

T.
(043) 53
2021
V 459

TESIS CARRERA DE DOCTORADO EN FÍSICA

DETERMINACIÓN TEÓRICO-EXPERIMENTAL DE LA GEOMETRÍA DEL ESPACIO DE COLORES PERCIBIDOS BAJO INFLUENCIA DE UN ENTORNO CROMÁTICO

Mgter. Nicolás R. Vattuone
Doctorando

Dra. Inés Samengo
Directora

24 de Noviembre de 2021

Departamento de Física Médica – Centro Atómico Bariloche

Instituto Balseiro
Universidad Nacional de Cuyo
Comisión Nacional de Energía Atómica
Argentina

(Biblioteca Leo Falicov- CAB)

Inventario 24511

24/02/2022

Índice de contenidos

Índice de contenidos	iii
Índice de figuras	vii
Índice de tablas	xxi
Resumen	xxiii
Abstract	xxv
1. Introducción	1
1.1. Una breve ficción	1
1.2. Modelar la percepción	7
1.3. Filosofía de la percepción	8
1.4. Representaciones neuronales	10
1.5. Psicofísica	13
1.6. Relación entre percepción y representaciones neuronales	15
1.7. Geometría en espacios perceptuales	17
1.8. Espacio de colores	20
1.8.1. La naturaleza de la luz	21
1.8.2. Psicofísica de la visión	22
1.8.3. Absorción de luz en la retina	29
1.8.4. Luminosidad y cromaticidad	32
1.8.5. Oposición cromática	35
1.8.6. Inducción cromática	37
1.9. Objetivos de la tesis	38
2. Modelo del espacio de colores	39
2.1. Perceptos como clases de equivalencia	39
2.2. Una noción de distancia en el espacio de colores	45
2.3. Coordenadas perceptuales	48
2.4. Experimentos de Discriminación	50

2.4.1. Discriminación de un estímulo con respecto a su fondo (I)	50
2.4.2. Discriminación entre estímulos a fondo fijo (II)	52
2.5. Simetrías en el espacio de perceptos	53
2.5.1. Radialidad de la inducción cromática	53
2.5.2. Isotropía y homogeneidad	55
2.5.3. Implicaciones del modelo	57
2.5.4. Geometría euclídea	61
2.6. Discusión	64
3. En busca de las simetrías: una serie de experimentos perceptuales	65
3.1. Introducción	65
3.2. Métodos	66
3.2.1. Estímulos	66
3.2.2. Sujetos	67
3.2.3. Procedimiento	67
3.3. Resultados	72
3.3.1. Experimento I: umbrales de discriminación para $b = x$	72
3.3.2. Experimento II: umbrales de discriminación para $b \neq x$	75
3.3.3. Experimento III: Matcheo asimétrico	82
3.4. Discusión	85
4. Simetría de rotación en experimentos de discriminación	91
4.1. Experimento de Krauskopf y Gegenfurtner (KG)	92
4.1.1. Discriminación en el protocolo I	92
4.1.2. Discriminación en el protocolo II	95
4.1.3. Aplicación del modelo	96
4.2. Discusión	100
5. Categorías cromáticas y percepción: Experimento MD	103
5.1. Lenguaje y Percepción	103
5.2. Experimentos MD	106
5.3. Mínimos de discriminación según nuestro modelo perceptual	108
5.3.1. Estimación de parámetros	111
5.4. Resultados	113
5.5. Discusión	119
6. Inducción en la circunferencia cromática	121
6.1. El Experimento KW	121
6.2. Modelo para la inducción cromática en una curva	124
6.2.1. Aproximación de inducción pequeña y saturación rápida.	128

6.3. Resultados	130
6.3.1. Inducción media para una geometría arbitraria	138
6.4. Discusión	144
7. Memoria Cromática	147
7.1. Un juego de computadora para medir la memoria cromática.	150
7.2. Elección de coordenadas para los colores	152
7.3. Caracterización de la respuesta de los jugadores	154
7.4. Atractores y repulsores en el círculo cromático.	159
7.5. La métrica mnemónica de los colores.	163
7.6. Discusión	169
7.6.1. Calibración de los colores de la pantalla	170
7.6.2. Adquisición de los datos	173
7.6.3. Ajustando el error medio en la respuesta	174
7.6.4. Significancia de atractores y repulsores	176
8. Conclusiones	179
Bibliografía	185
Publicaciones asociadas	199
Agradecimientos	201
Acknowledgments	203

Índice de figuras

- 1.1. Imágenes ambiguas: (A) ¿Pato o conejo? La imagen original fue publicada por un ilustrado anónimo en 1892 en la revista *Fliegende Blätter* con el título *Welche Thiere gleichen einander am meisten?* (¿qué animales se parecen más entre sí?) (B) ¿Una copa o dos rostros enfrentados? El jarrón de Rubin es una ilusión desarrollada alrededor de 1915 por el psicólogo danés Edgar Rubin. Fue introducida por primera vez en su obra *Synsoplevede Figurer* (Figuras táctiles). (C) Aunque no parezca, los cuadrados A y B poseen exactamente el mismo tono de gris, pero el cambio de luminosidad del entorno hace que los percibamos distintos. La imagen original fue creada por Edward Adelson en 1905. (D) Tú eliges, ¿roja o azul? Las píldoras se ven distintas debido a la coloración del entorno, como puede apreciarse en el rectángulo inferior al colocar ambas píldoras sobre un fondo gris. Imagen tomada de <https://www.moillusions.com/blue-pill-red-pill-illusion/> 5

- 1.2. Esquema de los elementos que componen un Modelo Perceptual, para el caso de la visión. El estímulo corresponde a una onda electromagnética que suscita una respuesta en las células de la retina, las cuales envían la información al cerebro, produciéndose una experiencia perceptual en el sujeto, la cual sólo podemos caracterizar comportamentalmente. 7

1.3. Ejemplos de representaciones neuronales. (A) Imágenes de resonancia magnética funcional (fMRI) en las que se mide los niveles de oxigenación en sangre (BOLD) de distintas áreas del cerebro. En la imagen, el área iluminada es la llamada corteza visual, cuya actividad se correlaciona con la presentación de estímulos visuales. (Imagen extraída de https://www.invivonmr.ualberta.ca/Education/fmri.php) (B) Cuando una rata camina libremente por una arena, las células de lugar en el hipocampo disparan únicamente cuando la rata pasa por determinadas regiones del espacio. A la región en la que la célula dispara se le denomina su campo receptivo. En la Corteza entorrinal, las células grillas responden con un patrón hexagonal a medida que la rata se desplaza. (Imagen extraída de https://thebiologist.rsb.org.uk/biologist-features/what-when-and-where)	12
.....
1.4. Ejemplo de función psicométrica en un experimento de discriminación.	14
1.5. A: Diseño experimental de la condición de rivalidad binocular. Dos estímulos cromáticos diferentes eran continuamente presentados a cada ojo para inducir rivalidad perceptual de forma tal que solo uno de los dos colores era visto en un dado momento. Los estímulos cromáticos alternaban entre ambos ojos a una frecuencia de 4.25 Hz, de forma tal que ambos estímulos en un dado período de tiempo difería solo en la fase temporal. Los observadores indicaron instante a instante el color percibido presionando continuamente entre dos botones. B: Reconstrucción del magenta y el verde. El color representado en cada área visual durante la rivalidad binocular y la presentación en fase de los estímulos fue reconstruido y presentado en el espacio DKL. Cada punto indica el color reconstruido para un dado observador. La línea sólida negra representa el vector promedio de los colores reconstruidos para distintos observadores, la línea sólida coloreada indica el color objetivo (magenta o verde). La mitad del plano de color opuesto al color percibido aparece sombreado para indicar que la precisión del color reconstruido está por debajo de la precisión obtenida por azar. Sólo en las regiones V4v y V01 se logra que en la condición de rivalidad, la reconstrucción se asemeje al color que los observadores reportan como percibido. Imágenes extraídas y traducidas de Brouwer et al, 2009 [1]	17
1.6. Densidades espectrales típicas para distintas fuentes lumínicas. Imagen extraída y modificada de https://www.paintingframesplus.com/painting-frames-plus-website-colors.php	23

1.7. (A) Campo bipartito en el cual se comparan dos espectros. (B) Esquema del experimento de Color matching. El sujeto ajusta las intensidades de las tres fuentes hasta que logra un color indistinguible al mostrado en el otro lado del campo bipartito. Imagen extraída de http://jamie-wong.com/post/color/	25
1.8. Funciones de matcheo de color (CMF). Las curvas representan la intensidad de las fuentes monocromáticas correspondientes r (700 nm), g (546 nm) o b (435 nm) necesaria para que al combinarlas matcheen con una fuente de longitud de onda λ . Imagen extraída de http://jamie-wong.com/post/color/	28
1.9. A: Representación de un corte sagital del ojo, con una ampliación de un corte de la retina. Imagen extraída de https://www.blueconemonochromacy.org/es/how-the-eye-functions/ . B: Curvas de absorción de luz de las distintas células de la retina. Los máximos de absorción están en: 420 nm para los conos S, 498 nm para los bastones, 534 nm para los conos M y 564 nm para los conos L. Las curvas se obtuvieron mediante la mediciones microespectrofotométricas de los fotopigmentos de conos y bastones individuales extraídos de la retina de un hombre. Los haces de luz incidieron transversalmente sobre el segmento anterior aislado. Imagen extraída y traducida de [2]	29
1.10. Cone Fundamentals: Curvas que representan la sensibilidad de cada tipo de cono. Imagen extraída de http://es.wikipedia.org	32
1.11. Ejemplos de sistemas de representación de los colores. Imágenes extraídas de http://es.wikipedia.org	33
1.12. Funciones de luminosidad aparente. Distintas mediciones de la luminosidad relativa entre fuentes monocromáticas. La línea verde fue medida en condiciones escotópicas ([3]) y las negras en condiciones fotópicas([4–6]).	34
1.13. A: Esquema de la retina y las células que la componen (http://es.wikipedia.org). B: Esquema del sistema visual, desde los ojos hasta la corteza visual (Imagen extraída de http://psicologiapercepcion.blogspot.com/p/vision_15.html). C: Esquema de los campos receptivos de oposición cromática asociados a células en el Núcleo Geniculado Lateral.	35
1.14. Representación del espacio DKL. Los ejes cromáticos corresponden a las combinaciones $L - M$ y $S - (L + M)$, mientras que la dirección $L + M$ está asociada al canal acromático o de luminosidad. Imagen extraída de [7].	36
1.15. Ejemplo de inducción cromática. En cada columna, los tres cuadrados poseen la misma cromaticidad. Sin embargo, al ser presentados en entornos distintos, el color percibido cambia.	37

2.1. Ejemplo de paradigma de matcheo asimétrico: Manteniendo las otras tres cromaticidades fijas, el sujeto varía la cromaticidad x^β hasta percibir como iguales los cuadraditos a ambos lados.	41
2.2. Clases de equivalencia. Cuatro ejemplos diferentes de la estructura de la partición inducida por las clases de equivalencia. Las líneas negras representan clases de equivalencia y son obtenidas de graficar $\Phi_b(x)$ para x fijo (un valor de x para cada línea). La línea blanca diagonal contiene los representantes uniformes. A: El entorno no altera el color del estímulo, por lo que las clases de equivalencia son líneas rectas. B: El entorno induce clases de equivalencia lineales, como sugerido por [8] y [9]. C and D: Dos posibles particiones del espacio de colores en el caso en que el efecto perceptual del entorno es no lineal.	43
2.3. Representación del mapeo exponencial. Imagen tomada de https://math.stackexchange.com/questions/1408714/exponential-map-on-a-sphere-in	49
2.4. (A) y (B): protocolo de discriminación de un estímulo con respecto al fondo. Dependiendo de la cromaticidad del estímulo el sujeto percibirá la situación A o B, el Umbral Diferencial ϵ_I es el cambio que debe producirse en la cromaticidad del estímulo con respecto a la del fondo para que el sujeto pase de percibir A a percibir B. (C) Representación de la inducción cromática como una modificación en el mapeo entre el espacio de estímulos \mathcal{S} y el de perceptos \mathcal{P} . Las líneas verticales representan el mapeo dado por los representantes uniformes $x \mapsto [x // x]$, mientras que la línea diagonal representa el mapeo $x + \epsilon_I \mapsto [x + \epsilon_I // x]$	51
2.5. Para un fondo fijo b , se presentan al sujeto un estímulo de referencia fija y un estímulo cuya cromaticidad se varía hasta que el sujeto percibe a los estímulos como distintos (panel B).	52
2.6. La inducción cromática aumenta la oposición de colores. El mismo estímulo gris x adquiere un tono distinto al ser presentado en distintos fondos b . La cromaticidad adquirida es opuesta a la del fondo. Del lado derecho, se presenta el estímulo en un entorno de su misma cromaticidad.	54
2.7. Radialidad de la inducción cromática en el espacio \mathcal{P} . Cada punto en ese espacio representa un percepto. El entorno magenta induce un color cyan sobre un estímulo gris.	57

- 2.8. **Inducción cromática vista como un campo radial.** A-D: Cuatro ejemplos distintos del desplazamiento $t(d) - d$, correspondiente a las clases de equivalencia de la Fig. 2.4. En el subpanel 1 se grafica la forma funcional de $t(d) - d$ y en el subpanel 2 el campo de desplazamientos sobre el plano cromático isoluminiscente. (A): No hay interacción entre el entorno y el estímulo, por lo que $t(d) = d$ y el campo vectorial es nulo en todo el espacio. (B): $t(d) - d \propto d$, el campo vectorial es lineal. (C): $t(d) \propto \ln(1 + d/\lambda)$, para una distancia característica λ . El efecto del entorno es inicialmente repulsivo, se anula para $d = \lambda$ y luego se vuelve atractivo. (D): $t(d) - d \propto [1 - \exp(-d/\lambda)]$, por lo que el desplazamiento es siempre repulsivo y luego tiende a una constante para valores grandes. 58
- 2.9. Elipses de discriminación en coordenadas perceptuales para la geometría euclídea en distintas condiciones. Las mismas son descritas por la ecuación $\sum_{i,j} g_{ij} \epsilon_i \epsilon_j = 1$, donde (A) $g_{ij} = J_{ij}$ es el tensor métrico entre perceptos uniformes, (B) $g_{ij} = J_{ij}^I = t'(0)J_{ij}$ es el tensor métrico efectivo del protocolo I y (C) $g_{ij} = J_{ij}^{b=0}$ es el tensor métrico del protocolo II. 64
- 3.1. **Paradigmas experimentales de los experimentos de discriminación.** (A, B): Pantalla presentada en los experimentos de discriminación, realizadas con cromaticidad del entorno b igual a (A) o diferente (B) del color de referencia x . C: Ubicación de los ocho colores de referencia (círculos negros) en el espacio de colores. La intersección de los ejes corresponde al color con el que definimos las coordenadas de contraste de cono. D: Probabilidad de error (barras azules) del sujeto S2 en una sesión de $N = 20$ ensayos por cada estímulo de referencia, en función del contraste de cono $S = \tilde{x}_2$ del estímulo alterado, para un estímulo de referencia fijo x_2 (barra roja). Se espera que las respuestas aleatorias produzcan un 75 % de identificaciones incorrectas. A medida que aumenta la diferencia $|\tilde{x}_2 - x_2|$ entre el parche alterado y los otros tres parches, la probabilidad de error disminuye. Las barras de error denotan los errores estándar para las distribuciones binomiales correspondientes. Los parámetros ajustados de la ecuación 3.1 son $a_\ell = 0,043 \pm 0,004$, $c_\ell = 0,191 \pm 0,003$, $a_r = 0,07 \pm 0,01$, $c_r = 0,354 \pm 0,006$. 69

- 3.5. **Evaluación de la validez de la hipótesis 5.** Umbrales medidos en el *Experimento II* para el sujeto S1 en función de la distancia entre el entorno y el estímulo. Círculos: $b_i > x_i$. Cuadrados: $b_i < x_i$. Cada columna representa una elección diferente del sistema de coordenadas en el que se representan los umbrales, los estímulos y el entorno. A: coordenadas perceptuales definidas con los datos del Experimento I. Columnas B, C, D: Otras coordenadas empleadas en la literatura (ver texto), que no requieren parámetros ajustados. Columna E: Sistema de coordenadas óptimo definido con dos parámetros ajustados. Fila superior: eje \hat{e}^1 . Verde: $\mathbf{b} = (0, 0)$, azul: $\mathbf{b} = (-0,03, 0)$, naranja: $\mathbf{b} = (0,03, 0)$. Fila del medio: \mathbf{b} y x se encuentran a lo largo del eje \hat{e}^2 . Verde: $\mathbf{b} = (L - M, S) = (0, 0, 16)$, azul: $bmb = (0, 0)$, naranja: $\mathbf{b} = (0, -0,24)$. Abajo: ambos ejes juntos. Naranja: \hat{e}^1 . Datos azules: \hat{e}^2 79
- 3.6. Comparación de los dos modelos. Los puntos provienen de la integración numérica de la inversa de los umbrales de discriminación. La curva roja corresponde al modelo exponencial, que implica una saturación de los umbrales para distancias largas, mientras que la línea azul corresponde a umbrales que crecen linealmente de modo indefinido. 82
- 3.7. **Cambios de percepción inducidos por el entorno.** Desplazamiento $|x_i^\beta - x_i^\alpha|$ en función de las distancias $d^\alpha = |x_i^\alpha - b_i^\alpha|$ y $\pm d^\beta = \pm|x_i^\beta - b_i^\beta|$, para observador S3, a lo largo del eje \hat{e}^1 (arriba), \hat{e}^2 (centro) y ambos juntos (abajo), en coordenadas de contraste de cono (izquierda) y coordenadas perceptuales (derecha). El factor ± 1 multiplicando d^β está definido por el producto de funciones Signo en la Ec. 3.11. Los datos medidos aparecen en los paneles superior e intermedio, y la superficie interpola los valores medidos. En los paneles inferiores, se muestra que las dos hojas se fusionan en las coordenadas perceptuales, pero no las de contraste de cono. 84

3.8. Comparación entre los datos medidos y simulados en el Experimento III.	85
Color matcheado x^β en función del color objetivo x^α (ambos ejes en las coordenadas perceptuales) para el observador S3. A y B: Matcheo asimétrica a lo largo del eje \hat{e}^1 . C y D: Matcheo asimétrico a lo largo del eje \hat{e}^2 . En las coordenadas de contraste de cono, los dos entornos eran $b^\alpha = (0, 0)$ y $b^\beta = (-0,2, 0)$ (A), $b^\alpha = (-0,03, 0)$ y $b^\beta = (0,03, 0)$ (B); $b^\alpha = (0, -0,35)$ y $b^\beta = (0, 0,25)$ (C), $b^\alpha = (0, 0)$ y $b^\beta = (0, 0,9)$ (D). Círculos rojos: datos experimentales. Línea violeta: resultados simulados. Áreas sombreadas: desviación estándar de los resultados simulados. Línea punteada azul: función de identidad, esperada en el caso en que el entorno no ejerza influencia. Líneas verde y naranja: asignaciones $\Phi_{b^\alpha}(x^\alpha)$ y $\Phi_{b^\beta(x^\alpha)}$ obtenido de los valores ajustados de κ y ℓ del observador S3, indicando los representantes uniformes de $x^\alpha // b^\alpha$ y $x^\alpha // b^\beta$, respectivamente. El cambio de percepción inducido por el entorno se vuelve relevante en el intervalo de valores x^α para los cuales los dos cambios (curvas verde y naranja) son desiguales, produciendo así un desequilibrio neto.	85
4.1. Experimento KG I. A: Cuatro estímulos circulares son presentados sobre un fondo coloreado. Tres de los círculos poseen un color de referencia, igual al color del fondo, mientras que uno de los estímulos posee un color ligeramente diferente. B: Umbrales de discriminación en el plano $L + M = cte.$ graficadas en el plano $(L - M^U, S^U)$. Las elipses corresponden a un ajuste realizado bajo la hipótesis de que los semiejes están alineados con los ejes cardinales. Las mismas están multiplicadas por un factor 3 para mejorar su visualización. C y D: Dependencia de los umbrales en el eje S (L-M) a lo largo del mismo. Imágenes B, C y D tomadas de [10].	94
4.2. Experimento KG II. (A) Esquema experimental en el cual el sujeto debe responder cuál de los cuatro círculos posee un color distinto a los otros tres en presencia del fondo. (B) Elipses de discriminación a lo largo de 16 direcciones cromáticas. (C) Umbrales de discriminación radiales en el eje L-M. (D) Umbrales de discriminación transversales con los estímulos sobre el eje S y la discriminación realizada sobre variaciones en el eje L-M. En (C) y (D) la flecha indica la cromaticidad del entorno.	96
4.3. Transformación radial inducida por el fondo. Los puntos corresponden a la integración numérica de los umbrales radiales y la línea roja es el ajuste del modelo dado por la Ec. 4.9.	98
4.4. Comparación entre el modelo ajustado y los umbrales de discriminación radiales y transversales.	99

4.5. Elipses de discriminación obtenidas cuando (A) la orientación de cada elipse es ajustada independientemente y (B) transformando las elipses a coordenadas perceptuales y suponiendo radialidad (sin parámetros libres).	100
5.1. Experimento MD. A: Esquema experimental. En un fondo con cromaticidad neutra se presentan sobre un círculo dos estímulos con una dada separación angular. El sujeto debe responder cuál es los dos es más rojizo (o menos verdoso). B: La cromaticidad de los estímulos yace sobre líneas paralelas a la línea que une el amarillo puro y el azul puro. Imagen tomada de [11]. C: Los umbrales de discriminación a lo largo de 5 líneas. Los puntos son el valor medio del umbral, las barras son las desviaciones estándar y las líneas corresponden a ajustes cuadráticos sin fundamento teórico con el fin de evidenciar la posición de los mínimos. La tabla indica el valor de l en el que cada recta interseca a la línea amarillo-azul.	107
5.2. A: Representación pictórica del plano de cromaticidad. Las líneas a 45° se mueven de tonos verdosos a rojizos, y se define como tonos puros a aquellos que yacen en la transición. B: Comparación de la posición de los mínimos de discriminación y de los tonos puros para el sujeto JM. Imagen tomada de [11]	108
5.3. Dependencia de los umbrales de discriminación con (A) el tamaño del estímulo y (B) el tiempo de exposición.	112
5.4. Comparación de nuestro modelo con los resultados de Mollon-Danilova. La geodésica estimada no involucra el ajuste de ningún parámetro, la ajustada posee 2 parámetros.	116
5.5. Comparación entre nuestro modelo –líneas sólidas–, sin parámetros ajustados, y los umbrales de discriminación medidos por MD.	117
5.6. Umbrales de discriminación análogos a los mostrados en la figura 5.5. Los datos fueron tomados de [12]. Las curvas se obtuvieron mediante el ajuste de los 5 parámetros que definen nuestro modelo: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \kappa$ y ℓ	118

- 6.1. **Experimento KW.** **A:** Esquema experimental. De un lado de la pantalla, un cuadrado de un dado color de referencia es presentado sobre un fondo colo-
reado **c**, del otro lado el fondo es un gris **g** y la cromaticidad del respectivo
cuadrado es ajustada por el sujeto hasta matchear con el de referencia. **B:**
Los estímulos utilizados yacen sobre una circunferencia cromática definida
sobre el plano isoluminiscente generado por los ejes *S* y *L – M* (ver texto).
La coordenada θ corresponde al ángulo respecto del eje *L – M*. **C:** Inducción
cromática para distintos sujetos, medida como la diferencia angular entre el
estímulo respondido por el sujeto y el de referencia. **D:** Anisotropía de la
inducción. La distancia al origen representa en grados el máximo de induc-
ción cromática medido para cada uno de los 8 fondos que corresponden a los
ángulos $0^\circ, 45^\circ, \dots, 315^\circ$. El eje mayor de la elipse indica el ángulo del fondo
para el cual la inducción es máxima. C y D fueron extraídas de [13]. 122
- 6.2. **Modelo:** Las cromaticidades que conforman la curva *C* se hallan sobre la
circunferencia cromática. Los entornos utilizados en el experimento KW po-
seían una saturación levemente menor y se representan mediante los cuadra-
dos que yacen sobre la circunferencia punteada de radio menor. El ángulo
 θ es medido respecto del eje horizontal L-M. El entorno de color *c* afecta
la percepción del estímulo $C(\theta)$ dando lugar al color Φ_c . El sujeto ajusta el
ángulo $\theta' = \theta + \Delta\theta$, cambiando la cromaticidad del estímulo presentado en
el fondo gris **g** hasta minimizar la distancia entre Φ_g y Φ_c 127
- 6.3. La inducción cromática al comparar estímulos presentados en dos entornos
g y **c** es proporcional a la diferencia entre la inducción producida por cada
fondo, dando lugar a un campo dipolar. En el experimento KW se mide la
proyección de este campo en la dirección tangente a la curva $C(\theta)$ 130
- 6.4. **Resultados de KW vs. Modelo circular. Línea Roja:** Ajuste de la ecuación
6.19, que representa la inducción cromática calculada a lo largo de una curva
cromática exactamente circular. **Líneas de puntos:** Promedio poblacional
(N=6) en el experimento de KW de la inducción cromática, el color de cada
curva representa la cromaticidad el entorno **c** en que se midió y las barras
de error reflejan la combinación del error estándar de la media y del error
experimental. 132

- 6.5. **Inducción cromática** para ocho fondos distintos. Cada panel muestra el cambio angular $\Delta\theta$ entre el estímulo respondido y el de referencia en función del ángulo relativo a la cromaticidad del entorno c . Los puntos corresponden a la media poblacional ($N=6$) y las barras a la combinación ($\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$) del error estándar de la media (σ_1) y del error experimental medio (σ_2). Las líneas coloreadas representan el ajuste del modelo elíptico aproximado (2 parámetros), mientras que la **línea punteada gris oscuro** representa el modelo circular (1 parámetro) y la **línea punteada gris claro** representa el modelo de elipse rotada (3 parámetros). En todos los casos se trabajó en la aproximación de inducción pequeña y saturación rápida. 134
- 6.6. Intensidad de la inducción para distintos fondos. La distancia al centro representa la altura del máximo de la inducción, y el ángulo indica el color del fondo sobre el que se midió. La línea punteada a 23° representa la dirección en la que el efecto es máximo, habiendo un excelente acuerdo entre el modelo y los datos. 136
- 6.7. El cálculo del promedio sobre entornos se realiza manteniendo φ fijo e integrando sobre θ_c o equivalentemente sobre θ . A nivel de los datos, el promedio se aproxima usando las mediciones en los 8 fondos marcados con cuadrados. 139
- 6.8. Aproximación de la curva $C(\theta)$ por una circunferencia. Las flechas representan la variación $\eta(\theta)$ 141
- 6.9. **Promedio sobre entornos:** Los puntos representan la inducción cromática promediada en los 8 entornos medidos, las barras corresponden a la combinación del error estadístico de la media y de la incertezza media de cada punto. La curva se obtiene mediante el ajuste del parámetro $\frac{\kappa}{R}$ en la ecuación 6.38. 144
- 7.1. **Organización del test de memoria.** A: Pantalla explicatoria en la que el jugador es instruido a recordar el color mostrado a continuación B: Color objetivo t a ser recordado. C: Máscara de Mondrian en la que se muestra la instrucción de recordar el color para la siguiente pantalla. D y E: Pantallas de búsqueda, donde el jugador puede cambiar continuamente el color del cuadrado central desplazando el cursor sobre la barra inferior. El objetivo es recuperar el color objetivo mostrado antes (panel B). El color seleccionado es elegido al clickear sobre el botón con la etiqueta “Ok!”. F: Pantalla de Recompensa, donde la expresión del emoticón - que va de feliz a triste - y la puntuación obtenida son determinados por la similaridad entre el objetivo t y el color respondido r 151

- 7.2. **Histograma de respuestas condicionadas a un dado color mostrado.** Un subconjunto de 10 histogramas obtenido al muestrear la probabilidad $P(r|t)$ de responder un color r cuando se presenta el color t . Cada histograma se obtuvo para un sujeto que jugó el juego 26 veces. Histogramas de distintos colores corresponden a distintos colores mostrados t 154
- 7.3. **Constancia del error en la respuesta a lo largo de 10 jugadas.** Histogramas de caja de la distribución de la muestra del valor absoluto del error, promediado en colores mostrados, en 10 partidas consecutivas del juego. El error del jugador en el k -ésimo juego está definido como $\langle |r_k^i(j) - t(j)| \rangle$, donde el paréntesis angular representa un promedio sobre los 32 colores mostrados. Cada caja representa el histograma recolectado de los 11 jugadores ($i \in [1, 11]$). Punto: Media de la muestra. Línea horizontal: Mediana de la muestra. Bordes superior e inferior de la caja: 25 % y 75 % percentiles de las respuestas. Barras verticales: 5 % y 95 %. Barras horizontales: Respuestas máxima y mínima. 155
- 7.4. **Caracterización de las respuestas** Los paneles A y B muestran como ejemplo a dos jugadores. Superior: Línea negra: Respuesta media \bar{r} como función del color mostrado t . Área gris: Rango de valores en $\bar{r}(t) \pm \epsilon(t)/\sqrt{n}$. Medio: Error medio $\bar{r}(t) - t$ (línea negra), junto con el error esperado de la media $\epsilon(t)/\sqrt{n}$ (barras de error). Inferior: Curva ajustada $\Delta(t)$, junto con los datos experimentales $\bar{r}(t) - t$ (puntos negros) y el error estándar de la media $\epsilon(t)/\sqrt{n}$ (barras de error). En los recuadros medio e inferior, la escala vertical va de $-\pi/6$ a $+\pi/6$ 157
- 7.5. **Estadística poblacional de las respuestas.** Histograma poblacional del error medio $\bar{r}(t) - t$ (panel A) y de la desviación estándar de la respuesta $\epsilon(t)$ (panel B) para los 11 jugadores. En A, las estrellas amarillas muestran que un t -test apareado, evaluando si $\bar{r} - t$ es significativamente diferente de cero da lugar a un valor particularmente pequeño de valor p . De izquierda a derecha: $p = 0.004, 0.004, 0.004$ y 0.002 . Convención de histograma de cajas igual que en Fig 7.4. 158
- 7.6. **Análisis de atractores y repulsores para la población de sujetos muestreados.** A: Línea gruesa: Promedio poblacional del error ajustado $\langle \Delta(t) \rangle$. Área gris: Región de valores contenidos en $\langle \Delta(t) \rangle \pm$ error estándar de la muestra. Líneas finas: ajustes individuales $\Delta(t)$ para cada uno de los 11 jugadores. B: Círculos: Función de distribución acumulada empírica del conjunto de atractores obtenidos para los 11 jugadores. Línea punteada: Función de distribución esperada para un proceso distribuido uniformemente. C: Igual que en B, pero para repulsores. En B y C, el eje vertical va de 0 a 1. 163

- 7.7. **Información de Fisher a lo largo de la curva de colores muestreados.** A: Línea gruesa: Promedio poblacional de la Información de Fisher obtenida para los jugadores. Área gris: Región de valores contenidos en $\langle J(t) \rangle \pm S_J$. Líneas delgadas: curvas individuales $J(t)$ para cada uno de los 11 jugadores. B: Puntos: Función de distribución acumulada del conjunto de máximos relevantes de $J(t)$ obtenido de los 11 jugadores. Línea punteada: Función de distribución acumulada esperado por un proceso con distribución de probabilidad uniforme. C: Puntos: Función de distribución acumulada para el conjunto de los máximos relevantes de $1/J(t)$ obtenida por los 11 jugadores. Línea punteada: Lo mismo que en B. En B y en C, el eje vertical va de 0 a 1. 166
- 7.8. **Una escala de color mnemónicamente uniforme.** Comparación entre la escala de color original t usada en el juego (A) con la nueva escala uniforme s diseñada para cada jugador (B). C: Escala cromática uniforme obtenida con el promedio poblacional de $J(t)$ 167
- 7.9. **Relación entre atractores, repulsores e Información de Fisher.** Comparación de la ubicación de atractores y repulsores de la Fig 7.6 con la de los máximos y mínimos en $J(t)$ (Fig 7.7). A: Función de distribución acumulada de los repulsores (gris) y de los máximo de la información de Fisher (negro). Las cajas coloreadas muestran la region en el espacio de color donde ambas distribuciones aumentan con pendiente mayor a uno. B: Función de distribución acumulada de atractores (gris) y de mínimos de la información de Fisher(negro). Cajas coloreadas: Igual que en A. En ambos paneles el eje vertical va de 0 a 1. 169

- 7.10. **Calibración del juego.** A: Espectros de los tres LEDs del monitor, con coordenadas (128,0,0) (rojo), (0,128,0) (verde) y (0,0,128) (azul). B: Espectros medidos (gris) y linealmente predicho (negro) para una pantalla gris con $RGB=(128,128,128)$. C: Curvas negras: espectros medidos para $RGB=(255,0,0)$, (0,255,0) y (0,0,255). Colores claros (rosa, verde y cian): espectros predichos con el modelo lineal. Colores oscuros (rojo, verde, azul): predicciones realizadas por el modelo cuadrático. Recuadro: comparación entre intensidades medidas y predichas por los dos modelos. D: Residuos al cuadrado de los dos modelos propuestos en función la longitud de onda. Negro: Modelo cuadrático. Gris: modelo lineal. E: Intensidad lumínica total en función de las coordenadas R, G y B. La intensidad es representada por el volumen de cada esfera. Los ejes van de 0 a 255. F: Ajuste cuadrático de una superficie con intensidad constante. Cada eje va de 0 a 255. G: Curva de colores utilizados en el juego. Curva coloreada continua: los 743 colores disponibles en la barra. Puntos negros: Los 32 colores objetivo. H: Parametrización lineal de los colores mostrados en G. 172
- 7.11. **Errores ajustados $\Delta(t)$ en dos experimentos control.** A: Error ajustado obtenido por un observador que jugó la versión normal de 32 colores del juego (puntos grises, curva negra ajustada), y una versión modificada de 96 colores. Ambos juegos constan de 10 partidas. B: Error ajustado obtenido para un observador que jugó la versión de 32 colores del juego 10 veces (puntos grises, curva ajustada negra) y 26 veces (puntos cian, curva ajustada azul) 175

Índice de tablas

3.1.	Parámetros de los ajustes lineales y cuadráticos de $x_i^I(x_i)$. Los valores p reportados representan la probabilidad de obtener datos tan extremos mediante el modelo ajustado como aquellos obtenidos en el experimento.	89
3.2.	Coeficientes ajustados para los Modelos 1 y 2 (Ecs. 3.7 y 3.8) para todos los sujetos a lo largo del eje \hat{e}^1	89
3.3.	Coeficientes ajustados para los Modelos 1 y 2 (Ecs. 3.7 y 3.8) para todos los sujetos a lo largo del eje \hat{e}^2	89
5.1.	Comparación de parámetros entre los experimentos KG y MD.	111
6.1.	Resumen de los distintos modelos comparados.	137
6.2.	Valores de los parámetros que del modelo que mejor ajustan a los datos. . .	138
7.1.	Coordenadas CIE xyY de los colores mostrados.	173
8.1.	Relación entre cantidades medidas en los experimentos y la estructura del espacio de colores dada por el par (d, ϕ_b)	182

Resumen

La experiencia perceptual suscitada por un estímulo no está determinada únicamente por las propiedades físicas del estímulo, sino también por el contexto en que es percibido. En particular, el color con que un objeto es percibido depende de la cromaticidad del entorno del objeto, fenómeno conocido como *inducción cromática*. Esta dependencia implica que la composiciónpectral de un estímulo visual es insuficiente para especificar el color percibido. En esta tesis construimos un modelo para el espacio de colores que incluye en su descripción la inducción cromática, permitiendo generalizar las nociones de “color” y “distancia entre colores” a paradigmas experimentales en los que la cromaticidad del entorno es variable. Construimos la geometría del espacio de colores mediante la medición de los umbrales de discriminación, es decir, la cantidad mínima en que se debe modificar un estímulo para que un sujeto perciba una diferencia. Una hipótesis fundamental de nuestro modelo es que la inducción cromática adopta la forma más sencilla posible en esta geometría, es decir, que es isotrópica y homogénea. Para poner a prueba esta hipótesis hicimos una serie de experimentos de discriminación cromática y experimentos de matcheo asimétrico entre estímulos presentados en distintos entornos. Los experimentos mostraron evidencia de dichas simetrías, lo cual permite describir los resultados experimentales mediante una ley universal, es decir, que no depende de específicamente qué colores se comparan sino solo de su distancia perceptual. Luego, analizamos resultados experimentales previos de discriminación cromática y de matcheo asimétrico, mostrando que el modelo describe muy bien los experimentos con una cantidad mínima de parámetros ajustados. Por último, estudiamos también el efecto del lenguaje y la memoria en la percepción cromática. En primer lugar, utilizamos nuestro modelo para describir un experimento previo que sostenía que los umbrales de discriminación estaban determinados por categorías lingüísticas. En el marco de nuestra teoría, los resultados descriptos en ese trabajo pueden explicarse por efectos enteramente perceptuales, por lo cual, no aportan evidencia sobre el rol del lenguaje en la discriminación cromática. En segundo lugar, realizamos experimentos que muestran que la memoria cromática está estructurada en términos de colores focales y colores frontera (atractores y repulsores, respectivamente), y describimos la variabilidad poblacional de esta estructura.

Palabras clave: PERCEPCIÓN, GEOMETRÍA, COLOR, INDUCCIÓN CROMÁTICA, PSICOFÍSICA

Abstract

The perceptual experience elicited by a stimulus is not uniquely determined by its physical properties, but also by the context in which it is perceived. In particular, the color with which an object is perceived depends on the chromaticity of the surround, a phenomenon known as *chromatic induction*. This influence implies that the spectral composition of a visual stimulus is insufficient to specify the perceived color. In this thesis we built a model for color space that includes chromatic induction, with which the notions of “color” and “distance between colors” can be generalized to experimental paradigms in which the chromaticity of the environment is variable. The geometry of color space was constructed by measuring discrimination thresholds, that is, the minimum amount by which a stimulus must be modified for a subject to perceive a difference. A fundamental hypothesis of our model is that chromatic induction takes the simplest possible form in this geometry, that is, that it is isotropic and homogeneous. To test this hypothesis, we conducted a series of color discrimination experiments and asymmetric matching experiments between stimuli surrounded by varying chromaticities. The experiments showed evidence of these symmetries, implying that the experimental results may be described by a universal law, that is, one which does not depend on specifically which colors are compared but only on their perceptual distance. Then, we analyzed previous experimental results of chromatic discrimination and asymmetric matching, showing that the model provides an accurate description of the experiments with a minimal number of adjusted parameters. Finally, we also studied the effect of language and memory on color perception. First, we employed our model to describe a previous experiment that claimed that discrimination thresholds were determined by linguistic categories. Within the framework of our theory, their results could be entirely explained by perceptual effects, implying that they did not convey evidence on the role of language in color discrimination. Second, we conducted experiments that show that color memory is structured in terms of focal colors and boundary colors (attractors and repulsors, respectively), and we described the population variability of this structure.

Keywords: PERCEPTION, GEOMETRY, COLOR, CHROMATIC INDUCTION, PSYCHOPHYSICS

Capítulo 1

Introducción

“Las ruinas del santuario del dios del fuego fueron destruidas por el fuego. En un alba sin pájaros el mago vio cernirse contra los muros el incendio concéntrico. Por un instante, pensó refugiarse en las aguas, pero luego comprendió que la muerte venía a coronar su vejez y a absolverlo de sus trabajos. Caminó contra los jirones de fuego. Éstos no mordieron su carne, éstos lo acariciaron y lo inundaron sin calor y sin combustión. Con alivio, con humillación, con terror, comprendió que él también era una apariencia, que otro estaba soñándolo.”

— *Las ruinas circulares*, Jorge Luis Borges.

1.1. Una breve ficción

En la película *The Matrix* (2000), la humanidad se encuentra atrapada, sin saberlo, en una simulación diseñada por máquinas inteligentes. *El Arquitecto*, un emblemático personaje de la trilogía, encarna al creador de *La Mátrix*, el código que produce la simulación. Esta inteligencia artificial se asemeja a una versión futurista de la pesadilla del filósofo René Descartes, un “genio maligno, no menos poderoso que engañoso”, que utiliza todas sus fuerzas en engañarlo y convencerlo de que posee un cuerpo físico, el cual es capaz de percibir un mundo externo y actuar en él, cuando en verdad todo eso no es más que una ilusión transcurriendo en su mente por manipulación del genio. Lo que la película, por supuesto, no explica, es cómo una computadora podría lograr este objetivo descomunal. Supongamos, por un momento, que este mundo en el que nos encontramos es real y que quisiéramos entender cómo una inteligencia artificial podría ser capaz de crear una simulación lo suficientemente sofisticada para que no podamos distinguirla del mundo real.

La primera dificultad con la que esperamos que se encuentre el Arquitecto - nombre que

utilizaremos para la inteligencia artificial maligna - es el hecho de que, a diferencia de nosotros, no sabe *a priori* qué se siente ser un humano. Nosotros, aunque no supiéramos nada más sobre el funcionamiento del mundo, sabríamos de un modo directo al momento de experimentarlo cómo se siente que el cielo se vea azul, escuchar una canción de Spinetta o saborear el dulce de leche. Esto es lo que se llama el aspecto fenomenológico de la percepción, es decir el mundo tal como se manifiesta directamente en la conciencia, el mundo al que tenemos acceso como sujetos conscientes. Análogamente a las dificultades planteadas por Thomas Nagel en su artículo *What is it like to be a bat?* que enfrentamos al intentar explicar qué se siente ser un murciélagos, un animal cuyo principal mecanismo de localización es acústico y no visual como en el humano, el Arquitecto debe encontrar la forma de sortear su propia ignorancia sobre qué se siente ser un humano si pretende que su simulación sea creíble¹. Una forma de visualizar esta dificultad es la siguiente: pensemos en el proyecto más sencillo de crear un juego de realidad virtual como los que existen actualmente. Un ser humano puede evaluar naturalmente el grado de realismo de dicho programa, al comparar su experiencia durante el juego con su experiencia cotidiana. A pesar de esta incomparable ventaja, los humanos aún no somos capaces de crear realidades virtuales que sean lo suficientemente verosímiles como para engañar completamente a alguien. Imagínense ahora lo difícil de esta tarea para alguien que no tiene acceso a dicha experiencia subjetiva.

Habiendo vislumbrado el principal obstáculo, pensemos en las herramientas con las que podría contar el Arquitecto. Como punto de partida, supondremos que tiene acceso a una serie de dispositivos que le permiten medir propiedades físicas del mundo real, por ejemplo, posee espectrómetros y foto-diodos con los que puede caracterizar ondas electromagnéticas, piezoelectrinos que le permiten medir las ondas de presión en el aire, termómetros, etc. Estos sensores están localizados de tal forma que le permiten construir un modelo físicamente confiable de la distribución tridimensional de estas variables. Además, ha logrado capturar a un conjunto de humanos con los que puede experimentar para poner a punto su simulación². A continuación, contaremos una posible versión de los pasos que pudo haber seguido en esta situación.

En primera instancia el Arquitecto pudo haber tomado una postura denominada *realismo naïve*, asumiendo que los humanos simplemente ven el mundo *como es*. Es decir, que la percepción humana está determinada por las propiedades de su entorno. Por ejemplo, al percibir una manzana como roja, la rojez sería una propiedad de la manzana de la cual el sujeto toma conciencia³. De aquí que, para simular una dada experiencia perceptual, sería necesario recrear el conjunto de cantidades físicas que determinan el estado del mundo asociado a di-

¹Nótese que no estamos haciendo afirmaciones sobre si el Arquitecto tiene o no experiencia consciente. Sólo que en caso de tenerla, no hay razón a priori para suponer que su experiencia se asemejaría a la de un ser humano, ni tendría motivos el Arquitecto para suponer que el humano - un ser claramente inferior - tiene una experiencia análoga a la suya propia.

²Ningún humano real - excepto, quizás, el propio autor - resultó herido durante el desarrollo de esta tesis.

³En inglés se usa el término *becomes aware*.

cha experiencia. Bajo esa hipótesis, el Arquitecto se encontró en apuros al caer en la cuenta de que, para que su simulación sea totalmente fiel al mundo real, la cantidad de variables físicas que debía incluir era inmensa. En el caso más extremo de fidelidad, debería ser capaz de reproducir el estado de cada una de las innumerables partículas y campos que componen nuestro mundo. Esta idea es bien descrita en el cuento del escritor Jorge Luis Borges, *Del rigor de la ciencia* [14], en el que un país ficticio y con excesivo rigor cartográfico, termina construyendo un mapa que poseía la misma extensión que el país que pretendía representar. Es decir, una simulación completamente rigurosa posee la complejidad misma de lo que se quiere representar. Esto implica que la complejidad de la simulación del Arquitecto debía ser tan grande como la del universo mismo, y por lo tanto es razonable suponer que esta excedía a su capacidad finita de cómputo. Para superar este obstáculo, el Arquitecto decidió reducir la resolución de su simulación, escogiendo incorporar en ella sólo algún subconjunto de propiedades físicas. Pero, ¿cómo decidir qué propiedades son relevantes para poder engañar a los humanos? El Arquitecto llevó a cabo experimentos de comportamiento con los humanos que ha capturado e hizo hallazgos que le sorprendieron. Por ejemplo, que los humanos eran ciegos - es decir, se comportaban igual que en oscuridad - a la radiación electromagnética por fuera del estrecho rango de longitudes de onda entre 380 y 700 nanómetros, y que tampoco mostraban reacción ante ondas sonoras con frecuencias mayores a los 20 kHz. Por lo tanto, la simulación no requería tener en cuenta estas variables por fuera de tales rangos. Los humanos parecían contar además con una visión proyectiva -en lugar del modelo 3D con el que el Arquitecto contaba-, con un punto de convergencia en algún lugar dentro de sus cabezas. La visión estereoscópica les daba una - leve - capacidad de reconocimiento de profundidad. Poseían además una resolución angular de alrededor de 0,02° [15]. Esto implicaba que todos los detalles por debajo de esta resolución podían ser ignorados por la simulación.

La lista que el Arquitecto confeccionó bajo el título de *Limitaciones en la respuesta humana a variables físicas* es demasiado extensa como para ser incluida, pero podemos imaginar que, con suficiente tiempo y sujetos experimentales, sería posible recabar esta información. Tomó la palabra *estímulo* para referirse a aquellas cantidades físicas a las que el humano es *sensible*. Recordemos que desde su perspectiva, la única forma de definir la sensibilidad del humano a una variable física es determinar si la misma suscita un cambio comportamental bajo algún paradigma experimental, ya que no tiene acceso a la experiencia sensible como fenómeno. Es decir, no podría entender al estímulo como aquello que da lugar a una sensación o estado mental específico - un color, un sonido, un dolor, etc. Reducir el espacio de magnitudes físicas al de estímulos resultó en una gran simplificación para el diseño de la simulación, pero no tardó en toparse con nuevos obstáculos.

Algo llamó su atención. Al principio creyó que se debía a una fluctuación estadística, propia de un sistema tan ruidoso como parecía ser el comportamiento humano. Sin embargo, la consistencia a lo largo de múltiples experimentos le llevó a repensar esta hipótesis. El Arquitecto encontró que existían ciertos estímulos que producían sistemáticamente dos

conjuntos de respuestas distintas. Veamos, por ejemplo, la Fig. 1.1 A. En un experimento de categorización de estímulos, la mitad de los participantes reportó que la imagen correspondía al vocablo “pato”, mientras que la otra mitad contestó “conejo”. En primera instancia, sospechó que este resultado inesperado podía estar relacionado con la ambigüedad del lenguaje humano que ya le había causado problemas anteriormente. Realizó entonces experimentos que no involucraran lenguaje. Por ejemplo, luego de presentar la imagen ambigua, presentaba al sujeto imágenes de distintos animales con la instrucción de elegir la que se correspondiera con la imagen anterior. De modo consistente con su respuesta lingüística, los humanos se dividían entre aquellos que elegían imágenes de patos e imágenes de conejos. Lo mismo ocurrió cuando el estímulo posterior eran sonidos asociados a cada uno de estos animales. Dado que esta partición en el conjunto de respuestas era independiente de la modalidad sensorial de la respuesta, el Arquitecto tuvo que aceptar que existía algún tipo de asignación a priori entre el estímulo y su categoría, y que una vez que la categoría era asignada, el comportamiento era consistente con la presentación de cualquier otro elemento de esa categoría –por ejemplo, una foto de un pato–. El hecho de que el mismo estímulo fuera asignado a dos categorías distintas, implicaba que tenía que haber algún elemento adicional involucrado en ese proceso que no era puramente aleatorio y que variaba entre sujetos. Muchos otros estímulos con esta misma propiedad fueron encontrados, como por ejemplo la copa de Rubin mostrada en la Fig. 1.1 B. Más aún, descubrió que un mismo sujeto, tras dejar transcurrir un lapso largo de tiempo, podría variar también su respuesta, pasando de una categoría a la otra sin notar nada extraño.

Esta ambigüedad dificultaba su plan de realizar la simulación únicamente por control de los estímulos. Imagínense cuán poco realista resultaría si de pronto un humano viera a un conejo volando hasta zambullirse en el agua. Por lo tanto, para poder llevar a cabo su plan, debía ser capaz de entender la forma en que los estímulos eran representados internamente por los humanos.

Otra manifestación de la no univocidad entre estímulo y representación provino del estudio de los colores. Mediante cuidadosos experimentos, el Arquitecto logró identificar propiedades espectrales visibles del campo electromagnético. Descubrió que tres fuentes lumínicas adecuadas alcanzaban para producir los colores que el humano es capaz de percibir⁴. Sin embargo, rápidamente descubrió que las propiedades espectrales visibles de un estímulo no eran suficiente para definir cómo ese estímulo era percibido. En la Fig. 1.1 C, mostramos un típico ejemplo de esta situación. Los cuadrados A y B, poseen de hecho la misma luminosidad, físicamente tienen las mismas propiedades y si pusiéramos uno al lado del otro resultarían indistinguibles. Sin embargo, debido a la diferente luminosidad del entorno, son percibidos como diferentes, el cuadrado B es percibido como más luminoso que el cuadrado A. Recíprocamente, dos estímulos físicamente diferentes pueden ser percibidos como iguales

⁴Por este motivo a las coordenadas de un estímulo en un espacio de colores se les llama *valores triestímulo*

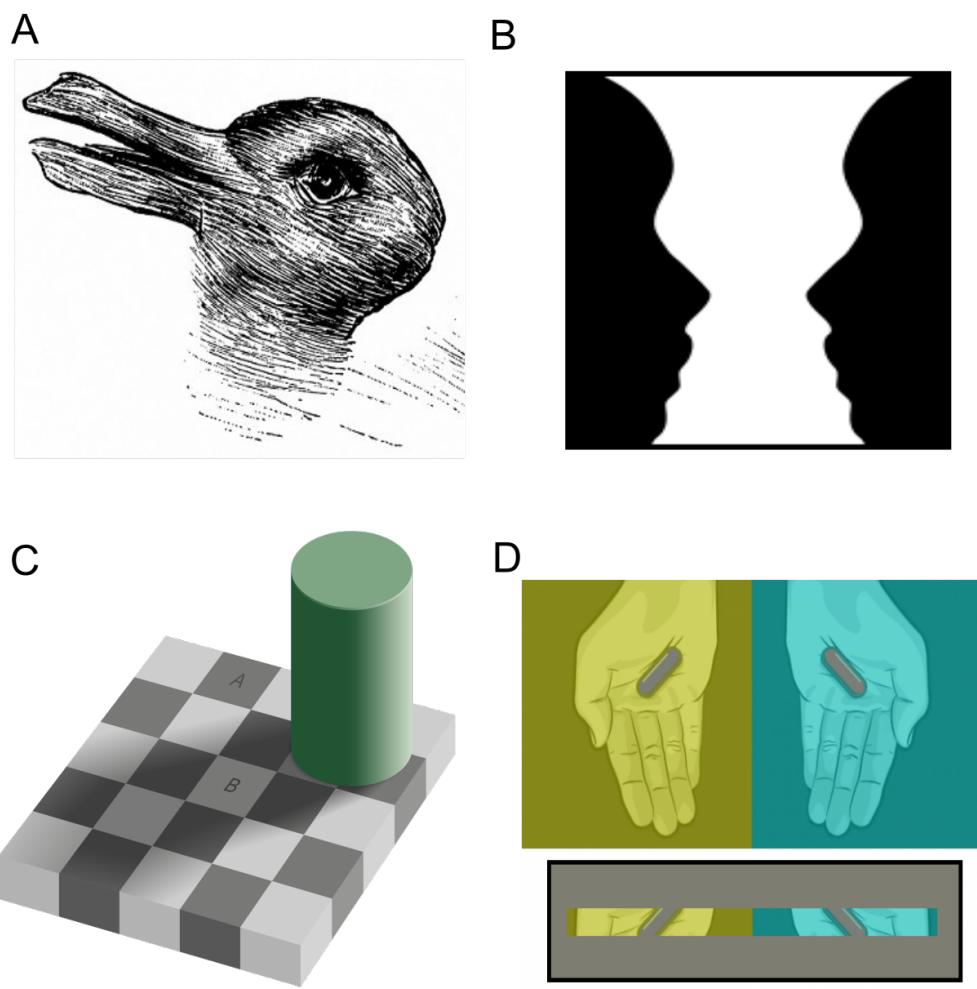


Figura 1.1: Imágenes ambiguas: (A) ¿Pato o conejo? La imagen original fue publicada por un ilustrador anónimo en 1892 en la revista *Fliegende Blätter* con el título *Welche Thiere gleichen einander am meisten?* (¿qué animales se parecen más entre sí?) (B) ¿Una copa o dos rostros enfrentados? El jarrón de Rubin es una ilusión desarrollada alrededor de 1915 por el psicólogo danés Edgar Rubin. Fue introducida por primera vez en su obra *Synsoplevede Figurer* (Figuras táctiles). (C) Aunque no parezca, los cuadrados A y B poseen exactamente el mismo tono de gris, pero el cambio de luminosidad del entorno hace que los percibamos distintos. La imagen original fue creada por Edward Adelson en 1995. (D) Tú eliges, ¿roja o azul? Las píldoras se ven distintas debido a la coloración del entorno, como puede apreciarse en el rectángulo inferior al colocar ambas píldoras sobre un fondo gris. Imagen tomada de <https://www.moillusions.com/blue-pill-red-pill-illusion/>

en los contextos adecuados. Esto era nuevamente muy problemático ¿qué pasaría si dentro de la simulación alguien hiciera elegir a un humano entre píldoras de distintos colores, y luego resultara que los colores percibidos por la persona eran distintos a los que el Arquitecto había querido simular? (Ver 1.1 D).

El Arquitecto hipotetizó entonces la existencia de una representación interna de los estímulos, a la cual llamó *percepto*. El percepto es un objeto intangible para él, aunque puede inferir su existencia a partir de múltiples experimentos de comportamiento. Sorprendentemente, el Arquitecto encontró que la forma en que los estímulos eran mapeados a perceptos seguía también una serie de leyes universales que le permitió reducir significativamente el

enorme problema combinatorial original, es decir, resolver todas las posibles asignaciones entre estímulo y percepto para distintos paradigmas experimentales.

Una forma de entender esta dificultad es pensar por ejemplo en el aprendizaje de un lenguaje. Si uno tomara como objeto irreducible de un lenguaje las oraciones, aprender un lenguaje sería una tarea extremadamente complicada: para cada proposición con la que quisieramos informar algo deberíamos aprender una nueva oración desde cero. Por supuesto, así no es como funciona el aprendizaje de un lenguaje. Normalmente, uno aprende en paralelo las palabras y las leyes gramaticales de ese lenguaje. Luego, combinando adecuadamente las palabras y siguiendo la gramática, uno es capaz de construir una cantidad innumerable de oraciones. Este es un ejemplo muy claro sobre la forma en que encontrar elementos minimales y las leyes que rigen su combinación permite simplificar enormemente la aprehensión de un espacio con una cantidad inmensa de elementos compuestos.

Finalmente, habiendo encontrado las leyes que regían el mapeo entre estímulos y perceptos, el Arquitecto decidió trabajar en la implementación de la simulación. Él sabía que los humanos percibían el mundo a través de sus sentidos, sin embargo, las leyes perceptuales le mostraron que la representación de los estímulos no tenían una relación uno a uno con la actividad de las células sensoriales. Por lo tanto, para implementar su simulación decidió actuar directamente en los niveles posteriores de procesamiento. Para lo cual necesitó estudiar en detalle de qué manera los circuitos neuronales procesaban la información sensorial. El problema planteado inicialmente, es desde luego sumamente complicado, ya que implica ver todos los posibles estados neuronales y todos los posibles comportamientos humanos, y luego establecer qué relación hay entre cada elemento. Sin embargo, haber obtenido en primera instancia las leyes perceptuales resultó en una gran simplificación para su simulación. Múltiples comportamientos podían ser agrupados al entender que surgían como producto de un mismo fenómeno perceptual, y por lo tanto, la tarea se reducía ahora a buscar un correlato neuronal de dicho fenómeno perceptual.

¿Acaso lo habrá logrado?

La historia que acabamos de leer intenta mostrarnos las dificultades intrínsecas que posee el diseño de experimentos que caractericen la experiencia íntima de percibir. Comenzaremos esta tesis presentando, *grosso modo*, distintas facetas que hacen al modelado de la percepción, pasando brevemente por algunos aspectos ontológicos para luego volcarnos a un enfoque teórico-experimental que nos permita entender sus propiedades. En esta tesis nos centraremos particularmente en la percepción cromática, pero manteniendo el espíritu de que un buen modelo perceptual debería ser capaz de extenderse a otras modalidades sensoriales.

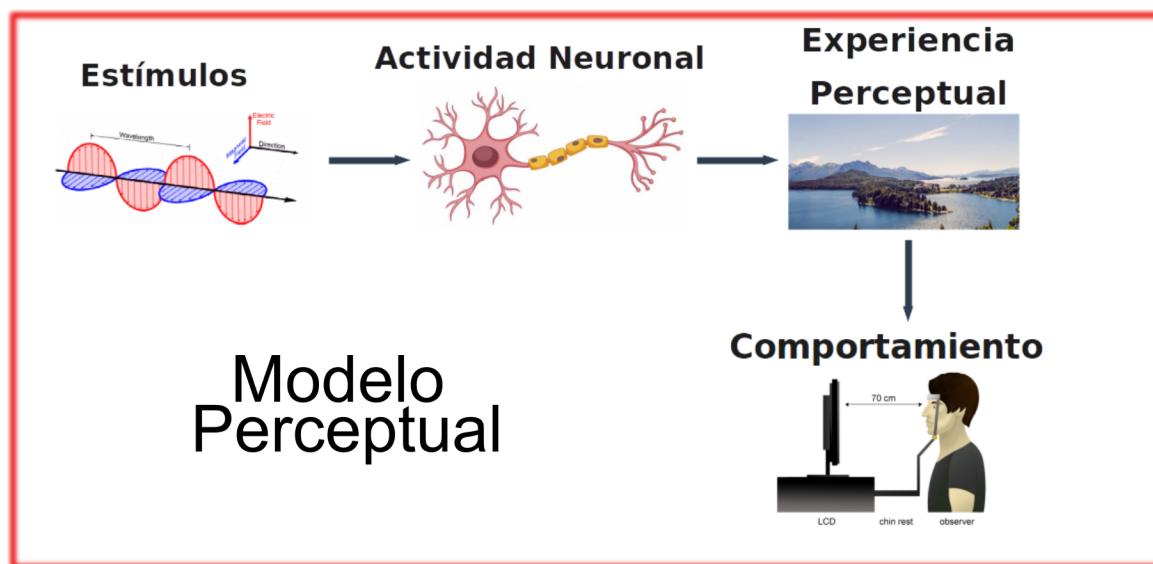


Figura 1.2: Esquema de los elementos que componen un Modelo Perceptual, para el caso de la visión. El estímulo corresponde a una onda electromagnética que suscita una respuesta en las células de la retina, las cuales envían la información al cerebro, produciéndose una experiencia perceptual en el sujeto, la cual sólo podemos caracterizar comportamentalmente.

