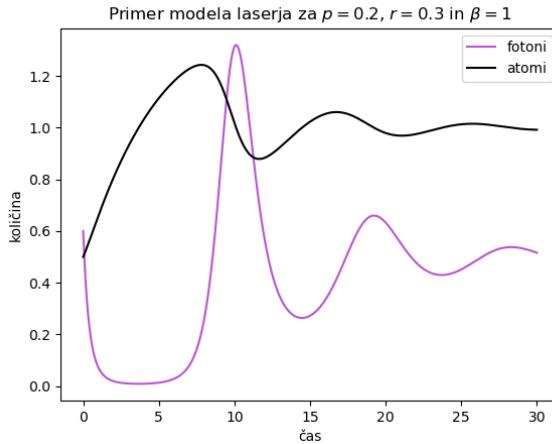
3 Populacijski model laserja

Na koncu obravnavajmo še fazni portret za populacijski model laserja s konstantnim črpanjem. Tu imamo fotone in atome, ki se spreminja v skladu z diferencialnimi enačbami:

$$\dot{f} = \frac{f}{p}(a - 1) \quad (19)$$

$$\dot{a} = r - pa(\beta f - 1) \quad (20)$$

p je spet parameter, r pa predstavlja faktor moči črpanja. Konstanti B_1 in B_2 sta združeni v parametru $\beta = \frac{B_2}{B_1}$. Količina β je pozitivna količina, saj sicer model divergira.



Slika 20: Model laserja pri nekih reprezentativnih parametrih β , p in r .

Primer modela laserja je prikazan na sliki 20. Količina fotonov najprej upade, nato pa začne nihati okoli konstantne vrednosti, proti kateri konvergira. Število atomov prav tako niha.

Poiščimo stacionarne točke. Tega se lotimo podobno kot v prejšnjem poglavju ($\dot{f} = 0$ in $\dot{a} = 0$). Dobimo stacionarni točki $(a, f) = (\frac{r}{p}, 0)$ in $(a, f) = \left(1, \frac{1}{\beta} \left(\frac{r}{p} - 1\right)\right)$. Že tukaj vidimo, da očitno obstaja neka omejitev za r in p , še bolj natančno pa bomo to dognali kasneje.

Za okolico točke $(\frac{r}{p}, 0)$ velja:

$$\dot{f} \approx \frac{f(r-p)}{p^2} \quad (21)$$

$$\dot{a} \approx r(1-a) \quad (22)$$

Rešitev teh dveh enačb je:

$$f(t) = f_0 e^{\frac{r-p}{p}t} \quad (23)$$

$$a(t) = (a_0 - 1)e^{-rt} + 1 \quad (24)$$

V drugi stacionarni točki $\left(1, \frac{1}{\beta} \left(\frac{r}{p} - 1\right)\right)$ pa dobimo:

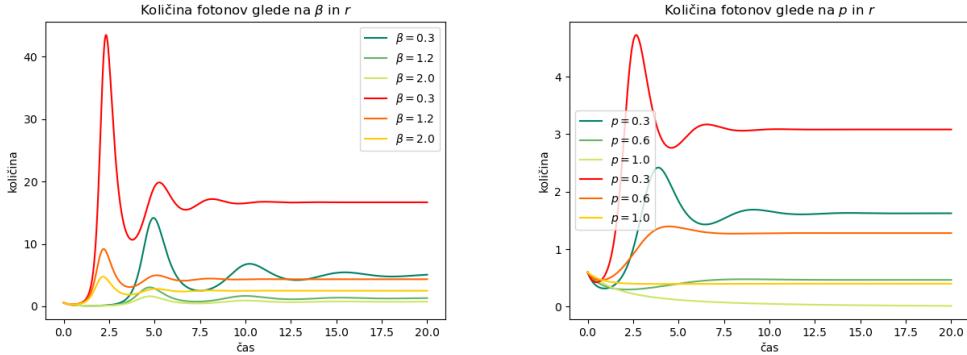
$$\dot{f} \approx \frac{(r-p)}{p^2 \beta} (a-1) \quad (25)$$

$$\dot{a} \approx -p\beta f + r - p \quad (26)$$

To nam da (premaknjeni) kroženje v faznem diagramu kot pri zajcih in lisicah

3.1 Odvisnost od parametrov

Preverimo sedaj, kaj se spremeni, ko spremenjamo parametra β in r , glej sliko 21.



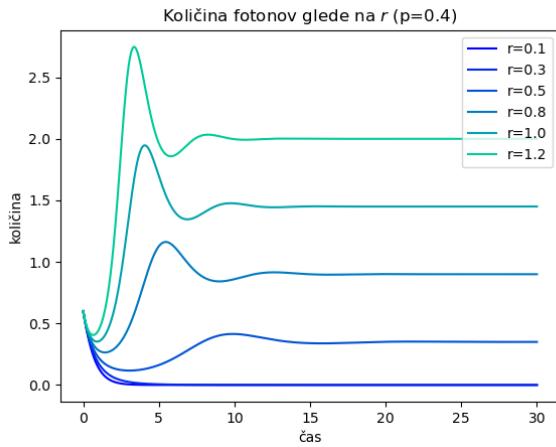
Slika 21: Leva slika predstavlja model laserja pri različnih parametrih β in r . Zelena barva predstavlja $r = 0.5$, oranžna pa $r = 1.2$. Desna slika pa obravnava parametra p in r . Tokrat zelena barva predstavlja $r = 0.9$, oranžna pa $r = 1.4$.

Vidimo, da β malo spremeni periodo in precej spremeni amplitudo. Parameter r pa močno spremeni oboje. Močno pa dinamiko spremeni tudi parameter p , če je premajhen, število fotonov upade in nikoli ne doseže konstantnega izseva laserja kot si želimo. Vidimo, da mora biti količnik $\frac{r}{p}$ dovolj velik (črpanje mora biti dovolj veliko), da laser sploh sveti. To pa se vidi tudi na grafu 22, kjer je narisani model s spremenjanjem samo parametra r .

