

# Vrtavka

---

Tadej Strah

21. marec 2022

Izvedeno ..... 14. marec

## 1 Uvod

Pri tej vaji obravnavamo obnašanje rotacijsko simetrične vrtavke, katere os vrtenja je vpeta/podprta v eni točki.

Definiramo tri različne osi:

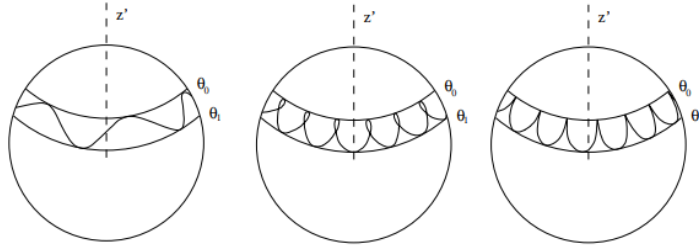
- Geometrijska os vrtavke  $\vec{z}$ . Naša vrtavka je rotacijsko simetrično telo, ki ima eno glavno os tenzorja vztrajnostnega momenta  $J_{33}$  v smeri simetrijske osi, drugi dve glavni osi pa sta pravokotni nanjo. Vztrajnostna momenta okrog teh dveh osi sta enaka ( $J_{11} = J_{22}$ ). Ostale komponente tenzorja so enake 0.
- Vektor kotne hitrosti  $\vec{\omega}$ .
- Vektor vrtilne količine  $\vec{\Gamma} = (\Gamma_i)$ , ki je s kotno hitrostjo  $\vec{\omega} = (\omega_i)$  povezan prek vztrajnostnega tenzorja;  $\Gamma_i = J_{ij}\omega_j$ . V splošnem gre tu za tenzorsko množenje; vrtilna količina in kotna hitrost sta vektorja, vztrajnostni moment pa tenzor (matrika).

Potrebno je izbrati še primeren koordinatni sistem. Vrtenje najlažje opišemo v lastnem sistemu vrtavke, kjer je os  $z$  poravnana z osjo vrtenja,  $x$  in  $y$  pa sta pravokotni; torej imajo koordinate smeri glavnih osi tenzorja vztrajnostnega momenta. V tem sistemu lahko vrtilno količino po komponentah zapišemo kot:

$$\Gamma_x = J_{11}\omega_x, \quad \Gamma_y = J_{22}\omega_y, \quad \Gamma_z = J_{33}\omega_z. \quad (1)$$

Na vrtavko, ki ni podprta v težišču, deluje zaradi sile teže navor  $M = mgl \sin \theta$ . Za simetrično vrtavko pod vplivom teže se še da natančno izpeljati njeno gibanje, vendar je enostavneje računati v približku 'hitre vrtavke'; to je pri pogoju, da je kinetična rotacijska energija mnogo večja od potencialne ( $1/2 J \omega_z^2 \gg 2mgl$ ).

Gibanje osi vrtavke ponazorimo z gibanjem točke po kroglji s središčem v vpetju vrtavke. Osnovno gibanje je lahko premikanje te točke po krožnici, čemur pravimo precesija; lahko pa se giblje tudi kot



Slika 1: Gibanje osi simetrične vrtavke pri različnih začetnih pogojih.

to prikazuje slika 1, čemur pravimo nutacija. Naklonski kot  $\theta$  se spreminja med  $\theta_0$  in  $\theta_1$ ; v približku hitre vrtavke velja

$$\cos \theta_0 - \cos \theta_1 \approx \frac{J_{11}}{J_{33}} \frac{2mgl}{J_{33}\omega_z^2} \sin^2 \theta_0. \quad (2)$$

Spreminjanje kota  $\theta$  je odvisno od začetnih pogojev (in dušenja), vendar (ob odsotnosti dušenja) niha med skrajnima legama z nutacijsko kotno hitrostjo  $\omega_N$  :

$$\omega_N = \frac{J_{33}}{J_{11}} \omega_z, \quad (3)$$

in se obenem giblje okrog navpičnice v prostoru s precesijsko hitrostjo  $\omega_{pr}$  :

$$\omega_{pr} = \frac{mgl}{J_{33}\omega_z}. \quad (4)$$

Vrtenje okoli lastne osi, precesijo in nutacijo lahko opišemo kot spreminjanje Eulerjevih kotov

## 2 Potrebščine

- krogla s podnožjem in priborom (palica, utež in ploščica z vzorcem)
- kompresor pod mizo
- stroboskop
- stoparica

## 3 Naloga

Izmeri precesijsko ( $\omega_{pr}$ ) in nutacijsko kotno hitrost ( $\omega_N$ ) v odvisnosti od kotne hitrosti ( $\omega_z$ ); meri pri vsaj treh kotnih hitrostih. Meritev ponovimo pri različnih položajih uteži; torej pri različnih  $J_{11}$ . Izmerjene vrednosti primerjaj z izračunanimi in jih ustrezno tabeliraj.

## 4 Izvedba meritev, obdelava podatkov in rezultati

Meritve opravljamo z vrtavko na zračni blazini, tako da minimiziramo trenje. Izgubam se vseeno ne izognemo popolnoma, zato vrtenje vzdržujemo s curkom zraka tangentnim na vrtavko.