1.2. Modelar la percepción

Como sujetos sensibles que somos, entendemos lo que es percibir en un nivel fenomenológico, es decir la percepción tal cual se nos presenta conscientemente. Sin embargo, el método científico exige que seamos capaces de encontrar métodos de medición que nos permitan describir la percepción de un modo empírico y replicable, de forma tal de evitar la influencia de nuestros propios prejuicios en esa descripción. En la figura 1.2, representamos algunos de los aspectos importantes que debemos tener en cuenta a la hora de modelar la percepción.

Por un lado, al igual que el Arquitecto, debemos comenzar caracterizando el mundo físico y en particular los llamados estímulos, es decir aquellas propiedades físicas que suscitan una experiencia perceptual. Como sabemos desde el punto de vista fisiológico, los estímulos inician la cadena de eventos que produce la experiencia perceptual al interactuar con nuestros órganos sensitivos: fotones que caen en la retina, ondas sonoras que hacen vibrar nuestros tímpanos, etc. Luego, esa información es transformada en actividad neuronal, tales como el flujo de iones a través de la membrana y los potenciales de acción que las neuronas producen. De algún modo, esta actividad cerebral da lugar a la percepción. Si bien no podemos medir directamente qué es lo que percibe el sujeto, podemos caracterizar la respuesta ante distintos estímulos y a partir de esto inferir propiedades de la percepción. Esto es lo que se busca en los experimentos de comportamiento. En particular, en esta tesis nos centramos en los llamados experimentos psicofísicos. Tradicionalmente, los experimentos psicofísicos abstraían al sujeto como una caja negra, observando sólo su respuesta como un output asociado a cierto input. Para obtener un modelo completo de primeros principios, es necesario

encontrar un correlato en la representación neuronal que subyace a dicha percepción. En conclusión, podríamos decir que un modelo perceptual será completo si logra definir de un modo independiente a cada uno de los elementos que componen esta cadena de eventos y la forma en que éstos se concatenan.

Comenzaremos esta tesis intentando pulir estos conceptos. En primer lugar, enunciaremos algunas de las posturas filosóficas en torno a la percepción. Este paso es necesario para introducir los conceptos de *percepto* y *representación* que utilizaremos. Luego indagaremos sobre la concepción científica de representaciones neuronales y sobre cómo pueden caracterizarse empíricamente. Describiremos brevemente el rol de los experimentos psicofísicos y mostraremos algunos ejemplos de experimentos que arrojan cierta luz sobre la conexión entre percepción y actividad neuronal. Finalmente, nos zambulliremos en el tema principal de esta tesis, el espacio de los colores y veremos de qué manera se manifiestan estos conceptos en este espacio perceptual específico.

1.3. Filosofía de la percepción

Existen diversos marcos filosóficos para entender la percepción [16–18]. Todos aceptan el hecho que los sujetos tienen al menos la sensación de vivir en un mundo que los trasciende, es decir, que por un lado existe un “yo”, y por otro lado, un “afuera de mí”, o equivalente-mente, un “no yo”. Ese “no yo”, que tiene la apariencia de ser algo así como un “mundo externo”, se nos manifiesta a través de los sentidos: lo vemos, lo oímos, lo tocamos, etc. Uno puede sin embargo preguntarse si tales sensaciones alcanzan para conferir al mundo externo el status ontológico de “existente fuera de mí”, o si es simplemente una ilusión o una alucinación. Las causas de las ilusiones o alucinaciones pueden ser variadas. Una posible causa es que un fenómeno físico, como la refracción de la luz, o el eco del sonido, nos haga suponer la existencia de entidades que no existen. Otra posible causa es que cierta actividad eléctrica en el cerebro (producto de actividad onírica durante el sueño, de una condición psiquiátrica, de sustancias tóxicas, o de una computadora maligna que quiere engañarnos con un mundo virtual) den lugar a una alucinación. Otra posible causa es que vivamos en un mundo solipsista con leyes que no controlamos. Lo importante es que las causas de la percepción, sea esta verídica o imaginada, están fuera de nuestro control voluntario. Cuando imaginamos algo, somos conscientes de que lo que experimentamos es un acto voluntario. Lo que percibimos, por el contrario, se nos aparece con una realidad que no emerge de un acto creativo intencional. Los factores que regulan la aparición de experiencias perceptuales son los que llamaremos “mundo externo”, por ser externos a nuestra voluntad y nuestro control, aún si son factores radicados en actividad cerebral propia. Entenderemos como “yo” al sujeto que experimenta la percepción. Tal percepción está mediada por sensaciones, que en esta tesis describiremos con la palabra “fenomenología”, para resaltar que estamos hablando

de una experiencia íntima y sólo accesible introspectivamente. Podemos entonces hablar de la fenomenología (la sensación que produce) de un color, un sonido, un sabor, etc.

Las distintas posturas filosóficas sobre la percepción varían en la forma en que definen y articulan los ingredientes fundamentales del acto de percibir. Por ejemplo, la postura “realista naïve” concibe a la percepción como un mapeo entre el mundo externo y la fenomenología. Esta visión considera que los protagonistas en el acto de percibir son, por un lado, el mundo externo que causa la experiencia, por otro, la fenomenología de la experiencia, y por otro, el mapeo entre ambos. Existe un segundo marco filosófico denominado teoría de los “datos sensoriales,” que postula la existencia de un objeto intermedio entre el mundo externo y la fenomenología: el objeto percibido. Si estoy percibiendo un elefante rosa, tal elefante es un objeto relevante desde el punto de vista filosófico, que debe ser incorporado en la teoría, independientemente de que la percepción sea o no verídica. Si la percepción es verídica, entonces el dato sensorial “elefante rosa” coincide con un objeto real del mundo exterior, por ejemplo, en el caso de que alguien haya pintado un elefante de rosa, o en que por mutación genética haya nacido un elefante rosa. Si la percepción es alucinada, entonces no hay tal coincidencia. Pero igual existe el elefante rosa como objeto imaginado, y este objeto puede distinguirse de la fenomenología de la percepción en sí, y merece ser estudiado. La teoría de los datos sensoriales puede verse, en algún sentido, como un realismo indirecto, ya que los datos sensoriales son un objeto intermedio que puede interpretarse como una copia del mundo externo que se relaciona más directamente con la fenomenología que el mundo externo en sí. Dependiendo de cómo se definan los componentes y de cómo se describan las relaciones entre los conceptos “mundo externo”, “datos sensoriales” y “fenomenología”, la teoría puede calificarse con distintos grados de dualismo epistemológico, o de representacionalismo. La idea de “dualismo” o de “representación” hacen referencia a la supuesta copia, o visión subjetiva del mundo a la que tenemos acceso a través de nuestra experiencia fenomenológica, y su interpretación. Un tercer marco filosófico denominado “adverbial” considera el objeto imaginado como irrelevante (o quizás, como parte de un proceso de inferencia mental que no concierne a la percepción en sí) y pone el hincapié en las cualidades o las propiedades de la fenomenología. En este marco, toda percepción se caracteriza por (a) una modalidad sensorial, que puede ser por ejemplo, visual, auditiva, olfativa, etc., y (b) un conjunto de cualidades, o adverbios, que caracterizan las particularidades de cada experiencia perceptual individual. Ver una manzana, en este marco, consiste en modificar el acto de ver agregando cualidades de rojez, redondez, brillo, tamaño, ubicación, etc. Los protagonistas de este marco filosófico son los así llamados “qualia”, es decir, las dimensiones en las cuales se puede modificar y particularizar una dada modalidad sensorial.

Las distintas teorías expuestas no son necesariamente excluyentes, ya que más que describir qué es lo que sucede y qué es lo que no sucede durante el acto de percibir, tienen miradas distintas sobre cuáles aspectos de la percepción consideramos relevantes. De todas formas, a la hora de investigar la percepción resulta inevitable tomar una postura filosófica,

conscientemente o no. Dicha postura perfila la forma de abordar el problema y el tipo de respuestas que buscaremos. Por ejemplo, una postura de tipo realista naïve es más proclive a buscar correlatos entre la percepción y regularidades estadísticas en el ambiente que una postura adverbial. Esto no significa que la postura adverbial niegue la hipótesis de que los sentidos evolucionaron con el objetivo de optimizar las regularidades del ambiente, sino que se focaliza en otros aspectos.

Obsérvese que en las distintas teorías sobre la percepción, extraídas de textos de filosóficos, no hay ningún tipo de referencia al cerebro o a las neuronas. Desde nuestra perspectiva científica, nos parece fundamental poder reformular algunos de estos principios de modo de incorporar la idea que, como dice el filósofo Alva Nöe, “perception is a process in the brain whereby the perceptual system constructs an internal representation of the world” [19]. En este marco, en esta tesis tomamos la así llamada “teoría de los perceptos”, que es una versión particular de la teoría representacionalista, que hace uso del concepto de “percepto”. Un percepto es accesible introspectivamente, pero a diferencia de la fenomenología en forma genérica, bajo ciertas hipótesis es también accesible experimentalmente, tanto con técnicas fisiológicas como comportamentales, como describimos en breve. Esto permite trabajar con el concepto de representación utilizando técnicas neurocientíficas.

1.4. Representaciones neuronales

El término percepto refiere a un objeto mental, es decir a aquello que el sujeto percibe. Está caracterizado por rasgos fenomenológicos, tales como una sensación de color, una sensación de brillo, etc. En el paradigma neurocientífico se hipotetiza que los perceptos emergen o *supervienen* de la actividad neuronal, esto significa que dos perceptos distintos deben provenir necesariamente de distintos patrones de actividad neuronal. En un sentido amplio, se suele denominar representación neuronal a un conjunto de variables que describen cierto aspecto de la actividad neuronal, y que participan de la construcción del percepto. Existen numerosas elecciones posibles del conjunto de variables que constituyen una representación. Por ejemplo, cuando procesamos información visual, las neuronas involucradas en la construcción del percepto se distribuyen sobre un conjunto amplio de áreas cerebrales: en la retina, el tálamo y la corteza, dando lugar a sendas representaciones en varias partes del cerebro. Asimismo, las células de lugar (place-cells) y las células grilla (grid cells) están asociadas a la representación de la ubicación espacial del sujeto [20]. Un objetivo frecuente de los estudios neurofisiológicos es encontrar marcadores de una dada representación neuronal, por ejemplo, potenciales eléctricos registrados con electrodos extracelulares ubicados cerca de los cuerpos neuronales o los axones, imágenes de calcio que describen la actividad eléctrica en una región cerebral, o niveles de oxigenación detectados por un equipo de resonancia magnética funcional (ver figura 1.3).

Numerosas son las iniciativas actuales para caracterizar representaciones. Sin embargo, quizás paradójicamente, no existe un consenso generalizado sobre qué se entiende, exactamente, por una representación. Oscar Vilarroya [21] entrevistó a cientos de neurocientíficos con el objetivo de hacer un relevamiento de opinión que sintetice las propiedades mínimas que deben satisfacer los sistemas en estudio para poder ser considerados representaciones neuronales. La única coincidencia abrumadora que encontró fue el reconocimiento de la inexistencia de una teoría general sobre las representaciones. Las definiciones propuestas por los entrevistados diferían ampliamente, salvo quizás por el hecho que la mayoría señaló que dos componentes debían estar presentes: una componente ambiental (estímulo, mundo externo, actividad motora, etc.) y una componente neuronal (patrones de actividad neuronal, tasas de disparo, sincronía en una dada región, etc.). En cuanto al tipo de relación que se establece entre ambas componentes para poder hablar de representación, las respuestas colectadas por Vilarroya pueden clasificarse en cuatro grupos. Primero, algunos autores toman una posición neutral, refiriéndose en términos genéricos a la conexión entre lo representado y la actividad neuronal, evitando adrede especificar las propiedades de dicha relación. Un segundo grupo está constituido por aquellos que sugieren que la actividad neural debe llevar *Información* respecto de la componente ambiental. Cabe notar que el término “información” puede tener dos sentidos distintos en este contexto: uno es el significado estadístico (Información de Shannon), y otro es el sentido semántico (el contenido) de la representación. Ambos sentidos pueden ser relevantes dependiendo del caso. En tercer lugar, están quienes hablan de un código neuronal, donde ciertos patrones - por ejemplo, en los tiempos de disparo - se corresponden con ciertas propiedades del ambiente. Por último, está el grupo de los que usan términos como “mapeo” o “isomorfismo”, considerando que la representación está basada fundamentalmente en la existencia de transformaciones que llevan de la componente ambiental a la neuronal, en el mismo sentido que un mapa refleja algunas características del territorio que representa.

El tipo de actividad neuronal al que se le puede atribuir propiedades representacionales es amplio. Una representación puede estar instrumentada por la actividad de una célula única (tasa de disparo, potencial de membrana, etc.), por la actividad de circuitos neuronales, o incluso por la actividad a lo largo de todo el cerebro. Vilarroya, sin embargo, señala dos condiciones importantes: la activación de la representación debe ser tanto necesaria como suficiente para producir el efecto del estímulo representado. Debe ser suficiente, en el sentido que una vez que se activa la representación, el sujeto debe comportarse como lo hace en presencia del estímulo, independientemente de que el estímulo esté presente o no. También debe ser necesaria, ya que si un estímulo genera actividad neuronal en múltiples regiones cerebrales, no necesariamente todas ellas participan de la generación del percepto. Algunas pueden estar tan sólo débilmente correlacionadas con el estímulo, más como epifenómeno que como factor determinante. La verificación de esta condición es difícil, ya que en última instancia, las correlaciones observadas en un estudio experimental, aún siendo fuertes, son

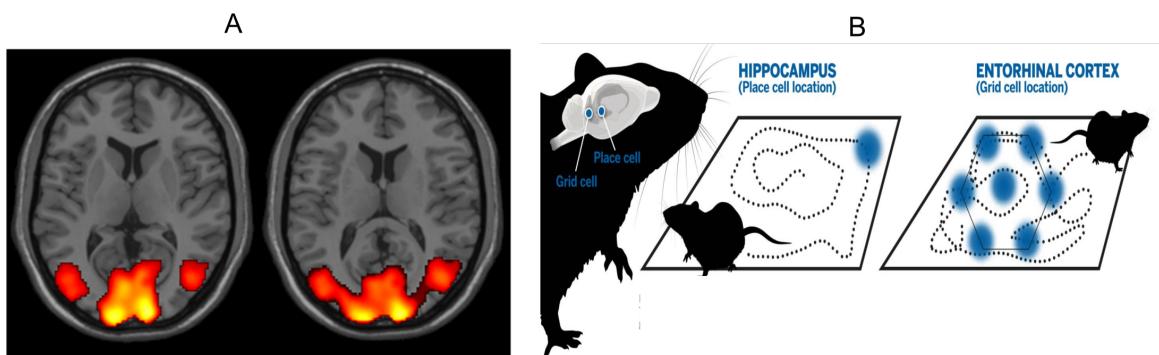


Figura 1.3: Ejemplos de representaciones neuronales. (A) Imágenes de resonancia magnética funcional (fMRI) en las que se mide los niveles de oxigenación en sangre (BOLD) de distintas áreas del cerebro. En la imagen, el área iluminada es la llamada corteza visual, cuya actividad se correlaciona con la presentación de estímulos visuales. (Imagen extraída de <https://www.invivonmr.ualberta.ca/Education/fmri.php>) (B) Cuando una rata camina libremente por una arena, las células de lugar en el hipocampo disparan únicamente cuando la rata pasa por determinadas regiones del espacio. A la región en la que la célula dispara se le denomina su campo receptivo. En la Corteza entorrial, las células grillas responden con un patrón hexagonal a medida que la rata se desplaza. (Imagen extraída de <https://thebiologist.rsb.org.uk/biologist-features/what-when-and-where>)

siempre insuficientes para concluir a ciencia cierta que existe una conexión causal entre la representación y el percepto. Las conexiones causales sólo pueden establecerse en el marco de un modelo teórico, con mayor o menor sustento experimental.

El estudio de Vilarroya revela, además, que los científicos esperan que los estímulos, o “lo representado” por la actividad neuronal, cumpla con las siguientes condiciones:

1. Lo representado debe ser una cantidad medible o cuantificable, es decir, algún tipo de propiedad física. Por ejemplo, sabemos que la percepción de un color depende de las propiedades espectrales y de la distribución espacio-temporal de la luz incidente en la retina.
2. Lo representado debe ser autosuficiente. Para poder establecer una relación con la actividad neuronal, la cosa representada debe ser un elemento del mundo cuyo estado pueda caracterizarse de modo independiente del estado del ente que lo percibe.
3. Lo representado debe poseer significado para el organismo, debe ser biológicamente relevante (adaptativo, ecológico, etc.). Esta condición surge del hecho de que el ambiente posee innumerables elementos que lo caracterizan, y solo un determinado subconjunto de ellos son los que el organismo representa.

En cuanto a la forma experimental de establecer la correlación entre el estímulo y la actividad neuronal, el principal requerimiento es que la relación sea confiable, en el sentido de que sea metodológicamente consistente y replicable. Es decir, que sea la misma utilizando distintos métodos en la mismas circunstancias y también a lo largo de distintas circunstancias. Esto es importante para descartar correlaciones espúreas y relaciones contingentes que

surjan como un artefacto de las condiciones específicas de medición de un cierto experimento. Como veremos más adelante, esta idea es de particular relevancia para nuestro modelo, que aspira a describir la relación entre la cromaticidad y el color, y no de un paradigma experimental en particular.

1.5. Psicofísica

Para completar la descripción de los elementos que componen el esquema presentado en la sección 1.2, nos resta explicar qué tipo de experimentos comportamentales nos permiten obtener información sobre la percepción. En esta tesis, realizamos experimentos psicofísicos y por lo tanto nos centramos en ellos. Bruce [22] define la psicofísica como “el análisis de los procesos perceptuales mediante el estudio del efecto en la experiencia o el comportamiento del sujeto al variar las propiedades físicas del estímulo”. La metodología típica consiste en la presentación de estímulos con distintas propiedades y en la realización de algún tipo de tarea asociada al estímulo por parte del sujeto. Uno de los conceptos elementales de la psicofísica es el de Diferencia Apenas Perceptible (DAP o JND por sus siglas en inglés *Just Noticeable Difference*), también llamado umbral diferencial, que corresponde al cambio mínimo que debo producir en un dado estímulo para que el sujeto perciba una diferencia. Es decir, corresponde a la resolución que posee el sujeto para distinguir estímulos muy cercanos. La magnitud del umbral se expresa en las mismas unidades que el estímulo, el cual usualmente se parametriza mediante alguna de sus propiedades físicas, elegida por el experimentador.

Normalmente, la respuesta de un sujeto en este tipo de experimento es probabilística, es decir, dados dos estímulos habrá una cierta probabilidad de que el sujeto sea capaz de distinguirlos, y esa probabilidad cambiará con la distancia entre los estímulos. Por este motivo, la sensibilidad del sujeto se caracteriza a través de la llamada función psicométrica (ver 1.4). Un experimento de discriminación o detección consiste generalmente de un estímulo de referencia y un estímulo de prueba. El estímulo de prueba se elige aleatoriamente, de forma que en un cierto porcentaje de las realizaciones coincide con el de referencia, y en el porcentaje complementario está modificado. La magnitud de la modificación se varía sistemáticamente. La tarea del sujeto es reportar si detecta o no una diferencia, y se considera que el reporte es acertado cuando se distinguen estímulos distintos, o no se distinguen estímulos iguales. La relación entre el porcentaje de aciertos y la distancia entre los estímulos de referencia y prueba se denomina *función psicométrica*. La función psicométrica posee típicamente una forma sigmoidal como la mostrada en la figura 1.4, yendo de una región donde la capacidad de discriminar es mínima y por lo tanto el estímulo modificado es percibido como igual al de referencia, a una región donde es máxima. El valor del mínimo está dado por la probabilidad de que el acierto ocurra por azar, lo cual depende del paradigma específico del experimento.

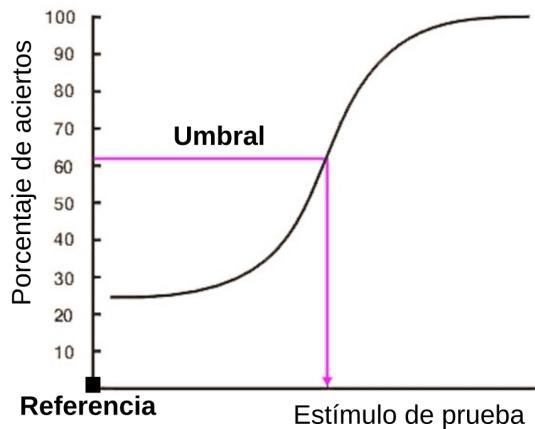


Figura 1.4: Ejemplo de función psicométrica en un experimento de discriminación.

El umbral de discriminación es el cambio que se debe producir en el estímulo para alcanzar un nivel de acierto pre-establecido, por ejemplo, el punto medio entre el máximo y el mínimo.

La función psicométrica revela algunas cosas interesantes. Por un lado, implica que la resolución de la percepción es finita, dado que dos estímulos físicamente distintos son percibidos como iguales cuando su diferencia física es menor que el umbral. Esta resolución finita implica que es posible imponer cierta granularidad en el espacio de estímulos, transformándolo en un espacio operativamente discreto. Cada grano se define como una región donde los estímulos no son bien diferenciados entre sí. Por el otro, hay una componente probabilística en la percepción, dado que en la zona intermedia el mismo estímulo será percibido en algunas realizaciones como igual a la referencia, y en otras como distinto. Más aún, por lo general la probabilidad de ser percibido de una forma u otra varía continuamente con la diferencia de los estímulos. La granularidad antes mencionada debe entenderse como una en la cual los bordes de cada grano son en alguna medida difusos. Un modelo de la percepción debería poder explicar estas características.

Uno de los primeros resultados de la psicofísica es la llamada ley de Weber-Fechner [23], según la cual para ciertas cantidades que crecen en progresión aritmética la sensibilidad es inversamente proporcional a la magnitud de la cantidad, o dicho de otra manera, el umbral diferencial es proporcional a la intensidad del estímulo. Lo interesante es que esta ley se manifiesta –dentro de cierto rango– en múltiples fenómenos perceptuales: desde la diferencia de peso entre dos objetos, hasta cambios en la intensidad de un sonido o en la luminosidad de un estímulo visual.

Otro tipo de experimento psicofísico que nos interesa son los experimentos de emparejamiento o *matcheo*, los cuales consisten en identificar como iguales o similares dos estímulos con propiedades distintas. Esta distinción puede radicar en una propiedad intrínseca del estímulo - por ejemplo, un haz de luz monocromático y un haz compuesto de muchas lon-

gitudes de onda - o en propiedades contextuales –el mismo tipo de estímulo es presentado en condiciones distintas–. Ejemplos de estos experimentos serán descritos en las secciones 1.8.2 y 1.8.6. La importancia del contexto en la percepción cromática permite constatar que no hay una relación unívoca entre el estímulo (entendido como un ente aislado del entorno) y la experiencia perceptual que produce, un hecho que también nos interesa incluir en nuestro modelo.

Tal como Read hace notar [24], uno podría preguntarse cuál es el rol de la psicofísica en el contexto actual en el que se han desarrollado técnicas que permiten medir directamente las propiedades estructurales y funcionales del sistema nervioso y la forma en que este responde a diferentes estímulos. Es decir, si el paradigma científico sostiene que la percepción es producida por el cerebro, por qué no estudiar directamente el cerebro. El problema es que hoy en día aún no tenemos una forma de explicar cómo el cerebro produce la percepción a nivel fenomenológico. Por lo tanto, consideramos que la psicofísica es necesaria para poder inferir propiedades de la percepción y que es justamente en conjunción con el estudio de la actividad neural asociada que se puede comenzar a tender un puente entre las distintas componentes que hacen a la percepción. Por este motivo, en la siguiente sección nos centraremos en describir algunos experimentos que dan evidencia de este nexo y arrojan pistas sobre cómo caracterizarlo empíricamente.

1.6. Relación entre percepción y representaciones neuronales

En la sección 1.4 enfatizamos el rol de la actividad neuronal como una forma de representar propiedades del mundo externo. A su vez, en la sección 1.5 introdujimos el concepto de experimentos psicofísicos como una herramienta para refinar la relación entre un estímulo y la experiencia perceptual que suscita. Sabemos que la interacción con el mundo externo se da a través de los órganos sensoriales, sin embargo, si la experiencia perceptual no está determinada unívocamente por la actividad de las neuronas sensoriales, debe existir un correlato neuronal en alguna otra parte. En esta sección, describimos a modo de ejemplo un experimento mediante el cual es posible encontrar dicho correlato.

El color es una experiencia perceptual que se asocia al procesamiento en la corteza visual, la cual está jerárquicamente organizada. Kim et al. [25] realizaron un experimento para distinguir entre aquellas respuestas neuronales gobernadas por la cromaticidad del estímulo -una propiedad física- de aquellas asociadas a la experiencia perceptual del color -una propiedad fenomenológica-. Para ello, combinaron un mecanismo psicofísico con una medición del nivel de oxígeno en sangre (BOLD) mediante una resonancia magnética funcional (fMRI). El efecto psicofísico se llama rivalidad binocular y ocurre cuando a cada uno de los dos ojos se les presentan imágenes distintas, lo que produce que el sujeto vea alternadamente una

de estas dos imágenes en lugar de superponerlas. En este experimento las imágenes presentadas a cada ojo poseían la misma forma pero distintos colores. El estímulo en cada lado se alternaba con una frecuencia fija entre dos colores opuestos, por ejemplo verde y magenta, tal como se muestra en la Fig. 1.5 A. El sujeto cuenta con un interruptor binario mediante el cual indica qué color está percibiendo. El estímulo mostrado en cada ojo es el mismo, sólo que desfasado temporalmente. De este modo, la percepción del sujeto variaba entre un color y otro con tiempos distintos a la frecuencia de alternancia de los estímulos. Específicamente, el tiempo promedio de alternancia perceptual fue de 2.2 segundos, mientras que el período del estímulo mostrado era de 236 ms.

En primer lugar, analizando las imágenes de fMRI y utilizando un modelo de codificación (Inverted Encoding Model), los autores construyen un “diccionario” entre estímulo e imagen, siguiendo el método utilizado por Brouwer et al [1]. Este consiste en mostrar un estímulo con cromaticidad fija - y por lo tanto sin ambigüedad perceptual- y caracterizar las propiedades estadísticas de la actividad en cada voxel de la imagen al variar dicho estímulo, de forma tal de poder luego predecir, a partir de una imagen, cuál es la cromaticidad del estímulo mostrado. Luego, utilizan este método para decodificar el color percibido a través de la imagen en dos condiciones distintas: en una en la que hay rivalidad binocular, y otra en la que no la hay, ya que los estímulos son mostrados en fase, por lo que ambos ojos reciben la misma imagen. Para analizar las imágenes, toman como referencia la respuesta perceptual del sujeto, agrupando las imágenes de acuerdo a si el observador presionaba el botón verde o el magenta. Como puede verse en la figura 1.5 B, los autores encontraron un correlato de la experiencia perceptual en la actividad de las áreas de alto nivel en la corteza visual, tales como V4v y VO1. En estas regiones el color reconstruido promedio se aproxima a la cromaticidad percibida reportada por los sujetos. En cambio, las áreas V1 y V2 eran moduladas por la cromaticidad del estímulo, ya que en la condición de rivalidad la respuesta oscilaba a percepción fija, dando lugar a una respuesta media sin una direccionalidad clara, mientras que al desaparecer la ambigüedad (estímulos en fase) el color reconstruido coincide con la cromaticidad del estímulo.

Lo que nos dice el resultado de este experimento, es que el problema que planteamos inicialmente respecto de la relación no unívoca entre estímulo y percepción se manifiesta también al analizar las primeras etapas del procesamiento visual. Sin embargo, si la percepción efectivamente es producto de actividad neuronal, debe existir algún indicador de actividad que se corresponda adecuadamente con la percepción. El experimento muestra que efectivamente hay una mayor correspondencia entre las regiones de mayor nivel (V4v y VO1) y la percepción del sujeto. Esta correspondencia ya era sugerida, entre otras razones, por la existencia de la llamada *acromatopsia*, la cual se produce por lesiones en la corteza visual y da lugar a que el sujeto deje de percibir el color conscientemente, por más que sus órganos visuales funcionen correctamente [26].

Veremos en las secciones siguientes que los espacios perceptuales parecen poseer estruc-

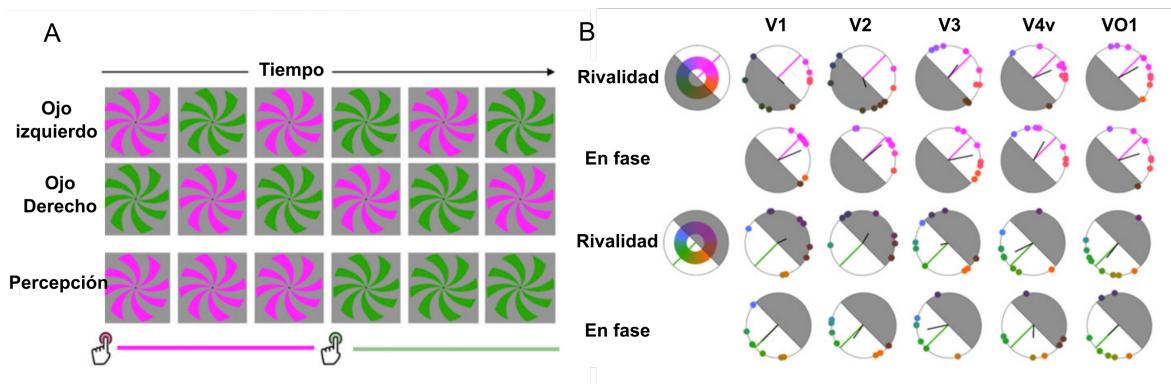


Figura 1.5: A: Diseño experimental de la condición de rivalidad binocular. Dos estímulos cromáticos diferentes eran continuamente presentados a cada ojo para inducir rivalidad perceptual de forma tal que solo uno de los dos colores era visto en un dado momento. Los estímulos cromáticos alternaban entre ambos ojos a una frecuencia de 4.25 Hz, de forma tal que ambos estímulos en un dado período de tiempo difería solo en la fase temporal. Los observadores indicaron instante a instante el color percibido presionando continuamente entre dos botones. B: Reconstrucción del magenta y el verde. El color representado en cada área visual durante la rivalidad binocular y la presentación en fase de los estímulos fue reconstruido y presentado en el espacio DKL. Cada punto indica el color reconstruido para un dado observador. La línea sólida negra representa el vector promedio de los colores reconstruidos para distintos observadores, la línea sólida coloreada indica el color objetivo (magenta o verde). La mitad del plano de color opuesta al color percibido aparece sombreado para indicar que la precisión del color reconstruido está por debajo de la precisión obtenida por azar. Sólo en las regiones V4v y V01 se logra que en la condición de rivalidad, la reconstrucción se asemeje al color que los observadores reportan como percibido. Imágenes extraídas y traducidas de Brouwer et al, 2009 [1]

turas que se manifiestan, por ejemplo, a la hora de comparar distintos estímulos. Un tipo de estructura en la que nos enfocaremos será la geometría del espacio de colores. El hecho de que haya una región del cerebro que se puede poner en correspondencia con la percepción de un color, dispara el siguiente interrogante: ¿Existirá también una propiedad en la actividad neuronal que sea la contra-cara de la geometría que observa a nivel perceptual?

Hay múltiples ejemplos en otras modalidades sensoriales de este tipo de correspondencia entre la actividad neuronal y un cierto tipo de percepción que se produce de un modo no unívoco con el estímulo mostrado. Por ejemplo, Mongillo et al [27] midieron una correspondencia entre la respuesta táctil de los bigotes de un roedor y la actividad en la corteza somatosensorial. Por otro lado, Linster et al [28], encontraron una relación entre patrones de actividad espacial en el bulbo olfatorio y la percepción diferencial de odorantes enantiomeros.

1.7. Geometría en espacios perceptuales

Los cómputos neuronales involucrados en la percepción consciente, las reflexiones sobre el mundo y la planificación de acciones, no se realizan sobre estímulos externos, sino más bien sobre nuestras representaciones internas de esos estímulos. Para ejecutar tales cómputos, estamos dotados de una noción intuitiva de similitud entre estímulos. Por ejemplo, normal-

mente podemos decir si dos caras son iguales o no, si dos herramientas son intercambiables para una cierta tarea o si dos colores son más o menos similares. Esta habilidad sugiere que los perceptos pueden modelarse como elementos de un espacio abstracto equipado con una noción de distancia, de modo que objetos similares estén cerca unos de otros.

La noción de espacios conceptuales ha sido explorada por varios estudios recientemente, proponiendo que, por ejemplo, la red entorinal-hipocampal representa no solo información espacial, sino más generalmente, espacios cognitivos abstractos. Se ha investigado toda una variedad de espacios cognitivos, que van desde atributos simples de estímulos sensoriales [29, 30], hasta nociones muy complejas, como la forma de pájaros [31] o jerarquía social [32]. La hipótesis es que los elementos representados en estos espacios satisfacen restricciones geométricas como la intermediación y la equidistancia, de modo que las propiedades y los conceptos ocupan regiones convexas [33]. Los aspectos geométricos del espacio físico se atribuyen así a otros espacios y se conjectura que son funcionalmente relevantes para guiar la imaginación [34, 35] y la toma de decisiones [36].

Nuestro acceso a los elementos de espacios conceptuales es introspectivo: percibimos qué tan distintos o similares son dos colores mediante una experiencia subjetiva. La ontología de los espacios conceptuales y las nociones de similitud entre ellos es por lo tanto debatible ¿Poseen propiedades matemáticamente precisas a las que podamos acceder empíricamente? A priori, la existencia de una noción intuitiva de similitud entre una colección de elementos no garantiza que los elementos puedan describirse como puntos en un espacio dotado de una topología o una geometría, y menos aún una geometría riemanniana, en la que las distancias y los ángulos obedecen a relaciones matemáticas exactas, y las superficies o los volúmenes se pueden medir cuantitativamente. La existencia de una geometría adecuada debe verificarse experimentalmente. En esta tesis, procederemos en aras de dicha verificación. Siguiendo a Resnikoff [8], trabajaremos específicamente con el espacio de colores, aunque el procedimiento también es válido para otros espacios conceptuales.

En primer lugar, supondremos que los colores conforman una variedad diferenciable, es decir un espacio topológico que puede ser mapeado localmente y de forma suave a un entorno abierto de \mathbb{R}^n . Esta hipótesis se basa en la observación de que cualquier par de colores puede ser conectado por una trayectoria que contiene elementos cuyas propiedades físicas y perceptuales varían continuamente. Por definición, una variedad diferenciable posee asociado un Atlas, es decir, el conjunto de todas las posibles cartas coordenadas sobre la variedad, junto con las funciones de transición entre distintas coordenadas. Cualquiera de estos sistemas de coordenadas puede ser utilizado como parametrización de la cromaticidad de los estímulos visuales, y esta elección no altera el color percibido. El lenguaje de la geometría diferencial permite construir modelos que cumplen el principio de covariancia, es decir, modelos en los que la forma de las leyes resulta independiente del sistema de coordenadas utilizado. Esto es de particular utilidad en psicofísica ya que en general el mapeo exacto entre las propiedades físicas que utilizamos para representar los estímulos - que funcionan como un

sistema de coordenadas - y el percepto producido es desconocido. De este modo, podemos analizar experimentos utilizando distintas parametrizaciones del espacio de colores y ver qué propiedades son invariantes - por ejemplo, una distancia - y cuáles surgen como efecto de las coordenadas específicas utilizadas. A lo largo de esta tesis, utilizaremos el término “color” para referirnos al percepto - la experiencia privada - y la palabra “cromaticidad” para las propiedades físicas del espectro electromagnético a las cuales los humanos son sensibles.

Múltiples nociones de distancia en el espacio de colores se han propuesto en la literatura, usando criterios basados en la ley de Weber-Fechner [37–39] o en la premisa de que el espacio de colores es homogéneo bajo el grupo de transformaciones lineales [8, 9, 40, 41]. Nuestro énfasis estará en dos aspectos: buscar una noción de distancia que (1) describa efectos cromáticos perceptuales del modo más sencillo posible, y (2) que sea aplicable a múltiples paradigmas experimentales que involucren estímulos cromáticos.

La búsqueda de simplicidad no es únicamente por conveniencia operacional. Hagamos una analogía con la física. Una ley física puede tomar una forma extremadamente sencilla o extremadamente complicada, dependiendo de la métrica que usemos para el espacio y el tiempo. El espacio-tiempo es en sí mismo intangible, solamente tenemos acceso a eventos percibidos en última instancia a través de la experiencia sensorial. Aún así, espacio y tiempo se manifiestan en el modelo que construimos del mundo que nos rodea. Observamos regularidades en el mundo y somos capaces de predecir algunas de esas regularidades asumiendo que los eventos suceden en un lugar y momento particular, y que son gobernados por las leyes de la física. Notablemente, estas leyes (tanto a nivel intuitivo como en su formulación matemática) se vuelven particularmente simples cuando el espacio y tiempo son medidos en sistemas específicos: inerciales y cartesianos. En estos sistemas, la física clásica se revela isotrópica y homogénea, de forma tal que todas las ecuaciones - la mecánica newtoniana, la ley de Coulomb, las ecuaciones de campo de Maxwell, la ecuación del calor, etc. - dependen sólo de las distancias relativas entre partículas y son invariantes ante traslaciones rígidas y rotaciones. La capacidad de predicción de las teorías sería dudosa si la forma de estas ecuaciones cambiara con el tiempo o al moverse de un laboratorio a otro. Los sistemas inerciales y cartesianos por lo tanto, poseen un rol especial en nuestra representación mental de los eventos, debido a la geometría euclíadiana subyacente a la física clásica. En esta tesis, planteamos la pregunta de si una afirmación similar puede hacerse para los espacios asociados a la experiencia fenoménica. La geometría del espacio de colores es también, en sí misma, intangible. Sin embargo, es posible concebir una métrica del espacio de colores en la que los fenómenos perceptuales resulten ser homogéneos e isotrópicos. Es importante destacar que para hallar evidencia de una métrica con estas propiedades, deben considerarse múltiples paradigmas perceptuales, ya que esperamos que la geometría se manifieste en las operaciones perceptuales relacionando distintos perceptos, tal como la distancia espacial tiene un rol clave en las interacciones físicas. Una métrica que nos otorgue una descripción sencilla de un único experimento no puede afirmarse que caracteriza al color *per se*, correspondería más

bien a una propiedad asociada a una tarea específica en la cual interviene la información cromática.

Es usual en psicofísica encontrar trabajos en los que el espacio de estímulos parametrizado con unas ciertas coordenadas $(\theta_1, \dots, \theta_n)$ es tratado como un espacio vectorial. Esto implica suponer la existencia de una operación de suma y de multiplicación por escalares en ese espacio, además de un elemento neutro y todas las otras propiedades que definen a un espacio vectorial. Más aún, es usual que se asigne un producto interno en este espacio y se utilice entonces como distancia la norma euclídea - asociada al producto interno canónico de la diferencia entre dos vectores. En principio, uno es libre de definir formalmente estas operaciones. Pero, no debe perderse de vista lo siguiente: dado que a priori la elección de la parametrización de los estímulos es arbitraria, no hay razón para creer que estas operaciones reflejen propiedades reales del espacio perceptual. Por ejemplo, en mecánica clásica, las fuerzas son modeladas como vectores, lo cual se condice con un hecho que es empíricamente verificable: el principio de superposición, es decir, que la fuerza total ejercida sobre un cuerpo es la suma de las fuerzas individuales. Esta es una manifestación física de un fenómeno lineal. Sin embargo, si en un experimento psicofísico como el realizado por Constantineau et al [31], los parámetros (θ_1, θ_2) corresponden respectivamente a la longitud de los picos y de las patas de una imagen de un pato, no hay ninguna razón para suponer que el espacio perceptual asociado a esa familia de estímulos poseerá una estructura lineal.

En este sentido, establecer una espacio vectorial - y la distancia euclídea asociada - a priori puede resultar inconveniente, pues es una estructura sumamente rígida que asociaríamos a una parametrización del espacio de estímulos que no tiene por qué reflejar las propiedades del espacio perceptual que estamos intentando modelar. Por esta razón, el lenguaje de la geometría diferencial resulta mucho más adecuado, ya que permite establecer relaciones respetando el principio de covariancia, es decir, de modo tal que los resultados sean independientes de las coordenadas utilizadas. En los capítulos siguientes, veremos que es necesario renunciar en parte a la estructura lineal usualmente asociada al espacio de colores para explicar ciertos resultados experimentales.

1.8. Espacio de colores

Que la visión es producida mediante la interacción de la luz con nuestros ojos nos resulta evidente desde niños: basta con cerrar los ojos o apagar la luz a la noche para que el mundo visual se pierda en la oscuridad. Sin embargo, entender la naturaleza de la luz y de nuestro sistema visual y la forma en que éstos se conjugan para producir el mundo de formas y colores que percibimos es un problema que ha fascinado a toda una serie de matemáticos, físicos, biólogos, filósofos, artistas, etc. La lista incluye a celeberrimos personajes: Platón, Aristóteles, Descartes, Hook, Newton, Euler, Young, Helmholtz, Maxwell, Grassmann, Riemann,

Goethe, Schopenhauer, Locke, Weber, Fechner, Dalton, Hering, e incluso, Schrödinger [9]. Como se imaginará el lector, más grande es aún la lista de investigaciones en este tema. Por tal motivo, en esta sección nos contentaremos con hacer una breve síntesis de aquellos resultados que subyacen a las hipótesis de nuestro modelo.

1.8.1. La naturaleza de la luz

La luz ha sido uno de los fenómenos físicos más estudiados y la evolución en su comprensión ha estado en estrecha relación con las revoluciones más importantes en la física. Newton (1629-1695) descubrió que la luz blanca al pasar por un prisma se descomponía en haces de colores tales como los que se veían en el arcoíris, y sostuvo la teoría corpuscular, según la cual la luz estaba conformada por partículas de distinta refractividad. En oposición, Huygens (1629-1695) postulaba que la luz es un fenómeno ondulatorio, lo cual permitía también explicar los fenómenos de reflexión y refracción, añadiendo la hipótesis de que diferentes colores correspondían entonces a diferentes longitudes de onda. La teoría ondulatoria recibió gran apoyo a partir de los experimentos de Young (1773-1829), con los cuales demostró la existencia del fenómeno de interferencia de la luz observando la aparición de franjas oscuras y luminosas al hacer pasar la luz a través de dos rendijas muy cercanas. Esta propiedad era difícil de explicar con la visión clásica de la mecánica corpuscular. La siguiente revolución vino de la mano de Maxwell (1831-1879), quien postuló la forma completa de las ecuaciones que describen el campo electromagnético y descubrió algo asombroso: el campo se propagaba en forma de ondas y la velocidad de propagación coincidía con la velocidad de la luz. Esto significó un enorme logro, tanto para la física teórica como para las futuras aplicaciones, al unificar múltiples fenómenos mediante una simple teoría: electricidad, magnetismo y luz, y la predicción de nuevos fenómenos - como las ondas de radio - que tendrían consecuencias incalculables. Curiosamente, fue también Maxwell quien en 1861 mostró que combinando fuentes de tres colores (rojo, azul y verde) podía crear los otros colores, cuando logró producir la primera fotografía a color combinando tres fotografías tomadas con filtros de estos tres colores y luego proyectando las tres juntas, cada una iluminada con una fuente del color correspondiente.

La teoría ondulatoria gozaba de amplia aceptación en la comunidad científica, cuando Planck (1858-1947), padre fundador de la física cuántica, demostró que al combinar la cuántica con la termodinámica, el resultado era incompatible con las mediciones del espectro de radiación de un cuerpo negro. Era necesario postular que la energía de la radiación estaba cuantizada para explicar los resultados experimentales, por lo que introdujo su famosa constante al proponer que $E = h\nu$, es decir que la energía de una onda electromagnética viene dada en unidades enteras del producto de la constante de Planck por la frecuencia de dicha onda. Einstein (1879-1955) propuso en 1905 que la absorción de luz en el denominado efecto fotoeléctrico también se explicaba correctamente si se suponía que la misma

ocurría a través de “cuantos” de luz, partículas que luego se llamarían fotones. Ese mismo año, además, inspirado fuertemente por la constancia de la velocidad de la luz en distintos sistemas de referencia, formuló la teoría de la relatividad especial, cambiando las concepciones tradicionales de espacio y tiempo. La dualidad onda-partícula se volvió entonces una propiedad esencial para explicar el comportamiento de, no solo la luz, sino toda la materia a nivel microscópico.

Esta dualidad ocupa también un rol en el estudio de la percepción visual. Si bien para experimentos en condiciones fotópicas (niveles de iluminación altos) uno puede caracterizar los estímulos visuales mediante sus propiedades clásicas - como la luminancia y el espectro de radiación -, la absorción de fotones en la retina es de hecho un proceso cuántico, durante el cual una molécula - llamada fotorreceptor - cambia su estado al absorber un único fotón (proceso de fotoisomerización). Más aún, existe evidencia de que para bajos niveles de iluminación, la detección de luz - visión escotópica - está directamente asociada al conteo de fotones únicos absorbidos por los bastones ([42]). Esto nos muestra que un correcto entendimiento de las propiedades físicas de la luz resultó esencial para poder abordar los mecanismos moleculares que subyacen a la visión.

1.8.2. Psicofísica de la visión

El descubrimiento de Maxwell implica que clásicamente un haz de luz puede caracterizarse como una onda electromagnética, por lo tanto, para describirlo completamente es necesario indicar a cada instante los valores del campo eléctrico y magnético $\vec{E}(x, t)$ y $\vec{B}(x, t)$. Ahora bien, lo que llamamos luz corresponde en verdad a ondas electromagnéticas con una longitud de onda dentro de un rango bastante acotado: los seres humanos solo vemos longitudes de onda entre aproximadamente 380 nm y 700 nm. Dada la velocidad de la luz, esto corresponde a oscilaciones con frecuencia del orden de los TeraHertz (10^{12} Hertz). Como discutimos en la sección anterior, si a nivel molecular lo relevante para iniciar el proceso de visión es la cantidad de fotones absorbidos, podemos decir que una buena forma de caracterizar un estímulo visual es mediante la densidad media de fotones de cada longitud de onda. La cantidad macroscópica asociada se denomina *densidad de radiaciónpectral* $I(\lambda)$, densidad spectral o para simplificar, el “espectro” y corresponde al flujo de energía por unidad de tiempo y de área asociado a una dada longitud de onda (ver figura). Esta cantidad se obtiene como un promedio temporal del flujo de energía a lo largo de una cierta región del espacio, la cual es cuadrática en el campo \vec{E} (nótese que en una onda el valor medio del campo $\langle \vec{E} \rangle$ se anula. Sin embargo, el principio de superposición lineal del campo electromagnético implica que para fuentes decorrelacionadas - es decir, aquellas que no producen interferencia entre sí - la intensidad de radiaciónpectral es aditiva. Esto significa que si tomo dos estímulos luminosos con espectros $I_1(\lambda)$ y $I_2(\lambda)$, y los superpongo al proyectarlos en la misma pantalla, el espectro que obtengo es $I(\lambda) = I_1(\lambda) + I_2(\lambda)$. Además en general, se puede controlar la

ganancia de la fuente de tal forma que se mantenga la estructura del espectro pero cambiando la potencia total con un factor α , generándose de este modo el espectro $\alpha I(\lambda)$. Esto nos dice que el espacio de espectros puede ser dotado de una estructura de *cono lineal convexo*, que es el análogo a espacios vectoriales salvo que las combinaciones lineales de elementos sólo pueden realizarse con coeficientes positivos. Este espacio posee dimensión infinita, ya que para especificar un dado espectro es necesario dar un valor real para cada longitud de onda, las cuales forman un continuo. Es usual utilizar como base de este espacio los haces monocromáticos de longitud de onda $\tilde{\lambda}$, cuyo espectro es representado matemáticamente mediante la delta de Dirac $\delta(\lambda - \tilde{\lambda})$ –forma parte de la idiosincrasia de un físico desentenderse del hecho de que la misma no es una función, y no pretendemos contrariar dicha tradición–. De modo que la expresión:

$$I(\lambda) = \int_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} \delta(\lambda - \tilde{\lambda}) I(\tilde{\lambda}) d\tilde{\lambda} \quad (1.1)$$

implica que cualquier espectro puede construirse como una combinación de infinitas fuentes monocromáticas con intensidades adecuadas, variando su longitud de onda entre $\Lambda = [\lambda_{min}, \lambda_{max}]$, que usualmente son tomados entre 380 nm y 700 nm. Utilizaremos la notación $L_+(\Lambda)$ para el espacio de espectros definidos en ese intervalo. ¿Qué propiedades del espacio de espectros son conservadas en nuestra representación perceptual?

Si pensamos al sistema visual como una serie de transformaciones que operan desde la retina hasta la experiencia consciente del sujeto, no sabemos a priori cuál es la relación – suponiendo que la hay – entre las propiedades del espacio de estímulos y las propiedades del espacio perceptual. Por ejemplo, si la respuesta del sistema visual fuera significativamente no lineal no habría motivo para suponer que la estructura lineal del espacio de estímulos se conservara en nuestra representación perceptual. A continuación, veremos que bajo condiciones específicas, ciertas propiedades son conservadas en el espacio de colores.

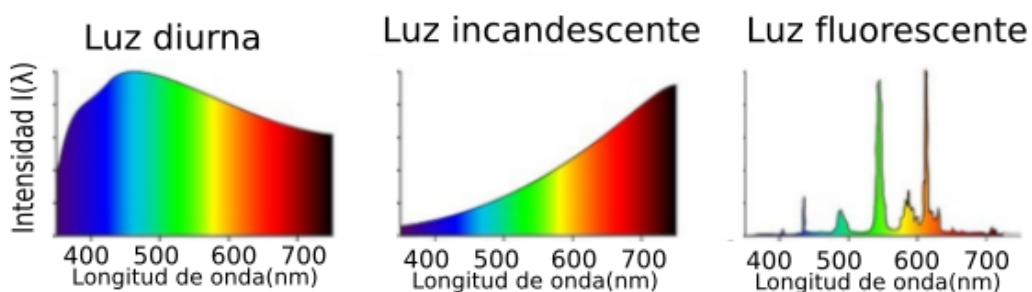


Figura 1.6: Densidades spectrales típicas para distintas fuentes lumínicas. Imagen extraída y modificada de <https://www.paintingframesplus.com/painting-frames-plus-website-colors.php>.

Experimentos de matcheo

Espectros distintos no son percibidos necesariamente como colores distintos. Por ejemplo, una fuente monocromática de longitud de onda de 580 nm es percibida amarilla, exactamente igual que una combinación adecuada de una luz de 630 nm y una de 550 nm, las cuales por separado son percibidas como roja y verde respectivamente. Uno estaría tentado de pensar que el primer espectro es una versión más “pura” del amarillo, sin embargo, esta información solo podemos obtenerla a posteriori mediante el análisis del espectro; desde el punto de vista perceptual ambos espectros son completamente equivalentes. Por lo tanto, describir un estímulo mediante su espectro completo resulta redundante. Uno de los primeros logros de la colorimetría fue encontrar la mínima cantidad de propiedades necesarias para especificar la cromaticidad de un estímulo, y la forma de hacer esto fue mediante los llamados experimentos de matcheo o emparejamiento. Spoiler: tres coordenadas alcanzan.

Supongamos que tenemos un campo bipartito como el mostrado en la figura 1.7, de modo tal que en cada lado se presenta un estímulo lumínico con un espectro distinto. Como mencionamos antes y desarrollaremos luego en esta tesis, el contexto influye en la forma en que un color es percibido. En esta sección, nos restringiremos a estímulos mostrados en las condiciones estándar de la colorimetría (apertura angular de 2° en una habitación a oscuras), por lo que la definición de color que daremos será restringida a este contexto. Luego nos encargaremos de generalizarla. Diremos que dos espectros I_1, I_2 matchean si al presentar cada uno en un campo el sujeto es incapaz de percibir un borde entre ellos, y lo denotaremos $I_1 \sim I_2$, lo que implica que son percibidos iguales, tal como ocurre con el amarillo “puro” y una combinación adecuada de rojo y verde. En principio, esta condición de equivalencia aplica a un dado observador humano específico y en general la percepción de dos espectros como iguales o distintos puede variar para otros observadores humanos – puede ser muy distinto para otros animales–. Sin embargo, para la mayoría de los humanos con visión normal de color el resultado es muy similar y podemos asumir la existencia de un observador estándar.

La operación perceptual “ \sim ” define una relación de equivalencia, ya que satisface las siguientes propiedades, formuladas originalmente por Grassman (leyes G1 y G2):

- Es reflexiva: $\forall I, I \sim I$. Todo espectro es percibido igual sí mismo.
- Es simétrica: $I \sim I' \iff I' \sim I$. Si dos espectros son percibidos como iguales, al intercambiar su posición en el campo bipartito lo seguirán siendo. (G1)
- Es transitiva: $I \sim I'$ y $I' \sim I''$, implica que $I \sim I''$. (G2)

El hecho de que la operación de matcheo \sim sea una relación de equivalencia nos permite definir el espacio de color \mathcal{P}_0 – el subíndice 0 es para aclarar que es en este contexto específico – como el espacio de las clases de equivalencia generadas por \sim , es decir $\mathcal{P}_0 = {}^{L_+(\Lambda)}/\sim$.

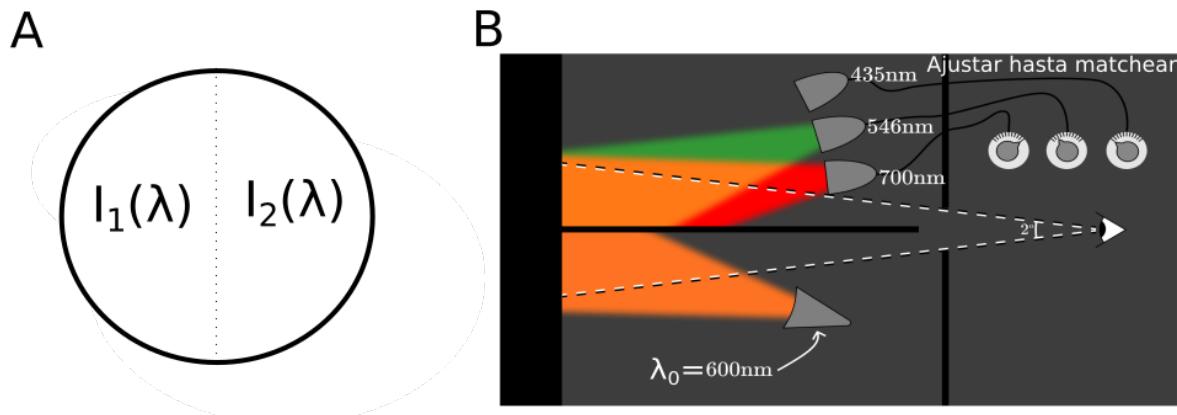


Figura 1.7: (A) Campo bipartito en el cual se comparan dos espectros. (B) Esquema del experimento de Color matching. El sujeto ajusta las intensidades de las tres fuentes hasta que logra un color indistinguible al mostrado en el otro lado del campo bipartito. Imagen extraída de <http://jamie-wong.com/post/color/>

Al color asociado a un dado espectro I lo denotaremos entonces como $[I]$, que es la notación usual para referirse a la clase de equivalencia que lo contiene. Las propiedades enunciadas garantizan que dado un espectro I existe una y sólo una clase de equivalencia que lo contiene.

Bajo esta definición del espacio de colores que sintetiza los resultados psicofísicos de los experimentos de matcheo, podemos preguntarnos si \mathcal{P}_0 hereda o no las propiedades lineales del espacio original. Para ello, podemos definir:

$$[I_1] + \alpha [I_2] := [I_1 + \alpha I_2]. \quad (1.2)$$

Para saber si esta definición es correcta, debemos verificar que la operación es independiente del representante que escojamos para cada clase de equivalencia, es decir deberíamos verificar que si $I_1 \sim I'_1$ y $I_2 \sim I'_2$, entonces para cualquier coeficiente $\alpha > 0$ debe valer que $I_1 + \alpha I_2 \sim I'_1 + \alpha I'_2$. Esta propiedad debe ser verificada empíricamente. Grassman estableció en su tercera y cuarta ley la validez de esta propiedad. Sin embargo, es un tópico aún abierto cuál es el rango de validez de la misma, si bien en las condiciones estándares de medición resulta ser una buena aproximación (ver [43]). El 0 de este espacio es la clase de todos los espectros que son percibidos como negro absoluto, es decir, equivalentes al espectro $I(\lambda) = 0 \forall \lambda$. Una relación de equivalencia que además respeta la estructura algebraica del espacio sobre el que actúa, es denominada *relación de congruencia*.

Determinada su estructura lineal, quisiéramos encontrar experimentalmente cuál es la dimensión de este espacio. La dimensión de un cono convexo se define como la dimensión del mínimo espacio vectorial que lo contiene. Dicho espacio vectorial puede ser construido mediante la adición de colores virtuales (ver [44]), los cuales estarán asociados a elementos de la forma $-I(\lambda)$, siendo $I(\lambda)$ un espectro. El espacio vectorial que contiene a los espectros queda definido entonces como $L(\Lambda) = \{I_1(\lambda) - I_2(\lambda), I_1, I_2 \in L^+(\Lambda)\}$. Si bien matemáticamente no hay dificultad en agregar estos elementos, sabemos que físicamente no poseemos

láseres que creen espectros de energía negativa, por lo tanto debemos dotar de un sentido a estos elementos dentro de nuestro experimento de matcheo. Con ese motivo definimos la equivalencia de espectros – reales y virtuales – como:

$$I_1(\lambda) - I_2(\lambda) \sim I_3(\lambda) - I_4(\lambda) \iff I_1(\lambda) + I_4(\lambda) \sim I_3(\lambda) + I_2(\lambda), \quad (1.3)$$

de este modo, el signo *menos* asociado a un espectro virtual adquiere un significado concreto: significa que ese espectro debe añadirse del otro lado del campo bipartito. Es decir, un espectro negativo $-I_2(\lambda)$ del lado izquierdo significa en realidad sumarse el haz $I_2(\lambda)$ del lado derecho y viceversa. Esto nos permite extender los colores a clases de equivalencia sobre combinaciones lineales involucrando coeficientes sin restricción de signo. De este modo, podemos definir la dimensión del espacio \mathcal{P}_0 como el mínimo número k tal que la ecuación:

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i [I_i(\lambda)] = 0 \quad (1.4)$$

tiene solución no-trivial (algún $\alpha_i \neq 0$) para espectros I_k cualesquiera. Los experimentos de Wright y Guild mostraron que para el espacio de colores la dimensión es 3. Esto quiere decir que, por ejemplo, si tomo cuatro fuentes monocromáticas distintas, siempre es posible ajustar las intensidades de las fuentes de forma tal que se cumpla la ecuación 1.4. Ahora bien, para que dicha ecuación se cumpla, no todos los α_i pueden tener el mismo signo - pues los espectros son positivos-. Si se piensa un poco, es fácil ver que sólo dos signaturas son posibles para los coeficientes: $(-, +, +, +)$ y $(-, -, +, +)$, ya que el signo global de la ecuación y el orden de los sumandos es irrelevante. Esto quiere decir que si, por ejemplo, fijamos $\alpha_1 = -1$ y variamos la intensidad de las otras 3 fuentes, nos encontraremos con una de las siguientes dos posibilidades:

$$I_1 \sim \alpha_2 I_2 + \alpha_3 I_3 + \alpha_4 I_4 \quad \text{ó} \quad I_1 + (-\alpha_2) I_2 \sim +\alpha_3 I_3 + \alpha_4 I_4. \quad (1.5)$$

Notar que hemos escogido arbitrariamente el índice 2 para el espectro asociado al coeficiente con signo negativo. Los resultados experimentales muestran justamente que se cumple la propiedad que describe esta ecuación. Obsérvese que en principio, hallar experimentalmente las clases de equivalencia que definen a los colores podría ser muy complicado, ya que el espacio de espectros tiene dimensión muy grande y por lo tanto hacer todas las comparaciones de pares de espectros posibles para que el sujeto defina si los percibe iguales demandaría muchísimo tiempo. Ahora bien, como dijimos previamente, las fuentes monocromáticas forman una base del espacio de espectros, por lo tanto, es suficiente caracterizar la relación de equivalencia utilizando elementos de esta base, ya que por linealidad, de allí podremos deducir la relación entre cualquier par de espectros. Más aún, conociendo la dimensión del espacio, el siguiente experimento es suficiente para caracterizar el espacio \mathcal{P}_0 , y fue el utili-

zado por Wright y Guild en su momento.