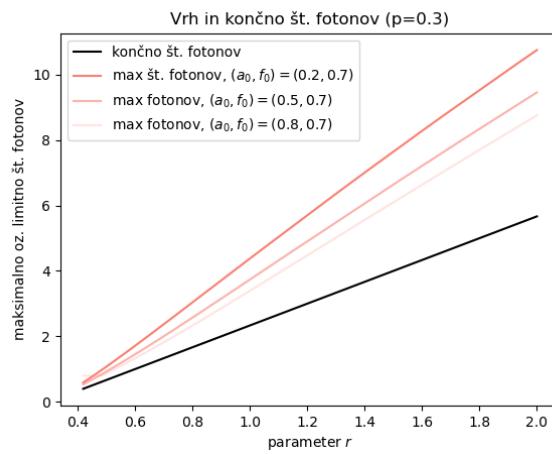
Od zdaj naprej bomo dinamiko poenostavili in parameter β postavili na 1.

3.2 Limitna in maksimalna vrednost fotonov

Atomi neodvisno od vsega limitirajo proti vrednosti 1, medtem ko to ne drži za fotone. Kot smo že prej videli fotoni dosežajo maksimalno vrednost, potem pa limitirajo proti neki konstantni vrednosti. Poglejmo kakšni sta ti dve vrednosti (slika 23). Izkaže se, da je limitna vrednost (število fotonov po dolgem času) ni odvisna od začetnih pogojev, kar je intuitivno logično, saj bi morala biti končna vrednost odvisna samo od napajanja (in seveda učinkovitosti). Maksimalna vrednost fotonov ter njihova limitna vrednost pa obe naraščata linearno z močjo črpanja.

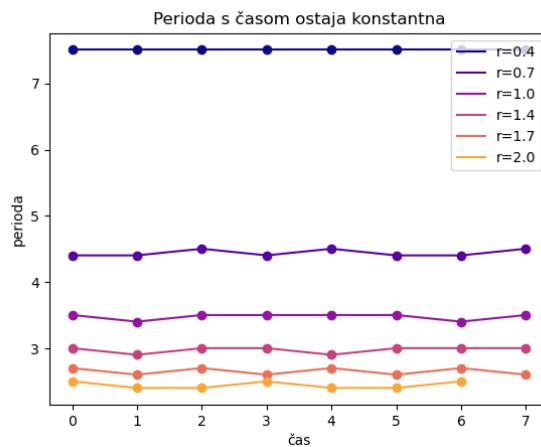


Slika 22: Spreminjanje le parametra r pri $\beta = 1$ in $p = 0.4$.



Slika 23: Maksimalno število fotonov ter njihova limitna vrednost v odvisnosti od moči črpanja.

3.3 Perioda

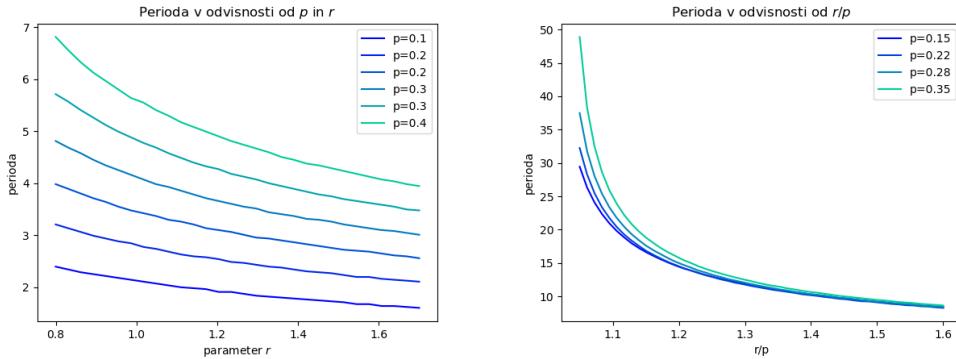


Slika 24: Preverimo, če je perioda konstantna s časom. Na sliki je perioda za različne vrednosti r .

Oglejmo si bolj natančno odvisnost periode od parametrov. Najprej pa preverimo, če s časom ostaja

enaka, glej sliko 24. Vidimo, da trditev drži.

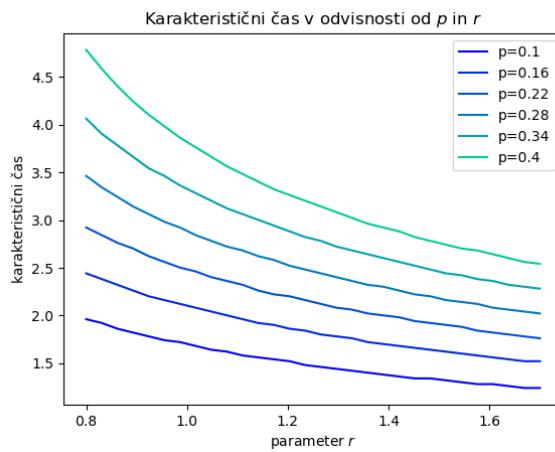
Poglejmo si sedaj, kako je perioda odvisna od parametrov p in r , glej sliko 25. Razpon vrednosti teh dveh parametrov je omejen, saj mora biti količnik $\frac{r}{p}$ zadost velik, da laser sploh zasveti. Na desnem grafu slike 25 vidimo, da je ta kritična vrednost $\frac{r}{p} = 1$, saj predstavlja pol (ki je isti za vse vrednosti parametra p ter začetne pogoje).



Slika 25: Odvisnost periode od parametrov r in p na levi in v odvisnosti od r/p na desni. Vidimo, da ima funkcija periode na desnem grafu pol pri 1.

Vidimo, da perioda narašča z večanjem parametra p in pada z naraščanjem parametra r . Če vstavljamо različne začetne pogoje, opazimo, da perioda od njih ni odvisna.

Za konec poglejmo še, kako se s parametri spreminja karakteristični čas, to je čas od začetka do (prvega) maksimuma (glej sliko 26). Spet ta čas obstaja samo za $\frac{r}{p} > 1$. Tukaj se zgodi zelo podobno kot pri periodi.



Slika 26: Odvisnost karakterističnega časa od parametrov r in p .

