

Sklopljeno nihalo

Tadej Petrič

9. 10. 2018

1 Teorija

1.1 Gibanje matematičnega nihala

Naj bo vztrajnostni moment nihala $J = Ml^2$, kjer je M masa uteži, l pa oddaljenost uteži od vrha nihala. Navor izhaja le iz uteži. Opišemo ga lahko z enačbo $\tau_a = -Mgl \sin \theta$, kjer je θ kot med nihalom in navpičnico, g pa gravitacijski pospešek. Predpostavimo, da je $\theta \ll 1 \implies \sin \theta \approx \theta$

$$\begin{aligned}\tau_a &= J \frac{d^2 \theta}{dt^2} \\ -Mgl \theta &= J \frac{d^2 \theta}{dt^2} \\ \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{Mgl}{J} \theta &= 0 \\ \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \theta &= 0\end{aligned}$$

Ko rešimo enačbo za θ dobimo:

$$\begin{aligned}\theta &= A \cos(\omega t) \\ \omega &= \sqrt{\frac{g}{l}}\end{aligned}$$

kjer je ω frekvenca

1.2 Gibanje pravega nihala

Enačbe pridobimo podobno, le J je bolj splošen in odvisen od oblike predmeta.

$$\omega = \sqrt{\frac{Mgl}{J}}$$

Za našo nalogo potrebujemo J za votel valj in za valj.

$$\begin{aligned}\text{valj: } J &= \frac{mr^2}{4} + \frac{mh^2}{12} \\ \text{votel valj: } J &= m \frac{R^2 + r^2}{4} + \frac{mh^2}{12}\end{aligned}$$

1.3 Sklopljeno nihalo

Če dva enaka nihala povežemo z vzmetjo dobimo sklopljeno nihalo.

1.3.1 Prvo lastno nihanje

Prvo lastno nihanje nastane, ko nihala istočasno spustimo iz enakega kota. Vzmet je takrat ves čas enako napeta in ne vpliva na nihanje. Nihali se gibljeta enako kot če ne bi bila povezana.

$$\theta_1 = \theta_2 = A \cos(\omega_1 t)$$

1.4 Drugo lastno nihanje

Drugo lastno nihanje nastane, ko nihala istočasno spustimo iz nasprotnega kota. Vzmet deluje na nihanje in ga pospeši, gibanje pa je še vedno sinusno. Gibanje tudi ostane simetrično saj vzmet deluje enako na oba nihala.

$$\begin{aligned}\frac{d^2\theta}{dt^2} + \theta \frac{mgl + 2kd^2}{J} &= 0 \\ \theta_1 &= -\theta_2 = A \cos(\omega_2 t) \\ \omega_2 &= \sqrt{\frac{mgl + 2kd^2}{m}}\end{aligned}$$

kjer je, k predstavlja koeficient vzmeti, m pa maso nihala.

1.5 Utripanje

Utripanje je gibanje pri katerem eno nihalo začne pri skrajni legi, drugo pa na sredini, v mirovanju. Preko vzmeti se energija prenese na drugo nihalo. Nastalo gibanje je linearna kombinacija lastnih nihanj. Pokaže se, da lahko katero koli gibanje sklopljenega nihala predstavimo kot linearno kombinacijo lastnih nihanj.

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \frac{A}{2} \cos(\omega_1 t) + \frac{A}{2} \cos(\omega_2 t) \\ \theta_1 &= A \cos\left(t \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right) \cos\left(t \frac{\omega_2 + \omega_1}{2}\right) \\ \theta_2 &= \frac{A}{2} \cos(\omega_1 t) - \frac{A}{2} \cos(\omega_2 t) \\ \theta_2 &= A \sin\left(t \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right) \sin\left(t \frac{\omega_2 + \omega_1}{2}\right)\end{aligned}$$

Gibali utripata s frekvenco $\omega = \omega_2 - \omega_1$.

2 Praktično delo

2.1 Podatki o nihalu

Nihalo je sestavljeno iz dveh valjev. Prvi valj je poln in daljši, predstavlja palico. Drugi je pripet ob koncu prvega valja, predstavlja utež.

2.1.1 Lastnosti palice

$$r = 45mm$$

$$h = 98cm$$

$$m = 210g$$

$$\text{Pozicija vzmeti} = 10.5cm$$

Izračunamo lahko vztrajnostni moment palice.

$$J_p = \frac{mr^2}{4} + \frac{mh^2}{3}$$

$$J_p = 0.06733kgm^2$$

2.1.2 Lastnosti uteži

$$R = 215mm$$

$$r = 45mm$$

$$h = 8.4cm$$

$$l = 87.5cm$$

$$m = 1025g,$$

kjer je l oddaljenost središča uteži od vrha nihala.