En un lado del campo bipartito - digamos el izquierdo -, se le presenta al sujeto una fuente monocromática, cuya longitud de onda λ_0 irá variando, de modo tal que el color percibido viene descrito por $[\delta(\lambda - \lambda_0)]$. Del lado derecho, se seleccionan tres fuentes con longitudes de onda fija, usualmente asociada a los llamados colores primarios: rojo ($\lambda_R = 700\text{ nm}$), verde ($\lambda_G = 546,1\text{ nm}$) y azul ($\lambda_B = 435,8\text{ nm}$), y cuyas intensidades serán variadas por el sujeto hasta que el color percibido en ambos lados del campo sea el mismo. Es decir, hasta que se satisfaga que

$$[\delta(\lambda - \lambda_0)] = [r(\lambda_0)\delta(\lambda - \lambda_R) + g(\lambda_0)\delta(\lambda - \lambda_G) + b(\lambda_0)\delta(\lambda - \lambda_B)], \quad (1.6)$$

donde hemos llamado a los coeficientes de la combinación lineal ($r(\lambda_0), g(\lambda_0), b(\lambda_0)$) para respetar la convención usual y destacar que cada uno es función de la longitud de onda de la fuente matcheada. Estas tres funciones pueden verse en la Fig. 1.8 y se las llama Color Matching Functions – funciones de emparejamiento de color o CMFs –. Obsérvese que la función $r(\lambda_0)$ posee una región de valores negativos, que tal como dijimos previamente, corresponde a adicionar $-r(\lambda_0)$ del otro lado del campo bipartito.

Escribiendo un espectro arbitrario $I(\lambda)$ en término de las fuentes monocromáticas podemos utilizar las CMFs para reproducir dicho espectro:

$$\begin{aligned} [I(\lambda)] &= \int d\lambda_0 I(\lambda_0) [\delta(\lambda - \lambda_0)] \\ &= \int d\lambda_0 I(\lambda_0)r(\lambda_0)[\delta(\lambda - \lambda_R)] + \int d\lambda_0 I(\lambda_0)g(\lambda_0)[\delta(\lambda - \lambda_G)] \\ &\quad + \int d\lambda_0 I(\lambda_0)b(\lambda_0)[\delta(\lambda - \lambda_B)] \\ &= R[\delta(\lambda - \lambda_R)] + G[\delta(\lambda - \lambda_G)] + B[\delta(\lambda - \lambda_B)], \end{aligned} \quad (1.7)$$

donde hemos definido el coeficiente $A = \int d\lambda_0 I(\lambda_0)a(\lambda_0)$, con $A = R, G, B$ y $a = r, g, b$. A los coeficientes RGB se los denomina valores de triestímulo (o *tristimulus values*). Para especificar un estímulo visual basta con dar sus valores de triestímulo, ya que estos son suficientes para explicar la percepción de un observador en un experimento de matcheo. El resto de la información sobre el espectro es irrelevante, ya que si manteniendo los valores RGB fijos, variemos otras propiedades del espectros, el sujeto no percibirá ninguna diferencia. Llamamos entonces \mathcal{S} a dicho espacio de estímulos. Una vez medidas las CMFs estándar, los valores triestímulo de un espectro quedan determinados por sus propiedades físicas.

Cabe notar que hay una arbitrariedad en la elección de las fuentes del experimento de matcheo. En principio cualesquiera tres fuentes – con espectros no colineales entre sí – son igualmente válidas para caracterizar el espacio de estímulos. Más aún, cualquier transformación lineal biyectiva de las CMFs puede funcionar igualmente como una base del espacio.

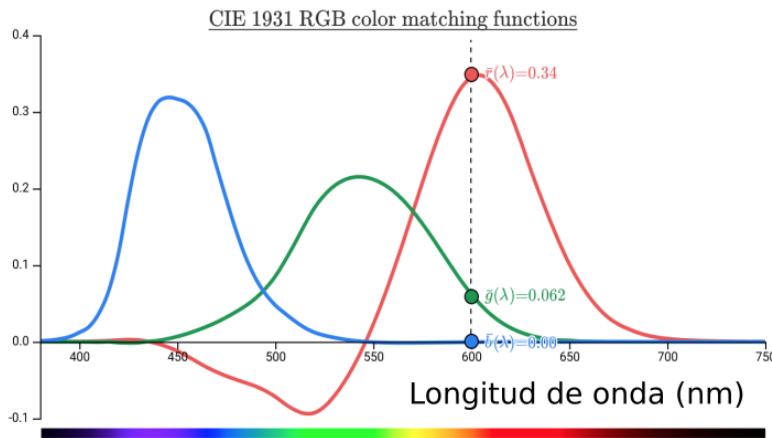


Figura 1.8: Funciones de matcheo de color (CMF). Las curvas representan la intensidad de las fuentes monocromáticas correspondientes r (700 nm), g (546 nm) o b (435 nm) necesaria para que al combinarlas matcheen con una fuente de longitud de onda λ . Imagen extraída de <http://jamie-wong.com/post/color/>

De aquí que existan múltiples representaciones del espacio de color. Una particularmente relevante es la representación XYZ que corresponde a una transformación lineal de las RGB con el objetivo de obtener tres curvas que sean positivas. Por otro lado, si lo único que nos interesa es parametrizar este espacio, cualquier transformación suave y biyectiva sobre las coordenadas RGB será igualmente válida para describir el espacio \mathcal{S} . Algunos ejemplos de transformaciones no lineales son las que definen el espacio CIExyY, CIELAB y CIELuv. Por este motivo, tiene sentido definir al espacio de estímulos \mathcal{S} como una variedad diferenciable, de modo que los elementos de \mathcal{S} quedan bien definidos independientemente del sistema de coordenadas que se elija, ya que la definición de \mathcal{S} como variedad incluye a todas las cartas coordinadas posibles y las funciones de transición entre una y otra.

En el experimento de matcheo descrito, elegir un elemento de \mathcal{S} determina minimalmente un elemento de \mathcal{P}_0 ⁵, por lo que uno podría preguntarse cuál es el sentido de definirlos por separado. En primer lugar, hay un razón ontológica. Los elementos de \mathcal{S} representan una propiedad física de un espectro electromagnético, independiente del observador, ya que son calculadas mediante las CMFs estándares. Los elementos de \mathcal{P}_0 representan en cambio los perceptos instanciados por dichos estímulos en un observador en las condiciones estándar, poseen por lo tanto una fenomenología, una experiencia privada que ocurre en el sujeto. En segundo lugar, como veremos a lo largo de esta tesis, la relación entre un dado estímulo en \mathcal{S} y el perceptor producido depende del contexto, lo que hace que esta distinción sea esencial para obtener una descripción consistente.

⁵La relación no es estrictamente uno a uno, debido a la resolución finita del observador –variaciones muy pequeñas en los valores de RGB no son percibidas–. Esto será tratado más adelante al incorporar una métrica en el espacio de colores.

1.8.3. Absorción de luz en la retina

Una vez caracterizado el espacio de colores desde el punto de vista psicofísico, nos interesa saber de qué modo el sistema visual interactúa con la luz incidente para producir tales perceptos. Como sabemos, la luz ingresa al sistema visual a través de nuestros ojos, los cuales funcionan como un sistema de lentes que proyecta la luz sobre la retina, donde yacen los fotorreceptores (ver Fig. 1.9). La retina está compuesta por una gran variedad de células, pero un rol esencial ocupan aquellas que son sensibles a la luz: los conos y los bastones, las cuales responden al estímulo lumínico modulando continuamente su potencial de membrana. Los bastones son muy sensibles, produciendo una respuesta eléctrica reproducible incluso al ser estimulados con un único fotón (ver mediciones de [45]). Los bastones tienen un rango de respuesta de aproximadamente 3 órdenes de magnitud, hasta alrededor de 10000 fotones/seg (una bombita de luz de 60 W emite del orden de 10^{19} fotones por segundo). Por encima de ese rango, la respuesta de los bastones satura, por lo que deja de ser sensible. Los conos, en cambio, tienen una mala relación ruido-señal para bajos niveles de luz pero responden sensiblemente en el rango de luz fotóptica –luz diurna–.

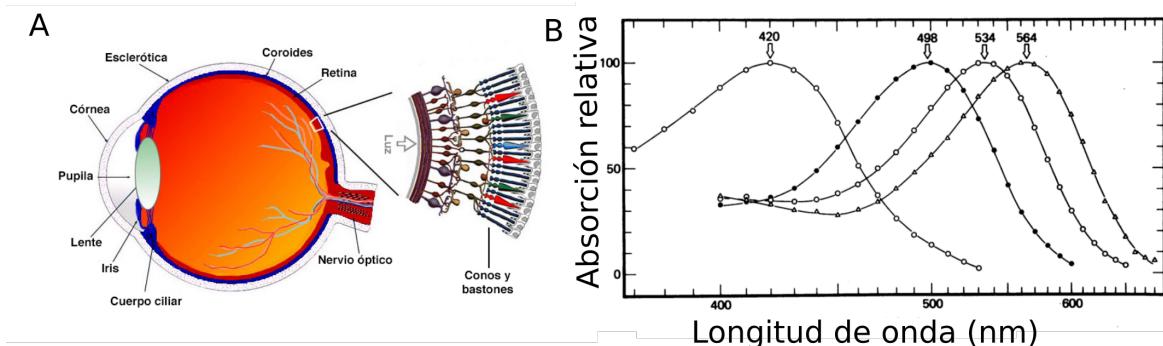


Figura 1.9: A: Representación de un corte sagital del ojo, con una ampliación de un corte de la retina. Imagen extraída de <https://www.blueconemonochromacy.org/es/how-the-eye-functions/>. B: Curvas de absorción de luz de las distintas células de la retina. Los máximos de absorción están en: 420 nm para los conos S, 498 nm para los bastones, 534 nm para los conos M y 564 nm para los conos L. Las curvas se obtuvieron mediante la mediciones microespectrofotométricas de los fotopigmentos de conos y bastones individuales extraídos de la retina de un hombre. Los haces de luz incidieron transversalmente sobre el segmento anterior aislado. Imagen extraída y traducida de [2]

Una de los hechos más bellos que conectan la psicofísica con la fisiología neuronal fue el descubrimiento de que en la retina humana existen **tres** tipos de conos. Cada uno de estos tipos posee una sensibilidadpectral distinta, tal y como fue medido por Bowmaker [2] (Ver Fig. 1.9 B). Debido a la posición de sus picos de máxima absorción, los tres tipos de cono son nombrados como S (shot-wavelength), M (middle-wavelength) y L (long-wavelength). Dado que en condiciones fotópticas los conos son las únicas células sensibles a la luz, el resto del sistema visual poseerá como variable de entrada referida a la luz incidente únicamente la actividad o respuesta que produzcan los conos. Por lo tanto, esto nos da una explicación muy clara de por qué el espacio de colores tiene sólo tres dimensiones: si dos espectros lumínicos

producen la misma actividad en los tres tipos de conos, el cerebro no los puede distinguir. Por otro lado, en la oscuridad, solo los bastones son sensibles y como se ve en la figura, la curva de sensibilidad es la misma para todos los bastones. Por lo tanto, se espera que el espacio de colores visibles posea solo una dimensión en estas condiciones, lo cual se condice con la incapacidad de percibir colores en la oscuridad.

Otro aspecto importante que posee un correlato fisiológico es la linealidad de las leyes perceptuales. La absorción de un fotón es el primer paso en la cadena de fototransducción mediante la cual se produce una amplificación de la señal que se traducirá luego en el cambio del potencial de membrana. De aquí se sigue que es la absorción de fotones lo que determina la respuesta del fotorreceptor. Una consecuencia de ello es el llamado principio de univariancia, el cual nos dice que, por ejemplo, si mido la actividad de un cono S al ser iluminado con una fuente de longitud de onda de 450 nm y una cierta intensidad, tengo dos formas de modificar el estímulo para incrementar la respuesta del cono: disminuir su longitud de onda moviéndome en la dirección de crecimiento de la curva de sensibilidad o aumentando el número total de fotones (intensidad). En ambos casos el resultado será el mismo, por lo tanto no tiene sentido decir que un cono codifica “Longitud de onda” o codifica “Intensidad” pues la variable relevante resulta ser el número de fotones absorbidos que depende de ambas. ¿Cómo se relaciona esto con la linealidad? La absorción de fotones en los conos ocurre en los llamados pigmentos visuales, los cuales poseen un tipo proteína denominada opsina, las cuales cambian su estructura tridimensional cuando absorben un fotón: a este proceso de lo denomina fotoisomerización. Tanto el proceso de emisión de fotones en cualquier tipo de fuente como la absorción a nivel molecular son procesos mecánico-cuánticos y por lo tanto intrínsecamente azarosos. Distintos modelos muestran que en condiciones fotópicas la absorción de fotones en los conos puede aproximarse como un proceso de Poisson ([46],[47] [48], [49]), donde el número medio K de fotones absorbidos es proporcional a $\int d\lambda I(\lambda)a(\lambda)$, con $I(\lambda)$ el espectro incidente y $a(\lambda)$ la probabilidad de que la opsina absorba a un fotón de longitud de onda λ que incide sobre ella.

Cone Fundamentals

Asumiendo que dos estímulos presentados en las mismas condiciones son percibidos como iguales cuando la cantidad media de fotones absorbidas por cada tipo de cono es la misma, podemos identificar la probabilidad de absorción de cada tipo de cono con elementos del espacio de colores. Es decir, supondremos que la relación de equivalencia que determina el color percibido proviene de la proyección lineal del espectro incidente sobre las curvas de sensibilidad espectral de cada tipo de cono: $l(\lambda)$, $m(\lambda)$ y $s(\lambda)$. A estas curvas se las denomina también Cone-Fundamentals. Es decir, el color asociado a un espectro queda determinado

por los valores:

$$\begin{aligned} L &= \int d\lambda I(\lambda)l(\lambda) \\ M &= \int d\lambda I(\lambda)m(\lambda) \\ S &= \int d\lambda I(\lambda)s(\lambda). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Ahora bien, nos resta ver cómo se pueden obtener las sensibilidades de los conos experimentalmente. Para ello, cabe notar lo siguiente: tanto las funciones de matcheo (CMFS) como las cone fundamentals actúan como las proyecciones lineales que determinan la relación el espacio de espectros y el de colores. Por lo tanto, ambos tripletes conforman una base del espacio dual \mathcal{P}_0^* y por lo tanto debe existir una transformación lineal T tal que:

$$\begin{pmatrix} l(\lambda) \\ m(\lambda) \\ s(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r(\lambda) \\ g(\lambda) \\ b(\lambda) \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

Para obtener los coeficientes de la transformación T se realizaron experimentos psicofísicos con sujetos daltónicos. El daltonismo es una alteración de origen genético que afecta a la capacidad de distinguir los colores. Dicha alteración es producida por la ausencia o funcionamiento anómalo de alguno de los tres tipos de conos. Los dicrómatas son aquellos daltónicos que presentan anomalía en sólo un tipo de cono, teniendo un correcto funcionamiento de los otros dos, y se clasifican en tres tipos: protanopes, deuteronopes y tritanopes, según si la anomalía se produce en los conos de tipos L, M o S, respectivamente. La ausencia de un tipo de conos, por ejemplo L, hace que los protanopes sean incapaces de distinguir dos estímulos que difieran únicamente en su coordenada L. En consecuencia, dos estímulos que un observador normal - tricrómata - perciba diferencialmente como rojo y verde, pueden ser confundidos como el mismo color para un protanope. Al conjunto de colores que un tricrómata distingue pero un dicrómata confunde, se lo llama línea de confusión y como su nombre lo indica, para cada estímulo hay una subvariedad unidimensional que resulta indistinguible para el dicrómata. De aquí que el espacio de colores para un dicrómata posee de modo efectivo dos dimensiones en lugar de tres. Algebraicamente, podemos caracterizar a un dicrómata igualando a 0 la sensibilidad espectral del cono faltante. Por ejemplo, un protanope (p) poseerá $l^p(\lambda) = 0$. Esto implica que para un dicrómata no habrá tres fuentes lumínicas que sean independientes, le bastará con dos para poder cumplir la tarea de matcheo. Esto significa que si, por ejemplo, obtenemos primero las CMFs utilizando las fuentes r, g, b no habrá una única solución, sino toda una familia unidimensional de soluciones dadas por la ecuación:

$$0 = T_{11}r^p(\lambda) + T_{12}g^p(\lambda) + T_{13}b^p(\lambda) \quad (1.10)$$

De este modo, midiendo las líneas de confusión de un protanope podemos obtener - a menos de un escaleo global - los coeficientes T_{11} , T_{12} y T_{13} . Análogamente, se pueden obtener los demás coeficientes midiendo las líneas de confusión de deuteranopes ($m(\lambda) = 0$) y tritanopes ($s(\lambda) = 0$). Esto sintetiza conceptualmente la idea de los experimentos llevados a cabo por Sharpe y Stockman [50], entre otros, mediante los cuales se obtuvieron las curvas cone-fundamentales (ver Fig. 1.10).

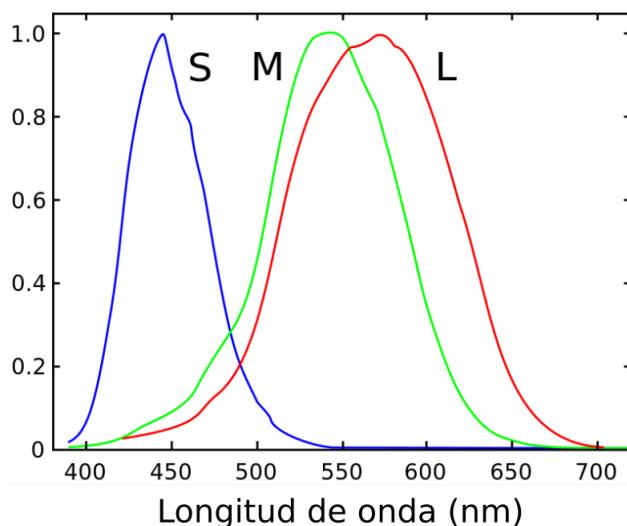


Figura 1.10: Cone Fundamentals: Curvas que representan la sensibilidad de cada tipo de cono. Imagen extraída de <http://es.wikipedia.org>

1.8.4. Luminosidad y cromaticidad

Es usual en el estudio de la percepción – tal como en otras ciencias – encontrar conceptos que poseen un fuerte arraigo en el lenguaje y en el sentido común pero que se presentan como un desafío al momento de intentar definirlos rigurosamente. Un ejemplo de ello es la descomposición del espacio de colores como la suma de propiedades independientes: luminosidad o brillo y la cromaticidad, compuesta a su vez del tono (o matiz o *hue*) y la saturación. Para apelar al mencionado arraigo lingüístico, podemos decir que la luminosidad está dada por qué tan oscuro o claro percibimos un color, la saturación corresponde a qué tan *vivo* o *colorido* se percibe un color con respecto a un gris - o tono neutro - de igual luminosidad, mientras que el tono está relacionado a la noción más familiar de color, es decir, del rojo al naranja, al amarillo,..., al púrpura y nuevamente al rojo, pasando por todos los tonos intermedios - rojo anaranjado, verde azulado, etc. Puede verse en la figura 1.11 que hay múltiples formas de representar estas dimensiones. Basta ver la cantidad inmensa de sistemas de representación de colores que hay para entender la ambigüedad que hay en estos conceptos: CIEXYZ, CIELAB, CIECAM02, CIELUV, Yuv, CIEUVW, RGB, YUV, YDbDr, YCbCr, YPbPr, xvYCC, LMS, HSL, HSV, CMYK... y la lista continúa. Si tomamos tres caracteres al azar y los unimos es probable que la sigla esté bastante cerca de la nomenclatura de algún sistema de

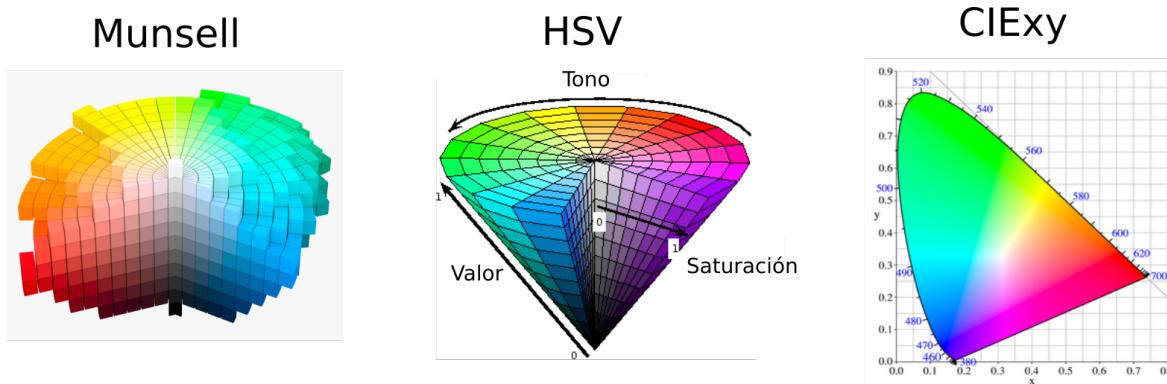


Figura 1.11: Ejemplos de sistemas de representación de los colores. Imágenes extraídas de <http://es.wikipedia.org>

colores.

Vale preguntarse cuál es la motivación para realizar esta descomposición del espacio de colores si la definición basada en el experimento de matcheo no requiere esta distinción. Una de las motivaciones - que viene a ser la principal para este trabajo - es de índole práctica: estudiar propiedades psicofísicas del color explorando el espacio tridimensional completo puede resultar en experimentos demasiado largos como para convencer a una persona de participar en ellos. Por esta razón, reducir la exploración a un subespacio es de suma utilidad práctica. Por otro lado, existe cierta evidencia fisiológica y psicofísica de que el procesamiento de la información visual ocurre a través de canales que de algún modo se asemejan a estos conceptos intuitivos. Adicionalmente, podemos preguntarnos de qué modo las variaciones lingüísticas en la representación del color influyen sobre este procesamiento. Este tópico será discutido en los capítulos 5 y 7

Existe consenso en la comunidad colorimétrica respecto de la definición de la luminosidad aparente $V(\lambda)$, la cual nos indica la luminosidad relativa percibida entre fuentes monocromáticas. Viendo el arcoíris o la imagen de la luz siendo refractada por un prisma, puede intuirse que por ejemplo el amarillo es percibido como más luminoso que el azul, lo que nos dirías que $V(\lambda_{amarillo}) > V(\lambda_{azul})$. Esta función es entendida como una aproximación y su forma puede variar al ser estimada con distintos métodos. Una primera forma de aproximarse a ella fue mediante el experimento de matcheo de brillo. Se le presenta al sujeto un campo bipartito, de un lado una fuente con una fuente monocromática de intensidad fija y del otro una fuente monocromática con distinta longitud de onda e intensidad variable. Mediante el ajuste de la intensidad que debe realizar el sujeto hasta percibir ambos estímulos como igualmente luminosos, se obtiene la luminancia relativa. Sin embargo, este método resultó ser poco confiable, pues se observó que el resultado variaba significativamente entre sujetos y también con las condiciones contextuales del experimento - iluminación del entorno, estado de adaptación del ojo, etc. El método aceptado actualmente para la estimación de esta función es la fotometría de flicker heterocromático. Dos luces de colores diferentes c_1, c_2 son sinusoidalmente alternadas en el tiempo ($c(t) = c_1 + \frac{(c_2-c_1)}{2}(1 + \sin(\omega t))$), con una

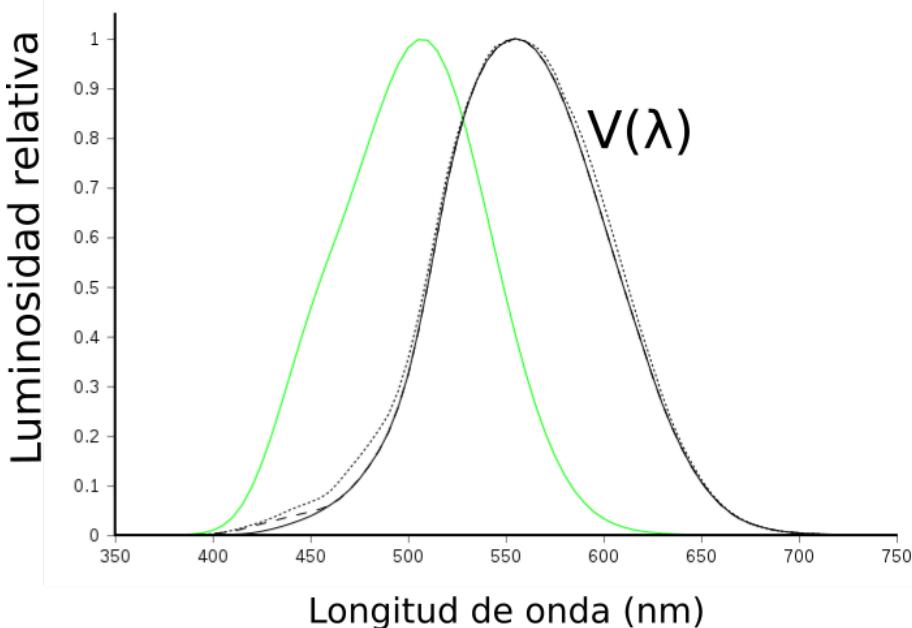


Figura 1.12: Funciones de luminosidad aparente. Distintas mediciones de la luminosidad relativa entre fuentes monocromáticas. La línea verde fue medida en condiciones escotópicas ([3]) y las negras en condiciones fotopáticas([4–6]).

frecuencia $f = \frac{\omega}{2\pi}$ típicamente entre 10-20 Hz, y sus intensidades relativas son ajustadas por el observador hasta que el parpadeo es mínimo. El resultado se muestra en la figura 1.12.

La luminosidad integrada o *luminancia* de un espectro arbitrario $I(\lambda)$ puede ser entonces definida como:

$$L_V = \int d\lambda I(\lambda)V(\lambda). \quad (1.11)$$

La unidad básica del Sistema Internacional para medir esta cantidad es la *candela* por metro cuadrado (cd/m^2). La candela está definida como la intensidad luminosa en una dirección dada, de una fuente que emite una radiación monocromática de frecuencia $540,10^{12}$ Hz y de la cual la intensidad radiada en esa dirección es 1/683 vatios por estereorradián. La normalización por área es necesaria ya que los espectrómetros miden el flujo de energía a través de un cierto área finita.

Una motivación adicional para utilizar esta definición de luminosidad es el hallazgo de que la función $V(\lambda)$ puede escribirse en términos de las curvas cone fundamentals. Rescaleando las curvas $L(\lambda)$ y $M(\lambda)$ adecuadamente – recordemos que en la sección anterior vimos que la escala de cada curva no puede obtenerse mediante los experimentos descritos – se encontró que la función de luminosidad satisface aproximadamente la relación $V(\lambda) = L(\lambda) + M(\lambda)$. Si bien esta aproximación es bastante aceptada, hay evidencia experimental que muestra que hay una contribución – pequeña – de los conos S a la función de luminosidad [51].

1.8.5. Oposición cromática

En la sección 1.8.3, analizamos el proceso de absorción de fotones en la retina y lo relacionamos con los experimentos de matcheo. De allí, vimos que las leyes de matcheo pueden explicarse mediante las sensibilidades de los distintos tipos de conos *L*, *M* y *S*. Luego, en la sección anterior, vimos que una de los atributos asociados a los colores, su luminosidad, puede relacionarse con una combinación de la actividad de los distintos tipos de conos (*L* + *M*). Esto nos lleva a la siguiente pregunta: ¿de qué modo se conecta la información que sale de los distintos conos con lo que percibimos? Veamos la figura 1.13 A. El conectoma de la retina es complejo [52] ya que posee células de distintos tipos con funciones y conectividades variadas. Entre las más estudiadas están las células bipolares, las cuales transducen la información desde los conos hacia las células ganglionares, cuyos axones conforman el nervio óptico y representan por lo tanto la vía de salida de la retina hacia el cerebro. Adicionalmente, se encuentran las células horizontales que interconectan lateralmente a los fotorreceptores, participando en la integración y regulación de las señales de múltiples células receptoras dentro de una región espacial localizada. Análogamente, entre las células bipolares y las ganglionares se encuentran las células amacrinas, regulando las conexiones entre ellas. Los nervios ópticos de cada ojo se cruzan en el quiasma óptico y luego proyectan su señal en el Núcleo Geniculado Lateral (LGN) y de allí hacia distintas regiones de la corteza visual (ver figura 1.13).

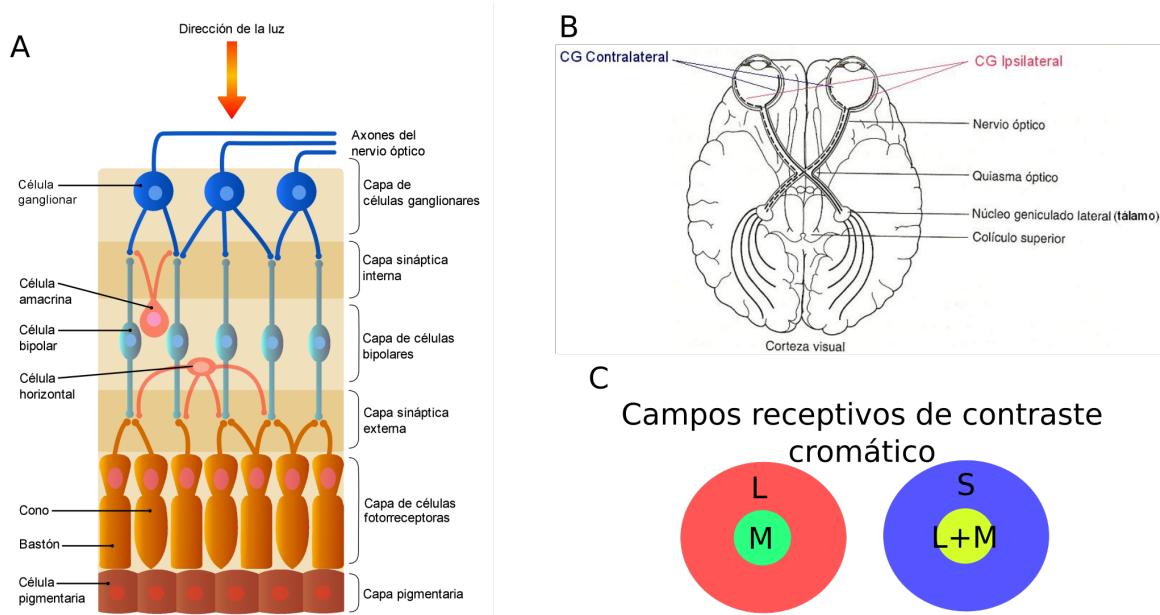


Figura 1.13: A: Esquema de la retina y las células que la componen (<http://es.wikipedia.org>). B: Esquema del sistema visual, desde los ojos hasta la corteza visual (Imagen extraída de http://psicologiapercepcion.blogspot.com/p/vision_15.html). C: Esquema de los campos receptivos de oposición cromática asociados a células en el Núcleo Geniculado Lateral.

Una de las propiedades más utilizadas para caracterizar la respuesta de las neuronas involucradas en el procesamiento sensorial es el llamado campo receptivo. El campo receptivo

es una función definida sobre el espacio de estímulos, la cual se construye cuantificando la respuesta de la neurona –por ejemplo, mediante su tasa de disparo–. Se dice que el campo receptivo de la neurona es positivo a cierto atributo del estímulo si la misma es excitada cuando se presenta dicho atributo y negativo si la neurona es inhibida. Por ejemplo, las células bipolares poseen un campo receptivo de antagonismo de centro-entorno. Esto quiere decir que, por ejemplo una célula bipolar de tipo ON-OFF, es excitada por luz incidiendo dentro de una cierta área e inhibida por luz que incide sobre un anillo rodeando esa área, tal como se ve en la figura 1.13 C. Por este motivo, la respuesta de la célula bipolar será máxima si el estímulo mostrado es un centro luminoso rodeado de un anillo oscuro. Las células bipolares de tipo OFF-ON poseen el comportamiento inverso. Este tipo de campo receptivo está relacionado con la detección de contrastes y bordes, ya que estas neuronas responden poco frente a estímulos uniformes y se activan al aparecer regiones con transiciones de luz a oscuridad.

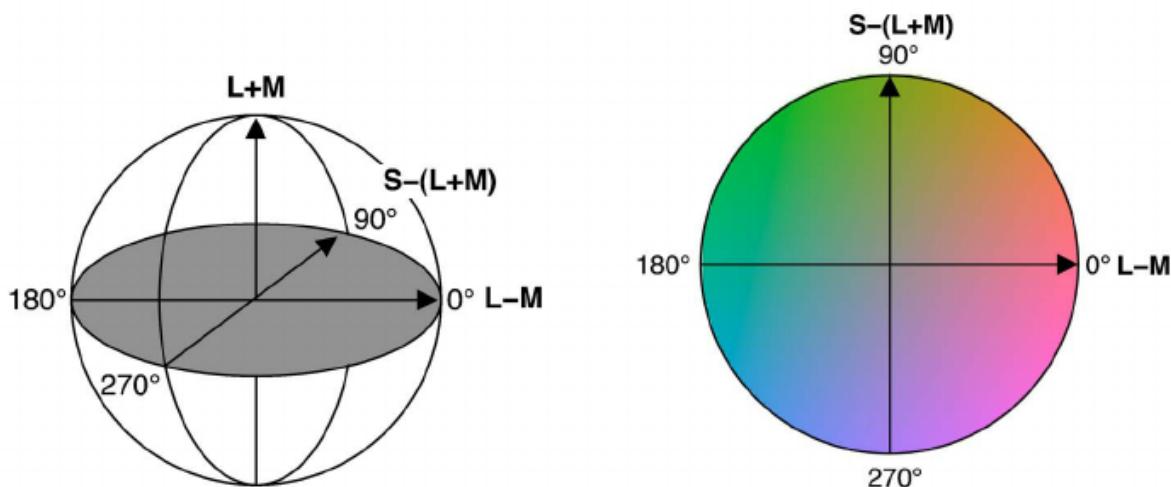


Figura 1.14: Representación del espacio DKL. Los ejes cromáticos corresponden a las combinaciones $L-M$ y $S-(L+M)$, mientras que la dirección $L+M$ está asociada al canal acromático o de luminosidad. Imagen extraída de [7].

Además de la estructura espacial de los campos receptivos, se encontró que en células del LGN del mono rhesus (*Macaca mulatta*) [53] existe también una estructura de oposición cromática: campos receptivos donde la actividad de la neurona depende de una estructura espacial de centro-entorno sensible a la diferencia en cromaticidad del estímulo. Así podemos obtener campos receptivos como los mostrados en la figura 1.13 C. Esta estructura de oposición cromática fue posteriormente encontrada también en células ganglionares ([54]). Esto llevó a postular la existencia de ejes cardinales cromáticos, correspondientes a las combinaciones de L, M , y S involucradas en los campos receptivos de LGN. Los ejes cromáticos resultaron ser $L - M$ (eje al que por motivos históricos también se denomina canal rojo-verde) y $S - (L + M)$ (azul-amarillo), mientras el eje $L + M$ se asocia al canal acromático o de luminosidad, tal como describimos en la sección anterior. Usualmente los experimentos cromáticos son realizados a luminosidad $L + M$ constante, por lo que el eje azul-amarillo se suele denotar simplemente S . A esta representación del espacio de colores se la llama

DKL, por sus creadores Derrington, Krauskopff y Lennie [53]. Ver figura 1.14. En el capítulo 3 veremos que estos ejes poseen también propiedades interesantes desde el punto de vista psicofísico.

1.8.6. Inducción cromática

En la sección anterior, describimos neuronas que responden a estímulos con una estructura espacial y cromática definida. En esta sección, describiremos un efecto perceptual que viene dado también por una cierta estructura espacial de estímulos cromáticos. El efecto es conocido como inducción cromática y se refiere al cambio en la percepción del color de un estímulo en función de la cromaticidad del entorno. En la figura 1.15 se muestra un ejemplo de dicho efecto. El efecto del fondo es usualmente “repulsivo”, es decir, aumenta el contraste cromático entre estímulo y entorno [13]. Esto implica que el color percibido no está determinado únicamente por las propiedades espectrales del estímulo, sino también por las de su entorno. Las nociones de métrica en espacio de colores están tradicionalmente definidas sobre el espacio de estímulos sin incluir el efecto del entorno [37, 38, 48, 55]. Esto hace que, tal como notaron Resnikoff [8] y Provenzi [9], entre otros, haya incompatibilidades entre las métricas definidas de este modo y los efectos perceptuales producidos por el entorno. En esta tesis desarrollamos un modelo del espacio de colores que tiene en cuenta la influencia del entorno y que además nos permite definir una distancia compatible con la inducción cromática. Luego, realizamos experimentos para verificar que la misma métrica se manifiesta en distintos fenómenos perceptuales, simplificando enormemente la descripción de múltiples resultados psicofísicos. Finalmente, verificamos que nuestro modelo permite describir también resultados experimentales previos en un abanico de paradigmas distintos.

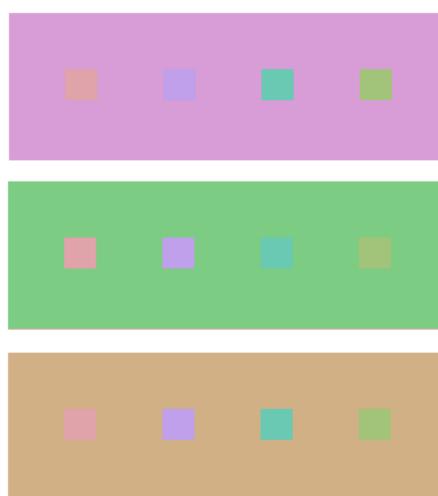


Figura 1.15: Ejemplo de inducción cromática. En cada columna, los tres cuadrados poseen la misma cromaticidad. Sin embargo, al ser presentados en entornos distintos, el color percibido cambia.

1.9. Objetivos de la tesis

Enunciamos a continuación los objetivos de este trabajo que serán tratados en los distintos capítulos:

1. **Postular un nuevo modelo para la geometría del espacio de colores que incorpore la influencia del entorno en la percepción. Dicho modelo está inspirado en resultados empíricos y argumentos teóricos, y postula la existencia de simetrías relevantes en dicho espacio (capítulo 2).**
2. **Realizar nuevos experimentos perceptuales para caracterizar la geometría del espacio de colores y la influencia del entorno y de este modo poner a prueba nuestro modelo (capítulo 3).**
3. **Evaluar la capacidad del modelo para explicar experimentos previos de discriminación e inducción cromática (capítulos 4, 5 y 6).**
4. **Reinterpretar experimentos de categorización cromática en términos de nuestro modelo perceptual, mostrando la utilidad de definir una métrica perceptual a la hora de evaluar la influencia de otras modalidades cognitivas (capítulo 5).**
5. **Realizar experimentos para estudiar la representación mnemónica de los colores y comparar con la representación puramente perceptual (capítulo 7)**

En resumen, podríamos decir que las preguntas a las que intentaremos responder en este trabajo son: ¿Podemos construir un modelo de la geometría del espacio de colores y que en base a la existencia de simetrías permita describir múltiples experimentos? ¿Podemos hacer experimentos que den evidencia de dichas simetrías?

Capítulo 2

Modelo del espacio de colores

“The sciences do not try to explain, they hardly even try to interpret, they mainly make models. By a model is meant a mathematical construct which, with the addition of certain verbal interpretations, describes observed phenomena. The justification of such a mathematical construct is solely and precisely that it is expected to work - that is correctly to describe phenomena from a reasonably wide area. Furthermore, it must satisfy certain esthetic criteria - that is, in relation to how much it describes, it must be rather simple.”

— John von Neumann

En este capítulo se desarrollará un elemento central de la tesis: un modelo que describe la geometría del espacio de colores. Lo novedoso de este modelo es que la distancia en este espacio es definida de modo tal que puede aplicarse para comparar estímulos presentados en entornos de distintas cromaticidades. Más aun, postularemos que la magnitud de la inducción cromática depende únicamente de la distancia entre estímulo y entorno, tomando la forma más sencilla posible en esa geometría: isotrópica y homogénea. Finalmente, exploraremos las predicciones experimentales de este modelo para poder luego evaluar su utilidad.

2.1. Perceptos como clases de equivalencia

En la sección 1.5, mencionamos que en experimentos de psicofísica es usual denominar “estímulo” a aquella variable física controlada por el experimentador y que es presentada al sujeto para llevar a cabo una cierta tarea. El estímulo puede ser por ejemplo un sonido, un color, una dada figura, una palabra, un olor, etc. Como el espacio de estímulos puede ser muy grande, generalmente en un experimento se varía un subconjunto de las propiedades que definen a un estímulo, por ejemplo, en un experimento auditivo podría medirse cuál es

la sensibilidad del sujeto a sonidos de distintas frecuencias manteniendo fijos el timbre y la amplitud. A su vez, si la tarea es de tipo perceptual, es usual asociar a un dado estímulo una representación interna, es decir la sensación subjetiva suscitada por dicho estímulo. A esta recreación mental del estímulo se lo denomina *percepto*, tal como discutimos en la sección 1.3.

Adicionalmente, notamos que la relación entre estímulo y percepto no es unívoca. Es decir, un mismo estímulo puede ser percibido de distintas formas y estímulos físicamente diferentes pueden ser percibidos como iguales. Esto se debe a que el proceso de percepción es modulado por múltiples factores, tanto externos - el contexto en el que el estímulo es presentado - como internos - estado de los receptores sensoriales, historia del sujeto, etc.-.

Existe una cierta arbitrariedad en la distinción entre lo que uno llama “estímulo” y lo que llama “contexto”, ya que en principio podría considerarse a la conjunción de estímulo-contexto como un estímulo más complejo en el que se incluyen todas las variables que influyen en la percepción. Esto resulta muy poco práctico a nivel experimental. La idea en un experimento de psicofísica es diseñar una tarea de tal forma que la información más relevante para cumplirla esté en el estímulo, mientras que el resto de las variables se mantienen constantes o aleatorizadas. Uno de los objetivos de esta tesis es el desarrollo de un marco teórico que nos permita describir de qué manera la percepción de ese estímulo es de hecho alterada por el contexto en el que el estímulo es presentado. Como ejemplo paradigmático, estudiamos la percepción del color. En principio, todo aquello que influye en la percepción que no sea lo que se identifica como estímulo correspondería al contexto. En ese sentido, la cantidad de variables necesarias para describir el contexto puede ser arbitrariamente grande. Por este motivo, en este trabajo nos restringiremos a analizar un caso muy sencillo, en el que los estímulos son objetos de un único color presentados sobre un fondo coloreado uniformemente, al cual llamaremos el entorno. Además, para incluir también el estado de adaptación del ojo, supondremos que la retina del observador está adaptada al color del entorno en el que el estímulo es presentado. La estructura espacio-temporal – forma, tiempo de presentación, etc. – del par estímulo-fondo será la misma para todos los casos, de tal forma que podemos considerar que esas variables contextuales toman un valor fijo para los experimentos que analizaremos.

Dado que sabemos que el color del entorno altera la forma en que un estímulo es percibido, podemos decir que el color de un estímulo depende de las propiedades del estímulo y del entorno. Matemáticamente, esto significa que

$$\text{Color Percibido} = \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{b}), \quad (2.1)$$

donde Φ es una función, y \mathbf{x} y \mathbf{b} representan el estímulo y el entorno, descritos mediante sus propiedades espectrales. Usaremos letras en negrita para referirnos al estímulo en sí, y letras normales para especificar sus coordenadas en algún sistema. En tricrómatas, tres números

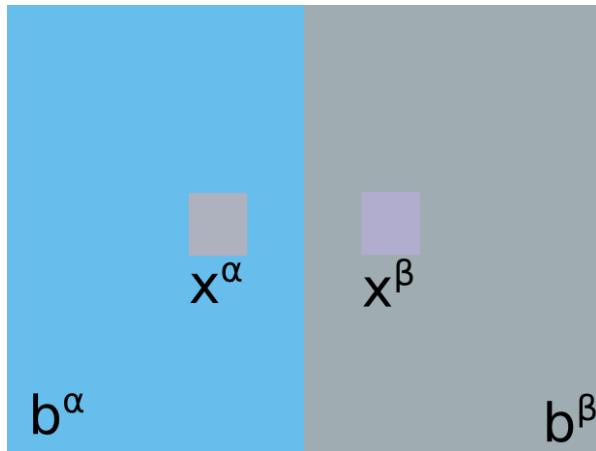


Figura 2.1: Ejemplo de paradigma de matcheo asimétrico: Manteniendo las otras tres cromaticidades fijas, el sujeto varía la cromaticidad x^β hasta percibir como iguales los cuadraditos a ambos lados.

alcanzan para caracterizar las propiedades perceptibles del espectro lumínico, dando lugar a las ya mencionadas representaciones tridimensionales de los colores (secc. 1.8), tales como *LMS*, *RGB*, *XYZ*, etc. La ecuación 2.1 implica que para especificar un dado perceptor, en principio 6 coordenadas son necesarias, 3 para el color del estímulo y 3 para el entorno. Para especificar este objeto, utilizaremos la notación $x // b$ que debe leerse como “el estímulo x presentado en el entorno b ”. Utilizaremos la notación $\mathcal{S} \times \mathcal{B}$ para referirnos al espacio de pares estímulo-entorno, es decir $\mathcal{S} \times \mathcal{B} = \{x // b : x \in \mathcal{S}, b \in \mathcal{B}\}$.

Notablemente, aunque la cromaticidad del entorno modifica el modo en que los estímulos son percibidos, el perceptor que induce es también un color que puede ser visto como idéntico a otro estímulo presentado en un entorno distinto. Es decir, un observador en general no tendrá inconvenientes en realizar un experimento de matcheo asimétrico, en el cual deba responder para un dado $x^\alpha // b^\alpha$ y un entorno diferente b^β , cuál es el estímulo x^β que hace que $x^\beta // b^\beta$ se vea idéntico a $x^\alpha // b^\alpha$. Esta relación la escribimos como

$$x^\alpha // b^\alpha \sim x^\beta // b^\beta,$$

donde el símbolo \sim debe ser leído como “matchea con”. En un dado experimento de matcheo asimétrico, se fija la cromaticidad de los dos fondos b^α y b^β , se presenta al observador un dado estímulo x^α sobre el fondo b^α y se le pide que varíe el estímulo x^β , presentado sobre el fondo b^β , hasta que se vea lo más parecido posible a x^α (ver fig. 2.1). De esta forma, lo que se computa es una función de transición o de matcheo $\Phi_{b^\alpha \rightarrow b^\beta}$ ¹ tal que

$$x^\beta = \Phi_{b^\alpha \rightarrow b^\beta}(x^\alpha), \quad (2.2)$$

Tal como fue descrito por Resnikoff [8], la operación de matcheo “ \sim ” define una relación

¹Nótese que esta función contiene dos índices, $b^\alpha \rightarrow b^\beta$, notación que la distingue de la función Φ previamente definida.

de equivalencia, es decir, una relación entre pares “Estímulo // Entorno” que es reflexiva ($x // b \sim x // b$), simétrica (si $x^\alpha // b^\alpha \sim x^\beta // b^\beta$ entonces $x^\beta // b^\beta \sim x^\alpha // b^\alpha$), y transitiva (si $x^\alpha // b^\alpha \sim x^\beta // b^\beta$ y además $x^\beta // b^\beta \sim x^\gamma // b^\gamma$, entonces $x^\gamma // b^\gamma \sim x^\alpha // b^\alpha$). Toda relación de equivalencia induce una partición en el conjunto sobre el que opera. En otras palabras, el conjunto de pares $x // b$ puede ser segmentado en subconjuntos disjuntos, o *clases de equivalencia*. Todos los pares pertenecientes a la misma clase están emparentados mediante la relación \sim , y a la vez, pares que pertenecen clases distintas no están conectados por \sim . En línea con Resnikoff, asumimos que un dado *color* es el percepto compartido por todos los pares que pertenecen a la misma clase. Es decir, definimos el espacio de perceptos como $\mathcal{P} = \mathcal{S} \times \mathcal{B} / \sim$. De esta manera, la función $\Phi : \mathcal{S} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{P}$ que asigna un percepto a un dado par estímulo-entorno, queda definida como la proyección canónica en las clases de equivalencia, es decir $\Phi(x // b) = [x // b]$, donde los corchetes denotan “la clase de equivalencia que contiene a” como es usual.

En base a lo discutido, podemos decir que el color no es una propiedad de un dado estímulo x , ni tampoco de un par específico $x // b$. Es una propiedad de la clase de equivalencia. En términos matemáticos, el espacio de colores es el cociente del espacio de pares $x // b$ y la relación de equivalencia \sim . Por lo tanto, las 6 coordenadas mencionadas anteriormente constituyen una representación redundante del color. Las clases de equivalencia son subvariedades 3-dimensionales embebidas en el espacio de 6 dimensiones definido por todas las cromaticidad de estímulos y entornos posibles. Si seleccionar un color es equivalente a seleccionar una clase, entonces 3 coordenadas deberían alcanzar. En la Fig. 2.2, se ilustran las clases de equivalencia para cuatro elecciones diferentes de la función que define los desplazamientos inducidos por el entorno. Dado que no es posible graficar subvariedades tridimensionales embebidas en un espacio 6-dimensional, la figura muestra cortes conteniendo los ejes (x_1, b_1) (azul-amarillo) y (x_2, b_2) (rojo-verde), respectivamente. En estos cortes, cada clase aparece como una curva.

En la Fig. 2.2A, el entorno no altera la percepción del estímulo, y por lo tanto las clases de equivalencia son planas: independientemente del entorno, $x // b$ es percibido siempre igual. En la Fig. 2.2B, las clases de equivalencia son lineales, con pendiente distinta de cero. El entorno produce un efecto repulsivo, el cual se hace más grande a medida que la distancia entre fondo y estímulo aumenta. En los paneles C y D se grafican clases de equivalencia dadas por relaciones no lineales.

En la sección 1.8.2 definimos \mathcal{P}_0 , el espacio de colores bajo las condiciones estándar de experimentos de matcheo, y observamos que el mismo poseía una estructura de cono convexo lineal. En la nueva notación introducida, podemos escribir $\mathcal{P}_0 = \{[x // b_0] : x \in \mathcal{S}\}$, donde b_0 es el entorno en las condiciones estándar de matcheo, un entorno acromático y de muy baja luminosidad. Resnikoff propuso generalizar el concepto de color a condiciones no estándar, partiendo de la suposición de que el espacio de colores \mathcal{P} conservara la estructura lineal de \mathcal{P}_0 . Es decir, propuso la existencia de un isomorfismo lineal entre \mathcal{P}_0 (o análoga-

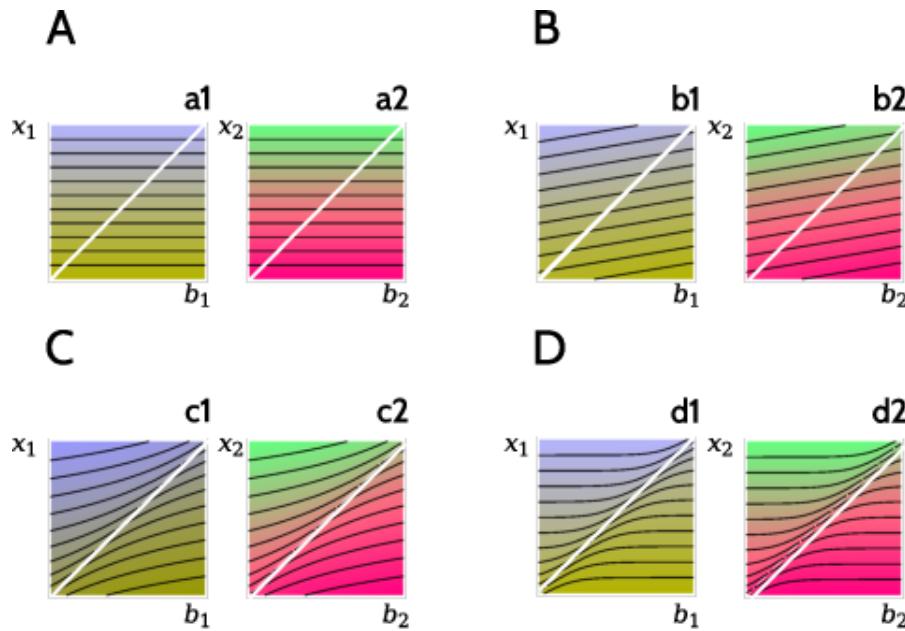


Figura 2.2: Clases de equivalencia. Cuatro ejemplos diferentes de la estructura de la partición inducida por las clases de equivalencia. Las líneas negras representan clases de equivalencia y son obtenidas de graficar $\Phi_b(x)$ para x fijo (un valor de x para cada línea). La línea blanca diagonal contiene los representantes uniformes. A: El entorno no altera el color del estímulo, por lo que las clases de equivalencia son líneas rectas. B: El entorno induce clases de equivalencia lineales, como sugerido por [8] y [9]. C and D: Dos posibles particiones del espacio de colores en el caso en que el efecto perceptual del entorno es no lineal.

mente \mathcal{S} , el espacio de las propiedades espectrales visibles) y \mathcal{P} . A esta propuesta la llamo *hipótesis de homogeneidad*, ya que implicaría que \mathcal{P} es un espacio G -homogéneo, donde G es el grupo de automorfismos invertibles en el cono lineal convexo. Esta hipótesis es válida si y solo si las clases de equivalencia generadas por la función Φ son subespacios afines - como se ve en los paneles A y B de la Fig. 2.2. Sin embargo, esta hipótesis está en flagrante contradicción con los resultados experimentales, como veremos en el capítulo 3. Por este motivo, nosotros no adoptaremos la hipótesis de homogeneidad de Resnikoff. A partir de aquí, nuestro camino se bifurca de la literatura previa.

Representantes uniformes

Como los elementos de \mathcal{P} son colores al igual los elementos de \mathcal{P}_0 , el cual puede mapearse con \mathcal{S} , es razonable suponer que existe alguna forma de mapear \mathcal{P} y \mathcal{S} . En la siguiente sección propondremos una forma de hacer este mapeo que no requiere ningún tipo de estructura algebraica lineal como la propuesta por Resnikoff.

Nuestro primer paso para caracterizar el espacio \mathcal{P} será suponer que, al menos para colores insaturados, las clases de equivalencia contienen un único elemento de la forma $x // x$ en que la cromaticidad del estímulo y del entorno es la misma, al cual llamaremos el *representante uniforme*. En la Fig. 2.2, los representantes uniformes yacen a lo largo de la diagonal blanca, por lo que la hipótesis implica que todas las clases intersecan la diagonal. La hipóte-

sis se apoya en la observación empírica de que los sujetos encuentran posible la tarea de matchear un estímulo uniforme $x // x$ de una dada cromaticidad con un estímulo x' presentado en un entorno de una cromaticidad distinta b' . En nuestro laboratorio², este hecho ha sido corroborado para colores dentro del rango producido por la pantalla de la computadora. Aunque este conjunto no incluye colores máximamente saturados, es suficientemente amplio como para incluir a una gran colección de cromaticidades. El representante uniforme de cada clase debe ser único, dado que todos los miembros de una clase son perceptualmente indistinguibles, y dos representantes uniformes de cromaticidad diferentes (por definición de “diferente”) son distinguibles. Definimos la función $\Phi_b(x)$ ³ como aquella que mapea a cada miembro $x // b$ de una dada clase con su representante uniforme $x^0 // x^0$, tal que

$$x^0 = \Phi_b(x), \quad \Leftrightarrow \quad x // b \sim x^0 // x^0, \quad (2.3)$$

o equivalentemente, $\Phi(x // b) = [\Phi_b(x), \Phi_b(x)]$.

Si, al ser presentados en un mismo entorno b , los estímulos x^α y x^β son percibidos como diferentes, entonces necesariamente pertenecen a clases diferentes y Φ_b los mapea a representantes uniformes distintos. Por lo tanto, para un entorno fijo b , la función $\Phi_b(x)$ debe ser inyectiva. Además, en las regiones del espacio de color donde el observador es capaz de, fijado el entorno b y dado un cierto color objetivo, encontrar una cromaticidad x tal que $x // b$ produzca dicho color, $\Phi_b(x)$ será sobreinyectiva. Dado que $x // b$ y $x^0 // x^0$ pertenecen a la misma clase, las funciones Φ_b y $\Phi_{b_\alpha \rightarrow b_\beta}$ deben obedecer la relación

$$\Phi_{b_\alpha \rightarrow b_\beta} = \Phi_{b_\beta}^{-1} \circ \Phi_{b_\alpha}, \quad (2.4)$$

donde el símbolo \circ representa la composición de funciones, de tal forma que $\Phi_{b_\beta}^{-1} \circ \Phi_{b_\alpha}(x_\alpha) \equiv \Phi_{b_\beta}^{-1}(\Phi_{b_\alpha}(x_\alpha))$. La inyectividad y sobreinyectividad de Φ_b garantizan que la inversa Φ_b^{-1} existe.

Un dado representante uniforme permanece inalterado por la función Φ , es decir, $\Phi(x // x) = [x // x]$, por lo que $\Phi_x(x) = x$ para todo x . La unicidad de los representantes uniformes implica que todos los puntos a lo largo de la diagonal corresponden a clases distintas, y que las clases deben cruzar la diagonal una y sólo una vez.

Debido al mapeo natural que hay entre un elemento $x \in S$ y el correspondiente representante uniforme del percepto $[x // x] \in \mathcal{P}$, es posible extender de modo natural funciones definidas en el espacio de cromaticidades a funciones que actúen sobre el espacio de perceptos. Es decir, dada una función arbitraria $f : S \rightarrow S$, se puede definir $\tilde{f} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ a partir de los representantes uniformes como $\tilde{f}([x // x]) = [f(x) // f(x)]$. En particular, si aplicamos esta construcción a la función $\Phi_b(x)$ considerando b fijo, obtenemos que

²Laboratorio de Psicofísica del Departamento de Biología II de la Ludwig-Maximilian-Universität München, Múnich, Alemania.

³Esta función posee un único índice, lo que la distingue de las dos funciones Φ previamente definidas.

$\tilde{\Phi}_b([x // x]) = [\Phi_b(x) // \Phi_b(x)] = [x // b]$. Mediante esta construcción, puede apreciarse mejor la razón de la definición de $\Phi_b(x)$, ya que codifica la información de cómo la percepción de un estímulo cambia al introducirlo en un entorno de cromaticidad b . En general, para ver que \tilde{f} está bien definida, podemos ver que para un percepto arbitrario $\tilde{f}([x // b]) = \tilde{f}([\Phi_b(x) // \Phi_b(x)])$, por lo que aplicando la definición de \tilde{f} , tenemos que

$$\tilde{f}([x // b]) = [f(\Phi_b(x)) // f(\Phi_b(x))] = (\widetilde{f \circ \Phi_b})([x // x]),$$

de donde vemos que el resultado es la función $(\widetilde{f \circ \Phi_b})$ evaluada en el percepto uniforme $[x // x]$.

En conclusión, podemos ver a la función $\tilde{\Phi}_b : [x // x] \mapsto [x // b]$ como un difeomorfismo –un mapeo suave e invertible entre variedades– del espacio \mathcal{P} en sí mismo.

2.2. Una noción de distancia en el espacio de colores

La idea de una distancia en el espacio de colores ha sido ampliamente debatida. Sin embargo, como ya mencionamos, las distancias que se han propuesto no involucran al entorno en el que el estímulo es presentado y por lo tanto no reflejan adecuadamente las propiedades perceptuales de ese espacio. En esta sección discutiremos las propiedades que se espera que satisfaga una distancia perceptual.

Una distancia en el espacio \mathcal{P} es una función $d : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \Rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ que satisface:

- Positividad: $d(x, y) \geq 0 \forall x, y \in \mathcal{P}$ y $d(x, y) = 0$ si y solo sí $x = y$.
- Simetría: $d(x, y) = d(y, x) \forall x, y \in \mathcal{P}$
- Desigualdad triangular: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \forall x, y, z \in \mathcal{P}$.