3 Model zajci-lisice

Model sestavimo tako, da predstavimo dve populaciji: populacijo zajcev (Z) in lisic (L), ki se na enakem območju bojujeta za preživetje. Predpostavimo še, da je zajcem dostopno neomejeno veliko hrane, in lahko - brez plenilcev - njihovo število raste eksponentno. Zadnja predpostavka je v tem, da naj bodo v našem modelu edina lisičja hrana zajci, kar pomeni da lisice ne morejo preživeti, če požrejo vse zajce. Model v diferencialnih enačbah zapišemo takole

$$\begin{aligned}\dot{Z} &= \alpha Z - \beta ZL \\ \dot{L} &= -\gamma L + \delta ZL,\end{aligned}$$

z uvedbo novih spremenljivk

$$\mathcal{L} = \frac{\beta}{\alpha}L \quad ; \quad \mathcal{Z} = \frac{\delta}{\gamma}Z \quad ; \quad \tau = t\sqrt{\alpha\gamma} \quad ; \quad p = \sqrt{\alpha/\gamma}, \quad (2)$$

pa se model prepiše v

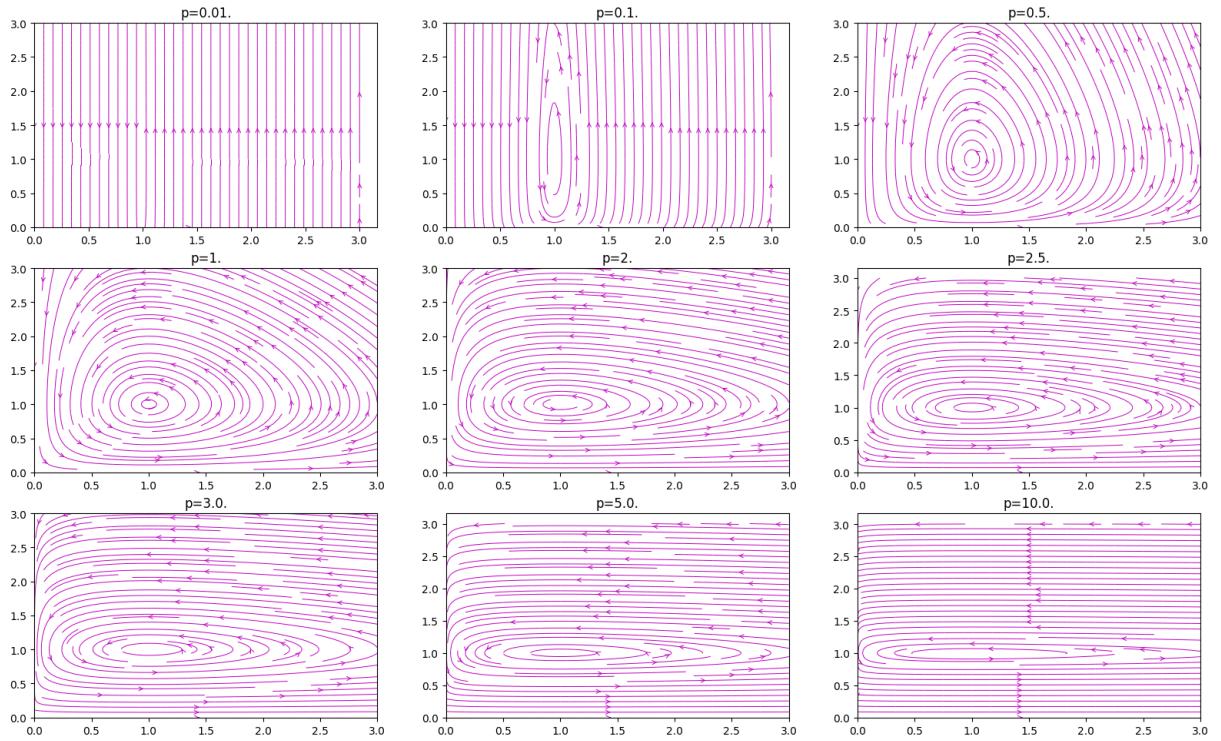
$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{Z}} &= p\mathcal{Z}(1 - \mathcal{L}) \\ \dot{\mathcal{L}} &= \mathcal{L}/p(\mathcal{Z} - 1).\end{aligned}$$

Število parametrov se zmanjša iz 4 na 1, poleg katerega nam preostaneta kot parametra še začetna pogoja. Ker imamo sedaj samo dve opazljivki, lahko njuno medsebojno odvisnost rišemo tudi preko faznih diagramov v ravnini. Narišimo nekaj različnih faznih diagramov za tak model, ti so prikazani na sliki 12. Pri majhnih vrednosti p se diagram skrči v osi zajcev in razširi v osi lisic, pri velikih parametrih p pa se zgodi ravno obratno. Poiščimo zdaj zastojne točke sistema diferencialnih enačb za ta model. Nastavimo $\dot{\mathcal{Z}} = \dot{\mathcal{L}} = 0$, in dobimo dve rešitvi: $(\mathcal{Z}, \mathcal{L}) = (0, 0)$ in $(\mathcal{Z}, \mathcal{L}) = (1, 1)$. Sedaj bomo prave diferencialne enačbe razvili do 1. reda okoli teh dveh zastojnih točk. Če to naredimo za točko $(0, 0)$ dobimo sistem

$$\frac{d}{d\tau} \begin{bmatrix} \mathcal{Z} \\ \mathcal{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & -1/p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{Z} \\ \mathcal{L} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

ki je že v diagonalni obliki, iz njega pa takoj preberemo obe lastni vrednosti, ki sta $\lambda_1 = p$ in $\lambda_2 = -1/p$. V bližini prve točke torej velja

$$\begin{aligned}\mathcal{Z} &= \mathcal{Z}_0 e^{p\tau} \\ \mathcal{L} &= \mathcal{L}_0 e^{-\tau/p}.\end{aligned} \quad (4)$$

