

Difuzija tekočin

Tadej Strah

3. november 2022

Izvedeno 13. oktober

1 Uvod

Lomni zakon se v sredstvu z zvezno spremenljivim lomnim količnikom glasi

$$\cos \varphi = \frac{\text{text}}{n(z)},$$

v diferencialni obliki pa se izraža kot

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{n} \frac{dn}{dz} \quad (1)$$

V kivetu se žarek odkloni za $\alpha_N = \frac{d}{n} \frac{dn}{dz}$. Na meji tekočina-steklo se žarek še dodatno zlomi, ob predpostavki majhnega kota, in upoštevanju $n_{air} \approx 1$ velja

$$\alpha_Z = n\alpha_N = d \frac{dn}{dz}.$$

Za majhne kote potem za odmik žarka na steni velja

$$Y = bd \frac{dn}{dz}.$$

Obnašanje na meji med alkoholom in vodo opisuje difuzijska enačba

$$Df_{zz} = f_t,$$

kjer je D difuzijska konstanta, f pa koncentracija alkohola. Osnovna rešitev te enačbe (njena Greenova funkcija) je

$$G(z, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{z^2}{4Dt}}$$

Časovni in prostorski razvoj za poljuben začetni pogoj dobimo z integracijo

$$f(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(z - \tilde{z}, t) u(\tilde{z}) d\tilde{z},$$

kjer funkcija $u(z)$ predstavlja robne pogoje; v našem primeru je to Heavyside-ova funkcija.

Rešitev za koncentracijo se potem glasi

$$f = \frac{f_0}{2} \left[1 + \theta \left(\frac{z}{\sqrt{4Dt}} \right) \right], \quad (2)$$

kjer je $\theta(x)$ standardna error funkcija.

Če privzamemo, da je lomni količnik linearna funkcija koncentracije, velja

$$n(z) = \frac{n_0 + n_1}{2} + \frac{n_1 - n_0}{2} \theta \left(\frac{z}{\sqrt{4Dt}} \right).$$

V naši geometriji potem velja

$$Y = bd \frac{dn}{dz} = bd(n_1 - n_0) \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{z^2}{4Dt}}$$

Izkaže se, da je ploščina po krivuljo od časa neodvisna

$$S = \int Y(z) dz = kbd(n_1 - n_0), \quad (3)$$

kjer je $k = \frac{a+b}{a}$, a pa razdalja med izvorom divergentnega snopa žarkov in kiveto.

Maksimalni odmik je sorazmeren $t^{-1/2}$

$$Y_{max} = bd \frac{n_1 - n_0}{\sqrt{4\pi Dt}} = \frac{S}{k\sqrt{4\pi Dt}}.$$

2 Potrebščine

- kiveta notranje debeline $d = (12 \pm 0.5)$ mm in debelino sten $d_s = (1.5 \pm 0.2)$ mm
- laserski izvor svetlobe (rdeč)
- etanol, voda
- pipeta 10ml
- steklena paličica nagnjena za 45°

3 Izvedba meritev, obdelava podatkov in rezultati

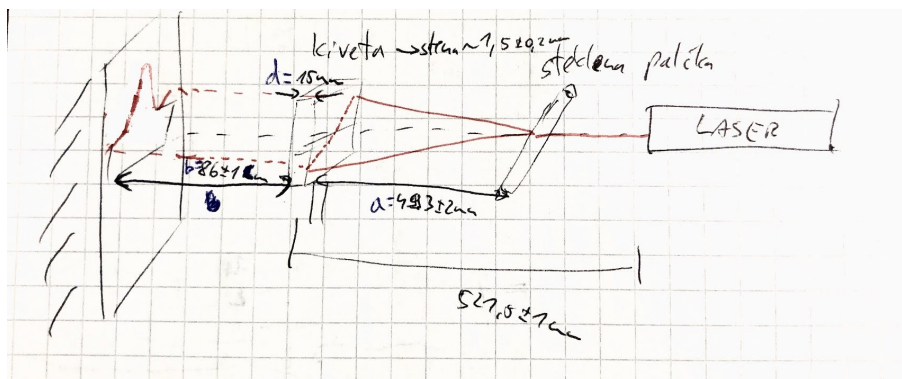
Z navadnim merskim trakom pomerimo vse prostorske dimenzije eksperimenta. Notranja debelina kivete znaša $d = (12 \pm 0.5)$ mm, debelina njenih steklenih sten pa $d_s = (1.5 \pm 0.2)$ mm. Dodatni odmik na zaslonu zaradi loma v tej plasti stekla zanemarimo. Razdalja med zaslonom in kiveto znaša $b = (86 \pm 1)$ mm.