El primer punto a la hora de evaluar una distancia, es verificar que efectivamente la misma sea una función correctamente definida en el dominio explicitado. De las consideraciones en la sección anterior, podemos decir que cualquier noción de distancia que sea genuinamente una distancia entre colores debe poder expresarse como una distancia entre clases de equivalencia. Debido a la unicidad asumida entre clases de equivalencia y representante uniformes, podemos comenzar definiendo una distancia $d(x^\alpha // x^\alpha, x^\beta // x^\beta)$ entre representantes uniformes –es decir, a lo largo de la diagonal blanca en la Fig. 2.2– y luego extender esa noción a todo el espacio. Para simplificar la notación, escribiremos $d(x^\alpha, x^\beta)$ para referirnos a la distancia entre representantes uniformes, es decir

$$d(x^\alpha, x^\beta) := d(x^\alpha // x^\alpha, x^\beta // x^\beta). \quad (2.5)$$

La distancia entre pares no uniformes es entonces heredada de la distancia de los representantes correspondientes,

$$\begin{aligned} d(\mathbf{x}^\alpha // \mathbf{b}^\alpha, \mathbf{x}^\beta // \mathbf{b}^\beta) &:= d(\Phi_{\mathbf{b}^\alpha}(\mathbf{x}^\alpha) // \Phi_{\mathbf{b}^\alpha}(\mathbf{x}^\alpha), \Phi_{\mathbf{b}^\beta}(\mathbf{x}^\beta) // \Phi_{\mathbf{b}^\beta}(\mathbf{x}^\beta)) \\ &= d(\Phi_{\mathbf{b}^\alpha}(\mathbf{x}^\alpha), \Phi_{\mathbf{b}^\beta}(\mathbf{x}^\beta)). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Para calcular la distancia entre dos pares que no yacen a lo largo de la diagonal debemos en primer lugar deslizarnos a lo largo de su respectiva clase de equivalencia hasta llegar a la diagonal - en general, en distintos lugares- y usar entonces la definición de distancia para representantes uniformes.

Desde el punto de vista formal, la construcción de arriba define una pseudo-distancia en el espacio de pares estímulos-entorno $\mathcal{S} \times \mathcal{B}$, ya que distintos pares pertenecientes a la misma clase de equivalencia están a distancia $d = 0$, por lo que la condición de igualdad requerida por el axioma de positividad no se cumpliría. Sin embargo, por construcción, el valor de d respeta la partición inducida por las clases de equivalencia, de tal forma que nos permite definir una verdadera distancia \tilde{d} , en el espacio de perceptos \mathcal{P} , simplemente tomando $\tilde{d}([\mathbf{x}^\alpha // \mathbf{b}^\alpha], [\mathbf{x}^\beta // \mathbf{b}^\beta]) = d(\mathbf{x}^\alpha // \mathbf{b}^\alpha, \mathbf{x}^\beta // \mathbf{b}^\beta)$. Por simplicidad, aquí no haremos una distinción explícita entre d y \tilde{d} , esperando que por el contexto esté claro qué concepto es utilizado en cada caso.

En base a lo discutido, proponemos que para describir la geometría del espacio de colores de manera tal que sea compatible con la inducción cromática que produce el entorno necesitamos de la estructura (d, Φ) , donde d nos da una noción de distancia sobre los representantes uniformes y Φ caracteriza el desplazamiento perceptual generado por el entorno.

Es válido preguntarse por qué elegimos definir la distancia en base a los representantes uniformes. En colorimetría es usual referir las cromaticidades respecto de un dado color neutral (un gris), e incluso la inducción cromática suele medirse comparando la diferencia perceptual entre el estímulo presentado en un fondo neutral y en un fondo coloreado. Esto sugiere como posible camino tomar el mapeo entre estímulo y percepto dado por $\mathbf{x} \mapsto [\mathbf{x} // \mathbf{g}]$, donde \mathbf{g} representa el gris de referencias, y definir las distancias en esa representación. Sin embargo, hay dos argumentos por los cuales decidimos no utilizar este enfoque. En primer lugar, por una cuestión de elegancia y simplicidad. Usar la representación $[\mathbf{x} // \mathbf{g}]$ tiene implícita la arbitrariedad que hay en la elección del color \mathbf{g} de referencia. Esto significa que para comparar resultados experimentales realizados con diferentes referencias es necesario tener las coordenadas de un color adicional y la regla de transformación entre dos representaciones $[\mathbf{x} // \mathbf{g}]$ y $[\mathbf{x} // \mathbf{g}']$ (la cual, viene dada por la función $\Phi_{g \rightarrow g'}$). Adicionalmente, el criterio físico de color neutral - espectro plano - no basta para asegurar la universalidad del color percibido, ya que el estado de adaptación del ojo influye en su percepción, de tal forma que un estímulo con espectro plano puede percibirse como coloreado si el ojo está adaptado a otro color [56]. En segundo lugar, por una cuestión fisiológica. La inducción cromática surge

a partir de la interacción entre regiones espaciales de distintas cromaticidad, probablemente como un mecanismo que incrementa la capacidad de identificar fronteras entre objetos (ver Secc. 1.8.5). En este sentido, la condición uniforme es aquella en que la interacción es *nula*, ya que la cromaticidad es la misma en todo el campo visual. Esto da una gran ventaja a la hora de describir la inducción, ya que entonces tenemos un criterio universal al definirla como el desplazamiento inducido con respecto a la percepción en el caso en que no hay interacción. De esta forma, d tiene una identidad propia - es decir, la de dar distancias entre perceptos en ausencia de una iteración- y Φ codifica cómo se modifican los perceptos debido a la interacción entre estímulo y fondo.

Dada esta estructura, queremos definir un método empírico para garantizar que d refleje específicamente la disimilitud entre perceptos. Es decir, que d sea una medida de qué tan diferentes se perciben dos estímulos, incluyendo el efecto que el entorno hace en cada uno. Para eso, utilizamos el concepto de Umbral Diferencial descrito en la Secc. 1.5. Es decir, diremos que dos representantes uniformes a están a distancia 1 cuando el sujeto es capaz de discriminarlos con una dada precisión pre-establecida (usualmente en el 50 % de los casos). De esta forma, aquellos estímulos cuya distancia es menor a 1 resultan perceptualmente indistinguibles.

Esta idea se basa en una definición local de distancia, es decir, en una forma de calcular la distancia para dos estímulos muy cercanos. La tarea más sencilla es separar entre aquellos estímulos que son perceptualmente distinguibles y los que no. Pero una función distancia debe poder evaluarse entre cualquier par de elementos del espacio, por lo que necesitamos un método para extender esta noción a todo el espacio. Para poder hacer esto haremos las siguientes hipótesis:

1. *El espacio de perceptos \mathcal{P} es una variedad riemanniana*, de forma tal que la función distancia d puede ser escrita en términos de un tensor métrico J . La hipótesis riemanniana fue introducida primero por [57] y [38], discutida por [58], [39], [8] y [48, 59], y se apoya principalmente en la observación experimental de que los umbrales de discriminación conforman una elipse alrededor del color de referencia, tal como fue medido por MacAdam, entre otros[10, 55], de tal forma que distancias locales pueden ser aproximadas por una forma cuadrática, es decir

$$d\ell^2 = d^2(\mathbf{x}, \mathbf{x} + d\mathbf{x}) = \sum_{i,j} J_{ij}(x) dx^i dx^j$$

2. *El espacio de perceptos \mathcal{P} es completo y d es la distancia geodésica*, es decir, que para cualquier par de puntos $\mathbf{x}^\alpha, \mathbf{x}^\beta$, existe una geodésica $\gamma_{\mathbf{x}^\alpha \rightarrow \mathbf{x}^\beta}$ que une a esos puntos y tal que $d(\mathbf{x}^\alpha, \mathbf{x}^\beta) = \text{longitud}(\gamma_{\mathbf{x}^\alpha \rightarrow \mathbf{x}^\beta})$.

En resumen, a partir de la medición del Umbral Diferencial definiremos el tensor métrico de la variedad riemanniana \mathcal{P} , y a partir de este tensor calcularemos la distancia geodésica

en ese espacio, la cual satisface automáticamente los axiomas de distancia, y definimos la distancia perceptual a partir de ella. A continuación, explicaremos en detalle cómo se obtiene el tensor métrico a partir de un experimento de discriminación.

2.3. Coordenadas perceptuales

Un sistema de coordenadas sobre un dado espacio no es más que una asignación de una n -upla de números que nos permite identificar únicamente a cada elemento del espacio. En principio esta asignación puede ser arbitraria. Esto puede ser constatado, por ejemplo, observando la numeración de las casas en algunas calles barilochenses. Dado que en general las coordenadas son utilizadas como un modo de representación del espacio sobre el que se asignan, es deseable que ciertas propiedades del espacio se vean reflejadas en ellas. El tipo de espacio que usualmente se utiliza en física son las variedades diferenciables.

Si bien las propiedades físicas de un sistema son independientes de las coordenadas que uno utilice para describirlas, las leyes subyacentes pueden adoptar una forma más sencilla en las coordenadas adecuadas. Este es el caso de las leyes de la mecánica, las cuales en ausencia de vínculos adoptan su forma más sencilla en coordenadas cartesianas. Esto se debe a que en las coordenadas cartesianas el cálculo de distancias –que son relevantes en la descripción mecánica– adopta una forma simple. Esto nos plantea el interrogante de si existen coordenadas que sean las más apropiadas para describir la percepción cromática. Siendo que la principal estructura de la que hemos dotado al espacio de colores en nuestro modelo es su geometría riemanniana, podemos preguntarnos en qué coordenadas la misma adopta una forma sencilla. En geometría riemanniana, esta propiedad la cumplen las llamadas coordenadas normales, que describiremos a continuación.

Para entender las coordenadas normales, comenzaremos por describir el mapeo exponencial alrededor de un dado punto x en una variedad riemanniana \mathcal{M} . El mapeo exponencial es una función que manda un vector v en el espacio tangente $T_x\mathcal{M}$ a un nuevo punto en la variedad. Tal como se muestra en la Fig. 2.3, el mapeo $\exp(v)$ tiene como imagen al punto que se obtiene de recorrer la geodésica $\gamma(t)$, la cual satisface que su vector tangente en x tiene la dirección de v y que su longitud es igual al módulo de v ($\|v\| = \sqrt{\sum_{i,j} J_{ij}(x)v^i v^j}$). El mapeo exponencial da una biyección entre un entorno de x y un entorno en el espacio tangente $T_x\mathcal{M}$. Qué tan grande puede ser ese entorno, dependerá de las propiedades de la variedad. Como el espacio tangente es un espacio de vectorial con producto interno - dado por el tensor métrico $J_{ij}(x)$ -, podemos elegir una base ortonormal $\{e_a\}_{a=1,\dots,n}$. Un vector en el espacio tangente, puede escribirse en esa base como $v = \sum_a v^a e_a$. Para x' en un entorno de x , existirá algún vector v en el espacio tangente tal que $x' = \exp(v)$. Esto nos permite definir las coordenadas normales de x' como $x'^a = v^a$. Es decir, las coordenadas ortonormales en el espacio tangente nos sirven como coordenadas para elementos en la variedad. Nótese

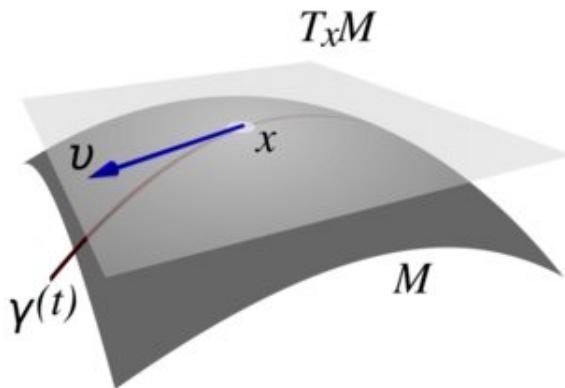


Figura 2.3: Representación del mapeo exponencial. Imagen tomada de <https://math.stackexchange.com/questions/1408714/exponential-map-on-a-sphere-in-spherical-coordinates>

que en particular el punto x es mapeado al 0 vector.

Puede demostrarse que en estas coordenadas, el tensor métrico adquiere la forma:

$$J'_{ij}(x') = \delta_{ij} + \frac{1}{3} \sum_{k,l} R_{ijkl}(0) x'^k x'^l + \mathcal{O}(|x'|^3) \quad (2.7)$$

donde R_{ijkl} es el tensor de curvatura de la variedad. Esto nos dice que $J'_{ij}(0) = \delta_{ij}$ y que las derivadas primeras $\frac{\partial}{\partial x'^k} J'_{ij}(0) = 0$, lo cual implica que el espacio luce localmente plano en un entorno de x , ya que la primera corrección a la métrica euclídea es cuadrática. Más aún, se puede ver que si el tensor de curvatura se anula, es decir si la variedad es plana, entonces las coordenadas normales son las coordenadas cartesianas usuales del espacio euclídeo.

En el contexto de la Relatividad General, la existencia de las coordenadas normales garantiza el principio de equivalencia, según el cual localmente la gravedad es equivalente a un efecto inercial y por lo tanto hay un sistema de referencia en el cual se anula. Las coordenadas cartesianas de un observador en caída libre son una forma natural de obtener las coordenadas normales en un dado espacio-tiempo. En estas coordenadas, las leyes físicas tendrán el aspecto –localmente– correspondiente al espacio de Minkowski propio de la relatividad especial.

Las coordenadas normales son la generalización natural de las coordenadas cartesianas a espacios curvos. En esas coordenadas el espacio es *localmente* euclídeo, y a la vez es posible computar los efectos no euclídeos mediante el desarrollo de la métrica en potencias. En el contexto del espacio perceptual \mathcal{P} , esperamos que la geometría perceptual que desarrollamos en este trabajo capture parte de la estructura que subyace a los cálculos neuronales que transforman los *inputs* en representaciones internas, de forma tal que las propiedades no triviales del proceso de percepción adquieran una forma más sencilla al ser expresadas en las coordenadas normales asociadas a la métrica perceptual. Para resaltar este carácter, en este contexto las llamaremos *coordenadas perceptuales*.

2.4. Experimentos de Discriminación

La definición que hemos dado para la distancia entre colores se basa en la comparación diferencial entre representantes uniformes, es decir estímulos presentados en un entorno con su misma cromaticidad. Sin embargo, para poder hacer experimentos de discriminación es necesario presentar al sujeto estímulos no uniformes, de manera tal que sea posible verificar si el sujeto percibe o no la no-uniformidad. A continuación, veremos cómo se manifiesta la distancia perceptual en dos protocolos experimentales de discriminación típicos.

2.4.1. Discriminación de un estímulo con respecto a su fondo (I)

El primer protocolo que explicaremos corresponde al utilizado en los experimentos KG (Capítulo 4) y al experimento I realizado por nosotros (Capítulo 3). Nos referiremos a éste como protocolo I. El objetivo del experimento es analizar si el observador es o no capaz de percibir un estímulo que posee una cromaticidad muy similar a la del entorno en que es presentado. Tal como se muestra en los paneles A y B de la Fig. 2.4, al variar la cromaticidad del estímulo el observador encontrará una de dos situaciones: (A) el estímulo se funde con su entorno, percibiéndose una pantalla uniforme, o (B) el estímulo se distingue del fondo. Para un dado estímulo x se define el Umbral Diferencial ε_I como el cambio mínimo para el cual el observador logra distinguirlo de su entorno. El criterio y la forma de determinar este umbral puede variar en distintas realizaciones experimentales.

Como puede verse en el panel C de la Fig. 2.4, la transformación inducida por el entorno en los perceptos modifica la distancia con respecto a la de los representantes uniformes. Las flechas verticales representan el mapeo entre \mathcal{S} y \mathcal{P} dado por $x \mapsto [x // x]$. Al presentar el estímulo $x + \varepsilon_I$ sobre el entorno x , se induce un perceptor que, por definición, es igual a $[\Phi_x(x + \varepsilon_I) // \Phi_x(x + \varepsilon_I)]$. El hecho de que la inducción sea repulsiva se refleja en que el perceptor inducido por el entorno x sobre el estímulo $x + \varepsilon_I$ se halla a una distancia d' mayor a la distancia entre los correspondientes representantes uniformes $d = d(x, x + \varepsilon_I)$. Que la distancia incrementa implica que el cambio físico que debo producir en el estímulo para que el observador sea capaz de percibirla es menor. Es decir, que un mismo cambio en el espacio \mathcal{S} se traduzca en un cambio mayor en el espacio \mathcal{P} por efecto de la inducción, mejora la resolución cromática del observador.

Veamos explícitamente cómo se modifican las distancias infinitesimalmente, para ello

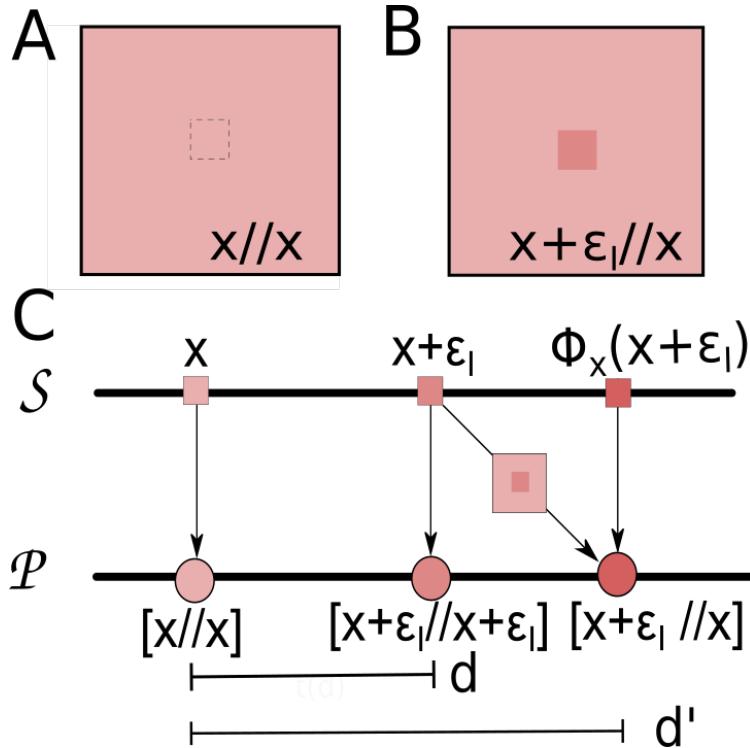


Figura 2.4: (A) y (B): protocolo de discriminación de un estímulo con respecto al fondo. Dependiendo de la cromaticidad del estímulo el sujeto percibirá la situación A o B, el Umbral Diferencial ε_I es el cambio que debe producirse en la cromaticidad del estímulo con respecto a la del fondo para que el sujeto pase de percibir A a percibir B. (C) Representación de la inducción cromática como una modificación en el mapeo entre el espacio de estímulos \mathcal{S} y el de perceptos \mathcal{P} . Las líneas verticales representan el mapeo dado por los representantes uniformes $x \mapsto [x // x]$, mientras que la línea diagonal representa el mapeo $x + \varepsilon_I \mapsto [\Phi_x(x + \varepsilon_I) // x]$.

calculemos $d^2(\mathbf{x}, \Phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{x} + d\mathbf{x}))$:

$$\begin{aligned}
 d^2(\mathbf{x}, \Phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{x} + d\mathbf{x})) &= d^2(\mathbf{x}, \mathbf{x} + d\Phi_{\mathbf{x}}) \\
 &= \sum_{ij} J_{ij}(x) d\Phi_x^i d\Phi_x^j(x) \\
 &= \sum_{i,j,k,l} J_{ij}(x) \frac{\partial \Phi_x^i}{\partial x_k} \frac{\partial \Phi_x^j}{\partial x_l} dx^k dx^l \\
 &= \sum_{k,l} J_{kl}^I(x) dx^k dx^l,
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

donde hemos definido

$$J_{kl}^I(x) = \sum_{i,j} J_{ij}(x) \frac{\partial \Phi_x^i}{\partial x^k} \frac{\partial \Phi_x^j}{\partial x^l}.$$

Esto nos dice que el tensor métrico efectivo que determina las distancias en el protocolo I es el que surge de aplicar la transformación Φ_x sobre el espacio de perceptos uniformes. En este punto, retomamos la idea discutida anteriormente de que la función Φ_b actúa como un difeomorfismo en el espacio de perceptos, y por lo tanto el nuevo tensor métrico es simplemente el que se obtiene de aplicar la regla de transformación de un tensor de rango 2 ante un

difeomorfismo.

La distancia perceptual queda definida mediante el Umbral Diferencial, al establecer que dos estímulos apenas perceptibles están a distancia 1, por lo que particularizando la Ec. 2.8 obtenemos que

$$d^2(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \boldsymbol{\varepsilon}^I) = \sum_{i,j} J_{ij}^I(x) \varepsilon_I^i \varepsilon_I^j = 1. \quad (2.9)$$

Debido a que J^I es un tensor definido positivo, esta ecuación define un elipsoide n-dimensional. Para el caso de colores en un plano isoluminiscente, la ecuación da lugar a una elipse. De aquí que, midiendo las elipses de discriminación, uno obtiene las componentes J_{ij}^I del tensor métrico.

Si fijamos una dirección, digamos, aquella dada por un cierto versor \hat{u} , y medimos el umbral ε_u^I en esa dirección, la ecuación 2.9 se transforma en

$$J_u^I \varepsilon_u^2 = 1, \quad (2.10)$$

donde $J_u^I = \sum_{i,j} J_{ij} \hat{u}^i \hat{u}^j$, de donde podemos despejar fácilmente la componente del tensor métrico en esa dirección como $J_u = \frac{1}{\varepsilon_u^2}$.

2.4.2. Discriminación entre estímulos a fondo fijo (II)

El segundo protocolo experimental consiste en la distinción entre dos estímulos presentados en el mismo entorno, tal como se esquematiza en Fig. 2.5. La diferencia con el caso I es que ahora la cromaticidad del entorno no es necesariamente similar a la de los estímulos que se comparan.

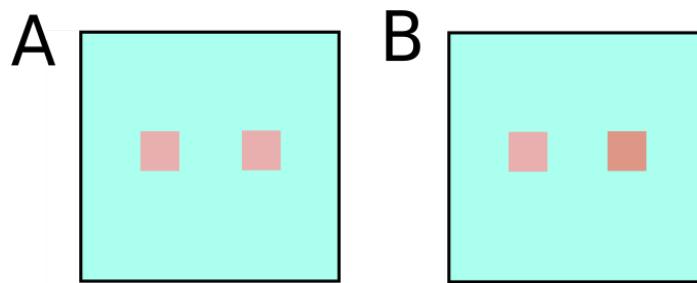


Figura 2.5: Para un fondo fijo b , se presentan al sujeto un estímulo de referencia fija y un estímulo cuya cromaticidad se varía hasta que el sujeto percibe a los estímulos como distintos (panel B).

En este protocolo -al que llamaremos II-, los perceptos involucrados son $[\mathbf{x} // \mathbf{b}]$ y $[\mathbf{x} + d\mathbf{x} // \mathbf{b}]$. Nuevamente, calcularemos la distancia diferencial:

$$d^2(\Phi_b(\mathbf{x}), \Phi_b(\mathbf{x} + d\mathbf{x})) = d^2(\Phi_b(\mathbf{x}), \Phi_b(\mathbf{x}) + d\Phi_b) \quad (2.11)$$

$$= \sum_{ij} J_{ij}(\Phi_b(\mathbf{x})) d\Phi_b^i d\Phi_b^j \quad (2.12)$$

$$= \sum_{i,j,k,l} J_{ij}(\Phi_b(\mathbf{x})) \frac{\partial \Phi_b^i}{\partial x^k} \frac{\partial \Phi_b^j}{\partial x^l} dx^k dx^l \quad (2.13)$$

$$= \sum_{k,l} J_{kl}^b(\Phi_b(\mathbf{x})) dx^k dx^l, \quad (2.14)$$

donde hemos definido

$$J_{kl}^b(x) = \sum_{i,j} J_{ij}(\Phi_b(\mathbf{x})) \frac{\partial \Phi_b^i}{\partial x^k} \frac{\partial \Phi_b^j}{\partial x^l}.$$

Una vez más vemos que el tensor métrico en este protocolo se obtiene de aplicar la regla de transformación tensorial asociada al difeomorfismo Φ_b .

La definición que hemos dado de distancia perceptual implica que la distancia entre perceptos mínimamente discernibles es igual a 1. Por lo tanto, para este protocolo tendremos un Umbral Diferencial $\varepsilon^{II}(\mathbf{x}, \mathbf{b})$ que satisface que

$$d^2([\mathbf{x} // \mathbf{b}], [\mathbf{x} + \varepsilon^{II} // \mathbf{b}]) = \sum_{i,j} J_{ij}^b(\mathbf{x}) \varepsilon_{II}^i \varepsilon_{II}^j = 1 \quad (2.15)$$

2.5. Simetrías en el espacio de perceptos

En las secciones anteriores hemos establecido una conexión entre los experimentos de matcheo asimétrico y los experimentos de discriminación, a través de caracterizar las dos estructuras en el espacio de perceptos: la distancia riemanniana d y la función de inducción cromática Φ_b . Por el momento, no hemos hecho hipótesis adicionales sobre estos dos objetos. A continuación, daremos una serie de argumentos teóricos y empíricos que nos permitirán simplificar significativamente su caracterización.

2.5.1. Radialidad de la inducción cromática

Numerosos estudios muestran que la inducción cromática aumenta el contraste entre el estímulo y el entorno. Más aún, este cambio de contraste ocurre en la dirección que establece la oposición de colores. Esto puede visualizarse en la Fig.2.6. Un cuadrado que en su representación uniforme se ve gris, adquiere un tono cian al ser presentado en un entorno magenta y viceversa. La misma oposición pudo observarse para los otros fondos. Este característica de la inducción cromática ha sido corroborada en múltiples ocasiones [13, 60–62].

¿Cómo podemos incorporar esta información en nuestro modelo perceptual? Una de las

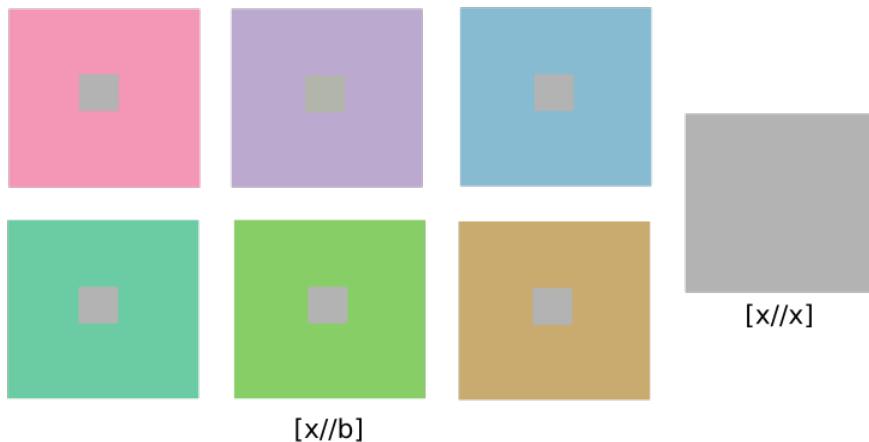


Figura 2.6: La inducción cromática aumenta la oposición de colores. El mismo estímulo gris x adquiere un tono distinto al ser presentado en distintos fondos b . La cromaticidad adquirida es opuesta a la del fondo. Del lado derecho, se presenta el estímulo en un entorno de su misma cromaticidad.

propuestas usuales consiste en modelar el cambio de contraste como una transformación de escala en el espacio LMS. Es decir, considerando que el espectro del fondo posee ciertos valores espectrales (L_b, M_b, S_b) , y el estímulo valores (L_x, M_x, S_x) , entonces se produce una transformación de la forma $(L_x, M_x, S_x) \mapsto (L_x, M_x, S_x) + \alpha(L_x - L_b, M_x - M_b, S_x - S_b)$, que es la expresión para un reescalamiento con centro en el color del fondo. Esta propuesta posee dos problemas. En primer lugar, un reescalamiento en los valores espectrales del estímulo no se corresponde necesariamente con un reescalamiento a nivel *perceptual*. Esto puede verse a partir del hecho de que los umbrales diferenciales no son constantes en las coordenadas cone-fundamentales, por lo que un dado cambio en el valor *LMS* de un estímulo no refleja el mismo cambio perceptual en distintas regiones del espacio de colores. El segundo problema, es que la propuesta implica la linealidad de la inducción cromática, lo cual entra en contradicción con nuestros resultados experimentales, como veremos en el capítulo siguiente. A continuación, detallaremos una propuesta que resuelve estos dos inconvenientes.

En nuestro modelo, la inducción cromática viene caracterizada por la función Φ_b . Queremos definir el aumento de contraste con respecto al fondo de una manera que refleje un cambio a nivel perceptual. Intuitivamente, uno puede decir que el contraste entre estímulo y fondo aumenta si la distancia perceptual aumenta. Es decir, si llamamos $d = d(x // x, b // b)$ y $d' = d(x // b, b // b)$, esperamos que $d' > d$. El espacio de colores es tridimensional, por lo que el desplazamiento puede darse en un continuo de direcciones. Sin embargo, está claro que el cambio de distancia será máximo si el desplazamiento ocurre en la dirección *radial*. Utilizando la hipótesis de que el espacio de perceptos \mathcal{P} posee una estructura riemanniana completa, podemos escribir de manera precisa esta condición. Dado un entorno de cromaticidad b y un estímulo de cromaticidad x , existe una geodésica $\gamma_{b \rightarrow x} \subset \mathcal{P}$ que va desde el perceptor $[b // b]$ hasta $[x // x]$. El perceptor inducido en el estímulo x por el entorno b satisface

la siguiente desigualdad triangular:

$$d(\mathbf{x} \parallel \mathbf{b}, \mathbf{b} \parallel \mathbf{b}) \leq d(\mathbf{x} \parallel \mathbf{x}, \mathbf{b} \parallel \mathbf{b}) + d(\mathbf{x} \parallel \mathbf{x}, \mathbf{x} \parallel \mathbf{b}), \quad (2.16)$$

por lo que la distancia entre el perceptor inducido y el perceptor del fondo será máxima en el caso en que la desigualdad se convierte en igualdad. Esto ocurre justamente cuando el perceptor $[\mathbf{x} \parallel \mathbf{b}]$ yace sobre la geodésica $\gamma_{\mathbf{b} \rightarrow \mathbf{x}}$ en algún punto posterior a \mathbf{x} . Esto es así debido a que la distancia entre perceptos no es otra cosa que la longitud de la geodésica, por lo que para puntos que yacen en la misma geodésica las distancias simplemente se suman. Si parametrizamos la geodésica mediante un parámetro de longitud de arco t , de tal forma que $Longitud(\gamma_{\mathbf{b} \rightarrow \mathbf{x}}(t)) = t$, la hipótesis de radialidad implica la existencia de un valor $t(\mathbf{x}, \mathbf{b})$ tal que

$$[\mathbf{x} \parallel \mathbf{b}] = \gamma_{\mathbf{b} \rightarrow \mathbf{x}}(t(\mathbf{x}, \mathbf{b})). \quad (2.17)$$

Como el efecto es repulsivo, pedimos además que $t(\mathbf{x}, \mathbf{b}) > d(\mathbf{x}, \mathbf{b})$. Utilizando el mapeo que describimos en la sección anterior entre funciones definidas en el espacio de estímulos y funciones en el espacio de perceptos, podemos escribir esta relación como:

$$\Phi_b(\mathbf{x}) = \gamma_{\mathbf{b} \rightarrow \mathbf{x}}(t(\mathbf{x}, \mathbf{b})) \quad (2.18)$$

De esta manera, hemos obtenido una forma de describir el aumento del contraste en términos perceptuales y que es por lo tanto independiente de la representación espectral utilizada para los estímulos o de cualquier tipo de convención respecto de los canales de procesamiento del color. La hipótesis de radialidad reduce la complejidad de la función $\Phi_b(\mathbf{x})$ ya que al fijar \mathbf{x} y \mathbf{b} la dirección del desplazamiento inducido queda fijada y sólo resta explicar su módulo. Por lo que las 3 componentes de $\Phi_b(\mathbf{x})$ quedan ahora definidas en términos de una única función $t(\mathbf{x}, \mathbf{b})$.

2.5.2. Isotropía y homogeneidad

Las nociones de isotropía y homogeneidad juegan un rol central en la física. Desde el revolucionario modelo heliocéntrico de Copérnico a partir del cual la Tierra dejó de ser un punto privilegiado del sistema solar, hasta la cosmología moderna en donde se observa que la distribución de galaxias no tiene puntos o direcciones privilegiadas en el universo, los principios de isotropía y homogeneidad parecen reposar sobre sólidas bases en lo que respecta al espacio físico. A su vez, estos principios permiten describir las leyes de la naturaleza de un modo mucho más sencillo. ¿Es posible hablar de principios análogos en espacios abstractos como es el de la representación de la información sensorial?

Uno de los enfoques típicos para el estudio de las representaciones sensoriales es el de la

Teoría de la Información [63]. En este contexto, uno considera una distribución de probabilidad asociada al *input* - es decir, los estímulos-, y una probabilidad condicionada a ese input para el *output* - actividad neuronal, comportamiento, etc. -. Sin entrar en detalles técnicos, una de las ideas más utilizadas en ese enfoque es el principio de maximización de la información mutua entre *input* y *output*. Para una transformación determinista, la información mutua coincide con la entropía de la distribución del *output*⁴. En ausencia de restricciones adicionales, la distribución de probabilidad del *output* que maximiza la entropía es la distribución uniforme. Es decir, que el mecanismo óptimo es aquel en el que no hay una representación privilegiada, sino que cada uno de los posibles “caracteres” del código ocurre con igual frecuencia. Esta idea posee una cierta semejanza al principio de homogeneidad, pero descrito en un sentido estadístico.

En el enfoque geométrico que hemos adoptado en esta tesis, incorporar estos principios implica una fuerte hipótesis respecto de la forma que adopta la inducción cromática. Gran parte del trabajo de esta tesis consiste en analizar una serie de resultados experimentales con el objetivo de poner a prueba la presencia de estas simetrías en el espacio de colores. En este capítulo nos restringiremos a formular de un modo preciso estas hipótesis. En la sección anterior, vimos que bajo la hipótesis de radialidad podemos escribir $\Phi_b(\mathbf{x}) = \gamma_{b \rightarrow \mathbf{x}}(t(\mathbf{x}, \mathbf{b}))$, por lo que la inducción queda caracterizada mediante la función $t(\mathbf{x}, \mathbf{b})$. Formularemos entonces las hipótesis a modo de condiciones sobre la función $t(\mathbf{x}, \mathbf{b})$:

- *Isotropía*: dado un entorno de cromaticidad \mathbf{b} , el desplazamiento cromático que induce en los estímulos tiene la misma intensidad en cualquier dirección. Dicho de otra manera, no hay una dirección privilegiada en el espacio de colores. Esto significa que fijado \mathbf{b} , la función de inducción es simétrica ante rotaciones y por lo tanto depende únicamente de la distancia entre el estímulo y el entorno, es decir $t(\mathbf{x}, \mathbf{b}) = t(d(\mathbf{x}, \mathbf{b}), \mathbf{b})$.
- *Homogeneidad*: la inducción cromática es la misma para entornos de cualquier color. Es decir, no hay colores privilegiados sobre otros, desde el punto de vista perceptual son todos equivalentes. Esto significa que si cambio \mathbf{b} por \mathbf{b}' , la inducción tendrá la misma forma. Es decir que $t(\mathbf{x}, \mathbf{b}) = t(d(\mathbf{x}, \mathbf{b}'), \mathbf{b}')$.

Estos dos principios implican que la inducción cromática depende *únicamente* de la distancia perceptual entre el estímulo y su entorno. Forzando un poco más la analogía con la física, podemos pensar que en un estímulo uniforme la interacción espacial entre receptores adyacentes es nula, ya que todos están recibiendo la misma información. Al presentar un estímulo de la forma $[\mathbf{x} // \mathbf{b}]$, aparecerá una interacción entre aquellos receptores que codifican \mathbf{x} y aquellos que codifican \mathbf{b} . La inducción cromática surge como efecto de esta interacción. Sin embargo, en el espacio \mathcal{P} , podemos considerar a estos dos perceptos como dos puntos que interactúan. Tal como ocurre en la fuerza gravitatoria o en la electroestática,

⁴ $I(X, Y) = H(Y) - H(Y|X)$. Si $Y = f(X)$, entonces $H(Y|X) = 0$.

al ser el espacio isotropo y homogéneo, la interacción entre partículas depende únicamente de su distancia. En la Fig. 2.7, se representa esta situación.

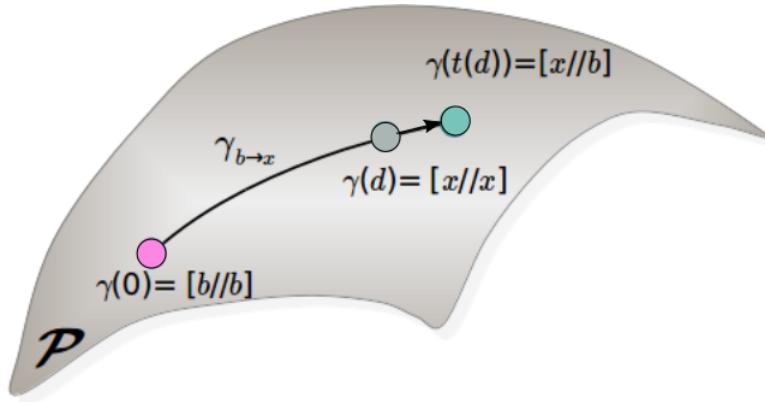


Figura 2.7: Radialidad de la inducción cromática en el espacio \mathcal{P} . Cada punto en ese espacio representa un perceptor. El entorno magenta induce un color cyan sobre un estímulo gris.

Extendiendo nuevamente la analogía con la física, sabemos que un modo práctico de representar interacciones es a través del concepto de *campo*. Esto significa que dado un entorno b , podemos interpretar a la inducción cromática como un campo generado por b , que desplaza a cada estímulo x a una nueva posición $\Phi_b(x)$. Para cada punto, podemos pensar entonces en la flecha que va de $x \mapsto \Phi_b(x)$. En este esquema, el entorno funciona como la *fuente* de la inducción cromática y el estímulo es la *carga de prueba* sobre la que este campo actúa. Bajo las hipótesis de homogeneidad e isotropía, el campo repulsivo generado por la cromaticidad b es un campo radial con centro en b , en cada punto el módulo del campo viene dado por $t(d) - d$, con $d = d(x, b)$. En la Fig. 2.8, se representa este campo en el espacio de colores para distintas formas de la función $t(d)$.

2.5.3. Implicaciones del modelo

Relación entre el protocolo I y los representantes uniformes

Hasta aquí hemos descrito, en base a argumentos teóricos y empíricos, los principios de homogeneidad e isotropía en la inducción cromática. En esta sección, explicaremos de qué forma pueden evidenciarse experimentalmente estas hipótesis.

Comenzaremos con las implicaciones que tiene sobre experimentos de discriminación de un estímulo respecto de su fondo, como fue descrito en la Sección 2.4.1. En ese caso, vimos que la cantidad relevante a calcular es

$$d([x // x], [x + \varepsilon_I // x]),$$

en el caso en que ε_I es una cantidad pequeña. Por la definición de la función $t(d)$, tenemos

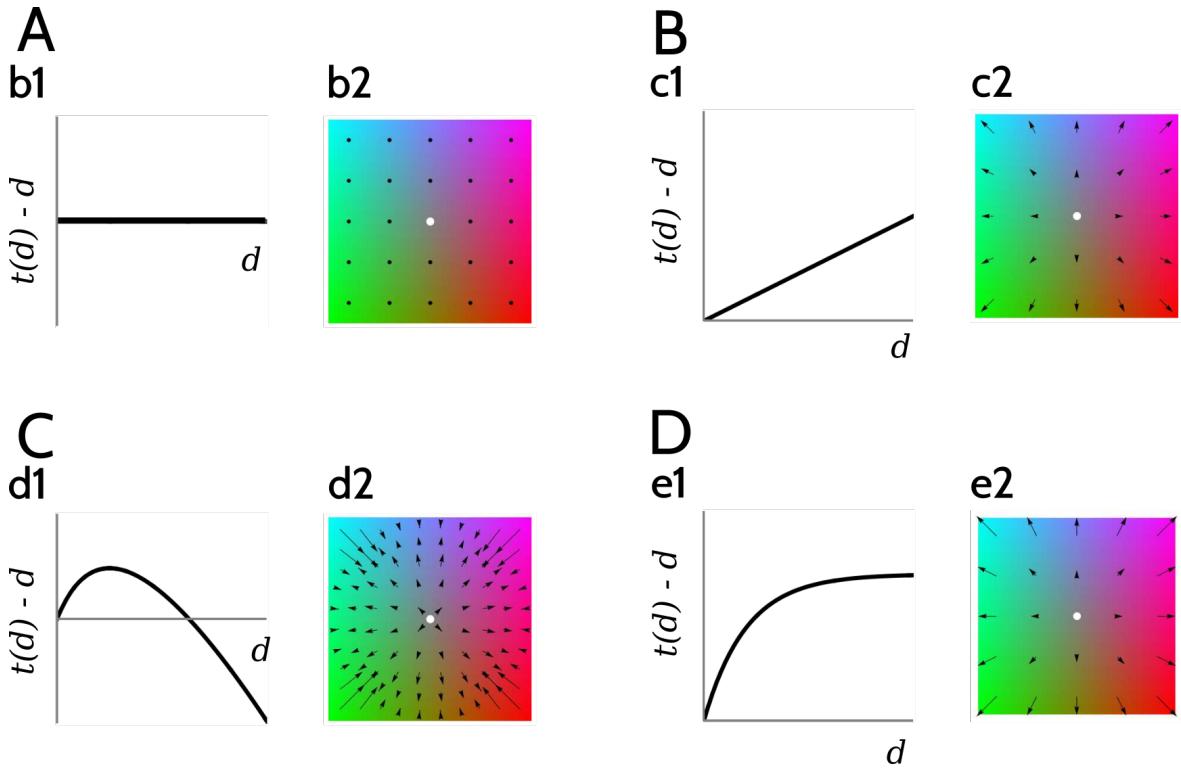


Figura 2.8: Inducción cromática vista como un campo radial. A-D: Cuatro ejemplos distintos del desplazamiento $t(d) - d$, correspondiente a las clases de equivalencia de la Fig. 2.4. En el subpanel 1 se grafica la forma funcional de $t(d) - d$ y en el subpanel 2 el campo de desplazamientos sobre el plano cromático isoluminiscente. (A): No hay interacción entre el entorno y el estímulo, por lo que $t(d) = d$ y el campo vectorial es nulo en todo el espacio. (B): $t(d) - d \propto d$, el campo vectorial es lineal. (C): $t(d) \propto \ln(1 + d/\lambda)$, para una distancia característica λ . El efecto del entorno es inicialmente repulsivo, se anula para $d = \lambda$ y luego se vuelve atractivo. (D): $t(d) - d \propto [1 - \exp(-d/\lambda)]$, por lo que el desplazamiento es siempre repulsivo y luego tiende a una constante para valores grandes.

que

$$d([\mathbf{x} // \mathbf{x}], [\mathbf{x} + \varepsilon_I // \mathbf{x}]) = t(d(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \varepsilon_I)). \quad (2.19)$$

Como ε_I es pequeño, podemos desarrollar la función t alrededor de $d = 0$, y como sabemos que $t(0) = 0$, obtenemos que

$$d([\mathbf{x} // \mathbf{x}], [\mathbf{x} + \varepsilon_I // \mathbf{x}]) \approx t'(0)d(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \varepsilon_I). \quad (2.20)$$

Esta relación nos dice que la distancia entre los estímulos x y $x + \varepsilon_I$ presentados en el entorno x es proporcional a la distancia entre los correspondientes representantes uniformes. Debido a la isotropía, esta proporcionalidad es independiente de la dirección. Dado que para desplazamientos infinitesimales, la función distancia satisface $d \propto \sqrt{J}$, los tensores métricos deberán satisfacer:

$$J^I = (t'(0))^2 J. \quad (2.21)$$

Esta ecuación es sumamente útil desde el punto de vista experimental, ya que como se discu-

tió en la sección 2.4.1, es difícil imaginar un protocolo para medir distancias entre representantes uniformes pues en los experimentos de discriminación es necesario que el observador distinga entre dos o más estímulos. Sin embargo, la Ec. 2.21 nos dice que si medimos el tensor métrico asociado al esquema experimental I, entonces el mismo resulta proporcional al tensor métrico en el espacio de perceptos uniformes. De aquí que, midiendo los umbrales de discriminación en el protocolo I, se obtiene el tensor métrico del espacio de perceptos a menos de una constante multiplicativa.

Discriminación a lo largo de geodésicas

La radialidad de la inducción cromática implica que la transformación Φ_b mapea a las geodésicas que pasan por b en ellas mismas, es decir, si γ_b es una geodésica –máximamente extendida– que pasa por b , entonces $\Phi_b(\gamma_b) \subseteq \gamma_b$. Veremos que a lo largo de geodésicas es posible establecer una relación sencilla entre el cambio en los umbrales diferenciales y la inducción cromática.

Consideremos el caso en que x , $x + \varepsilon_{II}$ y b yacen sobre una dada geodésica orientada de modo tal que el desplazamiento ε_{II} es en la dirección de crecimiento de la geodésica. Por intermediación y usando la definición de t , obtenemos que:

$$\begin{aligned} d([x + \varepsilon_{II} // b], [x // b],) &= d([x + \varepsilon_{II} // b], [b // b]) - d([x // b], [b // b]) \\ &= t(d(x + \varepsilon_{II}, b)) - t(d(x, b)). \end{aligned}$$

Nuevamente, en el caso en que ε_{II} es pequeño, podemos hacer un desarrollo de Taylor, de donde obtenemos que

$$\begin{aligned} d([x // b], [x + \varepsilon_{II} // b]) &\approx t'(d(x, b)) (d(x + \varepsilon_{II}, b) - d(x, b)) \\ &= t'(d(x, b)) d(x, x + \varepsilon_{II}). \end{aligned} \tag{2.22}$$

Si tomamos $b = x$, reobtenemos la ecuación 2.20. Por definición, sabemos que $d([x // b], [x + \varepsilon_{II} // b]) = 1$. Aproximando la distancia y combinando los resultados de ambos protocolos, tenemos que:

$$\begin{aligned} 1 &= t'(0)d(x, x + \varepsilon_I) \approx t'(0)\sqrt{J_\gamma(x)}\varepsilon_I^\gamma(x) \\ 1 &= t'(d(x, b))d(x, x + \varepsilon_{II}) \approx t'(d(x, b))\sqrt{J_\gamma(x)}\varepsilon_{II}^\gamma(x, b), \end{aligned}$$

donde el índice γ implica que el desplazamiento es a lo largo de la geodésica⁵ y la cantidad J^γ es el tensor métrico proyectado sobre la misma. Tomando el cociente entre las dos

⁵La geodésica puede estar parametrizada mediante una coordenada arbitraria, tanto J^γ como los desplazamientos ε^γ están expresados en esa dada coordenada.

expresiones llegamos a que

$$\frac{\varepsilon_{II}^\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{b})}{\varepsilon_I^\gamma(\mathbf{x})} = \frac{t'(0)}{t'(d(\mathbf{x}, \mathbf{b}))}. \quad (2.23)$$

Esta ecuación relaciona tres cantidades que pueden ser medidas independientemente: los umbrales en los protocolos I y II, y la derivada de la inducción cromática. Por lo tanto, esta ecuación no depende de un modelo específico para la forma funcional de la métrica ni de la inducción, sino que establece una relación estricta entre los resultados de distintos experimentos. Adicionalmente, incluso en el caso en que la función t no haya sido medida, esta ecuación nos indica cómo se manifiestan las hipótesis de isotropía y homogeneidad a nivel de los umbrales. Los umbrales transforman de modo no trivial ante cambios de coordenadas⁶ por lo que no resulta obvio cómo se manifiestan estas simetrías en un sistema arbitrario de coordenadas. Sin embargo, como puede verse de la ecuación 2.23 el cociente $\frac{\varepsilon_{II}^\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{b})}{\varepsilon_I^\gamma(\mathbf{x})}$ es independiente de la elección de coordenadas – ya que cada umbral transforma siendo multiplicado por el mismo factor, el cociente resulta invariante – y está igualado a una cantidad que es claramente independiente de las coordenadas. Más aún, debido a que el término de recho de la ecuación depende únicamente de $d(\mathbf{x}, \mathbf{b})$, lo mismo ocurre para el cociente de umbrales: sólo dependerá de la distancia perceptual entre estímulo y entorno. Esto significa que no importa en qué entorno específico \mathbf{b} se haya realizado el protocolo II ni tampoco cuál es la orientación de la geodésica, el cociente de umbrales tendrá la misma forma. En el capítulo 3, veremos que nuestros experimentos dan evidencia de esta simetría.

Coordenadas perceptuales a lo largo de geodésicas

Mediante un protocolo tipo I, los resultados de Krauskopff y Gegenfurtner [10] indican que, en las coordenadas cromáticas del espacio DKL (ver sección 1.8.5), $L - M$ y S , los términos no-diagonales de $J^I(\mathbf{x})$ se anulan. En este caso, alcanza con medir los umbrales solo a lo largo de los ejes cromáticos principales: $L - M$ y S . Más aún, debido a la independencia de cada eje, los mismos resultan corresponderse con geodésicas del espacio cromático. Esto se discutirá con más detalle en el capítulo 4. Las distancias infinitesimales en ese caso son

$$\begin{aligned} d\ell_i &= d(\mathbf{x}, \mathbf{x} + dx_i \mathbf{e}^i) \\ &= \sqrt{J_{ii}(\mathbf{x}) (dx_i)^2} \\ &= \frac{|dx_i|}{\varepsilon(\mathbf{e}^i)}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

donde el subíndice i indica la coordenada $x_1 = L - M$ o la coordenada $x_2 = S$. La distancia entre dos colores \mathbf{x}^a y \mathbf{x}^b que yacen sobre el mismo eje cromático i se calcula por integración

⁶Ante el cambio de coordenadas $x_i \rightarrow x'_i$, los umbrales transforman como diferenciales, es decir $\epsilon_i \rightarrow \epsilon'_i = \sum_j \epsilon_j \frac{\partial x'_i}{\partial x_j}$

directa

$$\begin{aligned} d(\mathbf{x}^a, \mathbf{x}^b) &= \int_{\mathbf{x}^a}^{\mathbf{x}^b} d\ell \\ &= \int_{\mathbf{x}^a}^{\mathbf{x}^b} \sqrt{J_{ii}(\mathbf{x})} |dx_i| \end{aligned} \quad (2.25)$$

Si $J^I(\mathbf{x})$ es diagonal, y además, el término $J_{ii}^I(\mathbf{x})$ solo depende del componente x_i (verificado por [10]), el espacio de colores tiene curvatura cero. En este caso, existe una transformación de coordenadas $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^I$, donde x^I son las coordenadas perceptuales asociadas a J^I , de modo que la métrica transformada es euclíadiana. En los espacios euclidianos, todas las geodésicas son líneas rectas, lo que simplifica enormemente el cambio de percepción producido por los alrededores, como se explica a continuación. En las nuevas coordenadas, la capacidad de discriminación es uniforme, es decir, todas las elipses de discriminación se convierten en círculos y todos los círculos tienen el mismo tamaño. Estas son las coordenadas que revelan de forma más natural las habilidades perceptuales del sujeto. Es fácil probar que la función que genera la transformación a las coordenadas perceptuales es

$$\begin{aligned} x_1^I(\mathbf{x}) &= d^I [(x_1^0, x_2^0)^t, (x_1, x_2^0)^t] \\ &= \int_{x_1^0}^{x_1} \sqrt{J^I(y_1, x_2^0)} dy_1, \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} x_2^I(\mathbf{x}) &= d^I [(x_1^0, x_2^0)^t, (x_1^0, x_2)^t] \\ &= \int_{x_2^0}^{x_2} \sqrt{J^I(x_1^0, y_2)} dy_2, \end{aligned} \quad (2.27)$$

donde $d^I(\mathbf{x}^p, \mathbf{x}^q)$ es la distancia entre colores \mathbf{x}^p y \mathbf{x}^q , y \mathbf{x}^0 es el origen del nuevo sistema de coordenadas $\mathbf{x}'(\mathbf{x}^0) = \mathbf{0}$ y puede ser elegido arbitrariamente.

2.5.4. Geometría euclídea

Los espacios riemannianos máximamente simétricos – es decir, isótropos y homogéneos – están caracterizados por el escalar de curvatura $R = \sum_{i,j} R^{ij}_{ij}$, el cual es constante en todo el espacio [64]. Se clasifican en tres tipos: euclídeo ($R = 0$), esférico ($R > 0$) o hiperbólico ($R < 0$). La geometría en estos espacios difiere respecto del quinto postulado de Euclides, a saber: que la distancia entre dos rectas paralelas se mantiene constante. Como su nombre lo indica, este postulado se satisface en la geometría euclídea. Sin embargo, en un espacio esférico las geodésicas paralelas se acercan – como ocurre con los meridianos terrestres cuando nos movemos hacia los polos –, mientras que en el espacio hiperbólico las geodésicas se alejan.

Qué tipo de geometría posee el espacio de colores es una pregunta que debe responderse empíricamente. Veremos en los capítulos siguientes que hay diversa evidencia que muestra

que la geometría es compatible con la euclídea, por lo menos dentro del rango de medición de dichos experimentos. Por esta razón, y debido a su mayor simplicidad, describiremos qué forma toman los resultados de las secciones anteriores en el caso $R = 0$.

Como se describió en la Secc. 2.3, si la geometría es euclídea entonces las coordenadas perceptuales son equivalentes a las coordenadas cartesianas, de forma tal que la distancia diferencial en el plano isoluminiscente adopta la forma usual:

$$d^2(\mathbf{x}, \mathbf{x} + d\mathbf{x}) = dx_1^2 + dx_2^2.$$

Es decir, que el tensor métrico es sencillamente $J_{ij} = \delta_{ij}$. Esto implica que en estas coordenadas todas las elipses de discriminación medidas en el protocolo I son circunferencias de radio 1. Además, la distancia entre dos elementos cualquiera se reduce a la norma euclídea de la diferencia, es decir:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \quad (2.28)$$

En estas coordenadas la función de inducción cromática adopta también una forma mucho más sencilla. Recordemos que la expresión a la que llegamos era

$$\Phi_b(\mathbf{x}) = \gamma_{b \rightarrow \mathbf{x}}(t(d(\mathbf{x}, \mathbf{b}))), \quad (2.29)$$

donde $\gamma_{b \rightarrow \mathbf{x}}$ es la geodésica que une a \mathbf{b} y a \mathbf{x} . En la geometría euclídea, las geodésicas son líneas rectas, cuya expresión en coordenadas cartesianas nos dice que:

$$\Phi_b(x)_i = b_i + t(\|\mathbf{x} - \mathbf{b}\|)\hat{u}_i = x_i + [t(\|\mathbf{x} - \mathbf{b}\|) - \|\mathbf{x} - \mathbf{b}\|]\hat{u}_i$$

donde $\hat{u} = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{b}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{b}\|}$ es el versor en la dirección $\mathbf{b} \rightarrow \mathbf{x}$. Ambas expresiones son equivalentes, solo difieren en si \mathbf{x} o \mathbf{b} es tomado como punto de paso en la parametrización de la recta.

Para simplificar aún más la notación, notemos que debido a la homogeneidad del espacio, la métrica es invariante ante traslaciones rígidas. Por lo tanto, podemos elegir arbitrariamente el origen de las coordenadas perceptuales. Teniendo en mente los experimentos que se realizan con la cromaticidad del entorno fija, pondremos el origen de coordenadas en dicho entorno, de tal forma que en ese sistema $b = (0, 0)$. En ese caso, la función de inducción cromática es

$$\Phi_0(x)_i = \frac{t(r)}{r}x_i \quad (2.30)$$

donde $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ es la distancia al origen. Esto nos sugiere que podemos expresar la transformación más sencillamente en coordenadas polares, ya que en ese caso la coordenada angular θ no se modifica, y la transformación se escribe como $r \mapsto t(r)$. En coordenadas

polares, la métrica euclídea adquiere la forma

$$d\ell^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2. \quad (2.31)$$

Como se discutió en la sección 2.1, la inducción cromática funciona como un difeomorfismo en el espacio de perceptos y por lo tanto el tensor métrico transforma acorde a la regla usual. Eso significa, que simplemente debemos hacer la transformación $r \mapsto t(r)$ para obtener la métrica correspondiente a la discriminación de estímulos en el fondo $b = 0$, lo cual nos da como resultado:

$$d\ell_b^2 := d^2([\mathbf{x} // \mathbf{b}], [\mathbf{x} + d\mathbf{x} // \mathbf{b}]) = t'(r)^2 dr^2 + t(r)^2 d\theta^2 \quad (2.32)$$

Esto implica que las elipses de discriminación en las coordenadas perceptuales tendrán sus ejes principales a lo largo de la dirección radial y de la dirección angular. Para ver esto explícitamente, utilizando que $r^2 d\theta^2 = (dx_1^2 + dx_2^2) - dr^2$, podemos reescribir:

$$d\ell_b^2 = \frac{t^2(r)}{r^2} (dx_1^2 + dx_2^2) + \left(t'(r)^2 - \frac{t^2(r)}{r^2} \right) dr^2 \quad (2.33)$$

Esto nos muestra de modo un poco más claro el efecto que tiene la inducción en las elipses de discriminación en el protocolo II. El primer término corresponde a un reescalamiento de las distancias que es independiente de la dirección, eso es lo que se conoce como una transformación conforme. El hecho de que la inducción cromática es repulsiva implica que $t(r) > r$, por lo tanto el factor de reescalamiento $t(r)/r > 1$, lo que significa que las distancias aumentan y por lo tanto los umbrales se hacen más pequeños. Por otro lado, el segundo término induce una modificación adicional de las distancias en la dirección radial. Esto produce que los umbrales de discriminación conformen una elipse genuina, pues el semieje en la dirección radial será diferente. Cómo se verá más adelante, las elipses están de hecho alargadas en la dirección radial, lo cual implica que $t'(r) < t(r)/r$. En la figura 2.9, se representan las elipses en tres situaciones distintas.

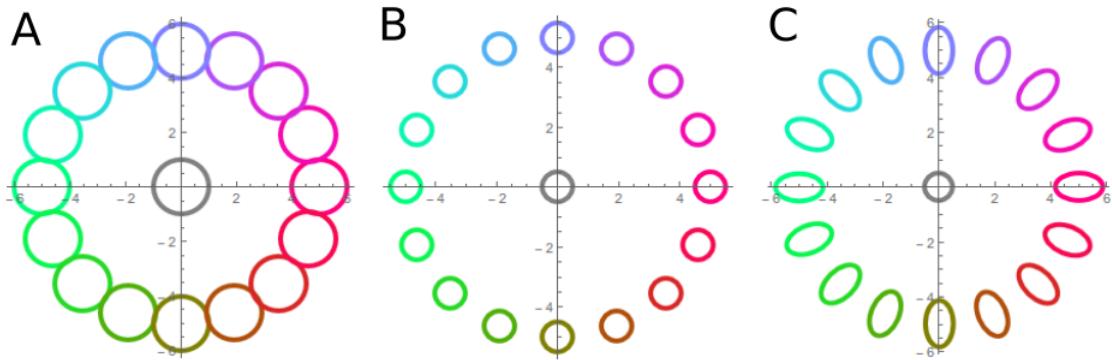


Figura 2.9: Elipses de discriminación en coordenadas perceptuales para la geometría euclídea en distintas condiciones. Las mismas son descritas por la ecuación $\sum_{i,j} g_{ij} \epsilon_i \epsilon_j = 1$, donde (A) $g_{ij} = J_{ij}$ es el tensor métrico entre perceptos uniformes, (B) $g_{ij} = J_{ij}^I = t'(0) J_{ij}$ es el tensor métrico efectivo del protocolo I y (C) $g_{ij} = J_{ij}^{b=0}$ es el tensor métrico del protocolo II.