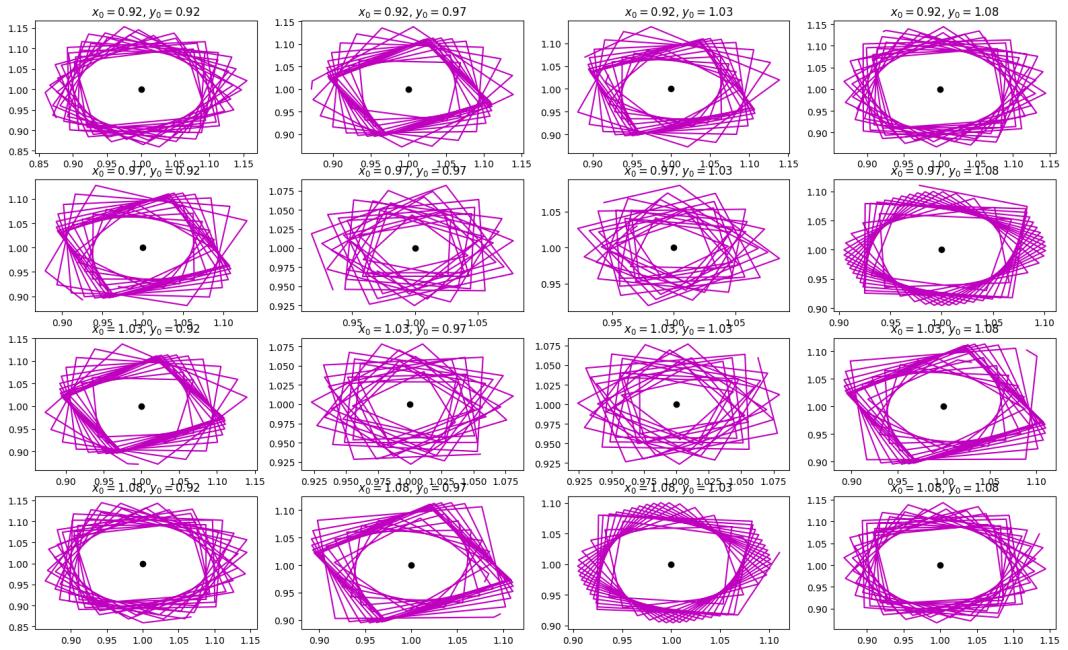


Slika 12: Fazni diagrami sistema zajci-lisice za različne parametere p .

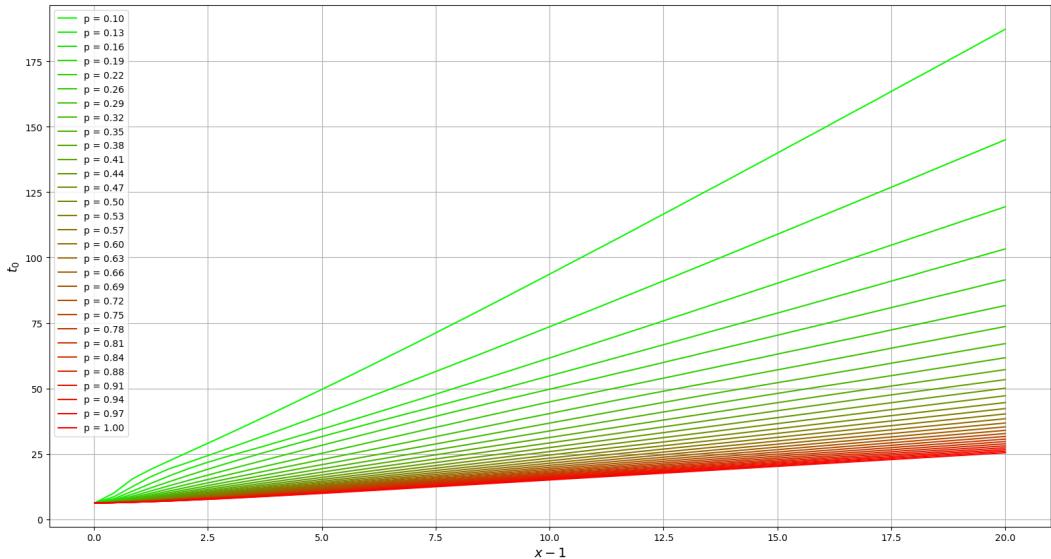
Zajci rastejo eksponentno, populacija lisic pa eksponentno pada. Poglejmo si sedaj še bolj zanimivo točko $(1, 1)$, okoli katere iz faznih diagramov pričakujemo kroženje. Z identičnim postopkom pridemo do lastnih vrednosti $\lambda_{1,2} = \pm i$, kar zares pomeni kroženje okoli točke $(1, 1)$. Brezdimenzijski čas τ postane v tem primeru kar parameter kroženja, torej za cel obhod okoli točke $(1, 1)$ potrebuje ta sistem $\tau = 2\pi$ časa. Na sliki 13 lahko vidimo obnašanje faznega diagrama v bližini zastojne točke.

3.1 Obhodni časi

Na sliki 14 lahko vidimo kako je obhodni čas okrog zastojne točke odvisen od oddaljenosti od le-te, za različne p .



Slika 13: Fazni diagrami v bližini zastojne točke (1,1).



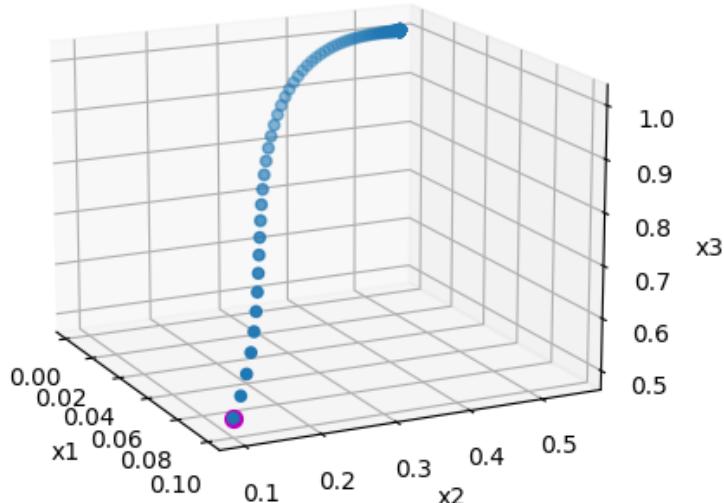
Slika 14: Obhodni časi v odvisnosti od odmaknjenosti od stacionarne točke (1,1) za različne p .