Vrtavka je sestavljena iz masivne kovinske krogle, diska s kontrastnim vzorcem, palice in po višini nastavljive uteži. Hitrost vrtenja določamo s pomočjo stroboskopa; ko se ujameta frekvenca vrtenja

RPM $\omega_z [s^{-1}]$	$925 \pm 20$ $97 \pm 2$			$800 \pm 20$ $84 \pm 2$			$700 \pm 20$ $73 \pm 2$		
h [mm]	0	$30 \pm 0.5$	$50 \pm 0.5$	0	$30 \pm 0.5$	$50 \pm 0.5$	0	$30 \pm 0.5$	$50 \pm 0.5$
$\omega_{pr-1} [s^{-1}]$	$2.4 \pm 0.2$	$2.9 \pm 0.2$	$3.4 \pm 0.1$	$4.1 \pm 0.2$	$3.5 \pm 0.1$	$4.9 \pm 0.3$	$3.3 \pm 0.2$	$4.1 \pm 0.2$	$5 \pm 0.5$
$\omega_{pr-2} [s^{-1}]$	$2.5 \pm 0.3$	$3.0 \pm 0.2$	/	$3.9 \pm 0.2$	/	/	/	/	/
$\omega_N [s^{-1}]$	$39 \pm 5$	$41 \pm 5$	$24 \pm 5$	$24 \pm 5$	$21 \pm 5$	/	$21 \pm 5$	$22 \pm 5$	$15 \pm 5$

Tabela 1: Obdelane meritve.  $\omega_{pr-1}$  je hitrost precesije pri majhnem kotu (cca.  $15^\circ$ ),  $\omega_{pr-2}$  pa pri večjem kotu (cca.  $40^\circ$ ).

RPM $\omega_z [s^{-1}]$	$925 \pm 20$ $97 \pm 2$			$800 \pm 20$ $84 \pm 2$			$700 \pm 20$ $73 \pm 2$		
h [mm]	0	$30 \pm 0.5$	$50 \pm 0.5$	0	$30 \pm 0.5$	$50 \pm 0.5$	0	$30 \pm 0.5$	$50 \pm 0.5$
$\omega_{pr-1} [s^{-1}]$	$2.2 \pm 0.2$	$2.6 \pm 0.1$	$2.9 \pm 0.1$	$2.6 \pm 0.2$	$3.1 \pm 0.1$	$3.4 \pm 0.3$	$3.0 \pm 0.1$	$3.5 \pm 0.1$	$3.8 \pm 0.1$
$\omega_N [s^{-1}]$	$38.6 \pm 0.3$	$33.3 \pm 0.1$	$29 \pm 0.1$	$33.4 \pm 0.1$	$28.8 \pm 0.1$	$25.3 \pm 0.1$	$29.2 \pm 0.1$	$25.2 \pm 0.1$	$22.2 \pm 0.1$

Tabela 2: Izračunane vrednosti.

in frekvenca stroboskopa se nam navidezno zdi, da kontrastni vzorec miruje. Pri tem moramo paziti, da se slučajno v času med dvema bliskoma vrtavka celoštevilsko krat ne zavrti, saj bi bil efekt enak. Frekvenco precesije merimo s štoparico 'na oko', frekvenco nutacije pa podobno kot frekvenco vrtenja, le da gledamo, kdaj vrh vrtavke navidezno lepo kroži, in ne niha zaradi nutacije.

## 4.1 Meritve

Merimo pri treh različnih frekvencah vrtenja - 925 RPM, 800 RPM in 700 RPM oz.  $97 s^{-1}$ ,  $84 s^{-1}$  in  $73 s^{-1}$ .

Vsakič merimo pri treh različnih oddaljenostih uteži od krogle - 0 mm, 30 mm in 50 mm.

Čas precesije merimo s štoparico - 3-krat po 10 obhodov. Nutaciji pripišemo veliko napako, saj je bilo zaradi slabe zatemnitvenosti prostora težko določiti točno frekvenco.

Napako frekvence precesije grobo ocenimo iz standardne deviacije več meritev, ki jih opravimo. Napaka je relativno velika, saj je bilo zelo težko vrtavko zavrteti brez nutacije; ob nutaciji pa je toliko težje določiti hitrost preceije. Sicer ta problem dokaj dobro odpravimo z meritvijo 10-ih precesijskih obhodov.

V nekaj primerih izmerimo precesijo še pri večjem kotu; opazimo, da je znotraj napake precesija neodvisna od naklona vrtavke.

Tudi frekvenci vrtenja okoli navpične lastne osi pripišemo napako, saj je bilo z ponujeno opremo težko natančno uravnovesiti pospeševanje vrtavke zaradi tangentnega curka zraka in zaviranja zaradi zračnega upora. Ta frekvenca se je tako med izvajanjem posamezne meritve verjetno kar precej spreminjala.

Meritve prikazuje tabela 1.

## 4.2 Izračuni

Obnašanje vrtavke lahko v približku napovemo tudi analitično; iz geometrije poračunamo višino težišča in vztrajnostne momente v odvisnosti od položaja uteži, nato pa po enačbah 3 in 4 poračunamo frekvenco nutacije in precesije. Izračune prikazuje tabela 2 Izračuni najdemo na priloženem listu.