2.6. Discusión

En este capítulo construimos un modelo del espacio de colores en base a dos propiedades: una geometría riemanniana asociada a la similitud perceptual entre colores y una función que caracteriza la influencia del entorno en la percepción de un estímulo. Nuestro trabajo parte del marco conceptual introducido por primera vez por Resnikoff [8] y recientemente revisado por Provenzi [9], en el que el color se entiende como una propiedad de clases de equivalencia en el espacio de pares estímulo-entorno. A diferencia de estos autores, nosotros no supusimos que el efecto del entorno es lineal. Nuestro punto de partida fue la suposición de que, lejos de los límites del espacio de color, el efecto perceptual del entorno sobre un estímulo dado está regido por una ley universal. Aquí, “universal” significa que la inducción cromática adquiere una forma simple al escribirse en términos de la distancia perceptual $d([\mathbf{x}_1 // \mathbf{b}_1], [\mathbf{x}_2 // \mathbf{b}_2])$, a saber:

$$\Phi_b(\mathbf{x}) = \gamma_{b \rightarrow \mathbf{x}}(t(d(\mathbf{x}, \mathbf{b}))), \quad (2.34)$$

donde $\gamma_{b \rightarrow \mathbf{x}}$ es la geodésica que conecta \mathbf{b} y \mathbf{x} y t alguna función que aún necesitamos especificar. La ecuación 2.34 es una suposición fuerte. Si no se asumen simetrías, $\Phi_b(\mathbf{x})$ puede ser cualquier transformación $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Una vez que se impone la Ec. 2.34, la caracterización de $\Phi_b(\mathbf{x})$ se reduce a determinar la función $t : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, que es un objeto mucho más simple. Luego, mostramos de qué manera se pueden obtener estas cantidades mediante distintos protocolos experimentales. En particular, obtuvimos una ecuación que permite relacionar los resultados de tres experimentos distintos sin necesidad de especificar detalles del modelo (ver Ec. 2.23). Si, además, la distancia postulada deriva de un tensor métrico con curvatura cero, entonces existe un sistema de coordenadas, aquí llamado *coordenadas perceptuales*, en el que la distancia perceptual es euclíadiana.

Capítulo 3

En busca de las simetrías: una serie de experimentos perceptuales

“We must admit with humility that, while number is purely a product of our minds, space has a reality outside our minds, so that we cannot completely prescribe its properties a priori.”

— Karl Friedrich Gauss, Carta a Bessel (1830).

3.1. Introducción

En el capítulo anterior, propusimos la hipótesis de que el espacio de colores tiene una geometría riemanniana, cuyas propiedades pueden caracterizarse y verificarse experimentalmente. Esta geometría, en conjunción con la estructura de clase de equivalencias que surge de la identificación de colores percibidos en distintos entornos, impone vínculos entre resultados de distintos experimentos. Más aún, mostramos que la existencia de simetrías en dicho espacio reduce drásticamente los grados de libertad necesarios para describir su fenomenología. Por este motivo, en este capítulo describimos los resultados de una serie de experimentos que nos permiten poner a prueba nuestras hipótesis. En trabajos previos, los experimentos se restringieron ya sea a tareas de discriminación [10, 65, 66], o tareas de matcheo asimétrico [13, 62, 67], lo cual dificulta establecer de modo directo la vinculación entre ambos tipos de experimentos. Aquí analizamos ambas tareas, lo que nos permitió explorar de manera directa dicha relación.

En primer lugar, realizamos un experimento de discriminación cromática tipo I, es decir, medimos la capacidad de detectar un estímulo con cromaticidad similar a la de su entorno, y utilizamos los resultados para caracterizar la geometría perceptual de cada sujeto calculando las coordenadas perceptuales individuales. Este primer experimento funciona como un método para calibrar los demás e independizarse de la elección inicial de coordenadas cromáticas.

En segundo lugar, realizamos un experimento de discriminación tipo II, en el cual se discrimina entre estímulos presentados en un entorno de color distinto al de los estímulos. Los resultados muestran que los umbrales de discriminación aumentan proporcionalmente con la distancia perceptual entre estímulo y fondo, revelándose esta ley sólo al calcular la distancia utilizando los resultados del experimento I. Esta misma ley se observa independientemente del entorno específico o de la dirección del umbral de discriminación, lo cual apoya las hipótesis de isotropía y homogeneidad discutidas en el capítulo anterior. Finalmente, el tercer experimento fue de matcheo asimétrico, mediante el cual caracterizamos la inducción cromática para cada sujeto. Se observa en los datos que la inducción adquiere un carácter isotrópico y homogéneo al ser descrita en las coordenadas perceptuales. Adicionalmente, la función que describe la ley del experimento II es la misma que describe la inducción del experimento III, mostrando de este modo la universalidad de nuestro modelo.

Todos los experimentos los llevamos a cabo en el laboratorio de psicofísica del Bernstein Center for Computational Neuroscience en la Universidad Ludwig-Maximilian München, Alemania, con la colaboración del Prof.Dr.Thomas Wachtler.

3.2. Métodos

3.2.1. Estímulos

Los estímulos fueron presentados en un monitor de rayos catódicos (CRT) de 21 pulgadas, modelo Sony GDM F520, controlado mediante una placa gráfica de 8-bit ATI Radeon HD 4200. La resolución espacial era de 1280×1024 píxeles y la frecuencia de actualización era de 85 Hz. La pantalla fue calibrada utilizando un espectro-radiómetro PhotoResearch (Chatsworth, CA) PR-655 controlado por el software IRIS ([67]). La actividad de los fotorreceptores (\bar{L} , \bar{M} , \bar{S}) de un dado estímulo fue obtenida mediante el filtrado lineal del espectro del estímulo utilizando las curvas cone fundamentales [50]. Para definir la escala relativa de los tres canales, elegimos un gris neutral como referencia (luminancia = 105 cd/m^2 , CIE $[x, y] = [0,328, 0,328]$), con coordenadas $(\bar{L}_g, \bar{M}_g, \bar{S}_g) = (75,1, 40,9, 1,48)$. Las coordenadas de contraste de conos (o *cone-contrast*) se definen como

$$(L, M, S) = \left(\frac{\bar{L} - \bar{L}_g}{\bar{L}_g}, \frac{\bar{M} - \bar{M}_g}{\bar{M}_g}, \frac{\bar{S} - \bar{S}_g}{\bar{S}_g} \right).$$

La ventaja de estas coordenadas respecto a las anteriores es que son invariantes bajo el reescalamiento de las curvas cone-fundamentales pues corresponden a una escala relativa al color de referencia. Todas las mediciones fueron realizadas a lo largo de los ejes cardinales cromáticos (Fig. 3.1C): el eje $L - M$, definido por la condición $L = M = 0$, y el eje $L + M$ definido por las condiciones $S = 0$ y $L + M = 0$.

La resolución cromática de cada píxel en la pantalla está limitada por la naturaleza dis-

creta de las coordenadas *RGB* de 8 bits de la representación del color en la computadora, es decir, números enteros entre 0 y 255. Variar un solo dígito en una unidad en la representación *RGB* produce un cambio cromático que los observadores pueden detectar en los estímulos que subtienden 2° del campo visual. Para producir un continuo de cromaticidades y, por lo tanto, diseñar experimentos que se acerquen continuamente a la capacidad de discriminación de los observadores, los parches se llenaron con colores texturizados, construidos como una mezcla aleatoria de píxeles coloreados con cuatro colores *RGB* de coordenadas enteras. Como los colores vecinos son indistinguibles en la resolución de píxeles individuales, los parches parecían uniformes para los sujetos.

Se puede obtener una transformación continua entre las coordenadas *LMS* y *RGB* del procedimiento de calibración. Si el estímulo deseado tiene coordenadas *RGB* no enteras, sus cuatro vecinos más cercanos con coordenadas enteras, $(RGB)^1$, $(RGB)^2$, $(RGB)^3$ y $(RGB)^4$, son utilizados para colorear los píxeles del estímulo, ordenados aleatoriamente. Las fracciones esperadas (f_1, f_2, f_3, f_4) de píxeles que aparecen con cada color son los pesos necesarios para producir el color *RGB* no entero deseado como una combinación lineal convexa, $\sum_i f_i(RGB)^i$ de los cuatro vecinos enteros. Hay un único cuarteto de pesos que logra este objetivo. Para colorear cada uno de los 102×102 píxeles que componen un parche, el índice $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ que etiqueta a cada vecino entero se eligió al azar con probabilidades (f_1, f_2, f_3, f_4) .

3.2.2. Sujetos

Siete sujetos (4 mujeres, 3 hombres), con edades de entre 22 y 32 años participaron en el experimento. Los sujetos firmaron un consentimiento escrito para participar. Tres de los sujetos conocían el propósito del estudio y fueron medidos en ambos ejes cardinales. Los otros cuatro sujetos ignoraban el propósito del experimento y fueron medidos a lo largo de único eje cardinal, *S* o *L – M*. Todos los observadores tenían visión de color normal, lo cual fue evaluado mediante el test Farnsworth-Munsell 100 Hue, y tenían agudeza visual normal o corregida a normal.

3.2.3. Procedimiento

Los experimentos fueron realizados en una habitación a oscuras. Los sujetos estaban sentados y observaban la pantalla desde una distancia de 90 cm. El tamaño de la pantalla era 40×30 cm, subtendiendo un ángulo sólido de $25^\circ \times 19^\circ$. Los sujetos fueron instruidos a fijar la vista en un punto negro mostrado en el centro de la pantalla. Cada experimento comenzó con al menos 2 minutos de adaptación a la condiciones de iluminación [68], durante los cuales los sujetos recibieron instrucciones y realizaron sesiones de prueba que no fueron incluidas en el análisis.

Experimentos I y II: Discriminación

Los experimentos I y II permiten determinar la diferencia cromática mínima necesaria para que un observador pueda identificar dos colores como diferentes. La tarea del observador era identificar la posición de aquel estímulo, entre cuatro opciones posibles, que era cromáticamente diferente a los otros tres. En el experimento I, la cromaticidad de los otros tres estímulos era igual a la del entorno, mientras que en el experimento II, todos los estímulos eran diferentes al entorno.

Cada sesión consistió de 300 pruebas, durando aproximadamente 10 minutos. A lo largo de la sesión, la cromaticidad b del fondo se mantuvo fija. Al comienzo de cada prueba, un círculo negro aparecía como punto de fijación en el centro de la pantalla. Luego de 500 ms, cuatro cuadrados de 2° aparecían por 150 ms, a una distancia de 2° entre los centros y el punto de fijación, en cada una de las cuatro direcciones cardinales. Tres de los parches estaban coloreados con un color de referencia x , mientras que el cuarto parche tenía un color levemente distinto \tilde{x} . La ubicación del parche diferente variaba de prueba en prueba aleatoriamente entre las cuatro alternativas. El observador debía reportar su posición usando las flechas del teclado. Los sujetos tenían tiempo ilimitado para responder y podían también elegir libremente en qué momento avanzar a la siguiente prueba. En cada sesión, el color de referencia x se mantuvo fijo, mientras que el color alterado \tilde{x} era elegido aleatoriamente entre 15 alternativas en torno a x , cada uno muestreada 20 veces, dando un total de 300 pruebas.

En el *Experimento I*, el color del entorno coincidía con el del color de referencia (Fig. 3.1 A), de forma tal que el observador tenía que detectar la ubicación del parche alterado en un entorno uniforme. En el *Experimento II*, el entorno b poseía una cromaticidad diferente, por lo que el observador tenía que comparar los cuatro parches y detectar el parche alterado (Fig. 3.1B). En ambos experimentos, el color del entorno fue variado sistemáticamente a lo largo de los ejes $b_1 = L - M$ y $b_2 = S$, mientras que la luminancia $L + M$ se mantuvo constante (Secc. 3.2.1). En el *Experimento I*, cada vez que se varió el entorno b , el color de referencia x se varió acorde, de manera de mantener su igualdad. Se midieron ocho cromaticidades diferentes en cada eje (valores en la Fig. 3.3). En el *Experimento II*, el color del fondo y el del estímulo de referencia fueron variados independientemente. Se usaron tres cromaticidades distintas a lo largo de cada eje para el entorno, con coordenadas $L - M = -0,03, 0, 0,03$ y $S = -0,24, 0, 0,16$, y ocho cromaticidades distintas en cada eje para los estímulos de referencia (Fig. 3.1 C).

Como los observadores seleccionaban una entre cuatro opciones, la tasa de error por azar era de 75 %. Este porcentaje disminuye a medida que aumenta la discriminabilidad. La figura 3.1 D muestra la probabilidad de error para el sujeto S2 en una dada sesión para diferentes colores alterados \tilde{x} en torno al color de referencia x . Definimos el umbral de discriminación ε como el valor de \tilde{x} para el cual la probabilidad de error es igual al punto

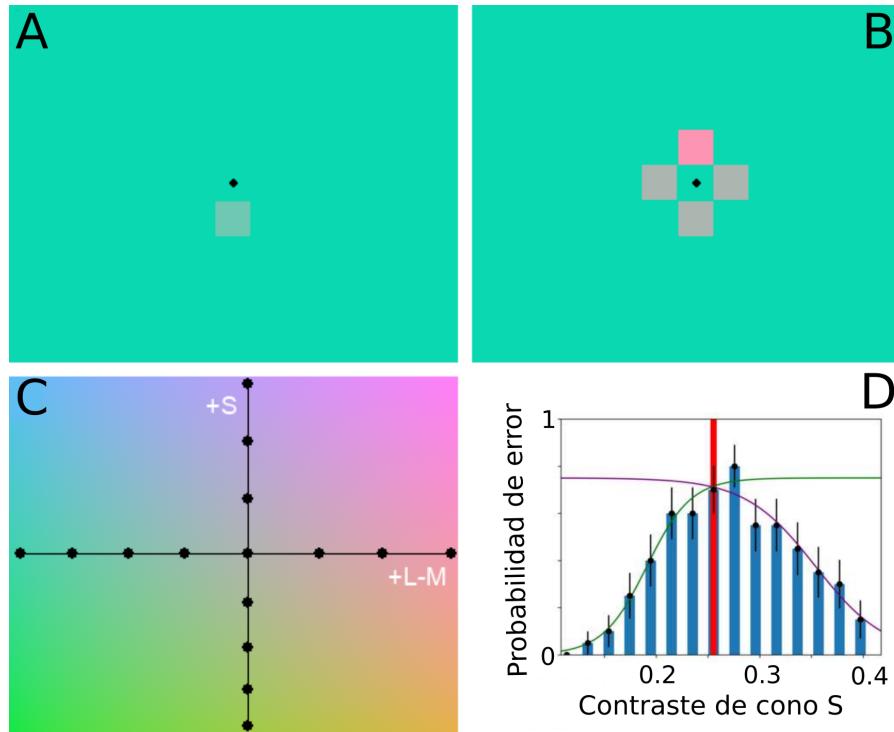


Figura 3.1: Paradigmas experimentales de los experimentos de discriminación. (A, B): Pantalla presentada en los experimentos de discriminación, realizadas con cromaticidad del entorno b igual a (A) o diferente (B) del color de referencia x . C: Ubicación de los ocho colores de referencia (círculos negros) en el espacio de colores. La intersección de los ejes corresponde al color con el que definimos las coordenadas de contraste de cono. D: Probabilidad de error (barras azules) del sujeto S2 en una sesión de $N = 20$ ensayos por cada estímulo de referencia, en función del contraste de cono $S = \tilde{x}_2$ del estímulo alterado, para un estímulo de referencia fijo x_2 (barra roja). Se espera que las respuestas aleatorias produzcan un 75 % de identificaciones incorrectas. A medida que aumenta la diferencia $|\tilde{x}_2 - x_2|$ entre el parche alterado y los otros tres parches, la probabilidad de error disminuye. Las barras de error denotan los errores estándar para las distribuciones binomiales correspondientes. Los parámetros ajustados de la ecuación 3.1 son $a_\ell = 0,043 \pm 0,004$, $c_\ell = 0,191 \pm 0,003$, $a_r = 0,07 \pm 0,01$, $c_r = 0,354 \pm 0,006$.

medio entre puro azar y desempeño perfecto, i.e. cuando la probabilidad de error es 37,5 %. Los umbrales pueden ser distintos para incrementos o decrementos de la actividad de los conos [56], lo cual implica que el gráfico de barras de la Fig. 3.1 D no es necesariamente simétrico alrededor del máximo. Para tener esta simetría en cuenta, los umbrales del lado izquierdo (ℓ) y del lado derecho (r) fueron estimados separadamente, ajustando funciones sigmoidales a los datos para cada lado del color testeado. Las funciones ajustadas fueron:

$$P_{\ell,r}(\tilde{x}) = 0,375 [1 \pm \tanh(a_{\ell,r}(\tilde{x} - c_{\ell,r}))], \quad (3.1)$$

con los parámetros a_ℓ y c_ℓ o a_r y c_r para los lados izquierdo y derecho, respectivamente. Los umbrales izquierdo (decreciente) y derecho (creciente) del color de referencia x fueron definidos como $\varepsilon_{\ell,r} = |c_{\ell,r} - x|$, y el umbral medio, como $\varepsilon = (\varepsilon_\ell + \varepsilon_r)/2$.

Experimento 3: matcheo asimétrico

Para medir la inducción cromática a lo largo de los ejes cardinales, realizamos el Experimento III, el cual involucra una tarea de matcheo asimétrico. En estos experimentos, el estímulo de referencia y el estímulo a matchear son presentados en entornos de diferentes cromaticidades. En experimentos de matcheo clásicos [6, 69–71], los sujetos realizan el ajuste del estímulo a matchear sin ningún tipo de restricción temporal o de fijación. Para controlar estos factores, y trabajar en condiciones similares a las de los experimentos de discriminación, utilizamos un paradigma de elección forzada. En cada prueba, se le presentó al sujeto dos parches candidatos en una mitad de la pantalla sobre un fondo b^β , y se le instruyó que eligiera aquel que percibiera como más parecido al parche de referencia presentado en la otra mitad de la pantalla, rodeado por un fondo de color b^α (Fig. 3.2A). El lado de la pantalla ocupado por el parche objetivo fue aleatorizado en cada prueba. Para cada combinación de estímulos de referencia x^α y entorno b^α , aquí denotado $x^\alpha // b^\alpha$, el objetivo fue determinar el estímulo x^β que matchea en el entorno b^β . En otras palabras, buscamos por el color x^β que satisfacía la igualdad perceptual $x^\beta // b^\beta \sim x^\alpha // b^\alpha$. Aquí, el símbolo “ \sim ” significa que el estímulo x^α rodeado del entorno b^α se percibe como el mismo color que el estímulo x^β rodeado por b^β . La elección de x^β fue realizada mediante un procedimiento escalonado (Secc. 3.2.3).

Tres pares de entornos fueron usados en cada eje. Dos de los pares combinaban el gris neutral de referencia correspondiente al origen del espacio cromático con el máximo y mínimo valor de la coordenada $x_i = S, L - M$ obtenible con el monitor a lo largo de cada eje. La coordenadas de contraste de conos de estos entornos con respecto al gris neutral eran $S_{\min} = -0,35$, $S_{\max} = 0,25$ para el eje S , y $L - M_{\min} = -0,20$, $L - M_{\max} = 0,15$ para el eje $L - M$. El tercer par no incluía al gris, y contenía los otros dos entornos del Experimento II que eran colores insaturados en las direcciones cardinales. Sus coordenadas de contraste de conos con respecto al gris neutral eran $S = -0,24$ y $S = 0,16$ para el eje S , $L - M = -0,03$ y $L - M = 0,03$ para el eje $L - M$. Los primeros dos pares fueron útiles para evaluar el desplazamiento producido por colores lo más saturados posibles, y para medir la estructura de la inducción cuando la distancia entre el fondo coloreado y el neutral era grande. El tercer par fue seleccionado para conectar los resultados del Experimento III con aquellos del Experimento II, y evaluar el comportamiento del desplazamiento para entornos poco saturados.

Los sujetos iniciaban cada prueba mediante el teclado. Al comienzo de cada presentación, ambos entornos eran mostrados por 200 ms, junto con un círculo negro en el centro de la pantalla que funcionaba como punto de fijación. Luego, un parche de cromaticidad x^α se presentaba sobre el fondo b^α , y dos parches de colores x^p y x^q aparecían sobre el fondo b^β , uno encima del otro – cuál aparecía arriba y cuál abajo fue aleatorizado – por 500 ms. Todos los parches subtendían un ángulo de 2°. Posterior a la presentación de los estímulos,

se mostraba una máscara por 500 ms, la cual consistía de una serie de parches cuadrados cuyo tamaño y localización era aleatoria y con una distribución cromática balanceada a lo largo del eje correspondiente, lo cual permite reducir las imágenes remanentes (*afterimage*) [72]. Finalmente, se mostraba el fondo gris – de modo de mantener el estado de adaptación del ojo – y el sujeto debía responder si el parche superior o el inferior (\mathbf{x}^p o \mathbf{x}^q) era el más similar a \mathbf{x}^α mediante la tecla correspondiente el teclado.

Procedimiento escalonado

El Experimento III fue estructurado en secuencias, cada secuencia definida como 6 pruebas consecutivas (ver Fig. 3.2 B). En cada prueba, dos parches con colores \mathbf{x}^p y \mathbf{x}^q aparecían en el entorno \mathbf{b}^β . La tarea del sujeto era seleccionar el parche que aparecía como el más similar al objetivo \mathbf{x}^α , presentado en el entorno \mathbf{b}^α . Las dos opciones \mathbf{x}^p y \mathbf{x}^q constituyán estimaciones de una cota superior y una inferior para el color matcheado \mathbf{x}^β , y eran actualizadas progresivamente a lo largo de las pruebas utilizando la respuesta del sujeto, formando de este modo una sucesión. En la primer prueba de la sucesión \mathbf{x}_1^p y \mathbf{x}_1^q tomaban los valores máximos y mínimos permitidos por el monitor en el eje correspondiente. Por ejemplo, a lo largo del eje S , \mathbf{x}_1^p era inicialmente un púrpura máximamente saturado y \mathbf{x}_1^q un amarillo verdoso. En la prueba i -ésima, el sujeto debía decidir si $\mathbf{x}_i^p \parallel \mathbf{b}^\beta$ o $\mathbf{x}_i^q \parallel \mathbf{b}^\beta$ era percibido como más similar a $\mathbf{x}^\alpha \parallel \mathbf{b}^\alpha$. En la prueba $i + 1$, la cota no seleccionada en el paso i era actualizada como el punto medio entre las dos opciones previas, es decir:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{i+1}^p &= \mathbf{x}_i^p - (1 - z_i) \frac{\mathbf{x}_i^p - \mathbf{x}_i^q}{2} \\ \mathbf{x}_{i+1}^q &= \mathbf{x}_i^q + z_i \frac{\mathbf{x}_i^p - \mathbf{x}_i^q}{2}\end{aligned}$$

donde $z_i = 0$ si el sujeto seleccionó \mathbf{x}_i^p y $z_i = 1$ de otro modo. Ambas sucesiones \mathbf{x}_i^p y \mathbf{x}_i^q son acotadas y monótonas, y su distancia decrece exponencialmente, por lo que ambas convergen al mismo valor \mathbf{x}^β . Estimamos este valor como $(\mathbf{x}_6^p + \mathbf{x}_6^q)/2$, y lo interpretamos como el valor tal que $\mathbf{x}^\beta \parallel \mathbf{b}^\beta \sim \mathbf{x}^\alpha \parallel \mathbf{b}^\alpha$. Verificamos que luego de 6 pasos, las dos cotas eran indistinguibles.

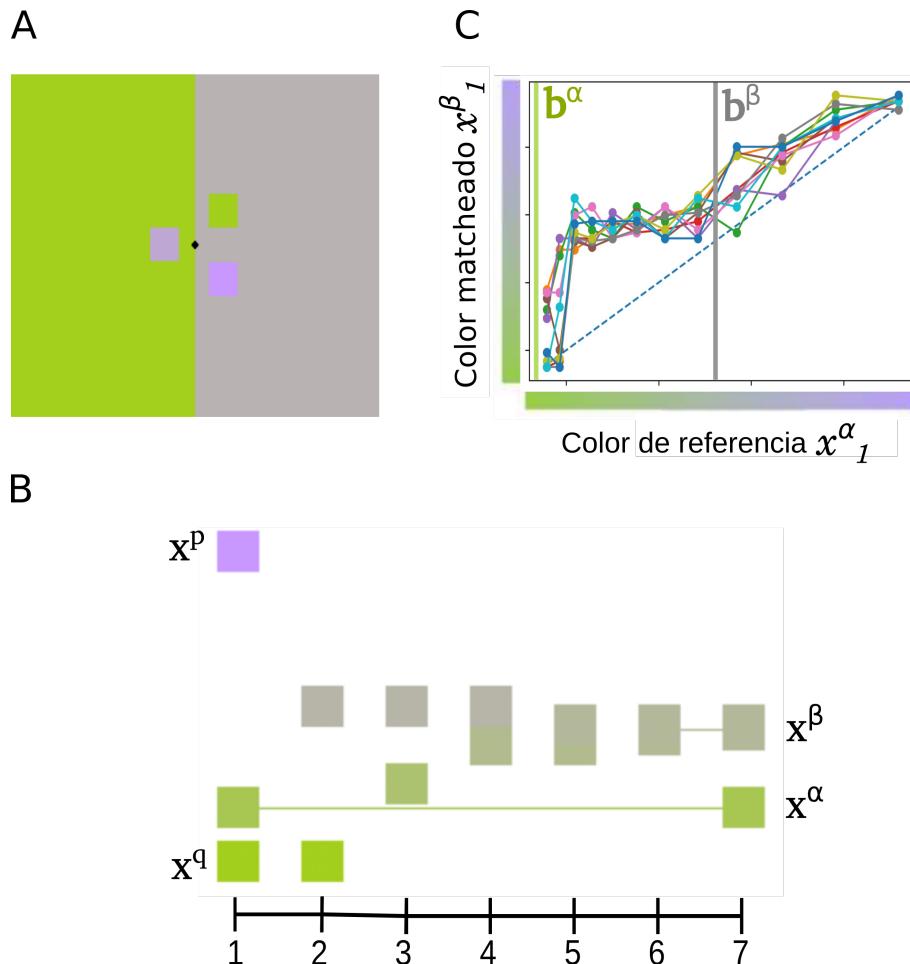


Figura 3.2: Paradigma experimental de los experimentos de matcheo asimétrico. A: En cada sesión, se presentaron dos parches x^p y x^q a la derecha, en un entorno b^β . El observador tenía que informar cuál de los parches se parecía más al estímulo de referencia x^α de la izquierda, presentado en el entorno b^α . B: Secuencia de cromaticidades x^p y x^q que aparecen en respuesta a las elecciones del sujeto. Eje horizontal: secuencia de prueba. Eje vertical: coordenada $S = x_1$ de cada parche. Línea horizontal: color objetivo x^α . La secuencia escalonada consistía de 6 pasos, después de los cuales la respuesta final x^β se calculó como el promedio de x_6^p y x_6^q . C: Cromaticidad x^β presentada en el entorno b^β (línea gris) resultante del procedimiento en B para el color de referencia x^α presentado en el entorno b^α (línea verde). Diferentes líneas representan la cromaticidad convergente obtenida en cada una de las 10 sesiones respondidas por el observador S2.

3.3. Resultados

3.3.1. Experimento I: umbrales de discriminación para $\mathbf{b} = \mathbf{x}$

El Experimento I fue utilizado para caracterizar la geometría del espacio de colores y de esta manera hallar las coordenadas perceptuales de cada observador, es decir las coordenadas en las que los umbrales de discriminación son constantes e isótropos. Como se explicó en la Secc. 2.3, la derivación de las coordenadas perceptuales requiere conocer el tensor métrico $J(\mathbf{x})$. Las mediciones fueron hechas con luminosidad fija, es decir $L + M = \text{cte}$ [53]. Para estimar $J(\mathbf{x})$ en un espacio de dos dimensiones los umbrales deberían medirse en al menos tres direcciones, para poder obtener los tres números independientes que definen a

una forma cuadrática de 2×2 . Como se adelantó en la Secc. 2.5.4 y se detallará en el capítulo 4, Krauskopff y Gegenfurtner [10] establecieron que en el espacio $(L - M, S)$ definido por la actividad de los conos, los umbrales de discriminación son descritos por una forma cuadrática diagonal. Los semiejes de las elipses, por lo tanto, están alineados con los ejes cardinales. Más aún, su trabajo también muestra que el semi eje en la dirección $L - M$ se mantiene prácticamente constante, mientras que el del eje S varía linealmente con la coordenada S y es independiente de $L - M$. Estos resultados pueden utilizarse para reducir notablemente el tiempo necesario para medir los umbrales de discriminación: alcanza con medir los umbrales en las direcciones a lo largo de los ejes cardinales, produciendo desplazamientos en esas mismas direcciones. Los colores \mathbf{x} usados en nuestro experimento se muestran en la Fig. 3.1C.

El carácter diagonal del tensor métrico implica que los ejes cardinales son geodésicas del espacio de colores, por lo tanto, es válida la ecuación dada en la sección 2.5.3, según la cual

$$1 = |t'(0) \sqrt{J_{ii}(\mathbf{x})} \varepsilon_I(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{e}}^i)|, \quad (3.2)$$

donde $i = L - M, S$, $\hat{\mathbf{e}}^i$ indica el versor que apunta en la dirección correspondiente, J_{ii} es la componente del tensor métrico y $\varepsilon_I(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{e}}^i)$ es el umbral medido sobre el color \mathbf{x} y en la dirección $\hat{\mathbf{e}}^i$. Dos factores determinan el valor de $\varepsilon_I(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{e}}^i)$: la métrica J y el valor de $t'(0)$. La métrica J define la forma en que se cuantifican las distancias entre puntos del espacio de colores en el caso de perceptos uniformes, mientras que el factor $t'(0)$ es un elemento adicional que aparece debido a la interacción del estímulo con su entorno. El hecho de que el campo sea repulsivo, implica que $t'(0) > 0$ y que por lo tanto los umbrales son menores debido a la interacción con el entorno, mejorando la resolución del observador con respecto al caso de los perceptos uniformes.

Resolviendo la ecuación anterior para J_{ii} ,

$$J_{ii}(\mathbf{x}) = \left[\frac{1}{t'(0) \varepsilon_I(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{e}}^i)} \right]^2. \quad (3.3)$$

Esta ecuación nos permite obtener J_{ii} a partir de los umbrales de discriminación $\varepsilon_I(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{e}}^i)$, a menos de un factor multiplicativo $t'(0)$. Este factor es absorbido mediante la definición del tensor J^I (ver Secc. 2.4), es decir $J^I = t'(0)^2 J$.

Las Figuras 3.3 A y C muestran los umbrales medidos. A lo largo del eje S , los umbrales aumentan con S , con cierta variabilidad entre sujetos. Los umbrales variaron a lo largo del eje hasta un factor 3. En el eje $L - M$, los umbrales mostraron un comportamiento no monótono, con un mínimo alrededor de $L - M = 0$, el cual corresponde al gris de referencia. Aunque hubo una cierta variabilidad de un sujeto a otro, todos los observadores mostraron evidencia del mínimo. Para cada sujeto fijo, la modulación de los umbrales fue significativamente menor que a lo largo del eje S , con el umbral máximo y mínimo de cada observador

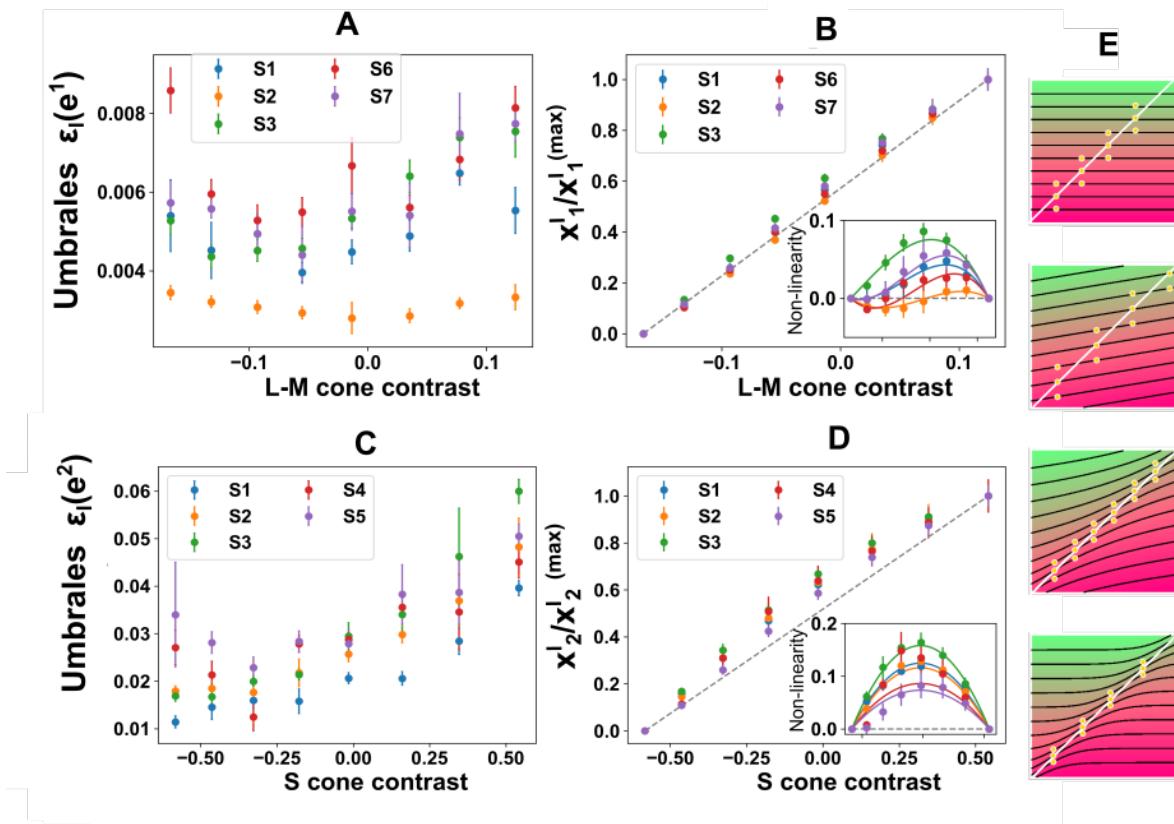


Figura 3.3: Umbral de discriminación cuando coinciden la cromaticidad del estímulo de referencia y del entorno. A y C: umbrales de discriminación para las coordenadas de contraste de cono $L - M$ (A) y S (C). Diferentes observadores mostrados en diferentes colores. B y D: coordenadas perceptuales $x_1^I/x_1^{I\max}$ (B) y $x_2^I/x_2^{I\max}$ (D) en función de los contrastes de cono. Los factores de normalización $x_i^{I\max}$ son las coordenadas perceptuales máximas obtenidas para cada sujeto, y se utilizaron para escalar los datos con el fin de comparar diferentes observadores, que de otro modo producirían coordenadas perceptuales que abarcan distintos rangos de variación. Recuadros: desviaciones del mapeo lineal. Cada punto se obtiene del ajuste de la ecuación 3.1, y las barras de error son los errores esperados del ajuste. Los parámetros de los ajustes óptimos se dan en la Tabla 3.1. E: Los umbrales medidos representan el desplazamiento vertical entre un par $x \parallel x$ en la diagonal (punto amarillo), y otro par ubicado justo encima o justo debajo de una clase de equivalencia que está a una distancia de percepción 1 de la de $x \parallel x$.

difiriendo en menos de 50 % del umbral mínimo. Por lo tanto, confirmamos el resultado de Krauskopf [10], los umbrales a lo largo de la dirección \hat{e}^2 varían más pronunciadamente que a lo largo de la dirección \hat{e}^1 . Sin embargo, nuestros datos revelan que no permanecen estrictamente constantes a lo largo de la dirección \hat{e}^1 , ya que se encontró que la leve variación no monótona era significativa.

El umbral $\varepsilon_I(x, \hat{e}^i)$ es el cambio en la cromaticidad requerido para que un estímulo sea discriminado de su entorno con una precisión fija (Sec. 3.2.3). En la Fig. 3.3 E, este incremento es el desplazamiento vertical entre un par $x \parallel x$ en la diagonal y un punto $x + \varepsilon_I(x, \hat{e}^i)\hat{e}^i \parallel x$ ubicado justo encima (o debajo) del primero, en la clase de equivalencia a una distancia 1 de la de $x \parallel x$. Si la Fig. 3.3 E se representara en coordenadas de contraste de conos o en cualquier otro espacio de color que no hubiera sido elegido para reflejar las distancias perceptuales, diferentes tripletes de puntos amarillos a lo largo de la diagonal

bien podrían abarcar diferentes alturas verticales, ya que la separación vertical entre clases mínimamente distinguibles (clases a una distancia de 1) puede ser arbitraria. Encontrar las coordenadas perceptuales es equivalente a encontrar un sistema de representación en el que la extensión vertical de todos los tripletes permanece constante a lo largo de la diagonal. En estas coordenadas, las clases cruzan la diagonal a intervalos equidistantes, como en las Figs. 2.2 y 3.3E.

Para definir las coordenadas perceptuales a lo largo de los ejes \hat{e}^1 y \hat{e}^2 se debe integrar la raíz cuadrada de los elementos diagonales de la métrica (Ec. 2.25). Para ello, se necesita una expresión analítica de $J^{1/2}(\mathbf{x})$. Proponemos una función polinomial

$$\sqrt{J_{ii}^I(x_i)} = |t'(0)| \sqrt{J_{ii}(x_i)} = \frac{1}{\varepsilon_I(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{e}}^i)} = \sum_{j=0}^n \alpha_j x_i^j, \quad (3.4)$$

y ajustamos los coeficientes α_j a los datos. El orden n del polinomio se eligió como el más bajo que aún representaba los datos con valores de p superiores a 0,01. A lo largo del eje \hat{e}^1 , una línea recta ($n = 1$) es suficiente, mientras que el eje \hat{e}^2 requiere subir hasta una expresión cuadrática ($n = 2$). La tabla 3.1 del Apéndice contiene los parámetros ajustados. A lo largo de la dirección \hat{e}^1 , la variabilidad de los coeficientes ajustados para diferentes observadores indicó diferencias interindividuales, ya que un solo conjunto de coeficientes α_j no podría explicar el tensor métrico de diferentes sujetos. El valor p para la hipótesis de que un solo α_0 podría usarse para los 5 sujetos era 10^{-8} , y para un solo α_1 era $6 \cdot 10^{-3}$. A lo largo de la dirección \hat{e}^2 , las diferencias individuales fueron significativas en los coeficientes constante (valor p por debajo de 10^{-10}) y lineales (valor $p = 2,10^{-7}$), pero no en las cuadráticas (valor $p = 0,68$).

Una vez que se ha obtenido una expresión analítica para los elementos diagonales de la métrica, las coordenadas perceptuales a lo largo de los ejes cardinales se pueden calcular por integración (Ecs. 2.26 y 2.27). En las Figs. 3.3 B y D, las coordenadas perceptuales normalizadas x_1^I y x_2^I se muestran como una función de los contrastes de cono correspondientes $L - M$ y S . Los recuadros muestran la desviación respecto de un mapeo lineal, junto con las expresiones analíticas cuadráticas o cúbicas obtenidas al integrar la Ec. 3.4 (los mismos parámetros que en la Tabla 3.1). Es importante destacar que para lo que sigue, en las coordenadas perceptuales, la distancia entre dos colores \mathbf{x}^I e \mathbf{y}^I se calcula con la fórmula euclidiana. Si los dos colores se encuentran a lo largo del eje cardinal \hat{e}^i , entonces $d^I(x^I \hat{e}^i, y^I \hat{e}^i) = |x_i^I - y_i^I|$.

3.3.2. Experimento II: umbrales de discriminación para $\mathbf{b} \neq \mathbf{x}$

El *Experimento II* implicó la misma tarea de discriminación que el *Experimento I*, pero con un entorno \mathbf{b} que era diferente de los estímulos comparados, por lo que corresponde a un protocolo tipo II (ver Secc. 2.4.2). Dado que el umbral de discriminación depende del

entorno, usamos la notación $\varepsilon_{II}(\mathbf{x}, \mathbf{b}, \hat{\mathbf{e}}^i)$. El *Experimento II* se reduce al *Experimento I* cuando $\mathbf{b} = \mathbf{x}$, es decir, $\varepsilon_{II}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \hat{\mathbf{e}}^i) \equiv \varepsilon_I(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{e}}^i)$.

Como se desarrolló en la Secc. 2.5.3, y dado que estamos suponiendo que los ejes cardinales se corresponden con geodésicas del espacio cromático, nuestro modelo nos da la siguiente ecuación que rige a los umbrales de discriminación en este protocolo:

$$1 \approx \left| t' (d(\mathbf{x}, \mathbf{b})) \sqrt{J_{ii}(\mathbf{x})} \varepsilon_{II}(\mathbf{x}, \mathbf{b}, \hat{\mathbf{e}}^i) \right|, \quad (3.5)$$

Dado que J_{ii} es conocido del Experimento I, podemos usar Ec. 3.3 y reobtener la ecuación 2.23:

$$\varepsilon_{II}(\mathbf{x}, \mathbf{b}, \hat{\mathbf{e}}^i) = \varepsilon_I(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{e}}^i) \left| \frac{t'(0)}{t'[d(\mathbf{x}, \mathbf{b})]} \right|. \quad (3.6)$$

Cabe notar que, como $t(d)$ es una longitud de arco, la derivada $t'(d)$ es también una cantidad invariante, es decir, independiente de las coordenadas. Por lo tanto, aunque cada umbral varía con la elección de las coordenadas, su cociente no lo hace.

Cuando el entorno coincide con el estímulo, obtenemos $\varepsilon_I = \varepsilon_{II}$. A medida que el estímulo \mathbf{x} se aleja del entorno \mathbf{b} , la distancia $d(\mathbf{x}, \mathbf{b})$ aumenta. El umbral ε_{II} puede aumentar o disminuir desde ε_I , dependiendo de si el valor absoluto de $t'(d)$ es mayor o menor que el de $t'(0)$. Por lo tanto, midiendo los umbrales ε_{II} para diferentes entornos, se revela la derivada de $t(d)$. Sin embargo, este razonamiento sólo es válido si la *hipótesis de isotropía y homogeneidad* propuesta (2.5.2) es válida, es decir, la suposición de que el cambio de percepción inducido por el entorno sólo depende de la distancia $d(\mathbf{x}, \mathbf{b})$. Por lo tanto, antes de caracterizar la forma de $t(d)$, usamos el *Experimento II* para evaluar la validez de esta hipótesis. Para ello, demostramos que, en las coordenadas perceptuales, la dependencia de los umbrales $\varepsilon_{II}(\mathbf{x}, \mathbf{b}, \hat{\mathbf{e}}^i)$ con \mathbf{b} y con \mathbf{x} se puede escribir completamente en términos de la distancia $|x_i^I - b_i^I|$.

El primer paso es describir la dependencia de los umbrales al variar la diferencia entre estímulo y entorno en las coordenadas de contraste de cono. En la Fig. 3.4, vemos la variación de los umbrales del sujeto S2 obtenidos en el *Experimento II*, en función de la diferencia $x_i - b_i$. Según lo informado por Krauskopf y Gegenfurtner [10], los umbrales son mínimos para $\mathbf{b} = \mathbf{x}$, y aumentan a medida que el entorno se aleja del estímulo. Este comportamiento no monótono refuta la hipótesis de que las clases sean funciones lineales del estímulo, como propone Resnikoff [8], por lo que nuestro objetivo es caracterizar este comportamiento. Previo a transformar los datos a las coordenadas perceptuales, analizamos la información que se obtiene de los resultados en crudo. En particular, nos interesa estudiar las propiedades en torno del mínimo de discriminación ($\mathbf{b} = \mathbf{x}$) y la pregunta: ¿es un mínimo puntiagudo o suave? Si los umbrales a fondo fijo surgieran únicamente por efecto de la métrica subyacente, es difícil entender por qué habría una discontinuidad en la derivada en ese punto, dado que las representaciones cromáticas internas parecieran variar suavemente. Sin embargo, la

existencia de una interacción entre el color del entorno y el del estímulo, entendida como un desplazamiento radial repulsivo en la representación del estímulo, puede dar lugar a esta discontinuidad en la derivada. Si, como se supone en esta tesis, la función t depende de las coordenadas a través de la distancia d , el primer orden de la expansión de Taylor de t' debe incluir el término $|x_i - b_i|$, pues este posee la paridad necesaria para incorporar un término lineal –recordar que la simetría radial es una simetría de paridad al restringirse sobre un dado eje–. Alternativamente, si los umbrales a fondo fijo provinieran de una métrica suave, en la cual no aparece un término de este tipo, el mínimo corresponde a un punto con derivada nula. Esta característica del mínimo nos permite indicar hasta qué punto la interacción entre estímulo y entorno es relevante para explicar la forma de los umbrales. Por este motivo, comparamos dos modelos que contienen el mismo número de parámetros:

$$\text{Modelo 1 : } \varepsilon_{II}(\mathbf{x}, \mathbf{b}, \hat{\mathbf{e}}^i) - \varepsilon_I(\mathbf{b}, \hat{\mathbf{e}}^i) \approx \gamma_0 + \gamma_1(x_i - b_i) + \gamma_2(x_i - b_i)^2 \quad (3.7)$$

$$\text{Modelo 2 : } \varepsilon_{II}(\mathbf{x}, \mathbf{b}, \hat{\mathbf{e}}^i) - \varepsilon_I(\mathbf{b}, \hat{\mathbf{e}}^i) \approx \gamma_0 + \gamma_1(x_i - b_i) + \gamma_2|x_i - b_i| \quad (3.8)$$

El primer modelo asume que $\varepsilon_{II}(\mathbf{x}, \mathbf{b}, \hat{\mathbf{e}}^i)$ tiene una derivada continua en $b_i = x_i$, y es capaz de describir la desviación cuadrática de la linealidad. El segundo modelo permite una derivada discontinua, y que las porciones lineales ascendentes y descendentes tengan pendientes diferentes. Sin embargo, no puede describir efectos cuadráticos.

En la Fig. 3.4, comparamos el desempeño de las dos propuestas en el ajuste de los umbrales medidos. Los coeficientes ajustados γ_0 , γ_1 y γ_2 se informan en las Tablas 3.3 y 3.2 del Apéndice. El término constante γ_0 es del orden del error experimental de las medidas, lo que confirma que cuando el estímulo y el entorno coinciden, ε_{II} efectivamente se reduce a ε_I .

Cada ajuste produce un valor de χ^2 que cuantifica la bondad del ajuste para cada sujeto y eje, y aunque hay pequeñas diferencias entre las condiciones, el valor medio χ^2 obtenido para el Modelo 2 (promediado entre sujetos y ejes) es la mitad del valor obtenido para el Modelo 1. En consecuencia, el valor p medio obtenido para la hipótesis de que los datos se generen con el Modelo 2 es dos veces mayor que con el Modelo 1. Estos resultados implican que los datos son mejor explicados por el Modelo 2, y se espera una derivada discontinua en $\mathbf{b} = \mathbf{x}$. Además, el hecho de que γ_1 sea significativamente diferente de cero indica que las porciones lineales ascendentes y descendentes del Modelo 2 tienen pendientes diferentes. Este es un signo de que en las coordenadas de contraste de conos no se evidencia una simetría de paridad.

Para determinar si la hipótesis de homogeneidad e isotropía está justificada, ahora transformamos \mathbf{x} , \mathbf{b} y ε_{II} a las coordenadas perceptuales, usando las ecuaciones 2.26 y 2.27 y el tensor métrico J_{ii}^I obtenido con el *Experimento I*. Hacemos hincapié en que no se utilizan datos del *Experimento II* para ajustar los parámetros de la transformación. Aunque todavía carecemos de la constante multiplicativa $|t'(0)|$, podemos evaluar si en estas coordenadas, $\varepsilon_{II}(\mathbf{x}, \mathbf{b}, \hat{\mathbf{e}}^i)$ depende exclusivamente de la diferencia $|x_i^I - b_i^I|$. Si es así, la transformación

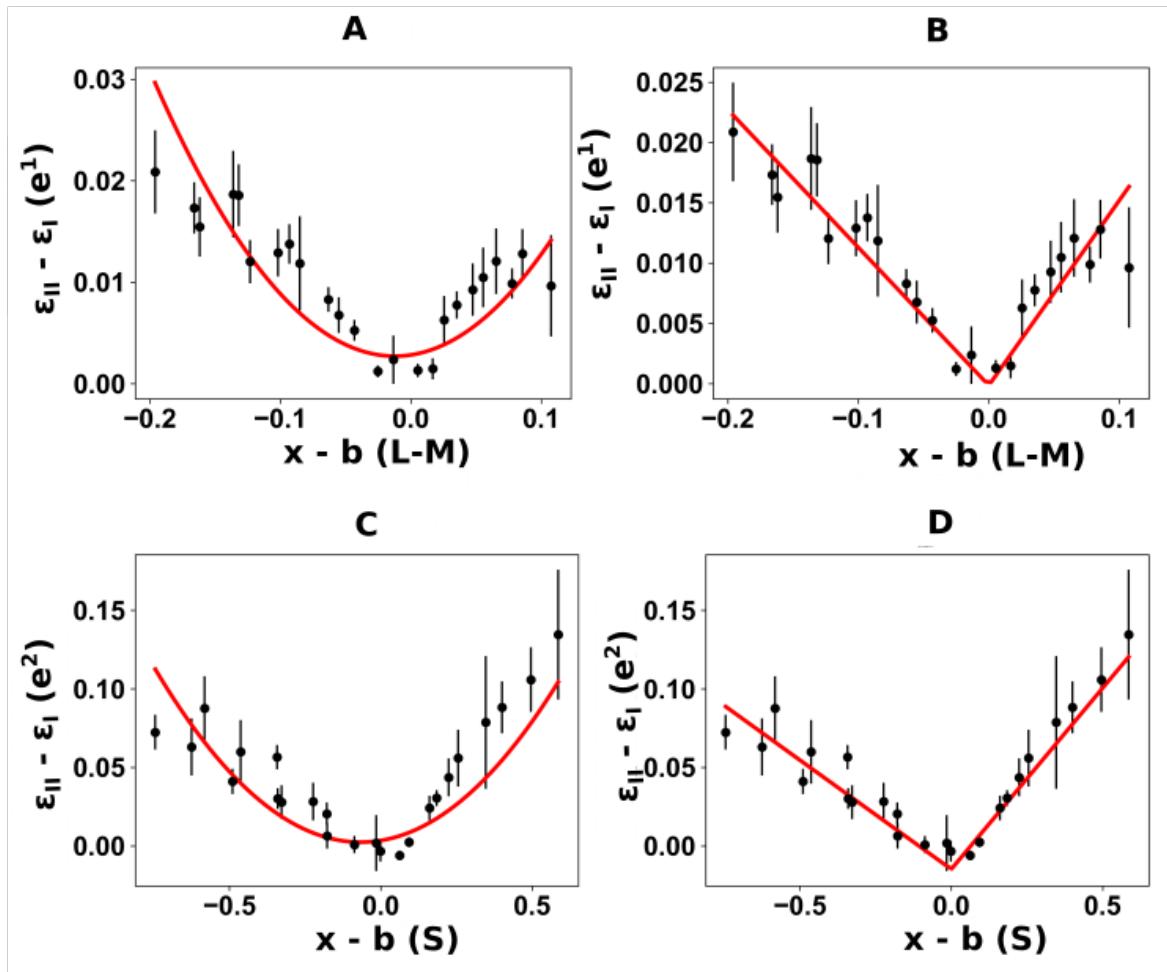


Figura 3.4: Performance de los modelos 1 y 2 al describir los umbrales medidos $\varepsilon_{II}(x, b, \hat{e}^i)$. Umbrales para el observador S2 como función de la diferencia entre estímulo y fondo $x - b$ en coordenadas de contraste de conos. Los umbrales y su error se estiman mediante la Ec. 3.1. Línea roja: modelo ajustado. A y C: Modelo 1 (Ec. 3.7). B y D: Modelo 2 (Ec. 3.8). A y B: umbrales de discriminación medidos a lo largo de \hat{e}^1 . C y D: a lo largo de \hat{e}^2 .

debería ser suficiente para eliminar la asimetría en las pendientes de las porciones descendente y ascendente del Modelo 2. De manera equivalente, cuando ε_{II} (medido para un solo sujeto con diferentes estímulos x , entorno b y los ejes \hat{e}^i) se traza como una función de $|x_i^I - b_i^I|$, debe verse una sola línea. Este gráfico se muestra en la columna A de la Fig. 3.5, para los entornos variando a lo largo del eje \hat{e}^1 (arriba), \hat{e}^2 (medio) y ambos ejes juntos (abajo).

A modo de comparación, también mostramos los mismos datos representados en otros sistemas de coordenadas, para probar si la relación lineal entre $\varepsilon_{II}(x^I, b^I, \hat{e}^i)$ con $|x_i^I - b_i^I|$ se vuelve más evidente en las coordenadas perceptuales que en otros sistemas de coordenadas. En la columna B, los datos se representan en coordenadas de contraste de cono. Claramente, los puntos obtenidos para $b_i > x_i$ (círculos) definen una pendiente diferente a la de $b_i < x_i$ (cuadrados). Además, las pendientes a lo largo de los ejes \hat{e}^1 y \hat{e}^2 son marcadamente diferentes (fila inferior), y también lo son los rangos totales de los datos. Como consecuencia,

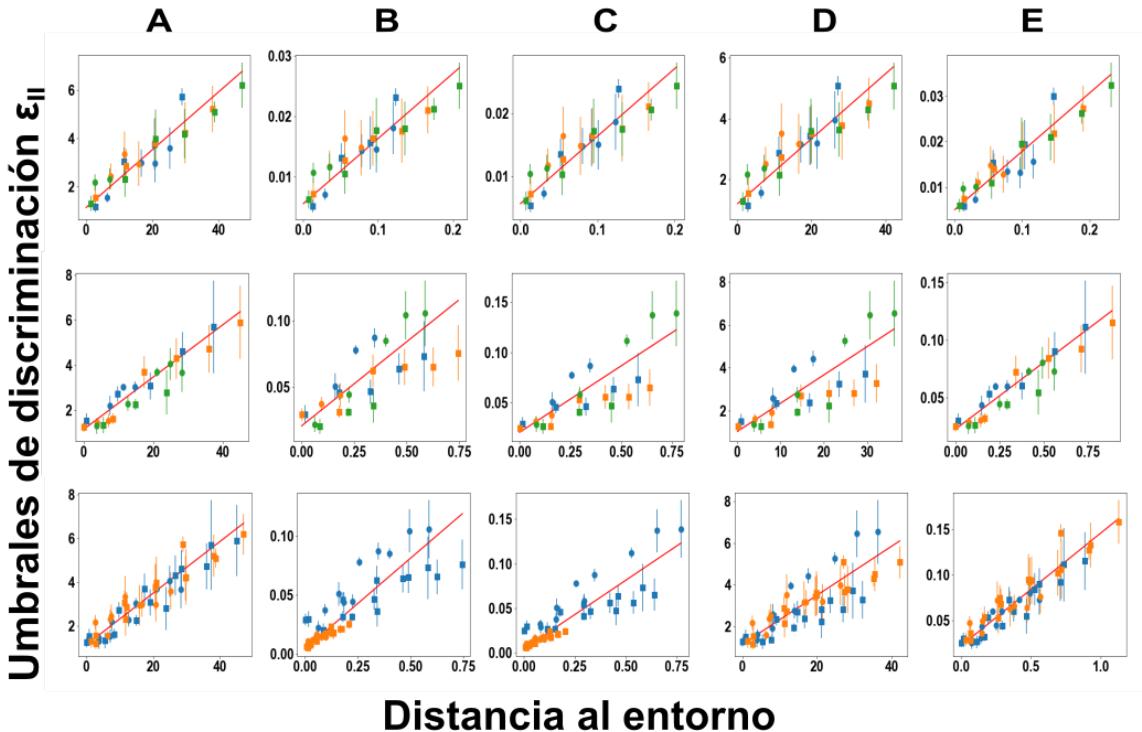


Figura 3.5: Evaluación de la validez de la hipótesis 5. Umbrales medidos en el *Experimento II* para el sujeto S1 en función de la distancia entre el entorno y el estímulo. Círculos: $b_i > x_i$. Cuadrados: $b_i < x_i$. Cada columna representa una elección diferente del sistema de coordenadas en el que se representan los umbrales, los estímulos y el entorno. A: coordenadas perceptuales definidas con los datos del Experimento I. Columnas B, C, D: Otras coordenadas empleadas en la literatura (ver texto), que no requieren parámetros ajustados. Columna E: Sistema de coordenadas óptimo definido con dos parámetros ajustados. Fila superior: eje \hat{e}^1 . Verde: $b = (0, 0)$, azul: $b = (-0,03, 0)$, naranja: $b = (0,03, 0)$. Fila del medio: b y x se encuentran a lo largo del eje \hat{e}^2 . Verde: $b = (L - M, S) = (0, 0, 0,16)$, azul: $b_{mb} = (0, 0)$, naranja: $b = (0, -0,24)$. Abajo: ambos ejes juntos. Naranja: \hat{e}^1 . Datos azules: \hat{e}^2 .

la cantidad de dispersión es mayor en los gráficos de la columna *B* que en la columna *A*. Los valores de χ^2 obtenidos de los ajustes lineales en la columna *B* son más de tres veces mayores que los de la columna 1, lo que significa que los datos están más en línea con la *hipótesis de homogeneidad e isotropía* cuando se grafican en las coordenadas perceptuales que en los contrastes de cono. En el sistema de coordenadas de contraste de cono, el origen $x = 0$ es gris por convención. Las columnas *C* y *D* evalúan el desempeño de dos sistemas de coordenadas adicionales, en los que el contraste de cono se redefine con respecto al entorno cromático en el que se realizó cada tarea de discriminación. Específicamente, si el supraíndice *cc* representa contrastes de cono, en la columna *C*, las coordenadas tanto del estímulo como del entorno están definidas por la relación $x_i^C = x_i^{cc}/(b_i^{cc} + 1)$, por lo que los cambios en los estímulos están representados por el contraste relativo con el entorno. Si ε_{II} dependiera exclusivamente de x^C , que representa el cociente de la excitación de cono relativa entre estímulo y entorno, se mantendría la ley de Weber [71]. Sin embargo, vemos que nuevamente la dispersión sigue siendo mayor que en la columna 1.

En la columna *D*, la transformación de coordenadas es $x_i^D = x_i^{cc}/\varepsilon_I(\mathbf{b}, \hat{\mathbf{e}}^i)^{cc}$, esto corres-

ponde a modificar la escala en función del entorno de modo que el umbral diferencial para $\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sea igual a la unidad. Si ε_{II} dependiera solo de la proporción $\varepsilon_I(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{e}}^i)/\varepsilon_I(\mathbf{b}, \hat{\mathbf{e}}^i)$, la discriminabilidad estaría regida por una versión modificada de la ley de Weber, formulada en términos de umbrales. Los valores promedio de χ^2 resultantes representan un aumento en un factor tres (columna C) y un factor dos (columna D) con respecto a la primera columna. Así, nuevamente, las coordenadas perceptuales describen mejor la relación lineal.

Mientras que los primeros cuatro modelos evaluaron sistemas de coordenadas que no contenían parámetros libres, la última columna se construyó buscando el valor de dos coeficientes libres α, β , obtenidos mediante un ajuste a los datos, produciendo el mapeo $x_1^E = \alpha x_1^{cc}$ y $x_2^E = x_i^{cc} + \frac{\beta}{2}(x_i^{cc})^2$ que minimizara el valor de χ^2 . Es decir, consideramos transformaciones de la misma forma que las que provienen de los resultados del experimento I, incorporando en el parámetro α la diferencia de escala de los umbrales entre un eje y otro, y en el parámetro β la variación lineal de los umbrales en el eje S. Sin embargo, la mejora fue solo marginal, con un valor de χ^2 que era solo un 6 % más pequeño que el del sistema de coordenadas perceptuales. Podemos decir entonces, que las coordenadas perceptuales, obtenidas mediante el Exp. I, alcanzan casi el mismo desempeño que el que se obtiene de buscar la transformación que minimice la dispersión de los datos del Exp. II.