3.2 Tekmovanje za isti vir hrane

Poglejmo si zdaj malo bolj kompleksen sistem, kjer med sabo tekmujejo za isti vir hrane tri vrste x_1 , x_2 in x_3 , ki hkrati tudi interagirajo med sabo. Dinamiko opišemo s sistemom enačb:

$$\dot{x}_i = r_i x_i \left(1 - \left(\frac{\sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} x_j}{K_i} \right) \right) \quad (5)$$

pri tem K_i označuje kapaciteto okolja za določeno vrsto, α_{ij} interakcijski faktor med vrstama, r_i pa faktor rasti vrste. Za poljuben nabor parametrov rešimo sistem enačb. Fazni prostor je prikazan na sliki 15. Poizkušal sem spremenjati parametre, da bi odkril še kakšen zanimiv fazni prostor, vendar neglede na parameterje pride do hitre convergence, h končnemu stanju.

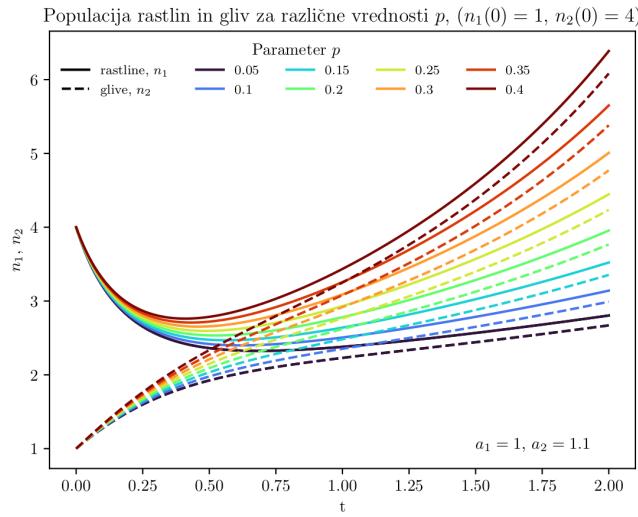


Slika 15: Fazni prostor kompetitivnega modela. Vijolčna točka označuje začetno stanje

Naloga 3:

- vrednostna stanja v odnosnosti od prostih parametrov
- amplituda zavojnih tokov.
- DCS, frekvencija/priroda relativnosti

Dana uocenja in odgovor



Slika 13: Spreminjanje populacije gliv in rastlin v odvisnosti od časa za različne parametre p .

Populacijski model laserja

Analizirajmo še populacijski model laserja s konstantnim črpanjem. Enačbe se glasijo

$$\begin{aligned}\dot{f} &= -\alpha f + B_1 a f, \\ \dot{a} &= -\beta a - B_2 a f + R.\end{aligned}$$

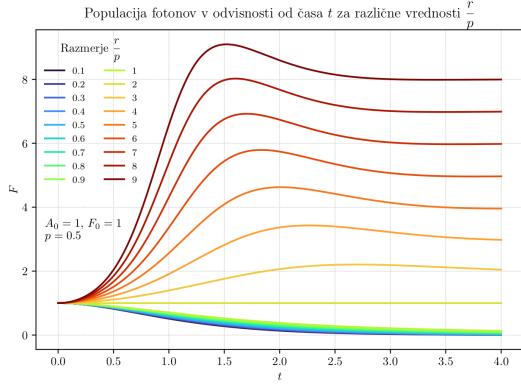
V brezdimenzijski obliki pa

$$\begin{aligned}\dot{F} &= \frac{F}{p}(A - 1), \\ \dot{A} &= r - pA(F + 1),\end{aligned}$$

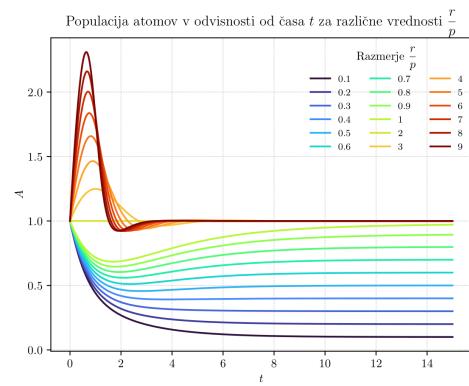
pri čemer smo predpostavili $B_1 = B_2 = B$. Stacionarni točki sta

$$(A = \frac{r}{p}, F = 0) \text{ in } (A = 1, F = \frac{r}{p} - 1).$$

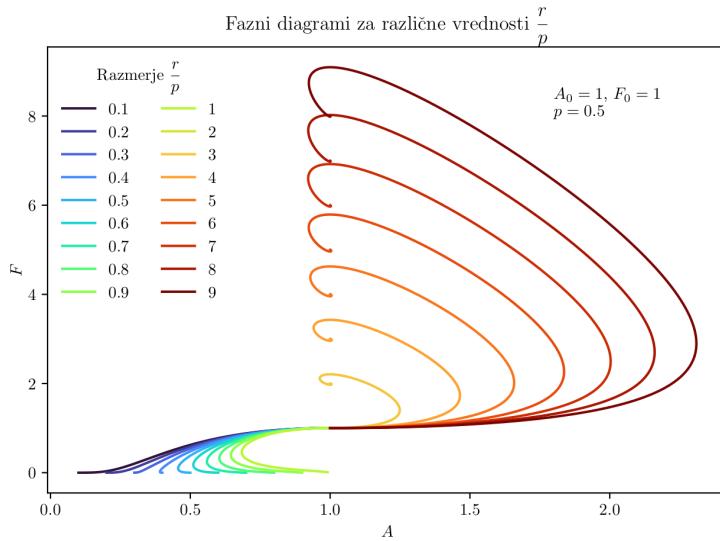
Na slikah [14] je prikazana populacija fotonov v odvisnosti od časa, na sliki [15] pa populacija atomov. Slika [16] prikazuje fazni diagram za nekaj različnih vrednosti razmerja $\frac{r}{p}$. Na slikah [17] in [18] pa sta prikazana fazna diagrama za različne vrednosti začetnih pogojev F_0 in A_0 .