Razdalja med stekleno paličico in kiveto pa je $a = (493 \pm 2)$ mm.

Postavitev vidimo na skici 1.

Razliko lomnih količnikov preberemo v navodilih $n_1 - n_0 = 0.029$.

V kiveto nalijemo do polovice etanol, potem pa s pipeto previdno na dno dolijemo vodo. Etanol ima manjšo gostoto in zaplava na vodi; dobimo dve ločeni plasti, na njuni meji pa opazujemo difuzijo.



Slika 1: Postavitev eksperimenta

Laser in stekleno paličico postavimo tako, da na paličici razcepljeni žarek pod kotom 45° vpada na kiveto, tako da mejo voda-alkohol seka na sredini kivete. Še preden v kiveto natočimo tekočino na zaslonu zarišemo nelomljen žarek. Ko v kiveto natočimo obe tekočini na zaslonu opazimo lomljen žarek - zapisujemo si višino maksimuma in vsake toliko narišemo celotni žarek. Same meritve vidimo na listu v prilogi.

Ploščino pod grafom ocenimo s pomočjo spletne aplikacije, ki pusti uvoz slike, nastavitev ustrezne skale, ter nato izračuna ploščino območja, ki ga označimo. Ploščino na ta način pomerimo pri treh časih, ter izračunamo po formuli 3. Rezultate prikazuje tabela 1. Opazimo, da se ploščina s časom počasi manjša; za razliko od teorije, ki napoveduje konstantno ploščino.

t [min]	S[cm ²]
0	11 ± 1
30	9.5 ± 1
155	8.5 ± 1
S_{ref}	8.2 ± 0.4

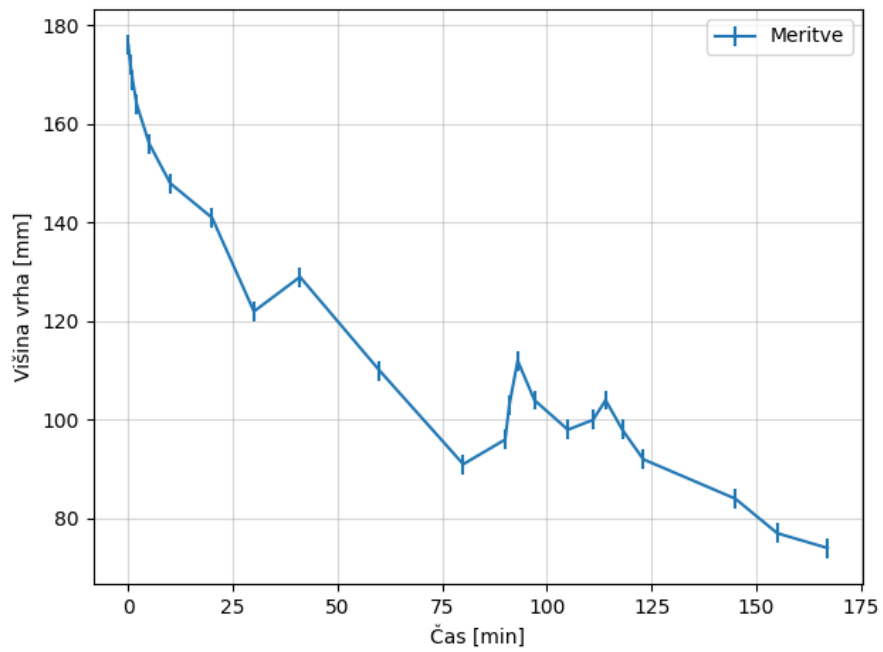
Tabela 1: Izmerjene in izračunana (S_{ref}) ploščina pod grafom. Napako meritev ocenimo 'na oko'.

Višino vrha lomljenega žarka zarisujemo na vsakih nekaj minut; odvisno od hitrosti spreminjanja višine. Od začetka merimo bolj pogosto, ter nato spet okoli 90-te minute, ko opazimo nepričakovano obnašanje - vrh se vmes ponovno dvigne. Takrat spet merimo bolj na gosto.