En la Fig. 3.3 E, los umbrales de discriminación se representan como la distancia vertical entre puntos amarillos. Podríamos agregar puntos adicionales a la figura, extendiendo así los tripletes a secuencias verticales más largas, desplegándose tanto hacia arriba como hacia abajo, marcando clases consecutivas que siempre se encuentran a una distancia de percepción de 1 de sus vecinos. Los umbrales $\varepsilon_{II}(\mathbf{x}, \mathbf{b}, \hat{\mathbf{e}}^i)$ están representados por la separación vertical de puntos consecutivos. Que los umbrales crezcan linealmente, como los de la Fig. 3.5 A, implican que las clases se separan cada vez más a medida que nos alejamos de la diagonal. Sin embargo, en el *Experimento II*, la gama de colores estaba restringida por la gama del monitor de la computadora, por lo que la diferencia cromática alcanzable entre el estímulo y el entorno era limitada. Además, la relación entre ruido y variación de los datos no es tan pequeña. Por lo tanto, la relación lineal solo se pudo confirmar para el rango limitado alrededor de la diagonal, donde ε_{II} puede ser aproximado por una función lineal de sus argumentos. Al definir las coordenadas perceptuales, garantizamos que las clases fueran equidistantes sobre la diagonal. Sin embargo, más allá de la diagonal, en principio, las distancias podrían variar. El *Experimento II* mostró que la separación $\varepsilon_{II}(\mathbf{x}, \mathbf{b}, \hat{\mathbf{e}}^i)$ depende solo de la distancia $|x_i^I - b_i^I|$. Por lo tanto, si la distancia $|x_i^I - b_i^I|$ se cambia en una cantidad fija, la separación es siempre la misma, independientemente de los valores individuales de x_i^I y b_i^I . Al menos en alguna región alrededor de la diagonal, las líneas que representan las clases son traslaciones rígidas entre sí. En esta región, los resultados del *Experimento II* apoyan la hipótesis de isotropía y homogeneidad.

La dependencia lineal de $\varepsilon_{II}(d)$ con d encontrada en el *Experimento II* restringe el conjunto de posibles funciones $t(d)$. Por ejemplo, en los dos paneles superiores de la Fig. 3.3 E,

la separación entre líneas consecutivas es constante, por lo que los resultados del *Experimento II* descartan estas dos opciones. Los dos paneles inferiores corresponden a casos en los que $\varepsilon_{II}(d) - 1 \propto d$, para d pequeños. Por lo tanto, hasta ahora, ambos son candidatos a posibles descripciones del efecto del entorno en las clases de equivalencia. Ahora comparamos estas opciones.

Supongamos primero que la tendencia lineal inicial aparente en los datos mostrados en la figura 3.5 continúa también para distancias mayores. Esta hipótesis implica que ε_{II} es proporcional a $1 + \ell d(\mathbf{x}, \mathbf{b})$. De aquí, se deduce que $t'(d)/t'(0) = (1 + \ell d)^{-1}$, que a su vez implica $t(d) = t'(0) \ln(1 + \ell d)/\ell$. El desplazamiento resultante $t(d) - d$ se ilustra en el panel *d1* de la figura 2.8. El efecto del entorno es inicialmente repulsivo, se vuelve neutral a una distancia intermedia en la que $t(d) = d$, y termina siendo atractivo para distancias aún mayores (ver la inversión de las flechas que representan el campo vectorial en el panel *c2* de la Fig. 2.8). En realidad, $t(d)$ puede incluso volverse negativo. Este comportamiento desafía nuestra intuición de varias maneras, a saber:

- Los umbrales crecen sin límites, lo que implica que basta elegir un entorno suficientemente distante para que todo par de estímulos sea indistinguible, sin importar cuán diferentes sean.
- El efecto invierte su polaridad (de repulsivo a atractivo) a medida que aumenta la distancia. Este comportamiento implica que la distancia a la que tiene lugar la inversión es singular.
- Luego del cambio de polaridad, el desplazamiento inducido por el entorno crece indefinidamente para grandes distancias. Por lo tanto, el color percibido puede diferir del presentado en una cantidad arbitraria, simplemente desplazando el entorno lo suficientemente lejos.
- Dos entornos diferentes (uno a cada lado del punto neutro) que actúan sobre el mismo estímulo pueden inducir el mismo color aparente, aunque los entornos intermedios produzcan colores aparentes diferentes.
- Si la distancia entre el estímulo y el entorno es suficientemente grande, $t(d)$ se anula. En ese punto, el estímulo se vuelve igual al entorno, produciendo una percepción espacialmente uniforme. A distancias aún mayores, el estímulo percibido está en el lado negativo de la geodésica. En otras palabras, un estímulo verde rodeado de rojo puede dar lugar a una percepción de rojo que está incluso más saturado que el entorno.

Para evitar estos efectos extraños, los umbrales deberían desviarse del comportamiento lineal a grandes distancias, desacelerando. La desviación más simple de la hipótesis lineal sería que los umbrales se saturaran después del crecimiento lineal inicial. Tal saturación puede modelarse como $\varepsilon_{II}(d) \propto [1 + a \exp(-d/\ell)]^{-1}$, como en el panel *e1* de la Fig. 2.8. El rango

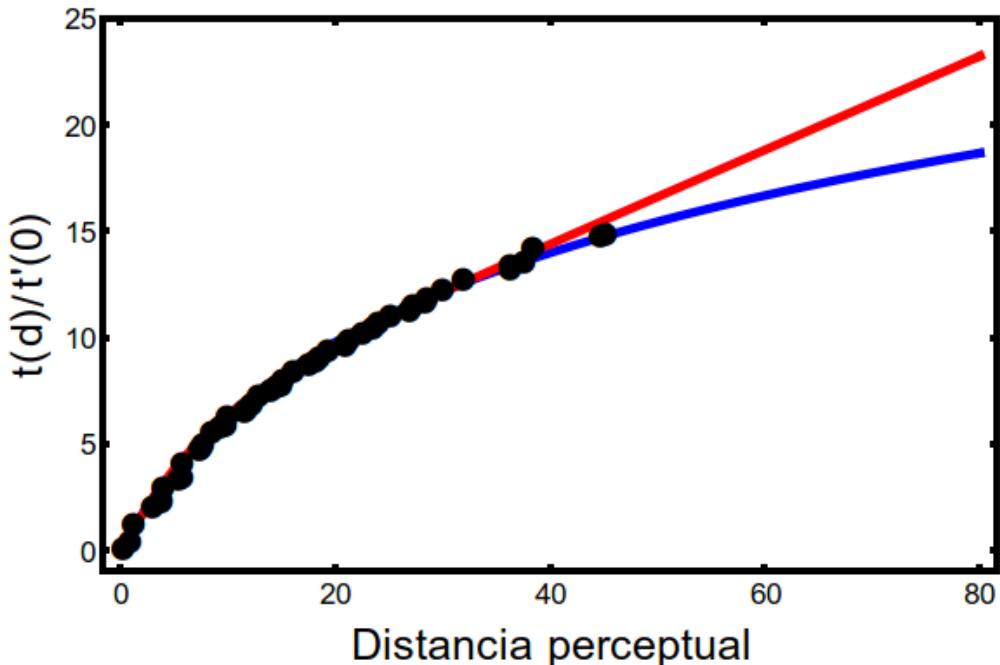


Figura 3.6: Comparación de los dos modelos. Los puntos provienen de la integración numérica de la inversa de los umbrales de discriminación. La curva roja corresponde al modelo exponencial, que implica una saturación de los umbrales para distancias largas, mientras que la línea azul corresponde a umbrales que crecen linealmente de modo indefinido.

limitado en el que se realizó el *Experimento II* (Fig. 3.5) no muestra una fuerte evidencia de saturación. Sin embargo, todavía se puede probar si los umbrales de la Fig. 3.5 también pueden ser compatibles con una tendencia sublineal. Para ello, comparamos las hipótesis de que $t'(d) \propto (1 + d/\ell)^{-1}$ (compatible con umbrales lineales) y $t'(d) \propto 1 + ae^{-d/\ell}$ (compatible con umbrales de saturación exponencial). Se obtuvieron valores de χ^2 ligeramente más pequeños para el modelo exponencial. Aunque la mejora en el ajuste del *Experimento II* fue solo marginal, en la siguiente sección describimos el *Experimento III* con el modelo de saturación exponencial, evitando así los efectos poco realistas descritos anteriormente. En la Fig. 3.6 comparamos ambos modelos, mostrando que el comportamiento exponencial ajusta a los datos sólo ligeramente mejor que el lineal. Por este motivo, es sólo en base a los argumentos antes expuestos que seleccionamos el modelo exponencial. Para realizar el ajuste, estimamos el valor de $t(d)$ mediante la integración numérica de los datos experimentales y luego ajustamos los parámetros de cada modelo.

3.3.3. Experimento III: Matcheo asimétrico

En esta sección describiremos los colores directamente mediante sus coordenadas perceptuales previamente definidas con el experimento I, omitiendo el supraíndice I para evitar la notación tediosa. En la tarea de matcheo asimétrico, para cada par estímulo entorno $x^\alpha // b^\alpha$ y entorno b^β , el objetivo del observador era encontrar el estímulo x^β que satisface $x^\alpha // b^\alpha \sim x^\beta // b^\beta$, en otras palabras, reportar $x^\beta = \Phi_{b^\alpha \rightarrow b^\beta}(x^\alpha)$. La ecuación 2.3 implica

que esta condición es equivalente a:

$$\Phi_{\mathbf{b}^\beta}(\mathbf{x}^\beta) = \Phi_{\mathbf{b}^\alpha}(\mathbf{x}^\alpha). \quad (3.9)$$

Si el estímulo y el entorno están en el mismo eje cardinal \hat{e}^i , la Ec. 2.18 resulta

$$\Phi_{\mathbf{b}}(\mathbf{x})|_i = \gamma \{t[d(\mathbf{x}, \mathbf{b})]\}_i = b_i + t[d(\mathbf{x}, \mathbf{b})] \operatorname{Sgn}[x_i - b_i]. \quad (3.10)$$

Si esta condición se inserta en la Ec. 3.9,

$$b_i^\beta + t[d(\mathbf{x}^\beta, \mathbf{b}^\beta)] \operatorname{Sgn}[x_i^\beta - b_i^\beta] = b_i^\alpha + t[d^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{b}^\alpha)] \operatorname{Sgn}[x_i^\alpha - b_i^\alpha].$$

En las coordenadas perceptuales, $d(\mathbf{x}, \mathbf{b}) = |x_i - b_i|$. Usando esta igualdad y un poco de álgebra,

$$\left| [t(d^\beta) - d^\beta] - [t(d^\alpha) - d^\alpha] \operatorname{Sgn}[x_i^\alpha - b_i^\alpha] \operatorname{Sgn}[x_i^\beta - b_i^\beta] \right| = |x_i^\alpha - x_i^\beta| \quad (3.11)$$

Por lo tanto, el desplazamiento perceptual $|x_i^\beta - x_i^\alpha|$ inducido por los dos entornos solo depende de las distancias $d^\alpha = d(\mathbf{x}^\alpha, \mathbf{b}^\alpha)$ y $d^\beta = d(\mathbf{x}^\beta, \mathbf{b}^\beta)$ entre cada estímulo y su entorno: siempre que d^α y d^β tomen un valor fijo, el desplazamiento no depende de ninguno de los valores individuales $x_i^\alpha, x_i^\beta, b_i^\alpha$ o b_i^β , ni de la dirección \hat{e}^i . Como consecuencia, si los desplazamientos $|x_i^\beta - x_i^\alpha|$ se grafican en función de d^α y d^β , el conjunto de datos debe definir una variedad 2-dimensional, sin importar cuántos estímulos, entornos y ejes cardinales sean incluidos. Además, la estructura de 2-dimensional solo debería ser evidente en las coordenadas perceptuales, ya que en cualquier otro sistema de coordenadas, $d \neq |x_i - b_i|$, lo que implica que Ec. 3.11 no se sostiene. En la Fig. 3.7, se muestran los gráficos obtenidos.

Individualmente, en cada eje los desplazamientos cromáticos definen una variedad de dimensión 2, tanto midiendo la diferencia en contraste de conos como en las coordenadas perceptuales. Sin embargo, si ambos ejes se mezclan, en las coordenadas perceptuales, la colección de datos aún se encuentra en una variedad de dimensión 2, ya que las dos hojas correspondientes a los diferentes ejes se superponen. Este no es el caso en las coordenadas de contraste de cono, ya que la hoja correspondiente a \hat{e}_2 está significativamente más cerca del origen que la de \hat{e}_1 . Para cuantificar esta diferencia, estimamos la dimensión D de la variedad que contiene los datos [73], obteniendo $D = 2,11$ en las coordenadas perceptuales y $D = 3,19$ en las coordenadas de contraste de cono. Esto muestra que sólo al reescribir la inducción cromática en términos de la distancia perceptual se observa la universalidad del efecto a lo largo de ambos ejes cardinales.

Para probar si el modelo exponencial proporcionaba una buena descripción de los resultados del *Experimento III*, simulamos un agente computacional para cada observador que realizaba la misma tarea de elección forzada. El agente decidió en cada prueba cuál de los

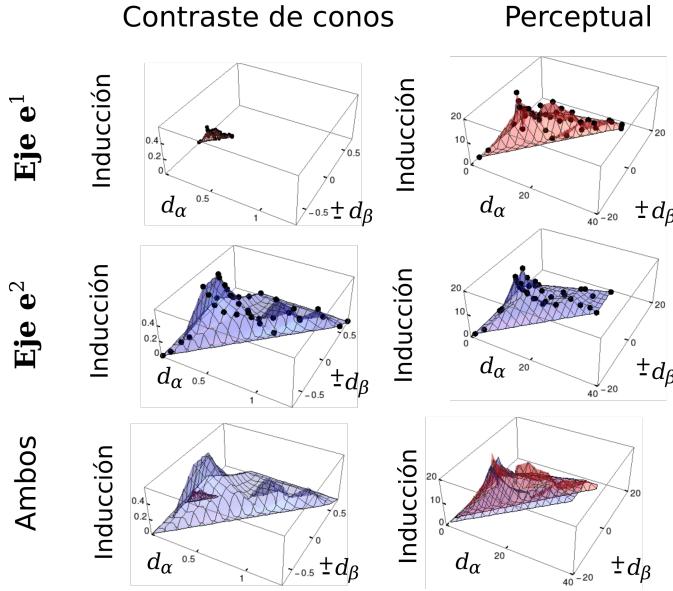


Figura 3.7: Cambios de percepción inducidos por el entorno. Desplazamiento $|x_i^\beta - x_i^\alpha|$ en función de las distancias $d^\alpha = |x_i^\alpha - b_i^\alpha|$ y $\pm d^\beta = \pm|x_i^\beta - b_i^\beta|$, para observador S3, a lo largo del eje \hat{e}^1 (arriba), \hat{e}^2 (centro) y ambos juntos (abajo), en coordenadas de contraste de cono (izquierda) y coordenadas perceptuales (derecha). El factor ± 1 multiplicando d^β está definido por el producto de funciones Signo en la Ec. 3.11. Los datos medidos aparecen en los paneles superior e intermedio, y la superficie interpola los valores medidos. En los paneles inferiores, se muestra que las dos hojas se fusionan en las coordenadas perceptuales, pero no las de contraste de cono.

dos estímulos candidatos era más similar al objetivo, y lo hizo de acuerdo con su propia métrica idiosincrásica, determinada en el *Experimento I*. Esta métrica se utilizó para representar el experimento en las coordenadas perceptuales. En estas coordenadas, el efecto del entorno se modeló como $\Phi_b(\mathbf{x})_i = x_i + \kappa \operatorname{Sign}(x_i - b_i) [1 - \exp(-|x_i - b_i|/\ell)]$. Esta forma funcional da lugar a un crecimiento lineal inicial de $\varepsilon_{II}(d)$, y una saturación exponencial para largas distancias. Para cada color de destino x^α presentado en un entorno b^α y dos colores candidatos x^p y x^q en el borde b^β , el agente tuvo que decidir si $d(\Phi_{b^\alpha}(x^\alpha), \Phi_{b^\beta}(x^p))$ era mayor o menor que $d(\Phi_{b^\alpha}(x^\alpha), \Phi_{b^\beta}(x^q))$. Guiado por las elecciones del agente, el procedimiento iterativo del experimento produjo el resultado final $x^\beta = \Phi_{b^\alpha \rightarrow b^\beta}(x^\alpha)$. Dado que se observó una variabilidad significativa en las respuestas (Fig. 3.3), se incluyó un ruido gaussiano aditivo, con media cero y una varianza ajustada para cada sujeto, en la evaluación de las distancias $d(\Phi_{b^\alpha}(x^\alpha), \Phi_{b^\beta}(x^p))$ y $d(\Phi_{b^\alpha}(x^\alpha), \Phi_{b^\beta}(x^q))$ por parte de los observadores simulados. Por lo tanto, las respuestas simuladas también fueron estocásticas. La forma funcional propuesta para $t(d)$ contiene dos parámetros libres, κ y ℓ . El procedimiento de ajuste se implementó con el paquete de python *noisyopt* [74, 75], que maneja funciones ruidosas. Se ajustó una sola función exponencial y una sola varianza de ruido para cada observador, para los tres pares diferentes de entornos en cada eje y para ambos ejes. La figura 3.8 muestra los valores de x^β resultantes como una función del objetivo x^α para el sujeto S3, en cuatro pares diferentes de entornos, dos para cada eje. Los matcheos simulados a veces pueden parecer discontinuos (por ejemplo, el primer punto en la Fig. 3.8 C). Este comportamiento se

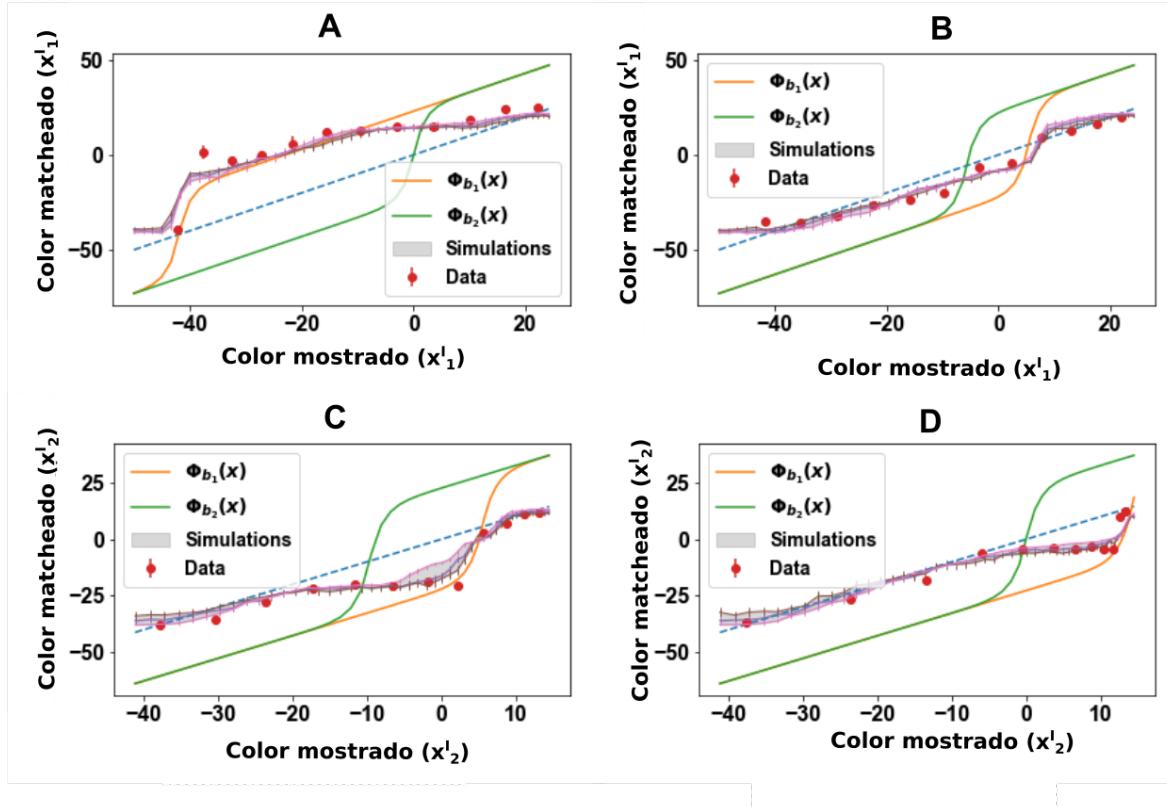


Figura 3.8: Comparación entre los datos medidos y simulados en el *Experimento III*. Color matcheado x^β en función del color objetivo x^α (ambos ejes en las coordenadas perceptuales) para el observador S3. A y B: Matcheo asimétrica a lo largo del eje \hat{e}^1 . C y D: Matcheo asimétrico a lo largo del eje \hat{e}^2 . En las coordenadas de contraste de cono, los dos entornos eran $b^\alpha = (0, 0)$ y $b^\beta = (-0,2, 0)$ (A), $b^\alpha = (-0,03, 0)$ y $b^\beta = (0,03, 0)$ (B); $b^\alpha = (0, -0,35)$ y $b^\beta = (0, 0,25)$ (C), $b^\alpha = (0, 0)$ y $b^\beta = (0, 0,9)$ (D). Círculos rojos: datos experimentales. Línea violeta: resultados simulados. Áreas sombreadas: desviación estándar de los resultados simulados. Línea punteada azul: función de identidad, esperada en el caso en que el entorno no ejerza influencia. Líneas verde y naranja: asignaciones $\Phi_{b^\alpha}(x^\alpha)$ y $\Phi_{b^\beta}(x^\alpha)$ obtenido de los valores ajustados de κ y ℓ del observador S3, indicando los representantes uniformes de $x^\alpha // b^\alpha$ y $x^\alpha // b^\beta$, respectivamente. El cambio de percepción inducido por el entorno se vuelve relevante en el intervalo de valores x^α para los cuales los dos cambios (curvas verde y naranja) son desiguales, produciendo así un desequilibrio neto.

deriva del procedimiento de escalera empleado para acercarse al estímulo emparejado, ya que para algunos colores de prueba, ni el ser humano ni los sujetos simulados pueden seleccionar colores que (en su experiencia subjetiva) son desplazados por la inducción del entorno fuera de las dos opciones ofrecidas. El cambio inducido por el entorno se vuelve significativo en el intervalo de valores objetivo x^α en los que el empuje/tirón producido por uno de los entornos no es compensado por el otro, es decir, donde el verde y las líneas naranjas difieren. Las simulaciones reprodujeron cualitativamente los datos medidos.

3.4. Discusión

En este capítulo, evaluamos la hipótesis de que la noción de distancia requerida para modelar la inducción cromática a través de la ecuación 2.34 es la obtenida mediante la me-

dición de los umbrales de discriminación. Si existe una única noción de distancia que permite describir diversos experimentos, uno puede sospechar que el espacio de colores realmente posee una geometría natural, subyacente en muchos –si no todos– los cálculos implicados en la transformación de estímulos de entrada en respuestas conductuales. Por lo tanto, tiene sentido estudiar la geometría del espacio de color, porque dicha geometría no es idiosincrática de tareas específicas: permanece invariable en una variedad de paradigmas.

Trabajos anteriores [10, 48, 59] habían demostrado que, cuando se representaba el color en las coordenadas de contraste de cono, los ejes principales de los elipsoides de discriminación estaban alineados con los ejes de coordenadas. En estas coordenadas, el tensor métrico se puede descomponer como una suma directa y, por lo tanto, tiene curvatura cero. Cabe mencionar, sin embargo, que existen otros estudios previos en los que se asumió que la curvatura era negativa o que cambiaba de signo en todo el espacio de color. Por ejemplo, Resnikoff[8], que más tarde fue seguido por Lenz [76] y Farup [77], tenía razones teóricas para considerar la hipótesis de una geometría hiperbólica. Su teoría se basaba en la premisa de que el espacio de colores tenía que ser homogéneo con respecto al grupo lineal general de transformaciones, conjectura que inspiró estudios adicionales [40, 41, 78, 79]. El análisis matemático de Resnikoff demostró que, como consecuencia, las clases de equivalencia se ven obligadas a ser lineales, es decir, subespacios afines del espacio 6-dimensional $\mathcal{S} \times \mathcal{B}$, como se muestra en la figura 3.3B. La homogeneidad y la contractilidad del espacio de colores postulado por Resnikoff permiten solo dos geometrías: hiperbólica (curvatura negativa) y plana (curvatura nula). Sin embargo, la conjectura de Resnikoff todavía necesitaba verificación experimental. Las clases lineales predicen umbrales constantes para el *Experimento II*, lo cual es claramente refutado por las Figs. 3.4 y 3.4. También predicen una función de matcheo lineal para el *Experimento III*, lo cual es refutado por la Fig. 3.8. Nuestros experimentos, por lo tanto, refutan la hipótesis de homogeneidad propuesta por Resnikoff, respondiendo así a la pregunta planteada por Provenzi [9, 80]. Sin embargo, nuestra propuesta puede entenderse como una generalización de las ideas de Resnikoff. Su hipótesis de homogeneidad afirmaba que el espacio de colores tenía una simetría específica, lo que le permitía reducir drásticamente la gama de posibles estructuras con las que se podía dotar el espacio. Hemos refutado la estructura lineal, rechazando así su elección específica de simetría, pero seguimos apoyando la idea de la existencia de una simetría en el espacio de colores. En su lugar, hipotetizamos que la inducción adopta la forma más simple compatible con la métrica determinada por los experimentos de discriminación, es decir, que sea radial, isotrópica y homogénea.

Es importante destacar que la transformación que da lugar las coordenadas perceptuales es significativamente diferente para diferentes observadores, lo que implica que no existe un sistema de coordenadas único que sea perceptualmente uniforme para todos los tricrómatas. Este hallazgo está en línea con la variabilidad de sujeto a sujeto predicha por derivaciones teóricas en experimentos de discriminación [48], la variabilidad de población en experimentos de matcheo de colores [70, 81–86] y estudios experimentales sobre memoria cromática

[87]. También es consistente con los recurrentes intentos fallidos de definir un sistema de coordenadas único percibido como perceptualmente uniforme por todos los observadores.

Las coordenadas perceptuales se definieron únicamente a partir de los umbrales de discriminación medidos con un solo entorno fijo (*Experimento I*) y no contienen parámetros derivados de los umbrales de discriminación o inducción para otros entornos (*Experimentos II y III*). En estas coordenadas, los representantes uniformes yacen equiespaciados. Para verificar si las hipótesis de homogeneidad e isotropía son válidas, realizamos los *Experimentos II y III*. En el *Experimento II*, mostramos que, en las coordenadas perceptuales, la función $t'(|x_i - b_i|)$ es capaz de describir experimentos de discriminación en los que el estímulo difería del entorno, a lo largo de ambos ejes cromáticos. (Figura 3.5). Es importante destacar que en las coordenadas perceptuales, $|x_i - b_i|$ es la distancia euclíadiana. Otros sistemas de coordenadas, en cambio, produjeron datos que no podrían describirse bien con una ley universal. Estos resultados se limitaron a las regiones del espacio de color en las que x se mantuvo bastante cerca de b . Por lo tanto, del *Experimento II* sólo fue posible obtener una aproximación lineal de $1/t'(d)$. Dado que los umbrales de discriminación aumentan a medida que aumenta la distancia cromática entre el estímulo y el entorno, la gama de experimentos de discriminación que se pueden realizar con un entorno contrastante es limitada. Esta limitación puede mejorarse con el *Experimento III*, en el que se requería del observador una coincidencia de percepción, en lugar de una discriminación. Los resultados del matcheo, una vez más, se revelaron más universales cuando se muestran en las coordenadas perceptuales que en las coordenadas de contraste de cono (Figura 3.7).

El mayor rango de distancias explorado en el *Experimento III* nos permitió reunir evidencia sobre diferentes funciones candidatas $1/t'(d)$. Los resultados del *Experimento II* contradecían la conjetura de Resnikoff de clases lineales y, por lo tanto, de umbrales que permanecían constantes cuando el entorno se alejaba del estímulo. La hipótesis que sigue en simplicidad supone que los umbrales crecen linealmente con d . Sin embargo, esta suposición implica que $t(d)$ crece indefinidamente de manera logarítmica, lo que significa que el desplazamiento $t(d) - d$ producido por el entorno cambia de signo, un comportamiento no observado experimentalmente. La alternativa que sigue en simplicidad es que después de una tendencia lineal inicial, los umbrales se desaceleran y lo hacen lo suficientemente rápido como para forzar al desplazamiento perceptual $t(d) - d$ a saturarse para grandes distancias. Una forma sencilla de modelar este comportamiento es con umbrales que se acercan exponencialmente a su límite superior. La comparación entre estas dos opciones dio un resultado ligeramente mejor para el modelo exponencial. Este modelo también fue capaz de reproducir la secuencia temporal de elecciones de sujetos, como se ilustra en la Fig. 3.8. Por lo tanto, concluimos que el efecto de los entornos sobre el color percibido de los estímulos se puede modelar con la ecuación 2.34, con una noción de distancia que se adapta individualmente a cada observador y se caracteriza por la estructura de las diferencias apenas perceptibles. El cambio de percepción $t(d) - d$ podría ajustarse bien mediante una ley simple que se satura

exponencialmente para grandes distancias.

La universalidad implícita en la Ec. 2.34 sugiere que el mismo mecanismo por el cual el entorno b_1 modifica el color percibido del estímulo x_1 está activo cuando el entorno b_2 modifica el color percibido del estímulo x_2 . Es probable que este mecanismo se implemente mediante conexiones de retroalimentación lateral o conexiones feedforward convergentes a las interacciones moduladoras en las neuronas visuales [88–90] y puede ser el mismo mecanismo subyacente a los cambios perceptuales en diferentes modalidades [13]. Si un solo mecanismo fisiológico es responsable de la inducción observada en diferentes regiones del espacio de color, entonces las coordenadas perceptuales son probablemente el sustrato sobre el que operan los procesos sinápticos que instancian la inducción. Esta hipótesis implicaría que las coordenadas perceptuales representan señales que realmente existen en el cerebro, y no solo una construcción matemática.

Las validez de las conclusiones extraídas de nuestros experimentos puede afirmarse sólo lejos de los bordes del espacio de colores, dado que son las regiones que pudimos explorar con el monitor. El espacio de colores está confinado dentro de un cono, cuyos bordes corresponden a los colores máximamente saturados. Estos colores no pueden ser generados con los espectros anchos que producen las pantallas de computadora. La existencia de bordes refuta la validez de la hipótesis de homogeneidad en todo el espacio de colores. En particular, la interpretación de la inducción cromática como la acción de un campo repulsivo es difícil de sostener cuando el color sobre el que actúa está en el borde mismo del espacio, ya que la repulsión radial lo empujaría fuera del espacio. Mencionamos aquí tres posibles formas en que nuestro modelo podría extenderse a los bordes del espacio de colores, recalando que para dirimir entre ellas, son necesarios nuevos experimentos que incluyan colores máximamente saturados. Una posibilidad es que la inducción cromática disminuya hasta hacerse cero a medida que el color sobre el que actúa se acerca al borde del espacio. Otra posibilidad es que la métrica se vuelva singular cerca de los bordes. Si los umbrales tienen a cero suficientemente rápido a medida que nos aproximamos a un color saturado, el borde del espacio se “iría al infinito” en coordenadas perceptuales. Una tercera alternativa sería que la inducción cromática aún se mantenga en el borde, de modo que los colores sean efectivamente empujados fuera del espacio *generado por representantes uniformes*. Esto implicaría que la suposición de que todas las clases de equivalencia contienen un representante uniforme se rompe en los bordes del espacio, y que los colores más saturados desde el punto de vista perceptual siempre corresponderían a un estímulo y un entorno no coincidentes. Esto sería compatible con la supuesta existencia de los llamados colores químéricos o hiperbólicos [91].

Concluimos que el espacio de colores puede estar dotado de una noción de distancia y un sistema de coordenadas que revelen de manera transparente la simetría de los efectos perceptuales. La noción de distancia proviene de experimentos de discriminación en los que se utilizan diferencias apenas perceptibles para definir el tensor métrico. Esperamos que estos resultados motiven intentos similares en otros espacios perceptuales y otras modalidades

Capítulo 4

Simetría de rotación en experimentos de discriminación

“La madurez del hombre es haber vuelto a encontrar la seriedad con que jugaba cuando era niño”

— Friedrich Nietzsche, Más allá del bien y del mal

En el capítulo anterior vimos que, con una adecuada definición de la distancia entre colores, los experimentos de discriminación y matcheo realizados confirman las hipótesis de homogeneidad e isotropía del espacio, y permiten caracterizar la métrica de cada sujeto, así como los parámetros de la inducción cromática. Por una cuestión de tiempo, nuestros experimentos se restringieron a explorar casos en los que tanto los estímulos comparados, como los entornos utilizados, eran colores de los ejes cromáticos en las direcciones S y $L-M$. El principal objetivo de este capítulo es mostrar que las simetrías propuestas en nuestro modelo no se restringen a los ejes, sino que se extienden a todo el plano generado por estos ejes, es decir, el subespacio de luminosidad $L + M = \text{constante}$. Para ello, analizaremos los resultados de un experimento realizado por Krauskopf y Gegenfurtner (KG)[10] que describimos a continuación, y en las secciones que siguen.

Los autores de este experimento midieron las elipses de discriminación cromática en el plano isoluminiscente, en las condiciones descritas por los protocolos I y II en la Secc. 2.4. Las variaciones de los umbrales observadas a lo largo de los ejes cromáticos fueron interpretadas en términos de mecanismos de oposición, también llamados “mecanismos de segundo orden”, ya que se interpretan como resultantes de un post-procesamiento de la actividad de

los fotorreceptores, es decir, de la actividad de las neuronas río abajo en las sucesivas capas que componen la retina. Estos mecanismos combinan la actividad de conos M y L , y de conos S con la combinación $L + M$ (que se mantiene constante en el experimento), por lo cual, los ejes cromáticos $L - M$ y S tienen un sustento fisiológico en términos de esta teoría: los dos ejes representan canales independientes de procesamiento de la información.

El trabajo de KG, sin embargo, no se restringe a los ejes S y $L - M$: las elipses de discriminación se miden también en otras regiones del plano isoluminiscente. Sus resultados experimentales, por ende, nos dan la oportunidad de evaluar si nuestra descripción de la inducción cromática es también válida fuera de los ejes cromáticos. De hecho, KG concluyeron que la modulación de las elipses de discriminación es máxima a lo largo de los ejes cromáticos, y por lo tanto compatible con los mecanismos de oposición, pero que también existen efectos menores a lo largo de otras direcciones, que ellos interpretan como de orden superior. En este capítulo, mostramos que sus datos experimentales (sobre y fuera de los ejes) pueden explicarse como producto de la simetría de rotación de la inducción cromática entre el estímulo y el entorno. En nuestro modelo, la inducción se supone radial, por lo cual, las direcciones cardinales no tienen un rol privilegiado. Nuestra hipótesis de isotropía permite predecir la forma de las elipses en cualquier dirección, a partir de los resultados obtenidos sobre dos direcciones independientes (típicamente los ejes cromáticos, pero no necesariamente). Por ende, podemos explicar los resultados del experimento de KG sin necesidad de invocar (pero tampoco sin motivos para refutar) mecanismos de oposición que valgan únicamente sobre los ejes cardinales.

4.1. Experimento de Krauskopf y Gegenfurtner (KG)

Una de las hipótesis en que se basó el capítulo 2 es que el tensor métrico puede descomponerse como suma directa (secc. 2.5.4). El sustento empírico de esta hipótesis fue dado por Krauskopf y Gegenfurtner (KG). A continuación describimos los experimentos por ellos realizados.

4.1.1. Discriminación en el protocolo I

Los experimentos KG son muy similares a los experimentos de discriminación explicados en el capítulo 3. En una pantalla se presenta un fondo coloreado uniformemente. En el centro de la pantalla hay un punto de fijación. Dispuestos en las cuatro esquinas con respecto

a este punto, se presentan cuatro círculos coloreados de tamaño angular de 2° por $150\ ms$. Tres de ellos son de un cierto color de referencia, mientras que uno de ellos es de un color variable, ligeramente distinto. El sujeto debe responder en qué posición apareció el parche con una coloración diferente. En el primer set de experimentos, la cromaticidad del fondo sobre el que se realiza la discriminación es igual a la referencia (ver Fig, tal como en el Experimento I, descrito en la sección 3.2.3 (ver panel A de la Fig. 4.1). En contraste con nuestro experimento, los autores realizaron mediciones en todo el plano cromático, obteniendo para 9 puntos las elipses de discriminación completas. Esto nos permite estudiar la estructura de las elipses en todo el plano, ampliando nuestro análisis de lo que ocurre a lo largo de los ejes principales. Los resultados son reportados en coordenadas $('L - M^U, 'S^U)$, cuyo origen es un estímulo neutral de referencia con coordenadas de Mcleod Boynton: $(r = \frac{L}{L+M} = 0,667, b = \frac{S}{L+M} = 0,016)$ y luminancia de $37\ cd/m^2$. Para construir las coordenadas $(L - M^U, S^U)$ (omitiremos las comillas de aquí en adelante) se reescalan los ejes cromáticos usuales $L - M$ y S de forma tal que los umbrales de discriminación valgan 1 en el origen, es decir $\varepsilon_{SU}^I = \varepsilon_{L-MU}^I(0) = 1$. Por este motivo, las denominaremos coordenadas umbral¹. Nótese que a diferencia de las coordenadas perceptuales (secc.2.3), las coordenadas umbral se definen mediante un re-escalamiento lineal de las activaciones de conos que no tiene en cuenta la variación de los umbrales en el espacio cromático.

En el panel B de la Fig. 4.1 puede verse que las elipses de discriminación están alineadas con los ejes cromáticos. Este hecho es la base experimental sobre la cual descansa la hipótesis II de la sección 3.3.1, necesaria para tratar a los ejes S y $L-M$ como geodésicas del espacio de colores. Los autores evaluaron esta hipótesis de la siguiente forma. Realizaron un primer ajuste de la longitud de los semiejes fijando la orientación de las elipses y luego otro ajuste dejando la orientación libre, agregando de esta manera 9 parámetros al mismo. Lo que observaron fue que la disminución en el error medio del ajuste ($\sqrt{\chi^2}$) fue solo del 15 %, por lo que dentro de ese rango parece razonable aceptar la hipótesis como una aproximación que nos permite simplificar el análisis posterior. Una vez que se determina la orientación de las elipses, queda por analizar cómo varían los semiejes a lo largo del plano. Los autores verifican que los umbrales en la dirección S crecen linealmente al aumentar la coordenada S (Panel C de la Fig. 4.1). La recta que mejor ajusta los datos experimentales viene dada por la ecuación $\epsilon_{SU}(S^U) = 1,03 + 0,0357 S^U$. En el eje $L-M$ los umbrales se mantienen aproximadamente constantes (Panel D de la Fig. 4.1). Además, observan que los umbrales en la dirección S se mantienen constantes al variar la coordenada $L - M^U$ y viceversa. Concluyen a partir de esto que no hay interacción entre los ejes y por lo tanto el tensor métrico puede descomponerse como una suma directa de ambos ejes.

¹Threshold coordinates en el texto original.

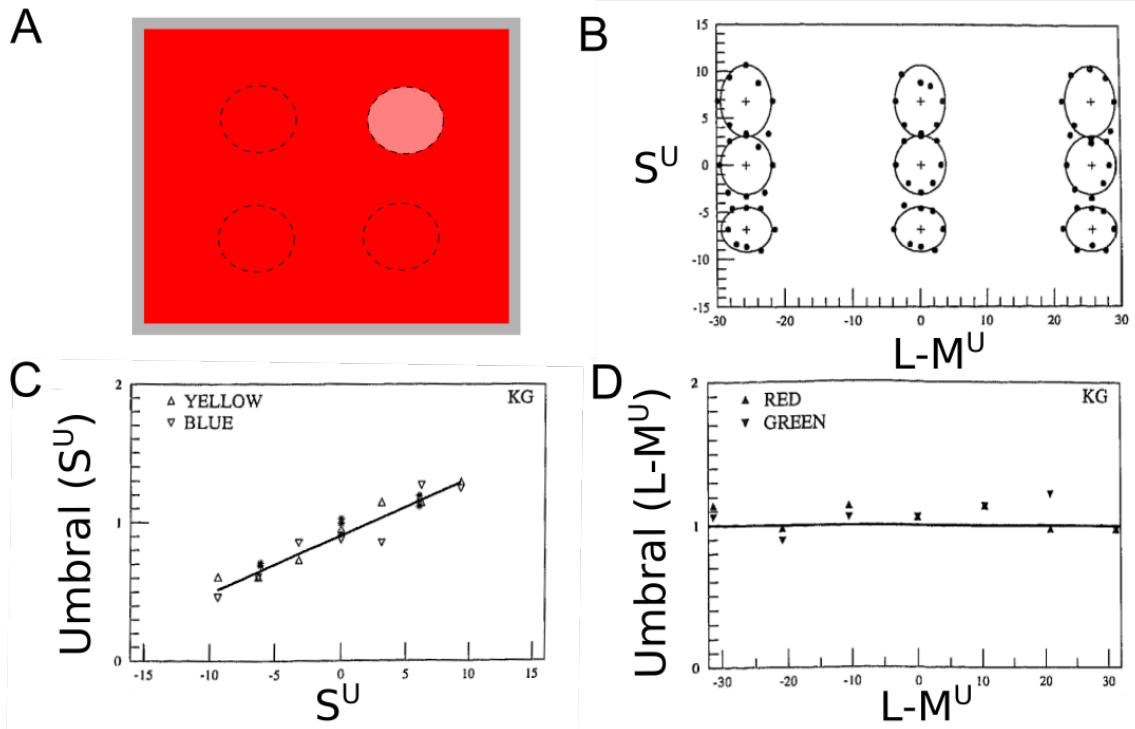


Figura 4.1: Experimento KG I. A: Cuatro estímulos circulares son presentados sobre un fondo coloreado. Tres de los círculos poseen un color de referencia, igual al color del fondo, mientras que uno de los estímulos posee un color ligeramente diferente. B: Umbrales de discriminación en el plano $L + M = cte$. graficadas en el plano $(L - M^U, S^U)$. Las elipses corresponden a un ajuste realizado bajo la hipótesis de que los semiejes están alineados con los ejes cardinales. Las mismas están multiplicadas por un factor 3 para mejorar su visualización. C y D: Dependencia de los umbrales en el eje S ($L - M$) a lo largo del mismo. Imágenes B, C y D tomadas de [10].

En base a estos resultados, el tensor métrico J^I que se obtiene de este experimento adquiere la siguiente forma en las coordenadas umbral

$$J^I(L - M^U, S^U) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - \alpha S^U \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\alpha^2) \quad (4.1)$$

donde $\alpha = 2 \times 0,0357$ es obtenido a partir de la variación de los umbrales en el eje S. Debido a que la pendiente es pequeña respecto al valor absoluto del umbral, trataremos el término lineal como una corrección a primer orden en desarrollo de Taylor, de forma tal que para cualquier cantidad que calculemos despreciaremos correcciones a orden $\mathcal{O}(\alpha^2)$ o mayor. Obtenido el tensor métrico podemos calcular las coordenadas perceptuales asociadas a él. Debido a la forma sencilla que posee, el cálculo de las mismas es directo:

$$x_1^I = L - M^U \quad (4.2)$$

$$x_2^I = S^U - \frac{\alpha}{2} S^U {}^2 \quad (4.3)$$

tal como se hizo en la sección 2.5.3. En estas coordenadas, el tensor métrico adquiere la forma $J^I(x_1^I, x_2^I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4.1.2. Discriminación en el protocolo II

El siguiente objetivo del experimento fue caracterizar la modificación de los umbrales al discriminar colores sobre un entorno con cromaticidad fija y distinta a la de los discriminandos. Esto se corresponde con lo que hemos denominado protocolo II en la sección 2.4.2. El método experimental es el mismo que el descrito en la sección anterior, con la única diferencia de que ahora la cromaticidad del fondo es distinta, tal como se muestra en el panel A de la Fig. 4.2. Nuevamente, la exploración se hizo en diversas direcciones del plano isoluminiscente.

A partir de lo observado los autores hacen las siguientes afirmaciones. En primer lugar, a lo largo de los ejes cardinales los umbrales de discriminación en la dirección cromática entorno-estímulo crecen proporcionalmente a la distancia entre entorno y estímulo, tal como se ve en el panel C de la Fig.4.2. En segundo lugar, observan que los umbrales en la dirección transversal al eje entorno-estímulo tienen un crecimiento mucho menor, manteniéndose prácticamente constante en el rango de medición (panel D). Estas dos observaciones se hicieron fijando el fondo y variando la cromaticidad del estímulo a lo largo de los ejes S y L-M, midiendo los umbrales en el eje de variación (dirección radial) y en la dirección transversal. Finalmente, los autores midieron las elipses de discriminación cromática para estímulos que yacen en 16 direcciones cromáticas distintas. De este modo, lograron describir la dependencia angular de las elipses, como se ve en en el panel B de la Fig.4.2.

Los autores centran la discusión en la pregunta de si los datos permiten discernir entre dos formas posibles de computar la información cromática: por un lado, la hipótesis de canales independientes, según la cual cada canal de oposición cromática, $S - (L + M)$ y $L - M$, actúa de forma independiente y por el otro lado la hipótesis de que participan mecanismos de orden mayor que involucran combinaciones de estos canales. Los autores argumentan que los resultados de los paneles C y D de la Fig. 4.2 apoyan la primera hipótesis, ya que la variación de los umbrales es claramente mayor a lo largo del eje en el que se encuentra el estímulo que sobre la dirección transversal, lo cual sería compatible con la idea de que cada canal actúa independientemente. Por otro lado, la independencia de canales implicaría que las elipses deberían tener sus semiejes orientados a lo largo de los ejes cardinales. Esto entra en contradicción con los resultados del panel B, donde las elipses parecen más bien adoptar una orientación radial. En vista de esto, los autores afirman que los resultados no son concluyentes para definir por una de las dos hipótesis. A continuación, mostraremos que mediante nuestro modelo podemos reproducir ambos resultados experimentales con una precisión razonable, a partir de suponer que el mecanismo de inducción actúa en la dirección estímulo-entorno y no específicamente a través de los canales de oposición convencionales.

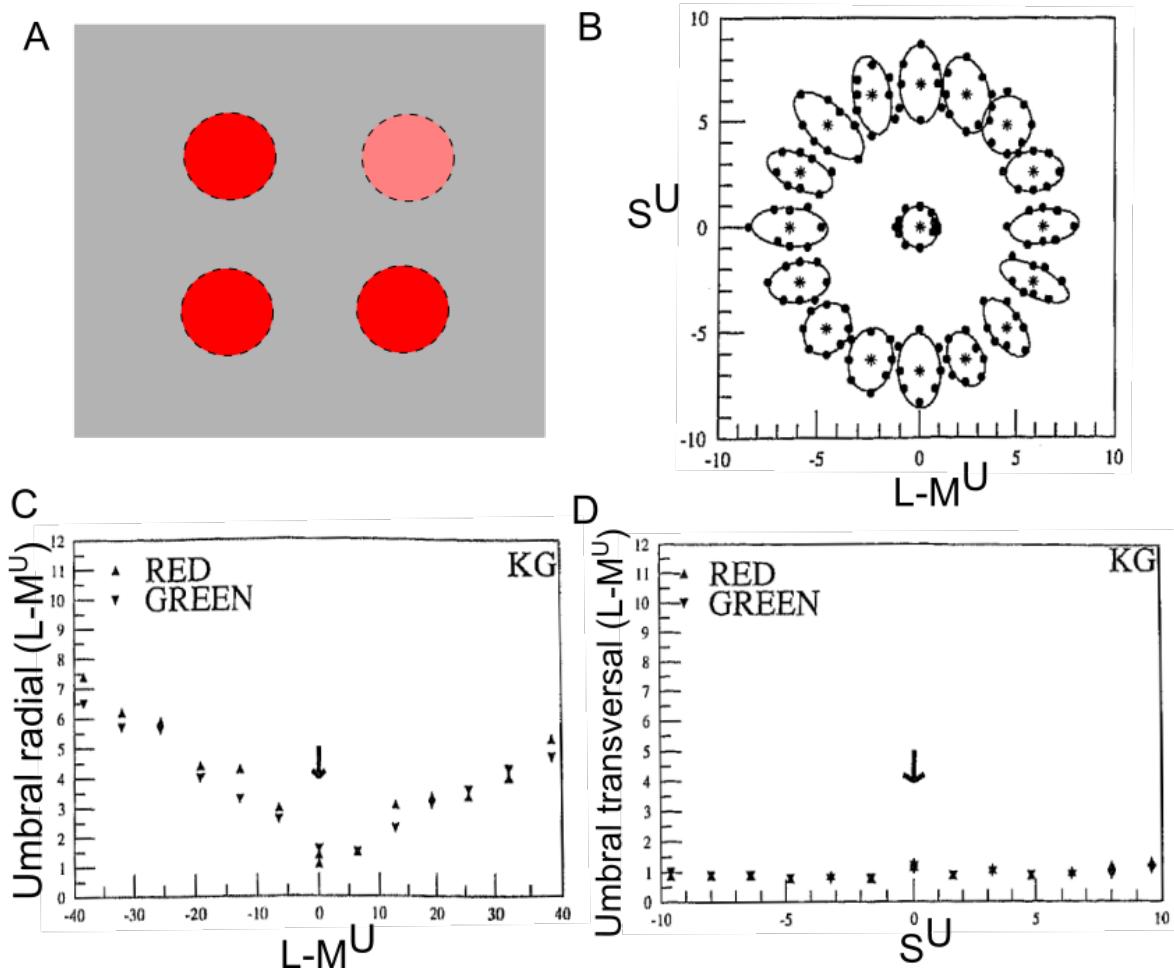


Figura 4.2: Experimento KG II. (A) Esquema experimental en el cual el sujeto debe responder cuál de los cuatro círculos posee un color distinto a los otros tres en presencia del fondo. (B) Elipses de discriminación a lo largo de 16 direcciones cromáticas. (C) Umbrales de discriminación radiales en el eje $L-M^U$. (D) Umbrales de discriminación transversales con los estímulos sobre el eje S^U y la discriminación realizada sobre variaciones en el eje $L-M^U$. En (C) y (D) la flecha indica la cromaticidad del entorno.

4.1.3. Aplicación del modelo

Como se explicó en el capítulo 2, consideramos que el efecto de la inducción cromática es modificar el mapeo entre estímulo y perceptor, de tal forma que si la distancia entre el color $[b // b]$ y el color $[x // x]$ es $r = d(x, b)$, entonces cuando x aparece en un entorno b , la distancia entre $[x // b]$ y $[b // b]$ es $t(r) = d(\Phi_b(x), b)$, lo cual surge de suponer que el efecto es radial, isótropo y homogéneo. En las coordenadas perceptuales centradas en el color del fondo (lo que implica que $b_i = 0$) podemos reescribir el diferencial de distancia entre estímulos en presencia del fondo b en las coordenadas polares asociadas (r, θ) (ver sección 2.5.4) como:

$$d\ell_b^2 := d(\Phi_b(x), \Phi_b(x + dx)) = \left(\frac{dt}{dr}(r) \right)^2 dr^2 + t^2(r) d\theta^2 \quad (4.4)$$

Ahora bien, las coordenadas perceptuales x_i^I obtenidas del experimento anterior están relacionadas con las coordenadas perceptuales de los representantes uniformes x_i por la ecuación $x_i^I = t'(0)x_i$ (ver sección 2.5.3). Por lo tanto, si tomamos la coordenada radial $r^I = t'(0)r$ y reescribimos la métrica, obtenemos que

$$d\ell_b^2 = \left(\frac{dt^I}{dr^I}(r) \right)^2 (dr^I)^2 + (t^I(r^I))^2 d\theta^2, \quad (4.5)$$

donde hemos definido $t^I(r) = t(r/\frac{dt}{dr}(0))$. Esto implica la condición $\frac{dt^I}{dr^I}(0) = 1$, la cual equivale a decir que los umbrales de discriminación alrededor del color del fondo conforman un círculo de radio 1 en estas coordenadas. Igualando la distancia diferencial dada por la Ec. 4.5 a 1 obtenemos la definición de los umbrales diferenciales. Para calcular los umbrales radiales – es decir, cuando la variación del estímulo $\varepsilon_r^{II}(r)$ es en la misma dirección que del estímulo con respecto al fondo–, basta con tomar $d\theta = 0$, de donde obtenemos que

$$1 = \left(\frac{dt^I}{dr^I}(r^I) \right) \varepsilon_r^{II}(r), \quad (4.6)$$

por lo que los umbrales son proporcionales a la inversa de $\frac{dt^I}{dr^I}$. En el caso en que los desplazamientos son perpendiculares a la dirección del estímulo, tomamos $dr^I = 0$. Dado que las cambios en coordenadas perceptuales se corresponden con cambios de la distancia perceptual, tenemos que $\varepsilon_{\perp}^{II}(r^I) = r^2 d\theta^2$. Por lo tanto, la ecuación 4.5 se reduce a

$$1 = \left(\frac{t^I}{r^I} r^I d\theta \right) = \left(\frac{t^I}{r^I} \right) \varepsilon_{\perp}^{II}(r^I). \quad (4.7)$$

Como podemos ver, los umbrales de discriminación están determinados por la función $t(r)$. Para calcularla, utilizamos los umbrales radiales medidos para distintos estímulos, a lo largo de ambos ejes y también considerando 2 fondos distintos. Integrando la ecuación 4.6 obtenemos que

$$t^I(r^I) = \int_0^{r^I} \frac{1}{\varepsilon_r^{II}(r^I)} dr^I, \quad (4.8)$$

por lo que es posible calcular $t^I(r^I)$ de la integración numérica de los umbrales. El resultado puede verse en la Fig. 4.3. El excelente acuerdo entre el modelo y los datos implica que la propuesta de umbrales que inicialmente crecen de manera lineal, y posteriormente saturan exponencialmente no solo es adecuada para nuestras mediciones, sino también para las de KG. El modelo consiste en suponer un crecimiento lineal de la cantidad $t(r) - r$ y una

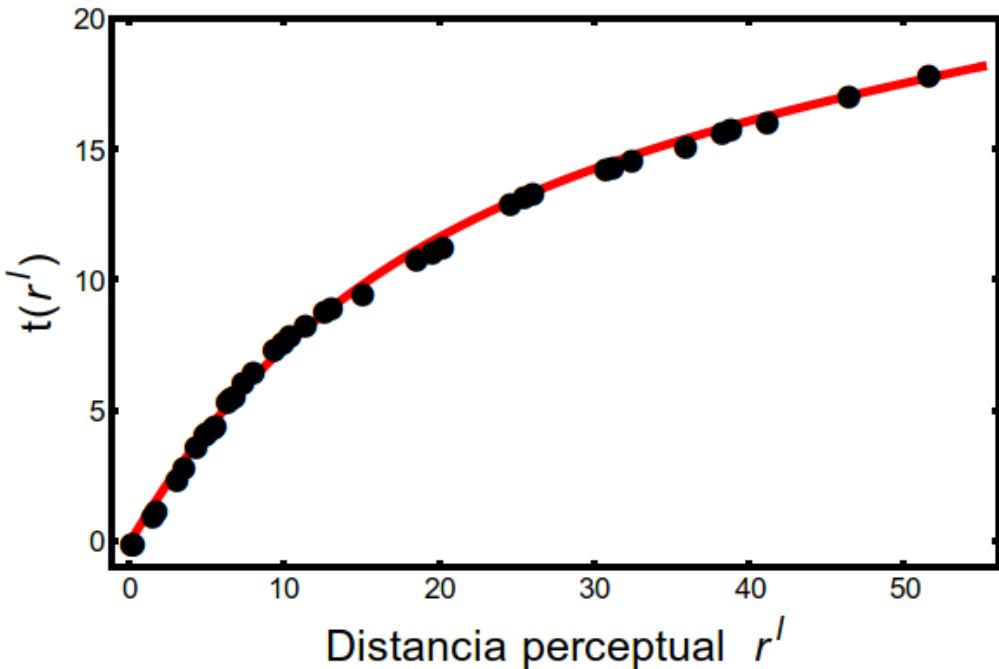


Figura 4.3: Transformación radial inducida por el fondo. Los puntos corresponden a la integración numérica de los umbrales radiales y la línea roja es el ajuste del modelo dado por la Ec. 4.9.

posterior saturación exponencial. La fórmula explícita es:

$$t^I(r^I) = \frac{r^I + \kappa^I \left(1 - e^{-\frac{r^I}{\ell^I}} \right)}{1 + \frac{\kappa^I}{\ell^I}}, \quad (4.9)$$

donde κ^I y ℓ^I son parámetros a ajustar. Ambos parámetros poseen unidades de distancia perceptual expresada en las coordenadas x^I , correspondiendo κ^I a la magnitud máxima de la inducción y ℓ^I a la distancia característica de acción. Los valores óptimos obtenidos del ajuste son $\kappa_I = 120 \pm 20$ y $\ell^I = 14,1 \pm 0,5$, de donde podemos calcular también $t'(0) = 9,5$.

Cabe preguntarse hasta aquí qué hemos ganado mediante nuestro modelo, pues dado que la función $t(r)$ fue ajustada con los datos experimentales, necesitamos evaluar la utilidad de nuestro modelo a partir de su capacidad de unificar distintos resultados. En primer lugar, queremos hacer notar que los puntos graficados en la Fig. 4.3 se obtuvieron mediante la integración numérica de los datos de umbrales medidos a lo largo de ambos ejes cromáticos, mientras que el eje x a su vez corresponde a la distancia perceptual que es calculada mediante los resultados del experimento previo. *A priori*, no hay razón para que los resultados a lo largo de distintos ejes deban tener el mismo comportamiento - de hecho, en el experimento I eran diferentes-. Sin embargo, una vez que reescribimos los umbrales en las coordenadas perceptuales del sujeto, el hecho que los umbrales para ambos ejes tengan el mismo comportamiento es evidencia de la isotropía de la inducción cromática. En particular, para el

eje S, podemos calcular cómo cambia la capacidad del modelo de describir los umbrales al escribirlos en las coordenadas originales o en las coordenadas perceptuales. Evaluando los ajustes en ambos casos, vemos que hay una reducción del 45 % en el valor del χ^2 cuando la función $t^I(r^I)$ es ajustada usando la distancia perceptual en lugar de utilizar directamente el valor de la coordenada S^U .

En segundo lugar, para ajustar la función t^I , solo usamos los umbrales radiales. Sin embargo, con la t^I ajustada, podemos también inferir características de los umbrales transversales. En la Fig. 4.4, mostramos ambos resultados. Como es de esperarse los datos radiales se reproducen adecuadamente con el modelo, ya que fueron utilizados para su ajuste. En cambio, los umbrales transversales no fueron utilizados y si bien el acuerdo entre el modelo y los datos no está tan claro, sí queda claro que el modelo predice correctamente que la variación de los umbrales transversales, que son proporcionales a $\frac{r^I}{t(r^I)}$, es significativamente menor que la de los radiales.