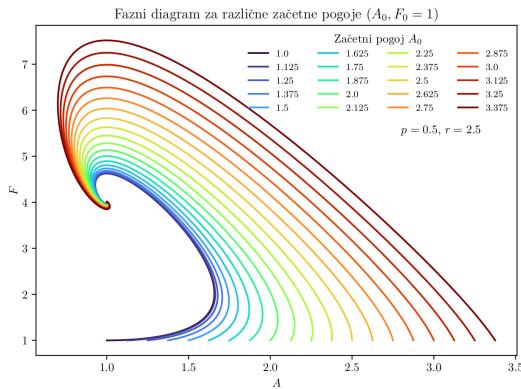
Slika 14: Število fotonov v odvisnosti od časa za nekaj različnih vrednosti razmerja $\frac{r}{p}$.



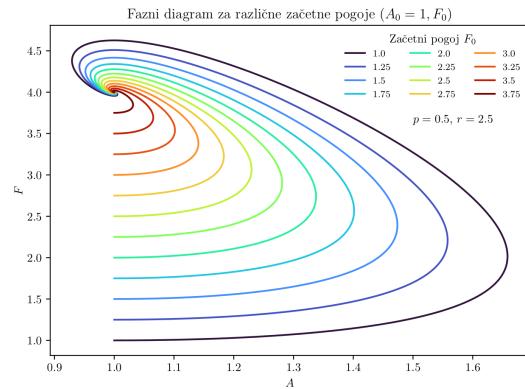
Slika 15: Število atomov v odvisnosti od časa za nekaj različnih vrednosti razmerja $\frac{r}{p}$.



Slika 16: Fazni diagram za nekaj različnih vrednosti razmerja $\frac{r}{p}$.

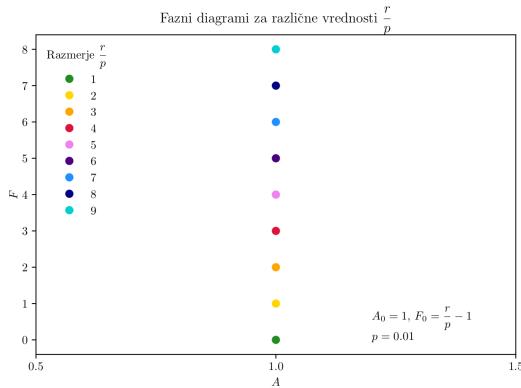


Slika 17: Fazni diagram za nekaj različnih vrednosti začetnega pogoja A_0

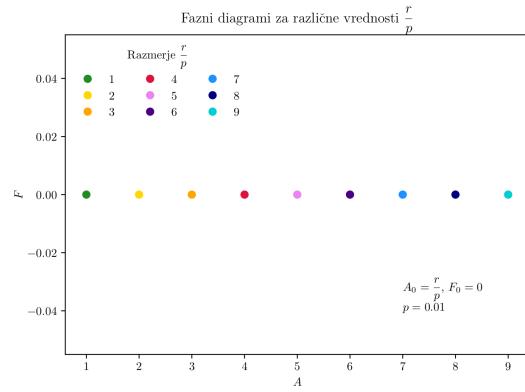


Slika 18: Fazni diagram za nekaj različnih vrednosti začetnega pogoja F_0

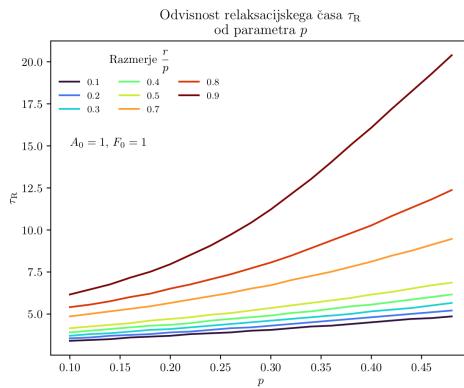
Fazna diagrama na slikah [19] in [20] prikazujejo ravnovesna stanja v obeh stacionarnih točkah. Na slikah [21] in [22] je prikazana odvisnost karakterističnega časa relaksacijskih oscilacij v odvisnosti od parametra p za različne vrednosti razmerja $\frac{r}{p} < 1$. Slika [23] pa prikazuje enako odvisnost za razmerja $\frac{r}{p} > 1$. Vidimo, da krivulje na sliki [23] ne izgledajo gladko. Menim, da je za to kriv kriterij, po katerem določamo karakteristični čas. Ko se število fotonov za vse naslednje čase od asimptotske vrednosti razlikuje za manj kot ϵ , ki je naša izbrana toleranca, to izberemo za karakteristični čas. Metode se ni dalo popraviti niti z različnimi diskretizacijami, niti z različnimi vrednostmi ϵ .



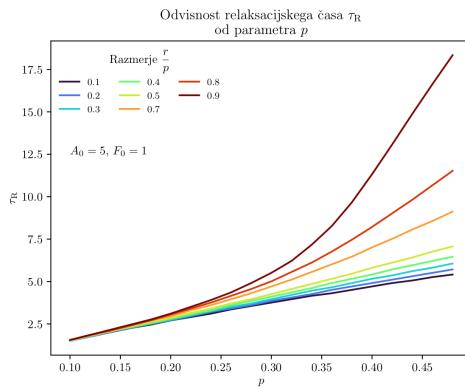
Slika 19: Ravnovesna stanja stacionarne točke ($A = 1, F = \frac{r}{p} - 1$).



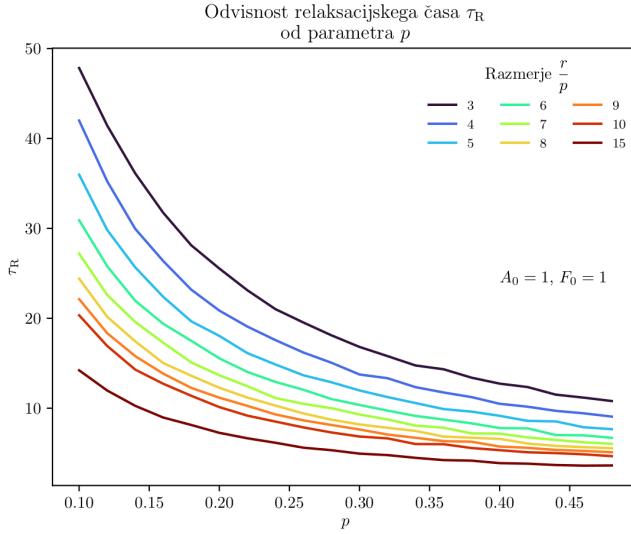
Slika 20: Ravnovesna stanja stacionarne točke ($A = \frac{r}{p}, F = 0$).