Izračunamo lahko vztrajnostni moment uteži (za premik uporabimo Steinerjev izrek).

$$J_u = m \frac{R^2 + r^2}{4} + \frac{mh^2}{12} + ml^2$$

$$J_u = 0.79773kgm^2$$

2.2 Samostojna nihala

Na obeh nihalih smo izvedli meritve

2.2.1 Prvo nihalo

$$t_{30} = 55.4s$$

$$\omega_1 = 0.54Hz$$

$$t_{01} = 1.85$$

2.2.2 Drugo nihalo

$$t_{30} = 55.6s$$

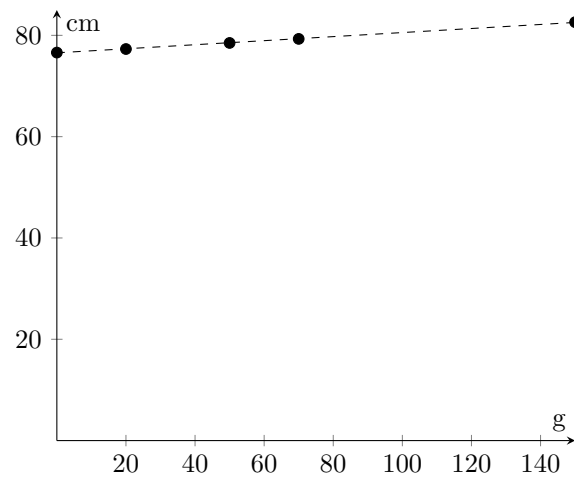
$$\omega_2 = 0.54Hz$$

$$t_{02} = 1.85s$$

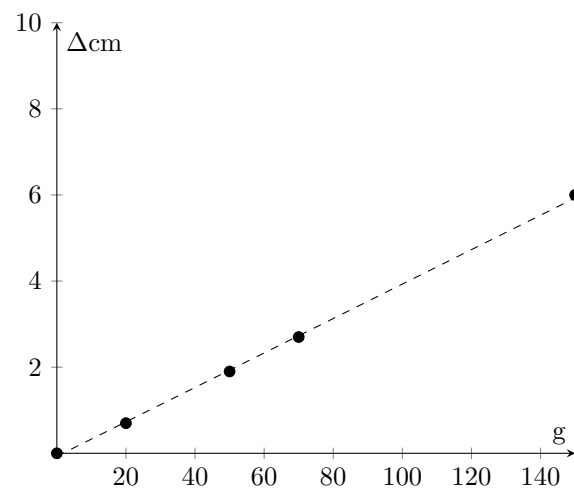
2.3 Vzmet

Koeficient vzmeti smo izračunali tako, da smo izmerili razteg vzmeti glede na pripeto utež.

masa	0g	20g	50g	70g	150g
dolžina	76.6cm	77.3cm	78.5cm	79.3cm	82.6cm
razteg	0cm	0.7cm	1.9cm	2.7cm	6cm



Slika 1: dolžina vzmeti v odvisnosti od mase



Slika 2: sprememba dolžine vzmeti v odvisnosti od mase

Z računalnikom naredimo linearno regresijo, ki nam poišče koeficient vzmeti.

$$k = 24 \frac{N}{m}$$

2.4 Nihalo

Vztrajnostni moment nihala je $J = J_p + J_u = 0.865 \text{ kgm}^2$.

2.5 Meritve

Rezultati v tabelah so oblike meritev:število nihajev.

2.5.1 Prvo lastno nihanje

Nihalo	1:20	2:20	3:20	4:20	avg:20	avg:1
1	36.8s	37.1s	36.9s	36.9s	36.9s	1.85s
2	37.0s	37.3s	37.0s	37.0s	37.1s	1.85s

Napaka je zanemarljiva.

$$t_1 = 1.85s$$
$$\omega_1 = 3.396 \text{ Hz}$$

2.5.2 Drugo lastno nihanje

Nihalo	1:20	2:20	3:20	4:20	avg:20	avg:1
1	35.9s	35.8s	36.1s	36.0s	35.6s	1.8s
2	36.0s	36.1s	36.1s	36.0s	36.1s	1.8s

Napaka je zanemarljiva.

$$t_2 = 1.80s$$
$$\omega_2 = 3.491 \text{ Hz}$$

2.5.3 Utripanje

Nihajni čas

Nihalo	1:20	2:20	3:20	4:20	avg:1
1	36.9s	35.8s	35.6	35.8s	1.79s
2	35.9s	35.9s	35.8s	35.9s	1.79s

Napaka je zanemarljiva.

$$t_3 = 1.790s$$
$$\omega_3 = 3.510 \text{ Hz}$$

Čas med dvema mirovanje mirovanjema Absolutna napaka je tukaj večja (Ocenjena na $\Delta t_4 = \pm 1s$) zaradi težavnosti ugotavljanja mirovanja nihala. Še vedno pa je relativna napaka v tisočinkah, kar je zanemarljivo.

$$t_4 = 72.2s$$
$$\omega_4 = 0.087 \text{ Hz}$$

Nihalo	1:4	2:4	3:4	4:4	5:4	avg:4	avg:1
1	288.6s	288.4s	287.2s	288.7s	289.4s	288.5s	72.1s
2	288.5s	290.2s	288.6s	289.8s	288.8s	289.2s	72.3s

2.5.4 Teorija

	t_1	t_2	t_3	t_4
Izmerjeno	1.85s	1.80s	1.79s	72.2s
Izračunano	1.85s	1.80s	1.83s	70.0s
	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
Izmerjeno	3.40s	3.49s	3.51s	0.087s
Izračunano	3.39s	3.48s	3.44	0.090s