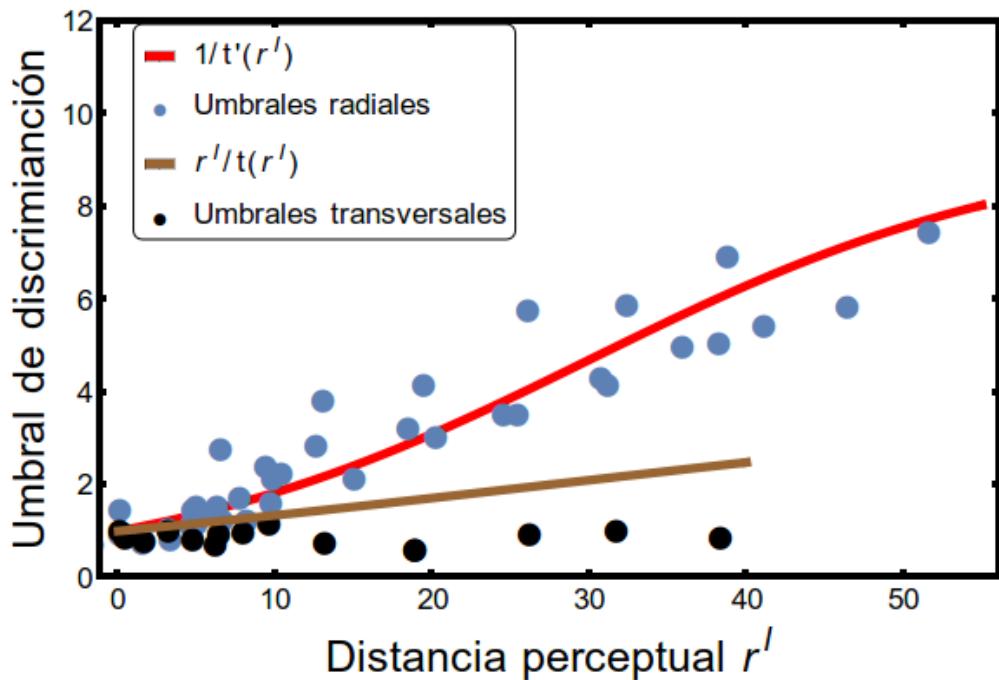


Figura 4.4: Comparación entre el modelo ajustado y los umbrales de discriminación radiales y transversales.

Por último, fijada la dependencia radial mediante el ajuste de κ y ℓ , queremos evaluar la capacidad de nuestro modelo para predecir la orientación de las elipses. La forma funcional de la Ec.4.9 implica que t^I depende de r^I de manera sub-lineal, es decir $\frac{dt^I}{dr^I}(r^I) < t^I(r^I)/r^I$. Esto implica que el semieje mayor de las elipses de discriminación apuntará en la dirección radial. Indagamos entonces qué diferencia hay en la descripción de los datos bajo la hipótesis de isotropía (0 parámetros adicionales) y el ajuste libre de la orientación del semieje mayor de cada una de las elipses en los datos originales (16 parámetros adicionales). Repetimos

el análisis utilizado por los autores para evaluar la alineación de las elipses en el primer experimento. En este caso, comparamos los datos originales, ajustando la orientación de cada elipse de forma independiente, con el resultado de transformar los datos a las coordenadas perceptuales y suponer una acción del fondo con simetría de rotación, tal como se describe en la ecuación 4.5. El resultado puede observarse en la figura 4.5. La disminución del error ($\sqrt{\chi^2}$) mediante el ajuste independiente de las orientaciones fue solo del 6 %, con lo cual podemos afirmar que la hipótesis de que las elipses apuntan radialmente en las coordenadas perceptuales es una buena aproximación para explicar los datos.

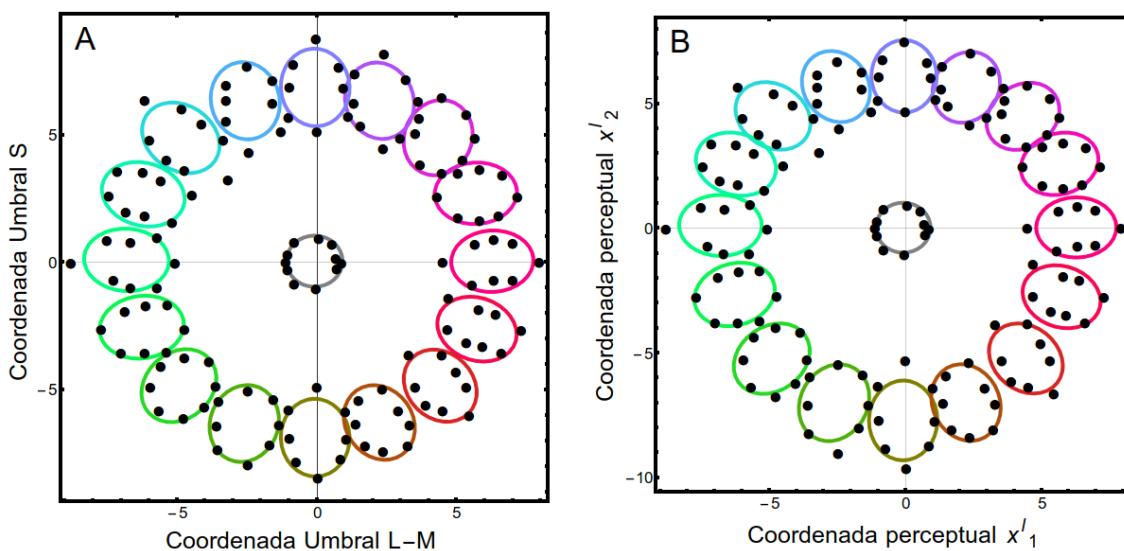


Figura 4.5: Elipses de discriminación obtenidas cuando (A) la orientación de cada elipse es ajustada independientemente y (B) transformando las elipses a coordenadas perceptuales y suponiendo radialidad (sin parámetros libres).

4.2. Discusión

En este capítulo mostramos la evidencia experimental colectada por KG sobre la descomposición del tensor métrico en los ejes S y L-M. Esta descomposición fue una hipótesis importante en la construcción de nuestro modelo. En el análisis de los datos medidos, los autores de [10] ajustaron una elipse alrededor de cada color de referencia utilizado (3 parámetros por elipse), y supusieron que los parámetros de las distintas elipses eran independientes. Nosotros re-analizamos sus datos en el marco de nuestro modelo, logrando una síntesis importante, ya que ajustamos todas las elipses simultáneamente utilizando tan solo dos parámetros. El primer paso fue aproximar el tensor métrico en todo el plano cromático, utilizando el primer experimento de KG. Luego utilizamos la hipótesis de que la inducción cromática es simétrica y homogénea para encontrar una fórmula analítica que describe cómo

varían los umbrales en la dirección radial. Esta fórmula contiene únicamente dos parámetros que describen el valor asintótico de la inducción cromática y la distancia característica con que se alcanza dicha saturación. Ajustando la fórmula a los datos del segundo experimento de KG, obtuvimos los valores numéricos de los parámetros. Con esos parámetros, graficamos la dependencia esperada para los umbrales en la dirección transversal (sin ningún ajuste adicional), y obtuvimos un comportamiento ligeramente creciente, compatible con el resultado experimental. Cabe destacar que la información sobre el comportamiento de los umbrales transversales no fue utilizada para hacer el ajuste de los dos parámetros. A continuación, graficamos las elipses de discriminación originales (nuevamente, sin ningún ajuste adicional) y obtuvimos una descripción que, a todos los efectos prácticos, es casi tan buena como la que se obtiene ajustando cada elipse por separado. Concluimos entonces que la teoría desarrollada en los capítulos 2 y 3 describe adecuadamente el experimento de KG (que involucra a todo el plano isoluminiscente, y no únicamente a los ejes cardinales), consiguiéndose además una simplificación significativa en la descripción del comportamiento de los umbrales en distintas regiones del espacio.

Capítulo 5

Categorías cromáticas y percepción: Experimento MD

“Mirá que te como, hermano.”

— Emiliano “el Dibu” Martínez

¿Qué relación existe entre las categorías cromáticas - es decir, la partición lingüística que utilizamos para designar a determinadas regiones del espacio de colores - y la percepción de los colores? En una serie de trabajos [11, 12, 66, 92] Mollon y Danilova evalúan una versión un poco más concreta de esta pregunta. ¿Cuál es la relación entre categorías y discriminación cromática? ¿Es la discriminación mejor en la frontera entre categorías - por ejemplo, entre verde y azul - que dentro de una categoría? ¿Qué relación hay entre tonos puros y discriminación? Estas preguntas marcan la relevancia que adquiere la construcción de medidas adecuadas para la descripción de fenómenos perceptuales a la hora de estudiar su interacción con otros aspectos cognitivos, como por ejemplo el lenguaje. Nuestro objetivo es mostrar que en el marco de nuestro modelo, los resultados de los experimentos hechos por Mollon y Danilova (MD) pueden ser entendidos como un fenómeno puramente perceptual.

5.1. Lenguaje y Percepción

El lenguaje es uno de los mecanismos que los humanos utilizamos para describir nuestra experiencia consciente, por ejemplo, para compartir nuestros pensamientos e intenciones o

para comunicar lo que percibimos. La discusión en torno a la construcción del lenguaje y a la forma en que moldea nuestra representación del mundo es muy amplia y excede el objetivo de esta tesis. Aún así, vale la pena destacar algunos aspectos para poner de relieve el aporte que nuestro trabajo propone para esta discusión. Una de las ideas más discutidas en este área viene dada por la llamada Hipótesis de Sapir-Whorf [93], que en su forma fuerte afirma que los pensamientos y las categorías cognitivas de los sujetos vienen determinados por su lenguaje. Esta hipótesis ha sido producto de controversias y ha tenido fuertes críticas desde la lingüística [94] y la psicología experimental [95]. Al respecto, el lingüista Steven Pinker dice:

La idea según la cual el lenguaje sería equivalente al pensamiento es un ejemplo de lo que podría llamarse un “absurdo por convención”: una afirmación que va contra todo sentido común, pero a la cual cada uno adhiere porque se acuerda vagamente de haberla oído en alguna parte [...]. Todos tenemos esa experiencia de empezar a decir o escribir una frase, y de detenernos al darnos cuenta que eso no era exactamente lo que queríamos decir. Para que sintamos esa sensación, es necesario que ahí haya un “querer decir” que sea diferente de lo dicho. [...] Si los pensamientos dependiesen de palabras, ¿cómo se podría crear una nueva palabra?

(Pinker, 1999: 55-59)

Uno de los ejemplos paradigmáticos sobre los que se ha planteado la hipótesis de Sapir-Whorf es con respecto a las categorías cromáticas. Podríamos formular la pregunta como: ¿qué relación hay - si es que la hay - entre la forma en que se nombra a los colores, propia de cada lengua particular, y la forma en que se los percibe? Algunos disparadores históricos de esta pregunta son la ausencia de ciertos colores en textos antiguos, o la descripción de objetos con colores poco probables. Por ejemplo, en los poemas homéricos, *La Illíada* y *La odisea*, no se utiliza en ningún momento una palabra que refiera al color azul, y de hecho, el mar es descrito como de color *vino* oscuro, mientras que el cielo de color *bronce* [96]. A la vez, existe una enorme diferencia en la cantidad de términos de color (palabras monoléxicas que denominan colores) que posee cada lengua. Algunas lenguas, poseen únicamente palabras para designar *blanco* y *negro* (o claro y oscuro), mientras que otras poseen decenas de ellas. Estos hechos motivaron a algunos pensadores a postular que estas diferencias lingüísticas determinan diferencias perceptuales [97], de forma tal que aquellas personas cuya lengua no posea palabras que distingan entre dos ciertos tonos, digamos por ejemplo azul y verde, tendrán menos capacidad de percibir esos colores como distintos. Al día de hoy, no hay evidencia empírica que sustente esta hipótesis. De hecho, hay resultados que la contradicen, como en [98], donde se muestra que no hay diferencias en la discriminación perceptual entre

hablantes de inglés y coreano.

Desde hace ya varios años, muchos estudios se han realizado en torno a lo que se denomina el relativismo lingüístico, que surge de una versión más débil de la hipótesis de Sapir-Whorf según la cual el lenguaje no determina, pero influye, en la forma de conceptualizar y percibir el mundo. En esta dirección, hay estudios que muestran que el lenguaje puede influir en los conceptos abstractos de espacio y tiempo, por ej. [99], donde se reporta una diferencia entre la representación mental del transcurrir del tiempo entre angloparlantes (horizontal) y mandarines (vertical), en concordancia con la direccionalidad de la escritura. También se reportó que el lenguaje distorsiona la memoria, modulando la respuesta de los sujetos en base a las palabras utilizadas en la pregunta [100].

Más controvertida es la discusión respecto de si el lenguaje tiene o no un efecto directo en la percepción. Hay múltiples estudios que han encarado esta pregunta con distintos métodos sin llegar a una respuesta concluyente. Por un lado, está claro que la cantidad de términos de color de una dada lengua determina la forma en que el sujeto categoriza los colores [101]. Otro ejemplo viene dado por [102], estudio en el que determinaron que el tiempo de respuesta¹ para diferenciar entre dos azules era mayor para angloparlantes, quienes identificaban ambos estímulos con la palabra *blue*, y rusos que poseían una palabra propia para cada uno –*goluboy* y *siniy*–. A su vez, otro estudio[103], muestra que los colores focales son bastante universales, encontrando que en 110 lenguas distintas los colores focales de las categorías se concentran alrededor de los prototipos que en inglés se denominan *white*, *black*, *red*, *green*, *yellow* y *blue*.

Este breve resumen está lejos de abarcar la totalidad de la discusión, pero nos da una idea respecto de la variedad de aspectos que conciernen a la relación entre lenguaje y percepción, una pregunta que permanece abierta. En este sentido, queremos destacar la relevancia de diseñar experimentos perceptuales que nos permitan construir medidas confiables a la hora de evaluar la influencia del lenguaje. Por esta razón, analizaremos una serie de estudios hechos por Danilova, Mollon et al [11, 12, 66, 92], a los cuales llamaremos experimentos MD, en donde plantean una relación entre los tonos puros (*unique hues*) y los mínimos de los umbrales en un experimento de discriminación. Los tonos puros están usualmente asociados a los prototipos o colores focales de las categorías cromáticas que define cada término de color.

En nuestro modelo, la localización de los mínimos puede explicarse únicamente como un efecto perceptual que depende del color del entorno y por lo tanto consideramos que su

¹En general, el tiempo de respuesta es tomado como un indicador de la dificultad que tiene un sujeto para resolver una tarea.

presencia no aporta evidencia de que el tamaño de los umbrales está determinado por la representación categórica del color.

5.2. Experimentos MD

Los experimentos MD involucran dos tipos de tareas. En primer lugar, un experimento de discriminación cromático con un protocolo tipo II. El esquema experimental se representa en el panel A de la Fig. 5.1. Dos estímulos son presentados sobre un fondo con una cromaticidad fija neutral y con un punto de fijación en el centro de la pantalla. Los autores se propusieron estudiar los umbrales de discriminación a lo largo de líneas ortogonales a la línea “amarillo-azul” (definida como el segmento, en coordenadas de MacLeod-Boynton, que une a los estímulos monocromáticos de longitudes de onda 476 y 576 nm.), la cual suponen que divide a los estímulos entre colores rojizos y verdosos. El eje vertical del diagrama de MacLeod-Boynton se reescaló de tal forma que esta línea tenga una pendiente de -45° . Seleccionaron entonces una serie de líneas con pendiente de 45° , las cuales intersecan a la línea amarillo-azul a un ángulo de 90° (ver panel B de la Fig. 5.1), y midieron los umbrales de discriminación a lo largo de cada una de estas líneas. El sujeto debía responder cuál de los dos estímulos era el “más rojo” (*redder*), entendido aquí como aquel que está más a la derecha en la línea correspondiente. El umbral de discriminación se definió como aquella región en la que la probabilidad de que el sujeto se equivocara fuera mayor que 20,4 %.

En la Tabla 5.1 presentamos algunos de los parámetros que caracterizan los experimentos de discriminación MD y KG: el tamaño de los estímulos, la distancia interestímulo, el tiempo de exposición, la luminancia ($L+M$) media, y el gris de referencia, escrito en coordenadas de Mcleod-Boynton (r, b) [104]. Las coordenadas utilizadas por los autores son $(l, s) := (L/(L + M), 1,53 \cdot S/(L + M)) = (r, 1,53 \cdot b)$, ya que el eje vertical fue reescalado para disponer la recta azul-amarillo a 45° .

Los resultados se muestran en el panel C de la Fig. 5.1. Para todos los sujetos se obtuvieron datos semejantes, observándose que para cada línea los umbrales de discriminación poseen un valor de $l = l^*$ para el cual la discriminación es óptima y luego crece en ambas direcciones. Este mínimo es más marcado para las rectas más cercanas al color del fondo.

El segundo experimento incluía una tarea categórica para la localización de los colores focales de un dado sujeto. La línea 576-476 nm fue utilizada como una estimación preliminar de del eje azul-amarillo. Los autores realizaron una estimación empírica de esta línea

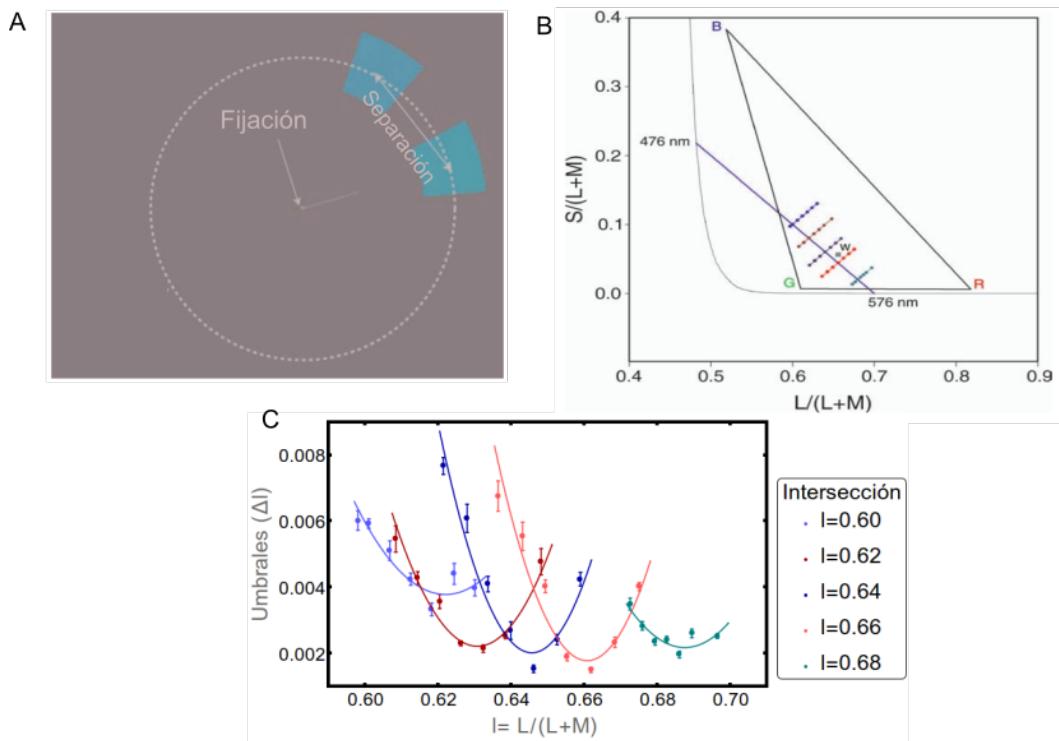


Figura 5.1: Experimento MD. A: Esquema experimental. En un fondo con cromaticidad neutra se presentan sobre un círculo dos estímulos con una dada separación angular. El sujeto debe responder cuál es los dos es más rojizo (o menos verdoso). B: La cromaticidad de los estímulos yace sobre líneas paralelas a la línea que une el amarillo puro y el azul puro. Imagen tomada de [11]. C: Los umbrales de discriminación a lo largo de 5 líneas. Los puntos son el valor medio del umbral, las barras son las desviaciones estándar y las líneas corresponden a ajustes cuadráticos sin fundamento teórico con el fin de evidenciar la posición de los mínimos. La tabla indica el valor de l en el que cada recta interseca a la línea amarillo-azul.

mediante el siguiente procedimiento: en sesiones intercaladas con las mediciones de discriminación, se le presentaba al sujeto un único estímulo cuya cromaticidad variaba a lo largo de una de las líneas a 45° , y el sujeto debía responder si consideraba al estímulo como rojizo (*reddish*) o verdoso (*greenish*). La zona de transición entre aquellos estímulos claramente categorizados como rojizos y aquellos verdosos fue tomado como estimación de tono puro (*unique hue*), ya que debido al proceso de oposición un “rojo verdoso” es un color imposible, por lo que entre tonos rojizos y verdosos debe existir un tercer color que no es ni rojo ni verde. El concepto de tonos puros surge de la teoría de oposición, según la cual los mismos corresponden a puntos de equilibrio entre canales cromáticos opuestos. En este caso en particular, los tonos azules y amarillos se definen a partir del equilibrio entre los canales rojo y verde. Esto se esquematiza en el panel A de la Fig. 5.2. Los autores dicen sobre los resultados presentes en la Fig. 5.2 que las estimaciones de los tonos puros y de los mínimos de discriminación se acercan bastante aunque no coinciden exactamente. Además, rechazan la teoría de que el tamaño relativo de los umbrales venga dado por la distancia al color del fondo, basándose en que por ejemplo hay puntos en la curva de $l = 0,60$ con umbrales menores al primer punto del lado izquierdo en la recta ($l = 0,66$), a pesar de que los puntos en la primer recta están a mayor distancia del color del entorno. Como mostraremos a continuación, en el

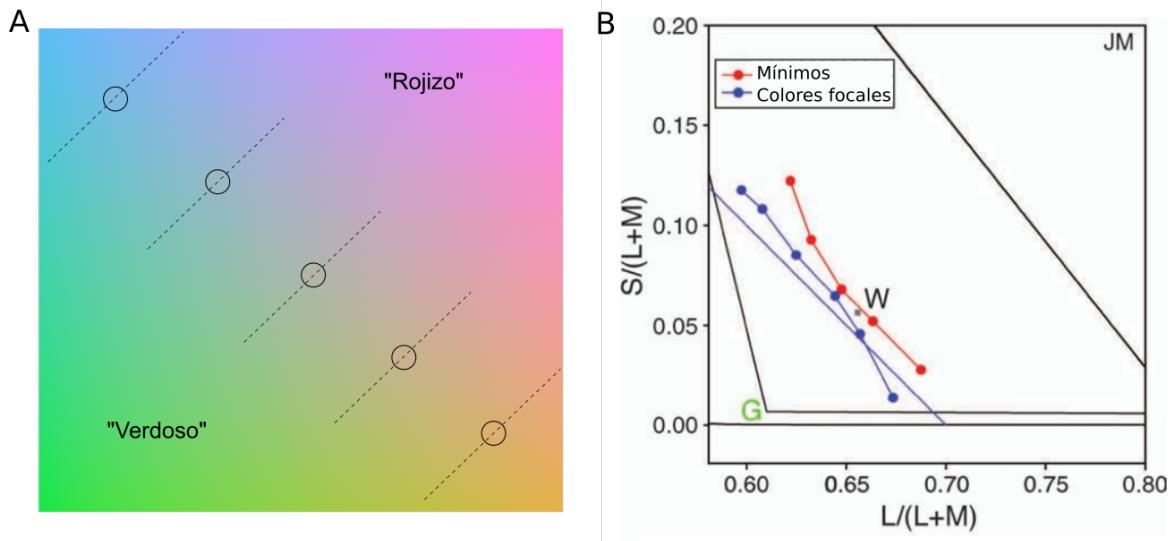


Figura 5.2: A: Representación pictórica del plano de cromaticidad. Las líneas a 45° se mueven de tonos verdosos a rojizos, y se define como tonos puros a aquellos que yacen en la transición. B: Comparación de la posición de los mínimos de discriminación y de los tonos puros para el sujeto JM. Imagen tomada de [11]

marco de nuestro modelo este análisis está errado por dos motivos. En primer lugar, porque no utilizan una distancia perceptual, sino solo la diferencia de valores en la excitación de los conos. En segundo lugar, porque no tienen en cuenta que la influencia el fondo es radial y modifica de manera distinta los umbrales en la dirección radial y en la angular, por lo que el efecto no es el mismo para todos los puntos a lo largo de una recta a 45° .

5.3. Mínimos de discriminación según nuestro modelo perceptual

El trabajo de Mollon-Danilova se centra en analizar la posición de los mínimos de discriminación a lo largo de rectas ortogonales al eje azul-amarillo en el espacio de colores, el cual corresponde a rectas a 45° en el plano (l, s) . A la vez, los autores estimaron la línea azul-amarillo subjetiva al pedirle a los sujetos que categorizaran los estímulos entre más rojizos o verdosos, obteniéndose de esta manera una aproximación empírica a los tonos puro que yacen entre estas dos categorías. Los autores afirman que la región donde la discriminación es óptima es cercana a la línea de tonos puros.

En esta sección mostraremos que la posición de los mínimos de discriminación a lo largo de las líneas de la forma $l-s = cte$ puede explicarse desde el punto de vista geométrico como aquellos puntos más cercanos –en distancia perceptual– al color del fondo, y es justamente

el desplazamiento radial que este fondo induce lo que produce que la discriminación sea óptima en ese punto. Esto implica que si el experimento se repitiera con un fondo distinto, la posición de los mínimos se desplazaría acorde a este fondo, debiéndose puramente a una propiedad perceptual independiente de la categorización cromática.

Recordemos que los umbrales de discriminación están definidos como el mínimo cambio que debo producir sobre un estímulo para distinguirlo del estímulo de referencia, entendiendo que esto implica que la distancia perceptual entre los correspondientes perceptos es igual 1. Por lo tanto, nuestro punto de partida será el tensor métrico con la forma descrita en los capítulos anteriores, que dado que los estímulos son presentados en un entorno gris con cromaticidad (l_g, s_g) podemos expresar como:

$$J^I(l, s) = \begin{pmatrix} \alpha_1^2 & 0 \\ 0 & (\alpha_2 + \alpha_3(s - s_g))^2 \end{pmatrix}, \quad (5.1)$$

siendo α_1 , α_2 y α_3 los parámetros que caracterizan la geometría. Como se verá en la sección posterior, los mismos pueden estimarse en base a resultados experimentales previos. El término $\alpha_3(s - s_g)$ es considerado como una corrección pequeña ya que la variación de los umbrales es leve en el rango de medición, por lo que despreciaremos cualquier término de orden superior. Al igual que en los capítulos anteriores, calculamos las coordenadas perceptuales asociadas a este tensor. Por simplicidad en la notación, omitiremos el supraíndice I , por lo que tenemos que:

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1(l - l_g) \\ x_2 &= \alpha_2(s - s_g) + \frac{\alpha_3}{2}(s - s_g)^2. \end{aligned}$$

y la relación inversa a orden cuadrático es

$$\begin{aligned} l &= l_g + \frac{x_1}{\alpha_1} \\ s &= s_g + \frac{x_2}{\alpha_2} - \frac{\alpha_3}{2\alpha_2^2}x_2^2 \end{aligned}$$

Cambiar a coordenadas perceptuales nos garantiza que el tensor métrico es transformado de forma tal que sus componentes satisfacen $J_{ij}^I = \delta_{ij}$. Dado que el efecto del entorno es radial, resulta conveniente escribir la distancia infinitesimal asociada a este tensor en coordenadas polares ($r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $\theta = \text{ArcTan}(x_2/x_1)$):

$$d\ell_I^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2. \quad (5.2)$$

El efecto del entorno, que está posicionado en el origen, es desplazar los perceptos de forma tal que si su distancia originalmente era r , la misma crece hasta un valor $t(r)$, lo que produce

que el nuevo elemento de distancia bajo la influencia del entorno g sea:

$$d\ell_g^2 = t'(r)^2 dr^2 + t(r)^2 d\theta^2. \quad (5.3)$$

Como vimos en la sección 2.5.4, podemos reescribir este elemento de línea como

$$d\ell_g^2 = \frac{t^2(r)}{r^2} (f(r)dr^2 + dx_1^2 + dx_2^2), \quad (5.4)$$

donde $f(r) = \left(\frac{t'(r)r}{t(r)}\right)^2 - 1$. Una vez caracterizada la distancia infinitesimal en todo el espacio, para obtener los resultados del experimento MD es necesario especificar las curvas sobre las que se realizaron las mediciones y también con qué coordenada se las parametrizó. Las curvas a 45° vienen definidas por la ecuación $s = l + c_0$, con c_0 una constante que determina el punto de paso de la misma. A su vez, los umbrales fueron medidos en unidades de l , por lo que podemos parametrizar esta curva como:

$$\begin{aligned} x_1(l) &= \alpha_1(l - l_g) \\ x_2(l) &= \alpha_2(l - l_g + c_0) + \frac{\alpha_3}{2}(l - l_g + c_0)^2 \end{aligned}$$

En particular, aprovechando que la geometría de perceptos es euclídea en las coordenadas perceptuales, podemos definir $C(l) = (x_1(l), x_2(l))$, de tal forma que el radio $r(l) = \|C(l)\|$ y el elemento de línea $dx_1^2 + dx_2^2 = \|\frac{dC}{dl}(l)\|^2 dl^2$ quedan escritos en términos de la norma euclídea. Cabe notar que para cada valor de c_0 , $C(l)$ parametriza una curva distinta, pero no incluiremos por el momento esta dependencia para simplificar la notación. Esto nos permite escribir la distancia diferencial restringida a la curva $C(l)$ como:

$$\begin{aligned} d\ell_g^2 &= \left(\frac{t(r)}{r}\right)^2 \left(f(r)(d\|C\|)^2 + \left\|\frac{dC}{dl}\right\|^2 dl^2 \right) \\ &= \left(\frac{t(r)}{r}\right)^2 \left(f(r) \left(\frac{\langle C, \frac{dC}{dl} \rangle}{\|C\|} \right)^2 + \left\|\frac{dC}{dl}\right\|^2 \right) dl^2 \\ &= J_l^g(l) dl^2 \end{aligned}$$

donde \langle , \rangle denota el producto interno usual y J_l^g es la métrica a lo largo de la recta. Su relación con el umbral diferencial $\varepsilon_l(l)$ es

$$J_l^g(l)\varepsilon_l^2 = 1 \implies \varepsilon_l = \frac{1}{\sqrt{J_l^g(l)}}, \quad (5.5)$$

por lo que el valor de l que minimiza ε_l , maximiza $J_l(l)$. Esto significa que la ecuación que

determinará la posición l^* de los mínimos de discriminación es

$$\frac{dJ_l^g}{dl}(l^*) = 0. \quad (5.6)$$

Para obtener cierta intuición, podemos reescribir J_l como:

$$J_l(l) = \left(\frac{t(r(l))}{r(l)} \right)^2 \left\| \frac{dC(l)}{dl} \right\|^2 (1 + f(r(l)) \cos^2(\gamma(l))), \quad (5.7)$$

donde $\cos(\gamma(l)) = \frac{\langle C, \frac{dC}{dl} \rangle}{\|C\| \|\frac{dC}{dl}\|}$ está dado por el ángulo relativo entre el radio vector y el vector tangente a la curva. Esto nos permite ver cuáles son los factores geométricos que determinan la posición de los mínimos, es decir la distancia al origen $r(l)$, pero también el ángulo $\gamma(l)$ y el cambio de longitud de arco recorrido dado por $\|\frac{dC}{dl}\|$. Para describir de manera precisa la posición de los mínimos nos resta caracterizar la métrica del espacio –codificada en los parámetros α_i – y la función $t(r)$, los cuales fueron descritos en los capítulos anteriores. En la siguiente sección, explicaremos cómo podemos utilizar los resultados de experimentos previos para estimar estos parámetros en el experimento MD.

5.3.1. Estimación de parámetros

Una de las problemáticas en colorimetría es la utilización de una enorme variedad de representaciones cromáticas y de condiciones experimentales diferentes que dificultan la comparación de resultados entre distintos experimentos. En esta sección mostraremos qué aproximaciones hemos utilizado para poder estimar los parámetros relevantes para explicar los resultados de MD a partir los obtenidos para el experimento de KG.

En la Tabla 5.1 presentamos algunos de los parámetros que caracterizan los experimentos de discriminación MD y KG: el tamaño de los estímulos, la distancia interestímulo, el tiempo de exposición, la luminancia ($L+M$) media, y el gris de referencia, escrito en coordenadas de Mcleod-Boynton (r, b) [104]. Los parámetros relevantes para describir la geometría del espacio de colores son α_1 , α_2 y α_3

Experimento	Tamaño($^\circ$)	Dist.($^\circ$)	Tiempo(seg)	Lum.(cd/m^2)	r_0	b_0
KG	0,6	0,75	1	37	0,667	0,016
MD2010	2	3,7	0,1	10	0,656	0,037

Tabla 5.1: Comparación de parámetros entre los experimentos KG y MD.

En primer lugar, tuvimos en cuenta la diferencia en el tamaño del estímulo y en el tiempo de exposición. Para ello, utilizamos los resultados obtenidos por [105] y [106], los cuales

presentamos en la figura 5.3. Podemos incluir estas dos correcciones sobre los umbrales

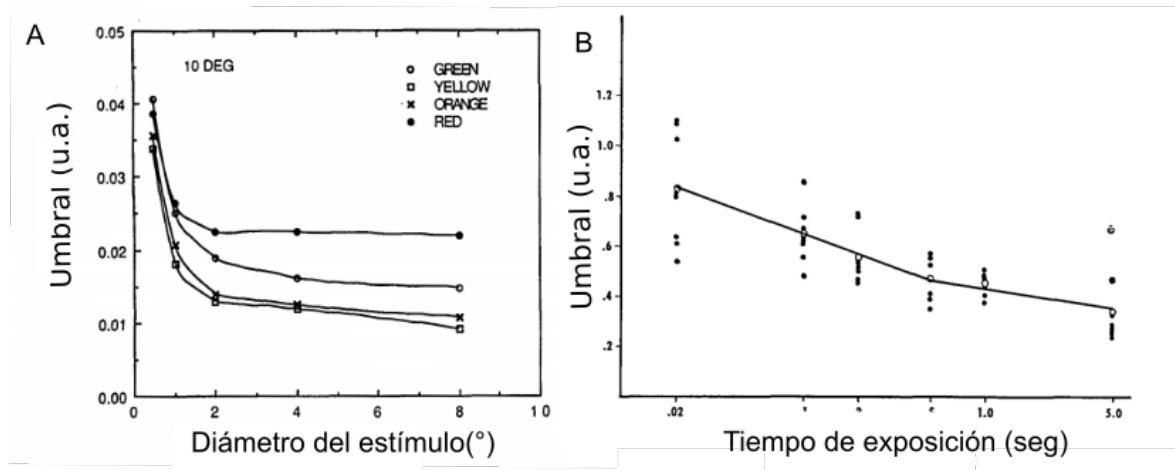


Figura 5.3: Dependencia de los umbrales de discriminación con (A) el tamaño del estímulo y (B) el tiempo de exposición.

mediante un factor multiplicativo $f = f_1 f_2$, donde f_1 tiene en cuenta la corrección debido a los tamaños distintos y f_2 la que corresponde al tiempo de exposición. Cada factor es definido sencillamente como el cociente de los umbrales entre una condición y la otra. El valor final obtenido es $f = 0,756$.

Es necesario, además, tener en cuenta la diferencia en la Luminancia L_v de cada experimento. Para ello utilizamos el resultado de [107], según el cual los umbrales de discriminación reescalán con la luminancia al igual que las coordenadas cromáticas l y s , de tal forma que en esas coordenadas los umbrales permanecen invariantes –dentro del rango fotópico–. Esto implica que un umbral medido con una luminancia L_v y uno con una luminancia L'_v satisfacen

$$\varepsilon(s, l, L_v) = \varepsilon'(s', l', L'_v), \quad (5.8)$$

donde el primado indica que las coordenadas cromáticas han sido reescaladas por la luminosidad L'_v .

Por último, los autores MD realizaron un reescalamiento del eje vertical por un factor 1,53, con el fin de que la línea azul-amarillo quedara a 45° . Teniendo en cuenta todas estas correcciones, las ecuaciones que relacionan a los umbrales entre uno y otro experimento son:

$$\varepsilon_l^{MD}(l) = f \cdot \varepsilon_r^{KG} \left(l \frac{L_v^{MD}}{L_v^{KG}} \right) \quad (5.9)$$

$$\varepsilon_s^{MD}(s) = (1,53)f \cdot \varepsilon_b^{MD} \left(\frac{s}{1,53} \frac{L_v^{MD}}{L_v^{KG}} \right). \quad (5.10)$$

Lo cual implica que los parámetros geométricos los podemos estimar como:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha_1^{MD}} &= f \cdot \frac{1}{\alpha_1^{KG}} = 0,00083 \\ \frac{1}{\alpha_2^{MD}} &= (1,53)f \cdot \frac{1}{\alpha_2^{KG}} \left(1 + \frac{\alpha_3^{KG}}{(\alpha_2^{KG})^3} s_0^{MD} \frac{L_v^{MD}}{L_v^{KG}} - s_0^{KG} \right) = 0,00114 \\ \frac{\alpha_3^{MD}}{(\alpha_2^{KG})^3} &= f \cdot \frac{L_v^{MD}}{L_v^{KG}} \frac{\alpha_3^{KG}}{(\alpha_2^{KG})^3} = 3,9 \cdot 10^{-6}\end{aligned}$$

Hemos elegido mostrar estas combinaciones de los parámetros ya que son las que estás más directamente relacionadas con los umbrales de discriminación y con su variación y por lo tanto es más sencillo así comparar sus valores con los de las referencias.

Finalmente, nos resta describir la función $t(r)$, para la cual utilizaremos la misma forma funcional que en las secciones anteriores. Nótese que en este capítulo estamos omitiendo el supraíndice I para simplificar la notación. Su expresión es

$$t(r) = \frac{r + \kappa (1 - e^{-\frac{r}{\ell}})}{1 + \frac{\kappa}{\ell}}, \quad (5.11)$$

y viene determinada por los parámetros κ y ℓ . Convenientemente, estos parámetros están definidos en unidades de distancia perceptual relativizadas a las condiciones experimentales en cada caso. Es decir, al medir estas cantidades en unidades perceptuales, toda la información respecto de los detalles experimentales queda codificada en los parámetros geométricos α_i que describen el mapeo entre las unidades espectrales y las unidades perceptuales. Por lo que supondremos que los parámetros κ y ℓ son los mismos para distintas condiciones experimentales.

5.4. Resultados

Cálculo de la posición de los mínimos

En esta sección resolveremos la Ecuación 5.6 que define a los mínimos de discriminación, utilizando los parámetros obtenidos en la sección anterior, llegando a una forma explícita que nos permitirá interpretar los resultados experimentales de MD de un modo geométrico sencillo. Nuestro punto de partida es la ecuación 5.7, que repetimos aquí:

$$J_l(l) = \left(\frac{t(r(l))}{r(l)} \right)^2 \left\| \frac{dC(l)}{dl} \right\|^2 (1 + f(r(l)) \cos^2(\gamma(l))).$$

Lo primero que cabe notar es que debido a la forma funcional de $t(r)$, podemos afirmar que $\frac{t(r)}{r}$ es una función decreciente. Fenomenológicamente, esto está asociado al hecho de que la discriminación es óptima cuando el color a discriminar es cercano al fondo. Mediante el modelo escogido para $t(r)$, compatible con nuestras mediciones y las de KG, podemos demostrar esto explícitamente, para ello calculamos su derivada y veamos que la misma es siempre negativa:

$$\left(\frac{t(r)}{r}\right)' = \frac{\kappa}{r} \left[e^{-\frac{r}{\ell}} \frac{r}{\ell} - (1 + e^{-\frac{r}{\ell}}) \right].$$

Es fácil mostrar que $e^{-\frac{r}{\ell}} \frac{r}{\ell}$ alcanza su máximo valor para $r = \ell$, lo cual implica que $e^{-\frac{r}{\ell}} \frac{r}{\ell} < 1$ y por lo tanto $\left(\frac{t(r)}{r}\right)' < 0$, que es lo que queríamos probar. Esto indica que $t(r)/r$ será mayor mientras menor sea r .

Por otro lado, la propiedad que acabamos de mostrar, regla del cociente mediante, implica que $t'(r) < t(r)/r$, por lo que $f(r) = (\frac{t'(r)r}{r})^2 - 1$ es siempre negativa. En consecuencia, el factor $(1 + f(r) \cos^2(\gamma(r)) \leq 1$ y será máximo cuando $\gamma(r) = \pi/2$, es decir cuando el radio vector sea ortogonal al vector tangente a la curva. Esto resulta equivalente a la condición anterior ya que:

$$\frac{dr}{dl} = \frac{\langle C, \frac{dC}{dl} \rangle}{\|C\|} \quad (5.12)$$

por lo que el punto que minimiza el radio ($\frac{dr}{dl} = 0$) es justamente aquel donde C es ortogonal a $\frac{dC}{dl}$. Es decir que 2 de los 3 factores que componen a $J_l^g(l)$ alcanzan su máximo bajo la condición $\frac{dr}{dl} = 0$. Nos resta analizar el factor $\left\| \frac{dC(l)}{dl} \right\|^2$, el cual escribiremos explícitamente:

$$\left\| \frac{dC(l)}{dl} \right\|^2 = \alpha_1^2 + (\alpha_2 + \alpha_3(l - l_g + c_0))^2 \approx (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \left(1 + \frac{2\alpha_2\alpha_3(l - l_g + c_0)}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)} \right). \quad (5.13)$$

Como hemos mencionado previamente, el término asociado a α_3 puede ser tratado como una corrección perturbativa. En particular, utilizando los parámetros estimados en la sección anterior y acotando $|(l - l_g + c_0)| < 0,07$ con su valor máximo en los datos experimentales, obtenemos que la corrección $|\frac{2\alpha_2\alpha_3(l - l_g + c_0)}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)}| < 0,14$ por lo que despreciaremos ese término para continuar con nuestro análisis. Ignorando ese término, vemos entonces que $\left\| \frac{dC(l)}{dl} \right\|^2$ es constante y por lo tanto no influye en el proceso de optimización de J_l^g . En resumen, J_l^g se escribe como producto de tres factores, uno de los cuales podemos aproximar como constante y los otros dos son minimizados por la condición $\frac{dr}{dl} = 0$, de donde podemos concluir que el mínimo de discriminación ocurrirá en el punto de la curva $C(l)$ más cercano al origen.

Por último, podemos reescribir esta condición para obtener una expresión que nos per-

mita hallar geométricamente a los mínimos en el plano (l, s) de modo sencillo. Para ello, consideramos que el problema de minimizar $r(l) = \|C(l)\|$ puede reescribirse como un problema de optimización con un constraint de la siguiente manera. Es sabido en la geometría riemanniana que la forma de minimizar la distancia entre un punto y una subvariedad cerrada –en este caso la curva $C(l)$ – es hallar la geodésica que parte del punto en cuestión e interseca a la subvariedad ortogonalmente, tal como discutimos previamente. Como la geometría es euclídea en las coordenadas (x_1, x_2) , sabemos anticipadamente que las geodésicas son rectas en estas coordenadas y que la distancia a lo largo de la recta puede ser calculada como:

$$d((x_1, x_2), 0) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = r(x_1, x_2) \quad (5.14)$$

Esto significa que la forma de minimizar $r(x_1, x_2)$ es moverse a lo largo de una geodésica. Por lo tanto, podemos reescribir el problema de optimización que nos permita hallar l^* para cada valor de c_0 como la minimización de

$$r(x_1(l), x_2(s)) + \lambda(s - l + c_0) \quad (5.15)$$

donde λ es un multiplicador de Lagrange. Derivando respecto de l y de s e igualando a 0, se obtiene que la solución a esta ecuación es:

$$(l - l_g) = -\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^2 (s - s_g) - \frac{3}{2} \frac{\alpha_3 \alpha_2}{\alpha_1^2} (s - s_g)^2 \quad (5.16)$$

Esta ecuación describe a una geodésica parametrizada en el plano (l, s) , en donde adquiere una forma parabólica debido a la transformación no lineal entre las coordenadas perceptuales y las espectrales. Por construcción, esta geodésica atraviesa orthogonalmente –en la geometría perceptual– a la líneas de las forma $s - l = c_0$, por lo que el mínimo de discriminación ocurrirá en la intersección entre la geodésica perceptual y la curva sobre la que se realizan las mediciones. La geodésica viene determinada por su pendiente y su curvatura $\frac{3}{2} \frac{\alpha_3 \alpha_2}{\alpha_1^2}$. Estas cantidades podemos estimarlas a partir de los datos obtenidos en el experimento KG, obteniéndose que $-\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^2 \approx 0,53$ y $\frac{3}{2} \frac{\alpha_3 \alpha_2}{\alpha_1^2} \approx 2,4$.

Análisis de los datos de MD 2010

En la Fig. 5.4 presentamos una comparación de nuestro modelo con los datos de MD. La línea punteada en gris corresponde a la geodésica que obtenemos mediante la estimación susodicha. La línea roja corresponde a la geodésica que mejor ajusta a los datos. La

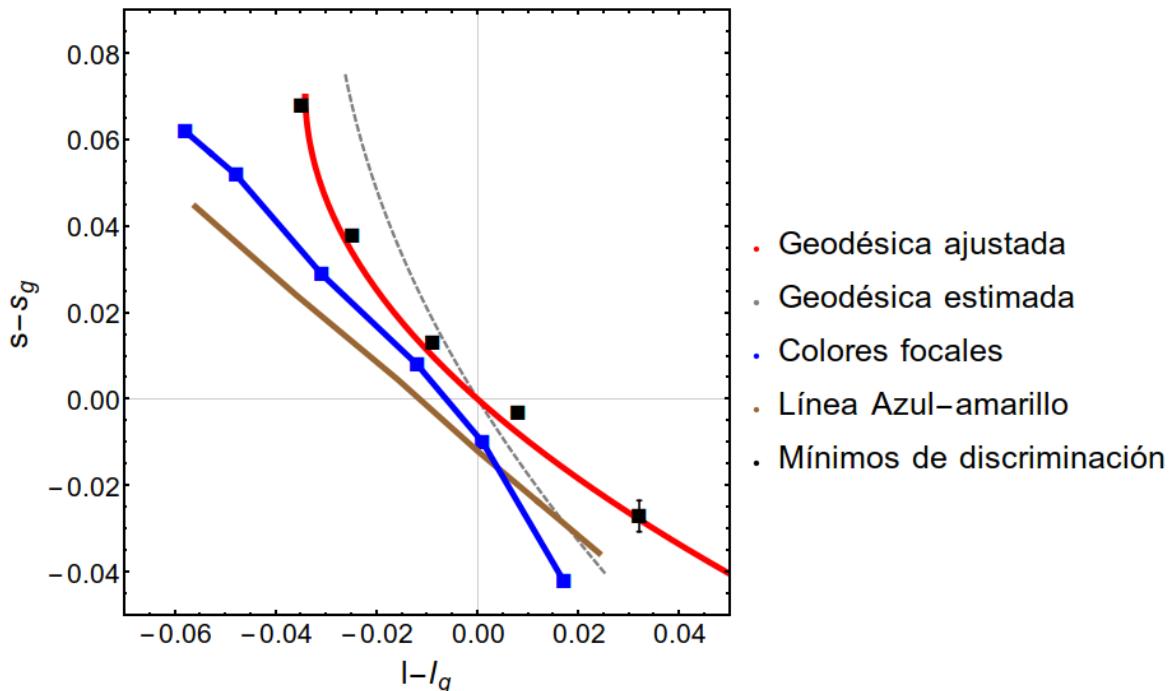


Figura 5.4: Comparación de nuestro modelo con los resultados de Mollon-Danilova. La geodésica estimada no involucra el ajuste de ningún parámetro, la ajustada posee 2 parámetros.

línea azul se corresponde a la línea de colores focales medidas por MD para este sujeto, mientras que la línea marrón es la línea azul-amarillo que se obtiene de unir los estímulos monocromáticos correspondientes (476-576 nm). Puede verse fácilmente que la geodésica estimada, la cual no involucra ajustar ningún parámetro utilizando los datos de MD, sino que la hemos construido en base a información previa, da una mejor explicación de la posición de los mínimos que la asociación que los autores hacen con los colores focales. Dado que nuestro cálculo involucró exclusivamente la geometría perceptual, la cual en nuestro modelo resulta ser homogénea e isótropa, se prescinde de involucrar un factor lingüístico/categoríco para interpretar los resultados de MD. Más aún, nuestro modelo arroja tres predicciones. Por un lado, la pendiente de la geodésica es ortogonal a las líneas sobre la que se efectuó la medición. Por lo tanto, la afirmación que hacen los autores de que la línea de mínimos corre paralela a la línea azul-amarillo es un efecto que se debe puramente a que las líneas sobre las que midieron eran de por sí perpendiculares a esa recta. Esto implica que si la inclinación de las rectas de medición hubiera sido otra, la posición de los mínimos también hubiera cambiado de forma tal de mantener esta ortogonalidad. Además, esta geodésica tiene como punto de paso la cromaticidad del entorno. En conclusión, si el experimento se repitiera con otro entorno, la geodésica también se trasladaría de forma tal de pasar por ese punto. Adicionalmente, la curvatura de los colores focales es inversa a la predicha por nuestro modelo y a la que se observa en los datos experimentales.

Dado que los sujetos experimentales son distintos en los experimentos MD y KG, es es-

perable una cierta variabilidad en los parámetros que definen a la geodésica. Por esta razón, utilizaremos la variabilidad entre sujetos medidos en nuestro experimento (ver capítulo 3) como un modo de estimar la variabilidad esperada en dichos parámetros. Con este fin, realizamos un ajuste para obtener los parámetros que mejor explican la posición de los mínimos y propagando la variabilidad intersujeto de los parámetros α_i , obtenemos que los valores esperados son $\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) = 0,96 \pm 0,5$ y $\left(\frac{3\alpha_3\alpha_2^3}{\alpha_1^2}\right) = 6,7 \pm 4,7$, de tal forma que los valores estimados por nosotros (0,55 y 2,4 respectivamente) quedan incluidos dentro de la variabilidad intersujeto. El ajuste está representado en la Fig. 5.4 por la línea roja, mostrando un acuerdo muy bueno con los datos experimentales.

Finalmente, cabe destacar que para la predicción de los mínimos de discriminación hemos utilizado únicamente los parámetros geométricos que se obtienen de un experimento tipo I y hemos prescindido de los parámetros que caracterizan a la función $t(r)$. Si ahora queremos reproducir los umbrales medidos en todo su rango, necesitamos los parámetros κ y ℓ , los cuales nuevamente hemos estimado utilizando los obtenidos por KG. En la Fig. 5.5, mostramos que nuevamente, sin ajustar ningún parámetro, podemos predecir la forma de las curvas de discriminación.

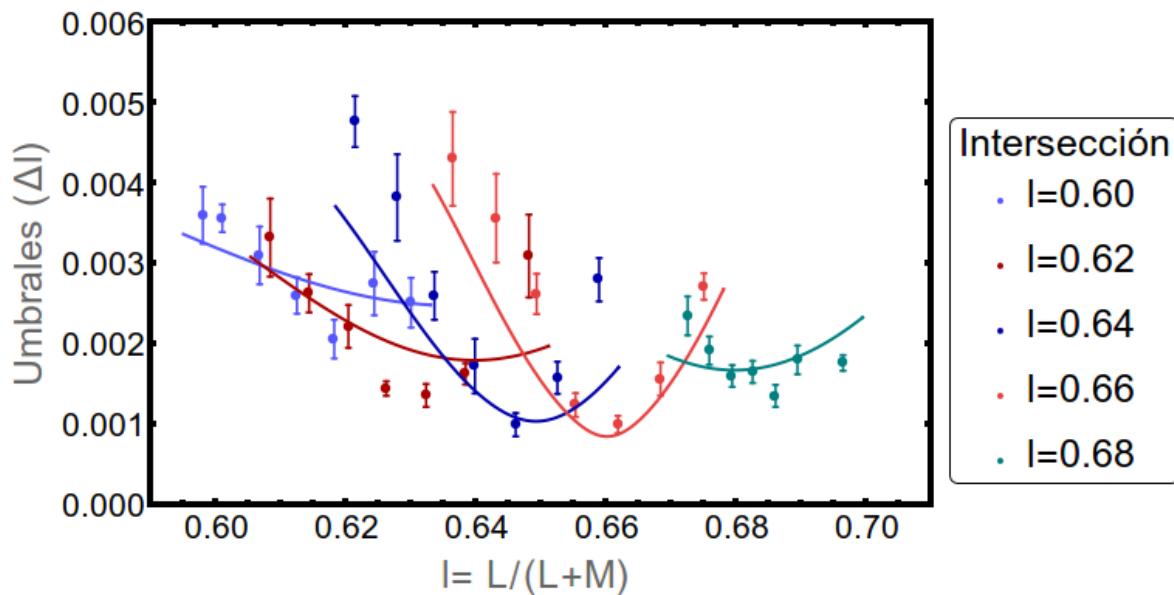


Figura 5.5: Comparación entre nuestro modelo –líneas sólidas–, sin parámetros ajustados, y los umbrales de discriminación medidos por MD.

Análisis de los datos de MD 2012

En esta sección nos hemos centrado en analizar el experimento MD del 2010 a modo de ejemplo, sin embargo el mismo tipo de análisis es aplicable al resto de los experimentos citados [12, 66, 92]. Sin embargo, para cada caso está el desafío de ver cuál es la transformación correcta de los parámetros debido a los cambios en las condiciones experimentales, tal como hicimos en la sección 5.3.1. Por supuesto, la estimación de parámetros nos permite mostrar la generalidad al modelo al conectar los valores medidos en un experimento con otro. En general, dicha estimación será subóptima en lo que respecta a la minimización del error cuadrático medio. Por este motivo, mostramos a continuación que puede obtenerse un mayor acuerdo entre modelos y datos cuando los parámetros son optimizados. Para ello, utilizamos los resultados del experimento del 2012 [12], el cual es conceptualmente muy similar al del 2010, solo con ciertos cambios en las condiciones experimentales, por ejemplo, los estímulos son presentados en el área central del campo visual –estimulación foveal–, a diferencia del experimento previo. Sin embargo, las líneas en el espacio cromático sobre las que se midió la discriminación son similares a las previas, cambiando únicamente el gris utilizado como referencia. Nuestra propuesta es que todas estas modificaciones experimentales influyen sólo a través de los valores que toman los parámetros del modelo. Por este motivo, ajustamos dichos parámetros, obteniendo las curvas que mostramos en la figura 5.6. Como puede verse, el acuerdo es razonablemente bueno.

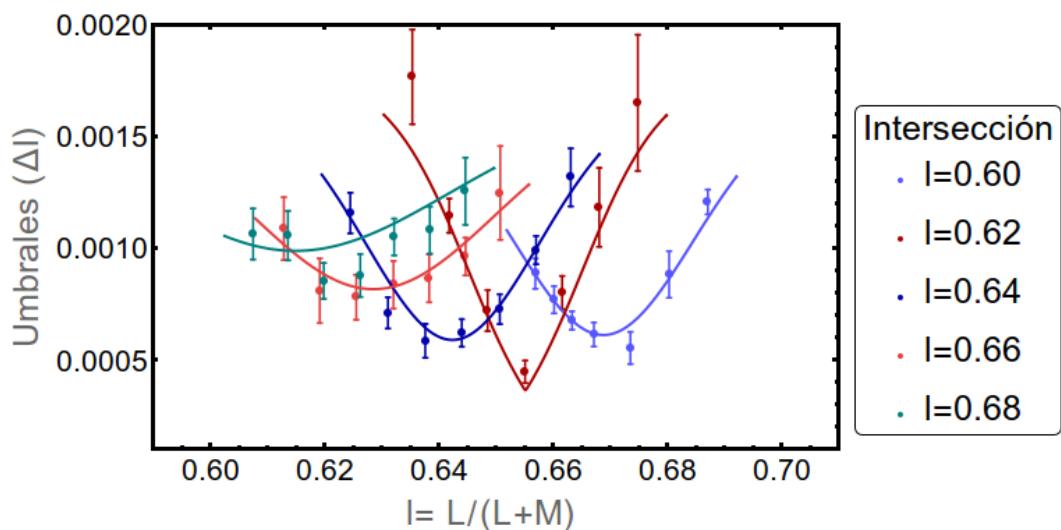


Figura 5.6: Umbras de discriminación análogos a los mostrados en la figura 5.5. Los datos fueron tomados de [12]. Las curvas se obtuvieron mediante el ajuste de los 5 parámetros que definen nuestro modelo: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \kappa$ y ℓ .

5.5. Discusión

Para entender de qué modo el lenguaje influye en la percepción cromática, es necesario establecer criterios que permitan discernir entre aquellos resultados experimentales que emergen como consecuencia de la cognición del observador y aquellos que son consecuencia del paradigma experimental. En este capítulo analizamos una serie de experimentos llevados a cabo por Mollon y Danilova, que perseguían el objetivo de evidenciar una relación entre optimalidad en la discriminación cromática y la presencia de tonos únicos—tomando el rol de representantes de categorías cromáticas—. Aplicando nuestro modelo, mostramos que la posición de los mínimos de discriminación puede ser explicado desde un punto de vista puramente perceptual (ver figuras 5.4, 5.5 y 5.6). Específicamente, mostramos que la inducción cromática que genera el entorno sobre los estímulos produce que la discriminación óptima ocurra cuando la cromaticidad del estímulo de referencia es la misma que la del entorno y que los umbrales aumentan con la distancia perceptual, con un crecimiento mayor en la dirección radial. En consecuencia, si los umbrales se miden en coordenadas perceptuales sobre una curva contenida en el plano cromático, el umbral de discriminación mínimo sobre dicha curva estará en el punto más cercano a la cromaticidad del entorno. Esto implica que la posición de los mínimos de discriminación depende tanto de la cromaticidad del entorno como de las curvas sobre las que se midió la discriminación –en el caso de MD, sobre líneas a 45° –. En conclusión, bajo las hipótesis de nuestro modelo, la posición de los umbrales mínimos en los experimentos MD surge como efecto de la influencia perceptual del entorno y de las curvas sobre las que se mide, ambas dependientes del paradigma experimental y, por lo tanto, resulta difícil establecer un vínculo con la posición de las categorías cromáticas.

En cuanto a la capacidad del modelo para reproducir los datos, cabe destacar que la posición de los mínimos pudo ser estimada sin necesidad de ajustar ningún parámetro (Fig. 5.4), utilizando sólo los resultados obtenidos en los experimentos de KG, lo que nos permite decir que cualitativamente el modelo parece robusto. A su vez, vimos en las figuras 5.5 y 5.6 que ajustando los parámetros a los datos puede obtenerse también una buena correspondencia cuantitativamente.

Capítulo 6

Inducción en la circunferencia cromática

“Árbol, hoja, salto, luz... aproximación”

— Por, Luis Alberto Spinetta

En este capítulo analizaremos las implicaciones que tiene la geometría del espacio de colores y las simetrías de la inducción cromática propuestas por nuestro modelo al estudiar la influencia del entorno en el tono de un color. Para ello, tomamos como ejemplo el experimento hecho por Klauke y Wachtler en el 2015 ([13]), al que llamaremos experimento KW. En nuestro experimento (capítulo 3) estudiamos la inducción cromática a lo largo de los ejes cromáticos, por lo que distintos estímulos poseían distintos niveles de saturación en el eje correspondiente. En el experimento KW, en cambio, los estímulos y los entornos varían en su tono o *hue*, manteniendo la saturación aproximadamente constante. Veremos que nuestro modelo permite explicar los resultados obtenidos en el experimento KW, destacando particularmente la impronta geométrica de los mismos.

6.1. El Experimento KW

El experimento KW es un experimento de matcheo asimétrico (ver sección 1.8.6) con el objetivo de caracterizar la inducción cromática en la percepción del tono de un color. En la Figura 6.1 A se muestra el esquema experimental. Un campo bipartito es presentado al sujeto, de uno de los lados el fondo de la pantalla está coloreado uniformemente con el color *c*, mientras que del otro lado el fondo es de un dado gris *g*. Sobre el fondo coloreado se

presenta un estímulo de referencia, que corresponde a un cuadrado (de tamaño angular 2°) de una dada cromaticidad. Sobre el fondo gris, dispuesto simétricamente, se presenta otro cuadrado del mismo tamaño cuya cromaticidad es ajustada por el sujeto, a quien se le pide que busque el color para el cual percibe los cuadrados como lo más similar posible.