Slika 21: Odvisnost karakterističnega časa re-laksacijskih oscilacij od parametra p . Začetni pogoj je ($A_0 = 1, F_0 = 1$).

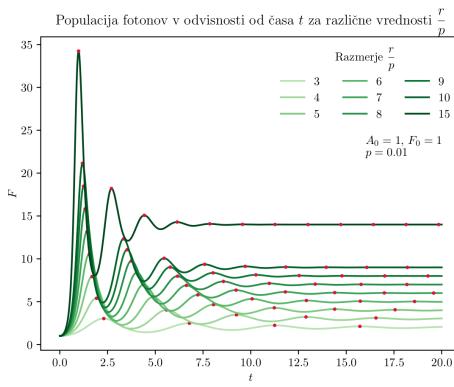


Slika 22: Odvisnost karakterističnega časa re-laksacijskih oscilacij od parametra p . Začetni pogoj je ($A_0 = 5, F_0 = 1$).

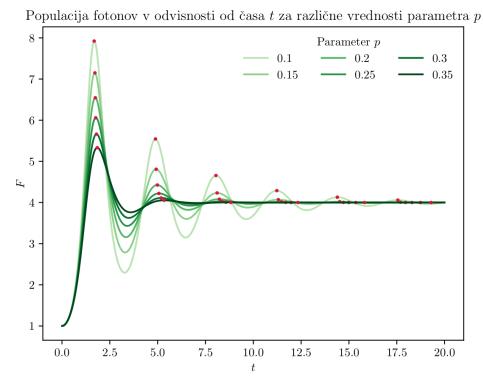


Slika 23: Odvisnost karakterističnega časa relaksacijskih oscilacij od parametra p . Začetni pogoj je ($A_0 = 1, F_0 = 1$).

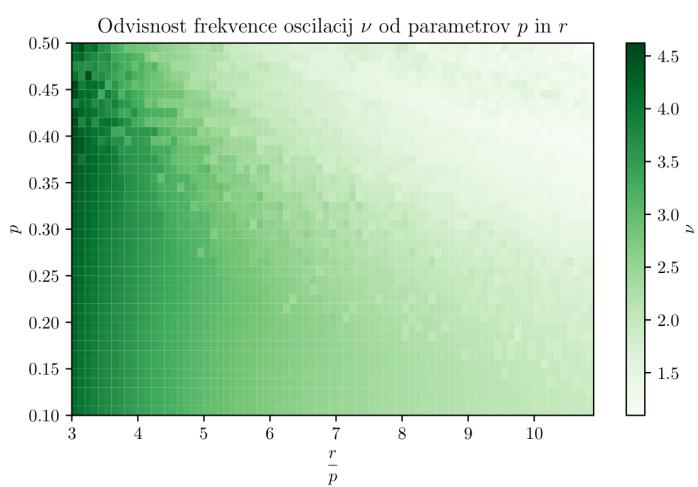
Poglejmo si še odvisnost frekvence oscilacij od parametrov r in p . Slika 24 prikazuje časovno odvisnost števila fotonov za različne vrednosti $\frac{r}{p}$. Slika 25 prav tako prikazuje časovno odvisnost števila fotonov, le da tokrat opazujemo obnašanje za različne vrednosti parametra p . Na sliki 26 analiziramo frekvenco v odvisnosti od parametra p in razmerja $\frac{r}{p}$. Frekvanca s parametrom p pada, z manjšanjem razmerja $\frac{r}{p}$ pa narašča.



Slika 24: Časovna odvisnost števila fotonov za različne vrednosti $\frac{r}{p}$.



Slika 25: Časovna odvisnost števila fotonov za različne vrednosti p .



Slika 26: Odvisnost frekvence relaksacijskih oscilacij od parametrov p in r .

3 Orientacija modela laserja iz predavanj

3.1 Enačbe in rezultati

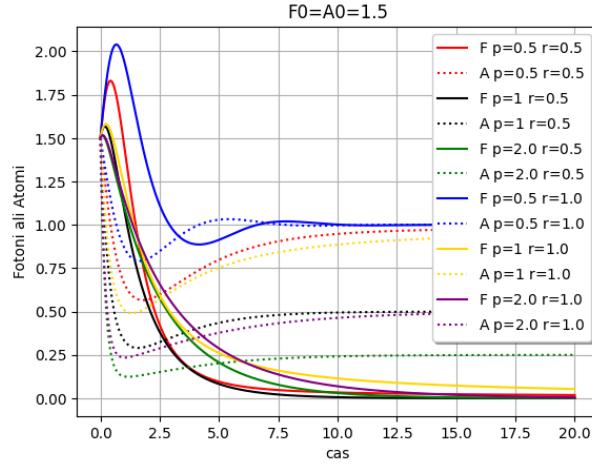
Model laserja je dokaj podoben strukturno modelu zajcev in lisic. Torej kot pri modelu zajcev in lisic najprej napišem diferencialne enačbe, le da tukaj delam za atome in fotone.

$$\begin{aligned}\dot{f} &= -\alpha \cdot f + B_1 \cdot a \cdot f \\ \dot{a} &= -\beta \cdot a - B_2 \cdot a \cdot f + R\end{aligned}\tag{5}$$

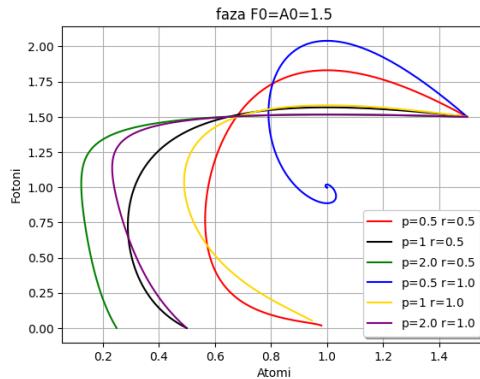
Model smo na predavanjih prepisali v brezdimenzijsko obliko za parametra $p = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ in $r = B_1 \cdot R \sqrt{\frac{1}{\alpha^3 \beta}}$.

$$\begin{aligned}\dot{f} &= \frac{F}{p}(A - 1) \\ \dot{a} &= r - pA(F + 1)\end{aligned}\tag{6}$$

Pokazali smo tudi stacionarne točke za model $(A, F) = (\frac{r}{p}, 0)$ in $(A, F) = (1, \frac{r}{p} - 1)$. Zadnja nakazuje na potrebo po zadostnem črpanju za parameter r.