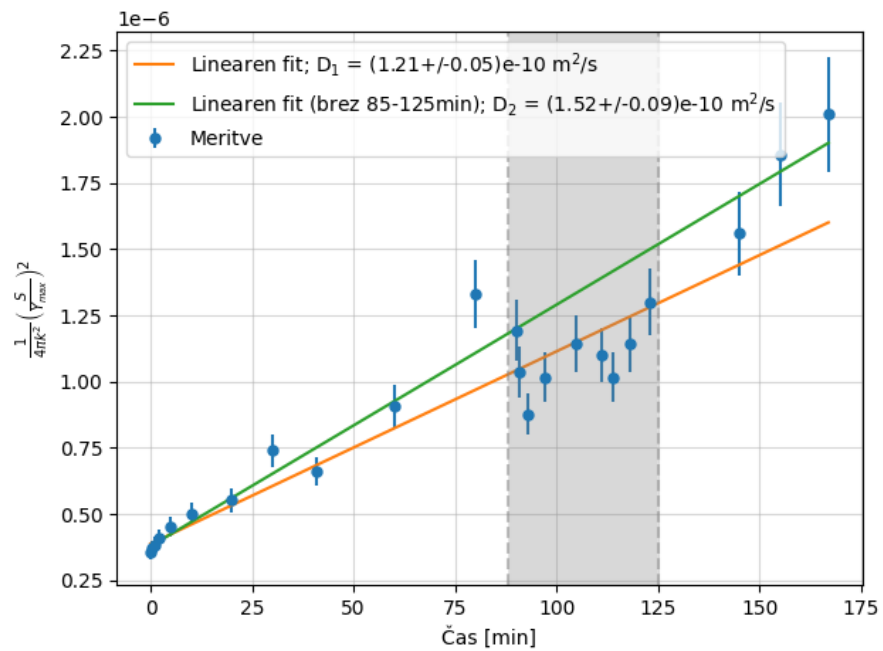
Meritve digitaliziramo v .csv format, obdelamo jih s programskim jezikom python in nekaterimi priročnimi knjižnicami:

- *matplotlib* - risanje grafov
- *uncertainties* - pravilno propagiranje napak (oz. negotovosti). Knjižnica nam ponudi razred spremenljivke z negotovostjo, nato pa ob množenju, seštevanju, logaritmiranju... pravilno propagira napake. Knjižnica spremenljivke obravnava kot (Gaussove) distribucije, napake (pri propagiranju skozi funkcije) pa računa v prvem (linearnem) približku. Več o tem v dokumentaciji dostopni na: https://pythonhosted.org/uncertainties/tech_guide.html#linear-propagation-of-uncertainties

Višino vrha v odvisnosti od časa vidimo na grafu 2.



Slika 2: $Y_{max}(t)$. Okoli 90-te minute opazimo nenavadno obnašanje.



Slika 3: Naklon prilagojene premice je ravno difuzijska konstanta. Drugi fit naredimo brez točk v sivem območju.

Če obrnemo enačbo za višino vrha, dobimo lahko enačbo

$$\frac{1}{4\pi k^2} \left(\frac{S}{Y_{max}} \right)^2 = Dt.$$

Na graf narišemo funkcijo $\frac{1}{4\pi k^2} \left(\frac{S}{Y_{max}} \right)^2$ v odvisnosti od časa, strmina pa je torej difuzijska konstanta D . Točke med 90-to in 125-to minuto odstopajo od trenda, zato naredimo eno prilagajanje vključno s temi točkami in eno brez njih. Rezultat vidimo na grafu 3, difuzijska konstanta pa znaša

$$D_1 = (1.2 \pm 0.1) \cdot 10^{-10} m^2 s^{-1}$$

oz.

$$D_2 = (1.5 \pm 0.1) \cdot 10^{-10} m^2 s^{-1}$$

Opazimo, da ima nekaj čisto začetnih in nekaj čisto končnih točk podoben naklon - na oba dela prilagodimo premici in dobimo $D_{prvih5} = (2.5 \pm 0.7) \cdot 10^{-10} m^2 s^{-1}$ in $D_{zadnje3} = (5 \pm 0.3) \cdot 10^{-10} m^2 s^{-1}$

Referenčna vrednost difuzijske konstante iz Wikipedije za naši dve tekočini znaša

$$D_{ref} = 8.4 \cdot 10^{-10} m^2 s^{-1}.$$

3.1 Komentar

Izmerjene vrednosti difuzijske konstante močno odstopajo od referenčne; in sicer izmerimo cca. 5-krat premajhno vrednost. Ne znam zagotovo oceniti, zakaj pride do takšnega odstopanja. Lahko da so pri meritvi referenčne uporabili rahlo drugačne tekočine (npr. deionizirana voda itd.). Precejšen vpliv ima tudi (drugačna) temperatura, malo manj zunanji tlak.

Po cca. 90 minutah opazimo nenavadno oscilacijo višine maksimuma lomljenega žarka, ki je ne znam pojasniti. Očitno pa gre za proces, ki ga teorija navadne difuzije z začetnim pogojem stopnice ne opisuje.