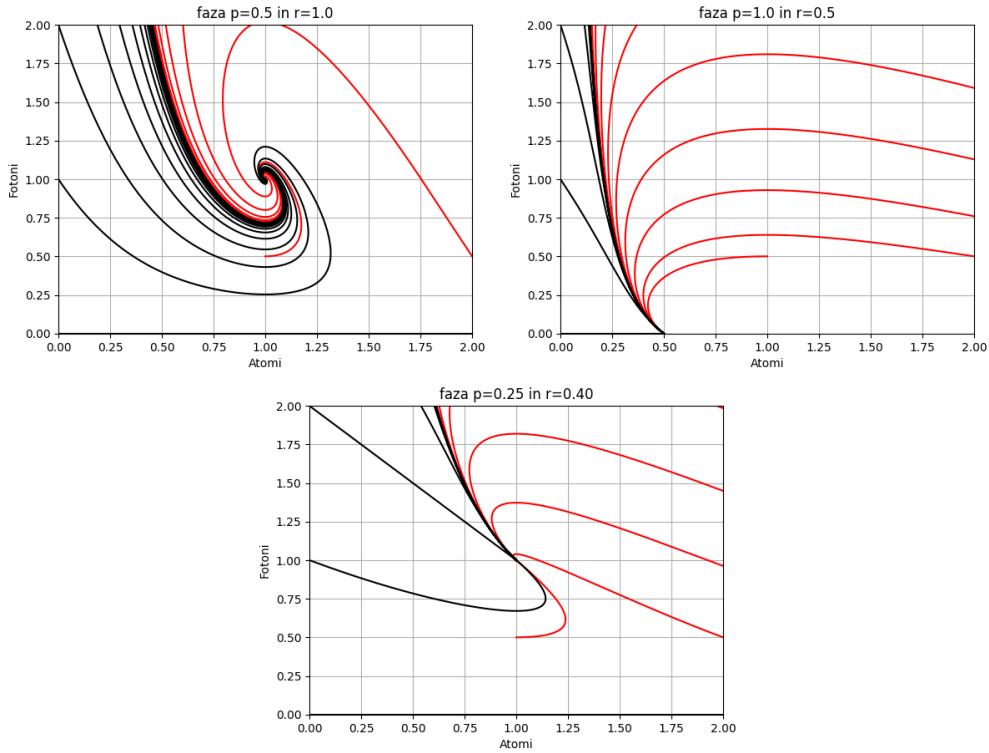


Slika 11: Rešitev sistema enačb za laser ob različnih parametrih.



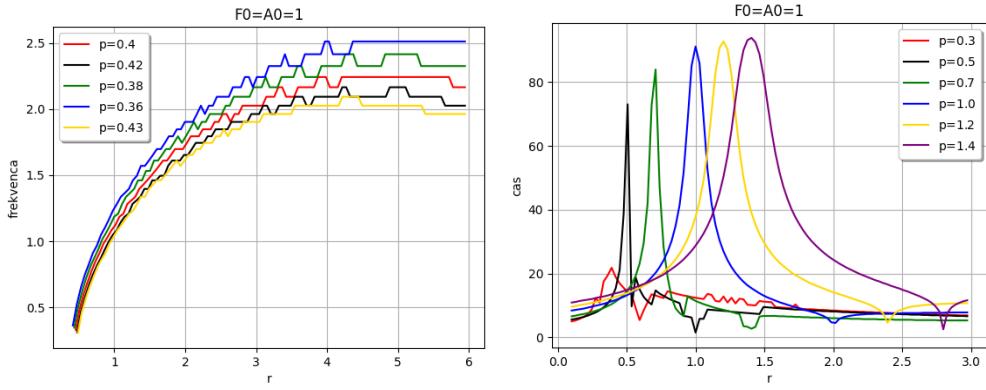
Slika 12: Fazni prostor za sliko 11, laser deluje za modro krivuljo.

Sliko 11 lahko prikažem v faznem prostoru slika 12. Opazim nekaj zanimivega za različne kombinacije parametrov. Vidim da edino v primeru modre krivulje laser deluje. Torej lahko potrdim nujnost črpanja. V primeru $r \leq p$ laser ne bo deloval, saj število fotonov pade na nič, kar lahko opazim na sliki 11, kjer sem risal rešitev sistem enačb. V nadaljevanju si ogledam še nekaj drugih slik faznega prostora za stacionarni točki.



Slika 13: Fazni prostor za različni stacionarni točki in kombinacije parametrov, ko laser deluje in ko ne deluje.

Rdeče krivulje na sliki 13 prikazujejo fiksno populacijo fotonov in variiranje populacije atomov, črne pa prikazujejo fiksno populacijo atomov in variranje populacije fotonov. Ko laser deluje lahko opazim dva različna pojava. Kroženje okoli stacionarne točke in pa pojav, kjer do kroženja ne pride. Torej v enem primeru populacija niha, v drugem pa ne. Za primer ko laser ne deluje opazim stacionarno točko. Položaj te na x osi je glede na enačbe in prejšnje primere odvisen od izbranega parametra p in r.



Slika 14: Prikaz frekvence in relaksacijskega časa oscilacij v odvisnosti od črpanja. Pri relaksaciji v vrhovih krivulj velja, da je $p = r$.

V zadnjem delu sem si še ogledal frekvenco in karakteristični relaksacijski čas v odvisnosti od fiksnega parametra p in variranja parametra r . Relaksacijske oscilacije lahko opazim že na sliki 11, kjer se vidijo oscilacije v primeru modre krivulje. Preden se populacija fotonov ustali, ta oscilira. Zanimala me je odvisnost frekvence osciliranja in relaksacijskega časa od črpanja. Če si ogledam modro krivuljo pri relaksacijskih časih opazim zanimivo stvar, ki jo lahko apliciram na ostale krivulje. Krivulja vrh doseže takrat, ko sta parametra p in r enaka.