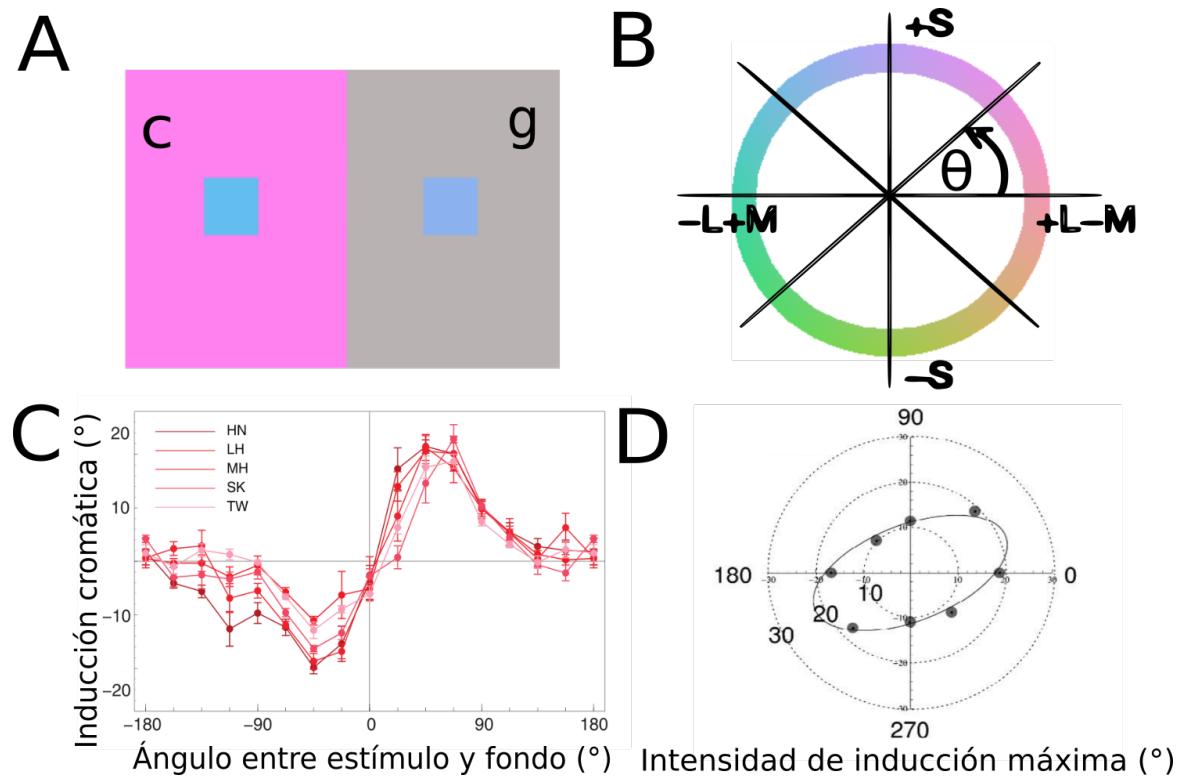


Figura 6.1: Experimento KW. **A:** Esquema experimental. De un lado de la pantalla, un cuadrado de un dado color de referencia es presentado sobre un fondo coloreado **c**, del otro lado el fondo es un gris **g** y la cromaticidad del respectivo cuadrado es ajustada por el sujeto hasta matchear con el de referencia. **B:** Los estímulos utilizados yacen sobre una circunferencia cromática definida sobre el plano isoluminiscente generado por los ejes **S** y **L – M** (ver texto). La coordenada θ corresponde al ángulo respecto del eje **L – M**. **C:** Inducción cromática para distintos sujetos, medida como la diferencia angular entre el estímulo respondido por el sujeto y el de referencia. **D:** Anisotropía de la inducción. La distancia al origen representa en grados el máximo de inducción cromática medido para cada uno de los 8 fondos que corresponden a los ángulos $0^\circ, 45^\circ, \dots, 315^\circ$. El eje mayor de la elipse indica el ángulo del fondo para el cual la inducción es máxima. C y D fueron extraídas de [13].

El espacio de colores es tridimensional, por lo que hacer una exploración de este efecto en el espacio completo comprendería un experimento demasiado largo y complicado. Por este motivo, los experimentos suelen restringirse a ciertos subconjuntos de colores. En nuestros experimentos (Cap. 3) nos restringimos a los ejes cromáticos. En el experimento de KW, las mediciones se realizaron a lo largo de una curva de tono (*hue*) variable, procurando fijar la saturación y la luminosidad. Para ello, en primer lugar, se eligió un gris de referencia **g** ($40cd/m^2$, $CIE[x, y] = [0,310, 0,316]$). Este estímulo de referencia se utiliza para definir las coordenadas de contraste de conos (*Cone Contrast*). Si llamamos $(\bar{S}_g, \bar{M}_g, \bar{L}_g)$ a las coordenadas del gris de referencia que se obtienen al proyectar su curva espectral en las curvas de sensibilidad de los conos (*Cone Fundamentals* [50]), las coordenadas de contraste de Cono

se definen como el cambio en la excitación de los conos relativizado a la referencia, es decir:

$$(S, M, L)_{\text{Cone-contrast}} = \left(\frac{\bar{S} - \bar{S}_g}{\bar{S}_g}, \frac{\bar{M} - \bar{M}_g}{\bar{M}_g}, \frac{\bar{L} - \bar{L}_g}{\bar{L}_g} \right). \quad (6.1)$$

Nótese que en estas coordenadas $\mathbf{g} = (0, 0)$. Luego se buscó un plano isoluminiscente conteniendo a la referencia mediante un experimento de flickering, tal como se describe en [51]. Este plano puede describirse mediante una ecuación del tipo:

$$a_S S + a_M M + a_L L = 0 \quad (6.2)$$

Normalmente se considera que la principal contribución a la luminosidad viene de la combinación $(L + M)$, sin embargo Teufel et al. [51] muestran que existe también una contribución —menor— de las otras componentes. Una vez fijado el plano, i. e. fijados a_S , a_M y a_L , se definen dos direcciones cromáticas principales. Una dirección se obtiene variando la coordenada S y ajustando L y M para asegurarse la permanencia en el plano, lo que da como resultado la proyección ortogonal del eje S usual sobre el nuevo plano isoluminiscente y se lo llamará también eje S. La otra dirección se corresponde con la única dirección ortogonal a S y contenida en el plano isoluminescente. A esta dirección se la llama también L-M.¹ Una vez definido el plano isoluminiscente, los estímulos sobre ese plano se especifican mediante las coordenadas $R = \sqrt{(L - M)^2 + S^2}$, que corresponde a la saturación, y la coordenada angular θ que corresponde a la tono (*hue*). Por lo tanto, en este experimento una curva cromática con saturación constante queda definida por la ecuación

$$(L - M)^2 + S^2 = R^2, \quad (6.3)$$

con R un número fijo. Esta curva se puede parametrizar mediante las ecuaciones $L - M(\theta) = R \cos(\theta)$ y $S = R \sin(\theta)$. En la figura 6.1, panel B, se muestra esquemáticamente a qué color corresponde cada valor de θ .

Del experimento de KW se desprenden dos afirmaciones. Por un lado, la inducción sobre el tono de un color presenta un comportamiento cualitativamente universal con una forma quasi-sinusoidal, similar a la que se observa en el caso de la ilusión en orientación de barras (*tilt illusion*)[108]. Esta forma es la que se muestra en el panel C de la figura 6.1, para el caso en que el fondo es rosa (0°). Se observan los resultados para 5 sujetos distintos y todos presentan el mismo comportamiento. El efecto es repulsivo, incrementa su intensidad al aumentar el ángulo entre entorno y estímulo hasta alcanzar un máximo y luego disminuye hasta hacerse prácticamente nulo a 180° . La posición del máximo es siempre inferior a los

¹Pido al lector que tenga paciencia con los repetidos abusos de notación para los nombres de las coordenadas cromáticas, persistentes a lo largo de toda la historia de la colorimetría. Nos parece importante incluirlas y clarificarlas dado que abundan en la literatura.

90°, y la intensidad máxima de la inducción no supera los 20°. La universalidad del resultado radica en el hecho de que la forma de la curva se modifica solo ligeramente al cambiar el color del fondo –ver Figura 6.5–.

Las leves modificaciones que se observan al cambiar el color del fondo son, sin embargo, sistemáticas en distintos sujetos e implican cierta anisotropía en la inducción cromática. En el panel D se esquematiza esta anisotropía mediante el gráfico de la intensidad máxima de la inducción medida para cada fondo. La distancia al centro representa este valor máximo, y el ángulo corresponde a la posición en la curva del fondo utilizado. Los autores reportan que el fondo para el cual la inducción es máxima está en ≈ 23°, y realizan una discusión en base a la hipótesis de que en esta dirección podría existir algún mecanismo diferencial en el procesamiento de colores, asociado a la estadística de la luz diurna [109].

Nuestra propuesta es que, suponiendo la existencia de una métrica subyacente en el espacio de colores, estos resultados pueden explicarse en base a la simetría radial de la inducción cromática, surgiendo la anisotropía de los resultados como una característica que depende exclusivamente de la geometría de la curva seleccionada para hacer el experimento.

6.2. Modelo para la inducción cromática en una curva

Una de las consecuencias más importantes de la existencia de una métrica en un dado espacio, es que nos permite definir cantidades que son invariantes geométricos y que por lo tanto son independientes de las coordenadas utilizadas. Por su propia naturaleza, los fenómenos perceptuales deberían admitir una descripción invariante, ya que está claro que lo que percibimos al presenciar un estímulo es completamente independiente de las coordenadas que el experimentador utilice para representar dicho estímulo. Por ejemplo, si nos muestran dos estímulos, digamos un rojo y un verde, y el experimentador cuantifica qué tan distinto son estos dos colores a través de la diferencia de sus coordenadas en algún tipo de representación cromática (CIExy, Macleod y Boynton, DKL, etc.), el valor que obtendrá será distintos en cada caso, sin embargo eso no nos dice nada sobre la percepción. Recíprocamente, si uno toma dos pares de colores, tal que la diferencia entre cada elemento del par sea la misma medida en algún sistema de coordenadas arbitrario, nada dice esto sobre qué tan diferentes serán percibidos los elementos de cada par.

Como ejemplo de las consecuencias empíricas que tiene la representación de los colores, veamos lo que ocurre con la elección de la curva cromática en el experimento KW. La curva

viene definida por la ecuación

$$(L - M)^2 + S^2 = R^2 \quad (6.4)$$

¿Es correcto afirmar que esta curva define una circunferencia? Como *objeto geométrico*, una circunferencia de radio R centrada en \mathbf{g} es el conjunto de puntos equidistantes a \mathbf{g} , a distancia R . Por lo tanto, la ecuación 6.4 solo definiría una circunferencia si las coordenadas $(L - M, S)$ corresponden a las coordenadas cartesianas de un espacio con geometría euclídea. Como se muestra en distintos experimentos (ver capítulos 3, 4 y 5), este no pareciera ser el caso, ya que si lo fueran las elipses de discriminación deberían ser circunferencias de igual radio para todos los puntos en el espacio DKL. Por lo tanto, en general la ecuación 6.4 no define una circunferencia. Esto plantea entonces la pregunta: ¿qué curva define? Si la curva cromática en la que se realizó el experimento no es una circunferencia, esto significa que la inducción a lo largo de la curva para distintos fondos no tiene por qué ser la misma, ya que no habría simetría de rotación en los colores muestreados. Por lo tanto, la anisotropía podría ser un efecto que se debe exclusivamente a la geometría de la curva seleccionada.

Una manera de caracterizar la geometría de la curva es utilizando las *coordenadas perceptuales*, definidas por nuestro modelo (Secc. 2.3). Las coordenadas perceptuales son la generalización de las coordenadas cartesianas para espacios perceptuales que poseen una geometría riemanniana. En estas coordenadas, las distancias pueden calcularse localmente utilizando la fórmula euclídea usual. La forma que tienen las elipses medidas en el experimento de KG ([10]) nos permite calcular explícitamente estas coordenadas y mostrar que, al menos en esa región, el espacio puede tomarse como euclídeo.

Con el objetivo de poner a prueba la hipótesis de que es la geometría la que determina los resultados del experimento KW, calcularemos el desplazamiento cromático en un experimento de matcheo asimétrico en el caso en que los estímulos de referencia y los respondidos por el sujeto están restringidos a una dada curva, $\mathbf{C}(\theta)$. A priori, lo único que supondremos de esta curva es que es suave y periódica ($\mathbf{C}(0) = \mathbf{C}(2\pi)$). Para hacer el cálculo explícitamente, basado en lo que discutimos previamente, supondremos que conocemos las coordenadas perceptuales (x_1, x_2) en donde la distancia cromática puede calcularse utilizando la norma euclídea usual, es decir:

$$d(\mathbf{x} = (x_1, x_2), \mathbf{y} = (y_1, y_2)) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \quad (6.5)$$

Escribiremos entonces $\mathbf{C}(\theta)$ como una parametrización de la curva en término de sus coordenadas perceptuales, es decir $\mathbf{C}(\theta) = (C_1(\theta), C_2(\theta))$, con C_1, C_2 las coordenadas percep-

tuales de cada punto de la curva. De aquí en adelante, usaremos este sistema de coordenadas para representar todos los colores involucrados en los experimentos.

El experimento de matcheo se realiza presentando un dado estímulo de referencia $\mathbf{C}(\theta)$ sobre un fondo coloreado c , lo que representamos mediante el par $\mathbf{C}(\theta) // c$. Del otro lado de la pantalla, otro estímulo $\mathbf{C}(\theta')$ es presentado sobre un fondo gris g , conformando el par $\mathbf{C}(\theta') // g$. El sujeto debe ajustar el valor de θ' hasta maximizar la similaridad entre ambos estímulos. En términos de la distancia perceptual, podemos decir que el matcheo ocurre cuando la distancia

$$d([\mathbf{C}(\theta) // c], [\mathbf{C}(\theta') // g]) \text{ es mínima.} \quad (6.6)$$

Nótese que, previamente, escribimos la condición de matcheo como $\mathbf{C}(\theta) // c \sim \mathbf{C}(\theta') // g$. La minimización de la distancia de la Ec. 6.6 es una condición más débil que la equivalencia perceptual impuesta por el signo \sim . La condición de equivalencia puede satisfacerse solo si el efecto del fondo deja invariante a la curva de medición, es decir si el nuevo percepto originado por la interacción con el fondo c es idéntico al generado por algún estímulo de la curva \mathbf{C} presentado sobre el fondo g . A priori, no hay nada que nos garantice esto y, como veremos más adelante, los experimentos parecieran mostrar que de hecho esto no ocurre. Para una discusión sobre este tema, ver [110]. Por lo tanto, ante la imposibilidad del sujeto de hacer un matcheo perfecto utilizando los estímulos que le son permitidos por el experimento, al sujeto se le pidió que responda el color más parecido posible, lo cual suponemos que es satisfecho por aquel que minimice la distancia perceptual entre los colores en sendos lados del campo bipartito.

Utilizando el formalismo descrito en la sección 2.1, reescribimos la condición de matcheo en términos de las funciones $\Phi_b(x)$, que caracterizan el efecto que un entorno b produce sobre un estímulo x al asociar el color $[x // b]$ con su representante uniforme. En coordenadas perceptuales, podemos escribir:

$$\begin{aligned} d([\mathbf{C}(\theta) // c], [\mathbf{C}(\theta') // g]) &= d(\Phi_c(\mathbf{C}(\theta)), \Phi_g(\mathbf{C}(\theta'))) \\ &= \|\Phi_c(\mathbf{C}(\theta)) - \Phi_g(\mathbf{C}(\theta'))\|, \end{aligned} \quad (6.7)$$

donde $\|\cdot\|$ denota la norma euclídea. El objetivo del sujeto es encontrar el valor de θ' que minimice la distancia. Para encontrar el mínimo, derivaremos respecto de θ' y pediremos que la derivada se anule:

$$\frac{d}{d\theta'} \|\Phi_c(\mathbf{C}(\theta)) - \Phi_g(\mathbf{C}(\theta'))\| = \frac{(\Phi_c(\mathbf{C}(\theta)) - \Phi_g(\mathbf{C}(\theta')))}{\|\Phi_c(\mathbf{C}(\theta)) - \Phi_g(\mathbf{C}(\theta'))\|} \cdot \frac{d\Phi_g(\mathbf{C}(\theta'))}{d\theta'} = 0 \quad (6.8)$$

Interpretemos esta ecuación. Si entendemos a las funciones Φ_c y Φ_g como aquellas que representan las transformaciones perceptuales inducidas por los fondos c y g respectivamente, lo que nos dice esta ecuación es que la distancia mínima se logra cuando la diferencia entre $\Phi_c(C(\theta))$ y $\Phi_g(C(\theta'))$ es ortogonal al vector tangente a la curva $\Phi_g(C(\theta'))$, que describe a los estímulos percibidos sobre el fondo gris (ver figura 6.2).

Con el fin de obtener una expresión cerrada para el desplazamiento angular inducido y, dado que los datos experimentales muestran que el mismo es siempre una cantidad relativamente pequeña (el máximo absoluto es de $20^\circ \approx 0,35\text{rad}$), vamos a hacer un desarrollo de la forma $\theta' = \theta + \Delta\theta$, suponiendo $\Delta\theta$ pequeño.

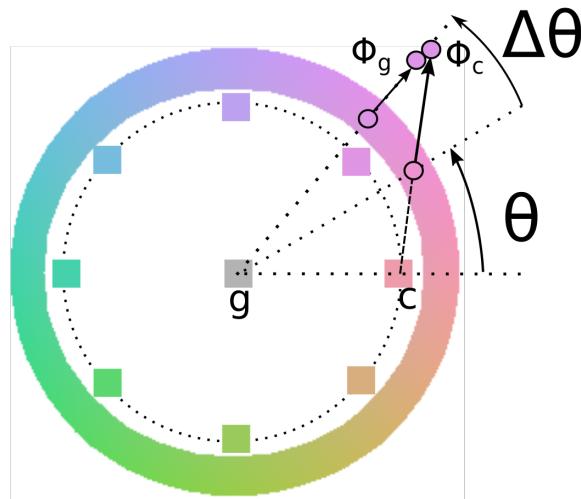


Figura 6.2: Modelo: Las cromaticidades que conforman la curva C se hallan sobre la circunferencia cromática. Los entornos utilizados en el experimento KW poseían una saturación levemente menor y se representan mediante los cuadrados que yacen sobre la circunferencia punteada de radio menor. El ángulo θ es medido respecto del eje horizontal L-M. El entorno de color c afecta la percepción del estímulo $C(\theta)$ dando lugar al color Φ_c . El sujeto ajusta el ángulo $\theta' = \theta + \Delta\theta$, cambiando la cromaticidad del estímulo presentado en el fondo gris g hasta minimizar la distancia entre Φ_g y Φ_c .

Desarrollando la ecuación 6.8 a primer orden en $\Delta\theta$ obtenemos la siguiente ecuación:

$$\Delta\theta = \frac{(\Phi_c(C(\theta)) - \Phi_g(C(\theta))) \cdot \frac{d\Phi_g(C(\theta))}{d\theta}}{\left\| \frac{d\Phi_g(C(\theta))}{d\theta} \right\|^2 - (\Phi_c(C(\theta)) - \Phi_g(C(\theta))) \cdot \frac{d^2\Phi_g(C(\theta))}{d\theta^2}}, \quad (6.9)$$

la cual nos dice que $\Delta\theta$ es proporcional a la diferencia entre el efecto que producen el fondo g y el fondo c sobre el estímulo original $C(\theta)$, proyectada en la dirección tangente a la curva. Si queremos obtener una expresión cerrada para la inducción cromática, debemos dar una descripción analítica de la función $\Phi_b(x)$. En base a los argumentos expuestos en 3.3.2, utilizaremos el modelo de saturación exponencial, por su simplicidad y buen desempeño en

la descripción de los experimentos de KG y MD:

$$\Phi_b(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \kappa \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{b}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{b}\|} \right) \left(1 - \exp \left(-\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{b}\|}{\ell} \right) \right), \quad (6.10)$$

donde κ mide la intensidad máxima de la inducción y ℓ la distancia característica de saturación del efecto. De aquí en adelante, nos referiremos al **Modelo Completo** para la inducción $\Delta\theta$, que se obtiene de introducir la expresión 6.10 para la función $\Phi_b(\mathbf{x})$ en la ecuación 6.9; en contraposición con el modelo aproximado que describimos en la siguiente sección.

6.2.1. Aproximación de inducción pequeña y saturación rápida.

En esta sección, mostraremos que realizando una serie de hipótesis sobre el comportamiento de $\Phi_b(\mathbf{x})$, podemos desligarnos de la estructura específica que le otorga el modelo exponencial 6.10, lo cual nos permitirá escribir la inducción $\Delta\theta$ exclusivamente en términos de la geometría de la curva.

Nuestro punto de partida para este análisis es la hipótesis de que el efecto del fondo está acotado. Recordemos que hemos definido la función $\Phi_b(\mathbf{x})$ de forma tal que, si el entorno no influyera en la percepción del color, adoptaría la forma de la identidad $\Phi_b(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$. En las coordenadas perceptuales, esto implica que podemos escribir el campo de la siguiente forma:

$$\Phi_b(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \kappa \mathbf{D}(\mathbf{x}, \mathbf{b}), \quad (6.11)$$

donde κ es la constante que mide la intensidad máxima del campo de desplazamiento (es decir $\|\mathbf{D}\| \leq 1$). Y ahora desarollaremos la ecuación 6.9 a primer orden en κ . Obsérvese que el término:

$$\Phi_c(\mathbf{C}(\theta)) - \Phi_g(\mathbf{C}(\theta)) = \kappa (\mathbf{D}(\mathbf{C}(\theta), \mathbf{c}) - \mathbf{D}(\mathbf{C}(\theta), \mathbf{g})) \quad (6.12)$$

es de orden κ . Esto implica que el segundo término en el denominador de la ecuación 6.9, es de orden κ^2 y, por lo tanto, podemos despreciarlo. Tomando esta simplificación en cuenta, lo que obtenemos es que

$$\Delta\theta = \kappa ((\mathbf{D}(\mathbf{C}(\theta), \mathbf{c}) - \mathbf{D}(\mathbf{C}(\theta), \mathbf{g}))) \cdot \frac{\frac{d\mathbf{C}(\theta)}{d\theta}}{\left\| \frac{d\mathbf{C}(\theta)}{d\theta} \right\|^2} \quad (6.13)$$

Como podemos ver, el segundo factor del término de la derecha depende exclusivamente de la geometría de la curva en la que se realizaron las mediciones y no tiene información específica sobre la inducción cromática.

La siguiente hipótesis es que el campo de desplazamiento es radial y repulsivo, tal como se hizo en los capítulos anteriores. Esto implica que:

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}, \mathbf{b}) = \|\mathbf{D}(\mathbf{x}, \mathbf{b})\| \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{b})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{b}\|} \quad (6.14)$$

En el modelo exponencial, vimos que el campo de desplazamiento satura luego de una cierta distancia característica. Para continuar con la simplificación del problema, consideraremos que la distancia de saturación del campo es también pequeña con respecto al radio de la circunferencia cromática, es decir, $\ell \ll R$. En ese caso, podemos tomar el módulo del campo de desplazamiento directamente como el valor máximo que obtiene al saturar, es decir $\|\mathbf{D}(\mathbf{x}, \mathbf{b})\| = 1$ (ya que el factor κ que extrajimos corresponde al valor máximo). Es decir, ignoraremos por un momento la dependencia con la distancia del campo de desplazamiento, considerándolo constante y radial. Esto equivale a tomar el límite $\ell \rightarrow 0$ en el modelo exponencial 6.10. Al analizar los datos, verificamos que esta aproximación es buena, al ver que la diferencia en el desempeño de los ajustes al tomar $\ell \neq 0$ es despreciable, como puede verse en la tabla 6.2. En ese caso, y teniendo en cuenta que $\mathbf{g} = (0, 0)$ en el sistema de coordenadas elegido, la ecuación 6.13 adquiere una forma más amigable:

$$\Delta\theta \left\| \frac{d\mathbf{C}(\theta)}{d\theta} \right\| = \kappa \left(\frac{(\mathbf{C}(\theta) - \mathbf{c})}{\|\mathbf{C}(\theta) - \mathbf{c}\|} - \frac{\mathbf{C}(\theta)}{\|\mathbf{C}(\theta)\|} \right) \cdot \left(\frac{\frac{d\mathbf{C}(\theta)}{d\theta}}{\left\| \frac{d\mathbf{C}(\theta)}{d\theta} \right\|} \right). \quad (6.15)$$

Esta ecuación tiene una interpretación geométrica sencilla. Del lado izquierdo, tenemos el producto $\Delta\theta \left\| \frac{d\mathbf{C}(\theta)}{d\theta} \right\|$, el cual representa la distancia perceptual infinitesimal entre el estímulo de referencia y el respondido, medida a lo largo de la curva $\mathbf{C}(\theta)$. Del lado derecho, podemos interpretar el primer factor como un campo dipolar que surge de la diferencia entre los campos radiales asociados al fondo $\mathbf{g} = 0$ y \mathbf{c} , y al segundo factor como la proyección en la dirección del vector unitario tangente a la curva $\mathbf{C}(\theta)$. Esta idea se esquematiza en la figura 6.3. Nos referiremos a esta expresión para $\Delta\theta$ como el **Modelo aproximado**. Obsérvese que, dada la curva $\mathbf{C}(\theta)$, el único parámetro libre es κ . Sintetizando, en términos de κ y ℓ , podemos escribir la relación entre el modelo aproximado (Ap), dado por la ecuación 6.15 y el completo (Co), dado por las ecuaciones 6.9 y 6.10, como

$$\Delta\theta^{\text{Ap}} = \kappa \left. \frac{\partial \Delta\theta^{\text{Co}}}{\partial \kappa} \right|_{\ell=0, \kappa=0}. \quad (6.16)$$

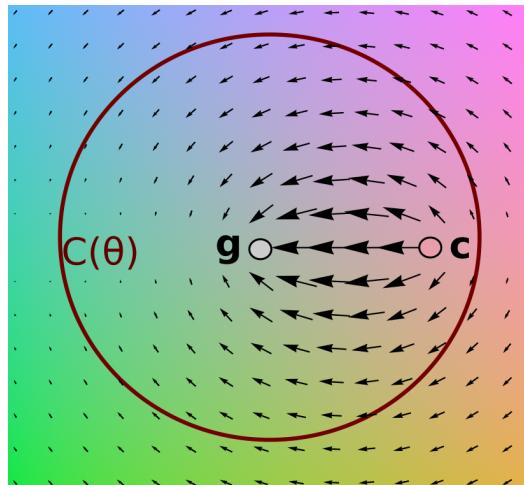


Figura 6.3: La inducción cromática al comparar estímulos presentados en dos entornos g y c es proporcional a la diferencia entre la inducción producida por cada fondo, dando lugar a un campo dipolar. En el experimento KW se mide la proyección de este campo en la dirección tangente a la curva $C(\theta)$.

6.3. Resultados

Utilizaremos este experimento para poner a prueba dos de las hipótesis que conforman nuestro modelo. Nuestro objetivo es evaluar la validez de las siguientes afirmaciones:

1. La radialidad del campo de desplazamiento cromático da lugar a la forma cuasi-sinusoidal de la inducción cromática al proyectarse en una circunferencia.
2. La anisotropía que se observa en la inducción al utilizar entornos de distintas cromaticidades puede atribuirse a la geometría perceptual subyacente de la curva cromática, no estrictamente circular.

Para ello, modelaremos la geometría del espacio de colores –que a su vez determina la geometría de la curva de colores disponibles– y la inducción cromática con distintos niveles de complejidad y veremos cómo cambia la predicción de los resultados experimentales para cada nivel.

Caso circular

Comenzaremos analizando la afirmación (1). Sobre el experimento KW, los autores afirman haber hecho mediciones en una circunferencia cromática definida en las coordenadas de contraste de conos. Como ya mencionamos, la curva utilizada define una circunferencia si y

solo si éstas son las coordenadas cartesianas del espacio, es decir, si la distancia perceptual adquiere la forma euclídea usual. En ese caso, podemos parametrizar la curva como:

$$\mathbf{C}(\theta) = R (\cos(\theta), \sin(\theta)), \quad (6.17)$$

donde R es el radio de la circunferencia cromática (ver Fig. 6.2) que define los estímulos utilizados en el experimento. Por su parte, los fondos se encuentran en una circunferencia de radio menor $r = 0,8R$.

En primer lugar, trabajaremos dentro de la aproximación de inducción con saturación rápida, es decir $\ell/R \rightarrow 0$. Para este caso, el cálculo explícito de la inducción $\Delta\theta$ se simplifica mucho, por lo que lo mostraremos con cierto detalle a modo de ejemplo ilustrativo. Las dos propiedades que cumple la circunferencia al ser parametrizado de la forma 6.17 son $\mathbf{C}(\theta) \cdot \frac{d\mathbf{C}(\theta)}{d\theta} = 0$, es decir, el vector tangente es ortogonal al radio vector, y que $\|\mathbf{C}(\theta)\| = \|\frac{d\mathbf{C}(\theta)}{d\theta}\| = R$, ya que a cambios angulares iguales se recorren distancias iguales. Esto reduce la expresión 6.15 a

$$\Delta\theta = \kappa \left(\frac{-\mathbf{c} \cdot \frac{d\mathbf{C}(\theta)}{d\theta}}{\|\mathbf{C}(\theta) - \mathbf{c}\| R^2} \right). \quad (6.18)$$

Por último, nos resta describir el conjunto de fondos utilizados, es decir qué valores puede tomar \mathbf{c} . Como dijimos anteriormente, el conjunto de fondos utilizados yace en una curva que es simplemente un reescalamiento de la curva de estímulos, dado por el factor $r/R = 0,8$. Es decir que $\mathbf{c} = r(\cos(\theta_c), \sin(\theta_c))$, con $\theta_c = 0^\circ, 45^\circ, \dots, 315^\circ$. Obsérvese que la ecuación 6.18 puede escribirse en términos de las normas y del producto escalar entre \mathbf{c} y $\mathbf{C}(\theta)$, esto hace que la única variable relevante sea el ángulo relativo, como puede verse en la expresión final:

$$\Delta\theta = \frac{\kappa}{R} \frac{\sin(\theta - \theta_c)}{\sqrt{1 + (\frac{r}{R})^2 - 2\frac{r}{R} \cos(\theta - \theta_c)}}. \quad (6.19)$$

Algo destacable de esta expresión, es que solo depende de la combinación de parámetros κ/R y r/R , siendo el segundo un dato que proviene del diseño experimental ($r/R = 0,8$). Esto significa que el único parámetro a ajustar es κ/R , que mide la intensidad del efecto de inducción en relación al radio de la circunferencia, lo cual nos permite entender en qué consiste la aproximación de inducción utilizada en la sección anterior ($\kappa/R \ll 1$).

Hemos llegado a que la inducción cromática para el caso circular depende únicamente de la diferencia $\theta - \theta_c$, por lo tanto, en términos de esta variable los resultados para distintos fondos deberían ser idénticos. Como podemos ver en la figura 6.4, la ecuación 6.19 logra capturar correctamente la forma quasi-sinusoidal que se observa en los datos, pero falla en capturar las variaciones en torno a esta forma que caracterizan a la respuesta para fondos de distintos colores. El valor obtenido para el único parámetro ajustado es $\kappa/R \approx 0,02$,

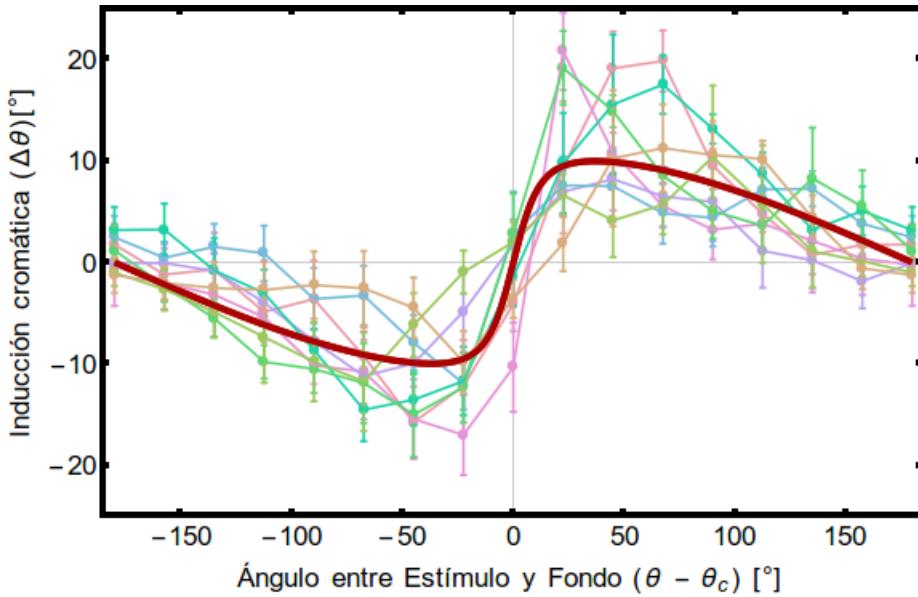


Figura 6.4: Resultados de KW vs. Modelo circular. **Línea Roja:** Ajuste de la ecuación 6.19, que representa la inducción cromática calculada a lo largo de una curva cromática exactamente circular. **Líneas de puntos:** Promedio poblacional ($N=6$) en el experimento de KW de la inducción cromática, el color de cada curva representa la cromaticidad el entorno c en que se midió y las barras de error reflejan la combinación del error estándar de la media y del error experimental.

lo cual es consistente con nuestra aproximación de inducción pequeña ($\kappa/R \ll 1$). El valor obtenido para el chi-cuadrado reducido es de $\chi_r^2 = 1,94$, lo cual es de destacar, en vista de las drásticas simplificaciones realizadas. En las secciones siguientes, se irá refinando el modelo para mejorar este valor. Por último, cabe mencionar que si abandonamos la aproximación de $\ell/R = 0$ y ajustamos su valor usando los datos, obtenemos un valor pequeño y no se obtienen mejoras en el χ^2 (ver tabla 6.2), lo que indica que la aproximación de saturación rápida es una buena descripción y no produce diferencias en cuanto a la varianza todavía no explicada.

Dado que el modelo circular falla en describir la variabilidad de la inducción para distintos valores de θ_c , esto nos dice que, en el marco de nuestro modelo, la geometría no se manifiesta euclídea al ser escrita en términos de las coordenadas de contraste de conos. Esto nos impela estudiar otras posibles geometrías.

Otras geometrías

En general, si no poseemos información a priori sobre la geometría en el espacio en el que estamos trabajando, todo lo que podemos decir, partiendo del hecho de que estamos en

una geometría riemanniana, es que el diferencial de distancia $d\ell^2$ se puede escribir como:

$$d\ell^2 = (d(L - M), dS)^T \cdot J(L - M, S) \cdot (d(L - M), dS) \quad (6.20)$$

donde $J(L - M, S)$ es el tensor métrico que puede variar punto a punto. Mediante este tensor, podemos calcular las geodésicas del espacio, y a partir de las geodésicas obtener un conjunto de coordenadas perceptuales (x_1, x_2) en las que el tensor métrico adopta localmente la forma de la identidad. Entonces, significa que podemos encontrar un mapeo invertible entre estas coordenadas y las originales. Escribiendo las coordenadas $L - M$ y S como funciones $(L - M)(x_1, x_2)$ y $S(x_1, x_2)$ de las coordenadas perceptuales, la curva queda determinada por la ecuación:

$$(L - M)^2(x_1, x_2) + S^2(x_1, x_2) = R^2. \quad (6.21)$$

Utilizando el mapeo inverso, $x_1(L - M, S)$ y $x_2(L - M, S)$, y la parametrización de la curva utilizada por KW, dada por $L - M(\theta) = R \cos(\theta)$ y $S(\theta) = R \sin(\theta)$, escribimos explícitamente la parametrización de esta curva en coordenadas perceptuales:

$$C(\theta) = (x_1(R \cos(\theta), R \sin(\theta)), x_2(R \cos(\theta), R \sin(\theta))) \quad (6.22)$$

Para una J arbitraria, no hay mucho que podamos decir sobre el experimento. En principio, para determinar la geometría tendríamos que conocer las tres funciones que definen a J y por lo tanto tendríamos una mayor cantidad de grados de libertad que de mediciones. Por eso resulta esencial para el modelado de este experimento fijar la forma de J utilizando los resultados de los experimentos de discriminación previos.

Caso: Elipse

Como mencionamos antes, el caso más sencillo es $J(L - M, S) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Sin embargo, esto se contradice con lo que se observa en los experimentos de discriminación, y como vimos en la sección anterior, no explica la variabilidad en la respuesta para distintos fondos. En base a los resultados discutidos en los capítulos previos y siguiendo el criterio de buscar explicaciones lo más sencillas posibles (y con el menor número de parámetros para ajustar), el siguiente paso lógico es tener en cuenta que las escalas de discriminación perceptual en un eje principal y en el otro pueden ser distintas, con lo cual tendríamos que $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$, donde β nos da la relación de escala que hay entre el eje S y el L-M. En este caso la curva del experimento se convierte en una elipse con semiejes R y $\sqrt{\beta}R$. Podemos caracterizar a

la elipse mediante su excentricidad ϵ , que en el caso de $\beta < 1$ –tal como se obtuvo en los ajustes– satisface $\epsilon = \sqrt{1 - \beta^2}$.

Introduciendo la parametrización de la elipse $C(\theta) = R (\cos(\theta), \sqrt{\beta} \sin(\theta))$ en la ecuación 6.15 obtenemos una nueva propuesta de modelo para la inducción cromática, que depende ahora de los parámetros κ/R (intensidad del efecto) y ϵ (excentricidad de la elipse).

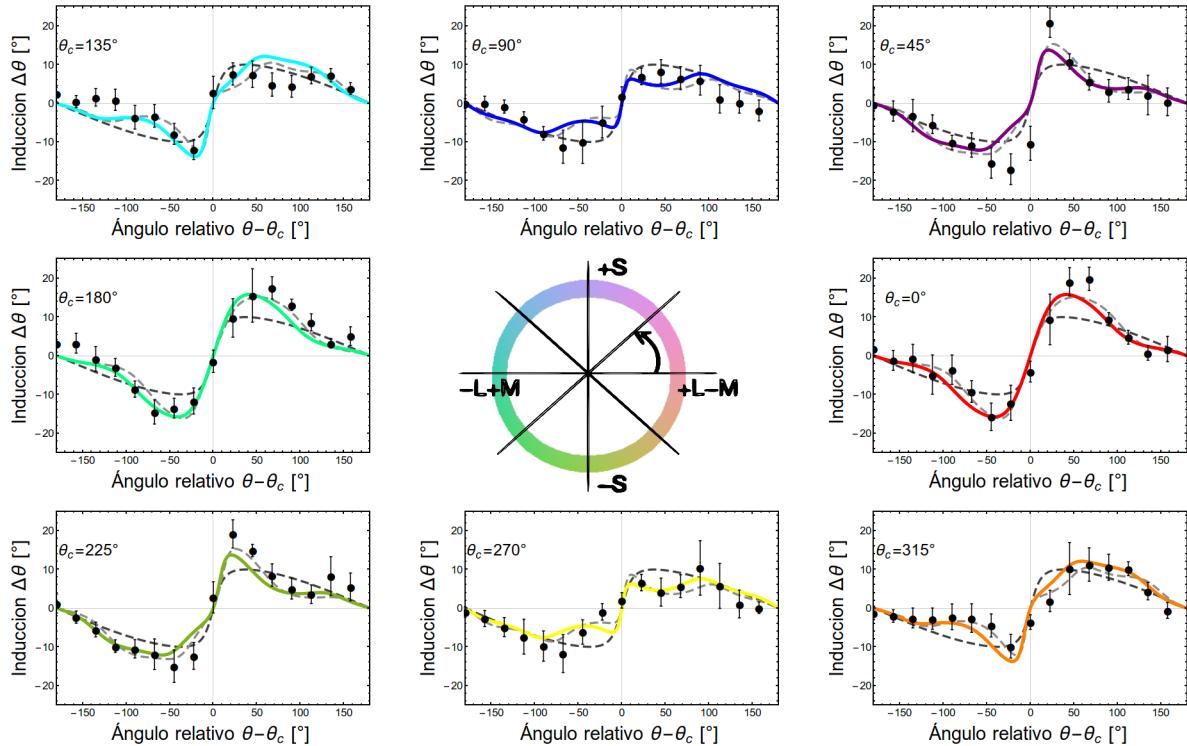


Figura 6.5: Inducción cromática para ocho fondos distintos. Cada panel muestra el cambio angular $\Delta\theta$ entre el estímulo respondido y el de referencia en función del ángulo relativo a la cromaticidad del entorno c . Los puntos corresponden a la media poblacional ($N=6$) y las barras a la combinación ($\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$) del error estándar de la media (σ_1) y del error experimental medio (σ_2). Las líneas coloreadas representan el ajuste del modelo elíptico aproximado (2 parámetros), mientras que la **línea punteada gris oscuro** representa el modelo circular (1 parámetro) y la **línea punteada gris claro** representa el modelo de elipse rotada (3 parámetros). En todos los casos se trabajó en la aproximación de inducción pequeña y saturación rápida.

En la figura 6.5 comparamos este modelo y los datos. Como puede verse, la predicción del modelo logra capturar en gran parte la variabilidad de los resultados para distintos entornos. En la misma figura se grafica en línea gris oscura punteada la predicción del modelo circular obtenido en la sección anterior, lo que permite ver en qué medida la anisotropía de las coordenadas S y $L - M$, y por ende, el carácter elíptico de la curva de colores, mejora la descripción de los resultados. En la tabla 6.2 puede verse que hay una reducción significativa en el valor de $\chi^2_r = \frac{\chi^2}{N_{g.l.}}$, pasando de 1,94 a 1,27. También puede verse que prácticamente no hay diferencia en la calidad del ajuste entre el modelo completo (Ec. 6.9) y el modelo aproximado (Ec. 6.15). Esto es esperable debido a los valores pequeños que toman los parámetros κ/R y ℓ/R .

Caso: Elipse rotada

Si comparamos los experimentos de KW y KG, veremos que el plano en el que realizaron las mediciones no es el mismo. En el caso de KG, se utilizó el plano definido por Mcleod y Boynton (1979), el cual se obtiene utilizando directamente las coordenadas espectrales S y $L - M$. En el caso de KW, utilizan un experimento de flickering para determinar el plano de isoluminiscencia, tal como se explica en [51]. Sobre ese plano utilizan la coordenada S , y luego llaman “ $L - M$ ” a la coordenada que surge de mantener S fijo y variar L y M de forma tal que los estímulos se mantengan en el plano. Esto significa que la coordenada “ $L - M$ ” de KW es alguna combinación lineal de las coordenadas S y $L - M$ que utilizaron KG², lo cual fue detallado en la sección 6.1. Por lo tanto, si las elipses de discriminación están alineadas con los ejes de KG, estarán ligeramente rotadas en los ejes de KW, y viceversa. Por este motivo, agregamos la posibilidad de que los ejes principales de las elipses de discriminación no estén alineados con los ejes utilizados por KW. En particular, esto implica que la coordenada x_1 será una combinación de las coordenadas $L - M$ y S . La forma de introducir esta posibilidad es permitiendo que el tensor métrico posea un término no diagonal, es decir, tomar $J = \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ \gamma & \beta \end{pmatrix}$. Si la geometría del espacio cromático está dada por este tensor métrico, la curva cromática utilizada en el experimento KW es geométricamente una elipse cuyos ejes principales estarán rotados en un ángulo φ_0 con respecto a las direcciones x_1 y x_2 . Es decir, la curva estará parametrizada por

$$\mathbf{C}(\theta) = R(\cos(\theta) + \gamma \sin(\theta), \sqrt{\beta - \gamma^2} \sin(\theta)), \quad (6.23)$$

donde el ángulo de rotación viene dado por la ecuación $\tan(\varphi_0) = -\frac{2\gamma}{\sqrt{\beta^2 - 2\beta + 4\gamma^2 + 1} + \beta - 1}$. Esto agrega un nuevo parámetro a nuestro modelo. Como puede verse en la tabla 6.2, el ajuste mejora al introducir este parámetro, alcanzando el valor $\chi_r^2 = 0,963$, casi la mitad con respecto al caso circular y mejorando en un 20 % con respecto al caso elíptico anterior. En la figura 6.5, mostramos el ajuste en línea punteada color gris claro. El ángulo φ_0 que se obtiene es -13° , el cual es un valor pequeño como era de esperar, ya que el parámetro γ que se reporta en [51] es pequeño con respecto a las escalas en los ejes cardinales.

Por último, verificamos que con nuestro modelo se reproduce la dependencia angular de la intensidad en la inducción cromática que reportan KW. En la figura 6.6 comparamos la predicción de la intensidad máxima de la inducción en función de la cromaticidad del entorno –definida por θ_c – de nuestro modelo con los datos. Puede verse un buen acuerdo entre ambos. Más aún, al tener una expresión analítica válida para todo ángulo, podemos calcular analíticamente cuál es la dirección en la que nuestro modelo predice que la intensidad será

²De hecho, para cada sujeto los autores utilizaron un plano isoluminiscente diferente. El plano específico para cada sujeto no está reportado.

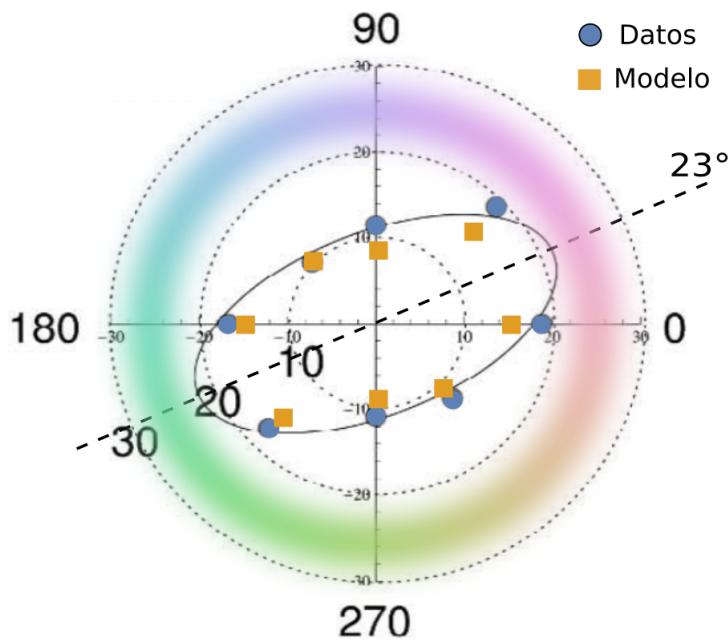


Figura 6.6: Intensidad de la inducción para distintos fondos. La distancia al centro representa la altura del máximo de la inducción, y el ángulo indica el color del fondo sobre el que se midió. La línea punteada a 23° representa la dirección en la que el efecto es máximo, habiendo un excelente acuerdo entre el modelo y los datos.

máxima. Este cálculo arroja como resultado que el máximo está en $\theta_c = 23^\circ$, estando en total acuerdo con el ángulo que obtienen los autores mediante el ajuste de sus resultados. De esta manera, vemos que con solo dos parámetros que describen la geometría del espacio de colores, podemos reproducir la anisotropía.

Caso: Control

Para verificar que la mejora en el ajuste se debe realmente a la geometría de la curva cromática utilizada en el experimento, se repitió el ajuste del caso anterior, pero esta vez se mezclaron aleatoriamente los valores de θ_c , es decir, se cambió al azar el orden de los entornos en que se hizo cada medición. Si la mejora en el ajuste se debiera simplemente a la adición de nuevos parámetros, entonces en este caso el χ^2_r no debería variar significativamente. Sin embargo, lo que vemos es que el reordenamiento aleatorio de la posición de los fondos da un $\chi^2_r = 1,8$, lo que duplica el valor del caso anterior. Esto demuestra que los cambios que introduce el caso elíptico con respecto al caso circular son consistentes con la geometría específica del experimento.

Curva	J	Transformación	Parametrización $C(\theta)$
Circular	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$x_1 = L - M$ $x_2 = S$	$R(\cos(\theta), \sin(\theta))$
Elipse	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$	$x_1 = L - M$ $x_2 = \sqrt{\beta}S$	$R(\cos(\theta), \sqrt{\beta} \sin(\theta))$
Elipse Rotada	$\begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ \gamma & \beta \end{pmatrix}$	$x_1 = L - M + \gamma S$ $x_2 = \sqrt{\beta - \gamma^2}S$	$R(\cos(\theta) + \gamma \sin(\theta), \sqrt{\beta - \gamma^2} \sin(\theta)),$
Cuártica	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta + \alpha S/(2\sqrt{\beta}) \end{pmatrix}$	$x_1 = L - M$ $x_2 = \sqrt{\beta}S + \alpha S^2/2$	$R(\cos(\theta), \sqrt{\beta} \sin(\theta) + \alpha \sin(\theta)^2/2)$

Tabla 6.1: Resumen de los distintos modelos comparados.

Caso: Cuártica

Hasta ahora hemos considerado al tensor métrico constante, pero nuevamente esto no parece cumplirse en los experimentos de discriminación. De acuerdo a ellos, existe una variabilidad apreciable a lo largo de la dirección S . Por este motivo, evaluaremos qué efecto tiene en los ajustes el permitir un cambio en la dirección S . Este cambio lo consideraremos pequeño respecto a la escala global en esa dirección (en nuestro experimento llega a ser un poco más del 50 %).

En este caso, el tensor métrico es $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta + \alpha S/(2\sqrt{\beta}) \end{pmatrix}$. Desarrollando a primer orden en α , obtenemos que la transformación de coordenadas es $x_1 = L - M$, $x_2 = \sqrt{\beta}S + \alpha S^2/2$. Para calcular la inversa, también nos quedaremos a primer orden en α . Esto hace que la ecuación 6.21 que determina la curva cromática sea una ecuación cuártica en (x_1, x_2) . La parametrización de dicha curva es

$$C(\theta) = R(\cos(\theta), \sqrt{\beta} \sin(\theta) + \alpha \sin(\theta)^2/2). \quad (6.24)$$

Introduciendo esto en la ecuación 6.15, obtenemos una nueva expresión para la inducción cromática que también ajustamos a los datos. Cómo puede verse en la tabla 6.2, el cambio en el χ^2_r es realmente muy pequeño, por lo tanto consideramos que no hay evidencia de que la variación en la geometría a lo largo del eje S sea relevante para la explicación de este experimento.

En la Tabla 6.1 se muestra un resumen de las ecuaciones que definen la geometría para cada modelo y en la Tabla 6.2 se despliegan los resultados de los ajustes para cada caso.

Modelo	$\kappa/R(10^{-2})$	ℓ/R	ε	$\varphi_0(^{\circ})$	α	$\chi^2/N_{g.l.}$
Circular - Aproximado	$2,2 \pm 0,1$	—	—	—	—	1,94
Circular - Completo	$2,3 \pm 0,1$	$0,16 \pm 0,10$	—	—	—	1,94
Elipse - Aproximado	$1,83 \pm 0,08$	—	$0,84 \pm 0,03$	—	—	1,27
Elipse - Rotada	$1,73 \pm 0,07$	—	$0,88 \pm 0,02$	-13 ± 2	—	0,963
Elipse - Control	$2,6 \pm 0,2$	—	$0,6 \pm 0,2$	8 ± 8	—	1,80
Elipse - Completo	$1,75 \pm 0,07$	$0,08 \pm 0,04$	$0,88 \pm 0,02$	-14 ± 2	—	0,953
Cuártica - Aproximado	$1,84 \pm 0,08$	—	$0,83 \pm 0,03$	—	$0,12 \pm 0,05$	1,23
Cuártica rotada - Completo	$1,76 \pm 0,07$	$0,07 \pm 0,04$	$0,88 \pm 0,02$	-14 ± 2	$0,04 \pm 0,04$	0,955

Tabla 6.2: Valores de los parámetros que del modelo que mejor ajustan a los datos.

6.3.1. Inducción media para una geometría arbitraria

En las secciones anteriores hemos reproducido los resultados del experimento KW mediante la elección de ciertas geometrías en el espacio de colores, inspiradas en los experimentos de discriminación. A continuación, realizaremos un cálculo general que nos permitirá prescindir de una descripción detallada de la geometría. Específicamente, veremos que si la curva cromática no es exageradamente excéntrica –es decir, si la diferencia entre las distancias máxima y mínima a su baricentro no es demasiado grande–, la inducción cromática promediada sobre distintos entornos puede aproximarse por la inducción obtenida en el caso circular (ver ecuación 6.19). Es decir, vamos a probar que si escribimos la inducción cromática en términos del ángulo relativo entre el entorno y el estímulo y promediamos sobre los distintos entornos, entonces la anisotropía –que surge de la no circularidad de la curva cromática– se anula a primer orden, permitiéndonos reproducir su valor medio mediante la ecuación de la inducción en el caso circular (ver figura 6.4). Esta aproximación permite reproducir los datos experimentales mediante el ajuste de un único parámetro, como mostramos al final de esta sección en la figura 6.9.

Comenzaremos el análisis a partir de la ecuación 6.15, de donde obtenemos una expresión para la inducción angular $\Delta\theta$ en términos de la curva cromática $\mathbf{C}(\theta)$. Utilizaremos explícitamente que el color del entorno se halla en una curva que es proporcional a $\mathbf{C}(\theta)$, lo cual implica que, dado θ_c , podemos escribir $\mathbf{c} = \lambda\mathbf{C}(\theta_c)$, siendo λ igual a $r/R = 0,8$ en las condiciones del experimento KW. El objetivo es calcular el promedio de $\Delta\theta(\theta, \theta_c)$ al variar θ_c , pero manteniendo fijo el ángulo relativo $\varphi = \theta - \theta_c$, y mostrar que el resultado puede approximarse por la inducción en el caso circular $\Delta\theta^\circ(\varphi)$, dada por la ecuación 6.19. Es decir, queremos probar que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Delta\theta(\varphi + \theta_c, \theta_c) d\theta_c \approx \Delta\theta^\circ(\varphi) \quad (6.25)$$

Lo primero que cabe mencionar es que, como la integral se realiza a lo largo de un período, manteniendo fija la diferencia entre θ y θ_c , es indistinto que integremos variando θ

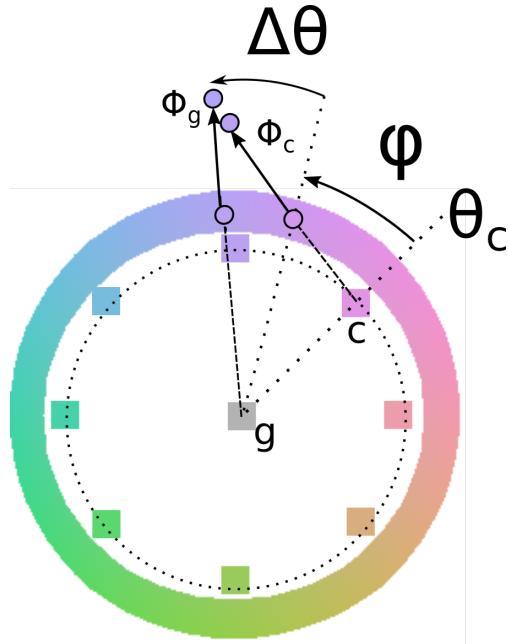


Figura 6.7: El cálculo del promedio sobre entornos se realiza manteniendo φ fijo e integrando sobre θ_c o equivalentemente sobre θ . A nivel de los datos, el promedio se approxima usando las mediciones en los 8 fondos marcados con cuadrados.

o θ_c , es decir, vale la siguiente igualdad

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta_c \Delta\theta(\varphi + \theta_c, \theta_c) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \Delta\theta(\theta, \theta - \varphi), \quad (6.26)$$

en donde simplemente hemos cambiado la variable de integración aprovechando que la integral de una función periódica a lo largo de un período es invariante ante traslaciones rígidas. Este cambio de variable simplifica un poco los cálculos posteriores.

Como hemos visto, la inducción angular $\Delta\theta$ depende de la curva cromática $\mathbf{C}(\theta)$, por lo tanto, *a priori*, su promedio también. Para caracterizar esta dependencia podemos definir el siguiente funcional:

$$\Theta_\varphi [\mathbf{C}(\theta)] := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \mathcal{L} (\mathbf{C}(\theta), \mathbf{C}(\theta - \varphi), \dot{\mathbf{C}}(\theta)) \quad (6.27)$$

donde $\mathcal{L}(\mathbf{C}(\theta), \mathbf{C}(\theta - \varphi), \dot{\mathbf{C}}(\theta)) := \Delta\theta(\theta, \theta - \varphi)$, con $\Delta\theta$ definido mediante la ecuación 6.15, y tomando $\dot{\mathbf{C}}(\theta) := \frac{d\mathbf{C}(\theta)}{d\theta}$. Para φ fijo, Θ_φ es una función que recibe como argumento una curva $\mathbf{C}(\theta)$ y le asigna el número real $\Theta_\varphi [\mathbf{C}(\theta)]$. Haciendo una analogía con el funcional que define las trayectorias en mecánica clásica –la acción S –, aquí \mathcal{L} ocuparía el rol de

lagrangiano del sistema. Explícitamente, tiene la siguiente forma:

$$\mathcal{L}(\mathbf{C}(\theta), \mathbf{C}(\theta - \varphi), \dot{\mathbf{C}}(\theta)) = \kappa \left(\frac{(\mathbf{C}(\theta) - \lambda \mathbf{C}(\theta - \varphi))}{\|\mathbf{C}(\theta) - \lambda \mathbf{C}(\theta - \varphi)\|} - \frac{\mathbf{C}(\theta)}{\|\mathbf{C}(\theta)\|} \right) \cdot \left(\frac{\frac{d\mathbf{C}(\theta)}{d\theta}}{\|\frac{d\mathbf{C}(\theta)}{d\theta}\|^2} \right). \quad (6.28)$$

El siguiente paso es buscar puntos extremos de este funcional. ¿Por qué? Una curva que extrema este funcional, nos permitirá aproximar el valor de Θ_φ para curvas que se puedan escribir como una perturbación sobre la trayectoria extrema, ya que entonces las desviaciones en el valor de $\Theta_\varphi [\mathbf{C}(\theta)]$ se anularán a primer orden. Para obtener esta curva estacionaria, debemos calcular las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a este funcional. En la siguiente sección, mostraremos que la circunferencia es solución de este problema.

La circunferencia: una buena aproximación

En esta sección demostraremos que la circunferencia es una curva que extrema al funcional Θ_φ y que, por lo tanto, la inducción promedio puede逼近arse con el resultado del caso circular. En primer lugar, vamos a caracterizar a una circunferencia como curva paramétrica y ver qué condiciones debe satisfacer para ser una “buena aproximación” de una dada curva $\mathbf{C}(\theta)$. Como curva paramétrica, una circunferencia tiene un total de 4 grados de libertad: la posición de su centro (2 g.l.), su radio (1 g.l.) y su fase (1 g.l.), es decir, el punto en el que comenzamos a recorrerla. A este último grado de libertad se debe la aclaración “como curva paramétrica”, ya que no es una propiedad de la circunferencia como objeto geométrico, pero es relevante a la hora de逼近ar una curva paramétrica específica. Adicionalmente, uno podría considerar todas las posibles reparametrizaciones –que son infinitas–, sin embargo, en nuestro caso la parametrización de la curva fue prescrita en el diseño del experimento, por lo que consideraremos que está fija. Tomaremos como centro de la circunferencia el bárcentro de $\mathbf{C}(\theta)$, al cual pondremos en el origen de coordenadas –el problema variacional que estamos tratando tiene simetría de traslación, por lo que esto no es un inconveniente–. Por lo tanto, nos quedan 2 grados de libertad que podemos escoger para que la aproximación de $\mathbf{C}(\theta)$ sea lo más fiel posible. La parametrización de la circunferencia de radio \bar{R} y con fase θ_0 que utilizaremos es $\mathbf{C}^\circ(\theta - \theta_0) = \bar{R}(\cos(\theta - \theta_0), \sin(\theta - \theta_0))$, donde \bar{R} y θ_0 son los parámetros a optimizar y \mathbf{C}° es la circunferencia de radio 1. Esta parametrización es la que se reduce adecuadamente al caso circular tratado en la sección anterior. Entonces, si escribimos

$$\mathbf{C}(\theta) = \bar{R} \mathbf{C}^\circ(\theta - \theta_0) + \boldsymbol{\eta}(\theta), \quad (6.29)$$

lo que queremos es encontrar los valores de \bar{R} y que θ_0 que minimicen *eta* a lo largo de toda la curva. Escribiremos esta condición como la minimización de la siguiente distancia:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \| \mathbf{C}(\theta) - \bar{R} \mathbf{C}^\circ(\theta - \theta_0) \|^2. \quad (6.30)$$

En la figura 6.8 podemos ver la interpretación geométrica de esta condición. $\eta(\theta)$ está repre-

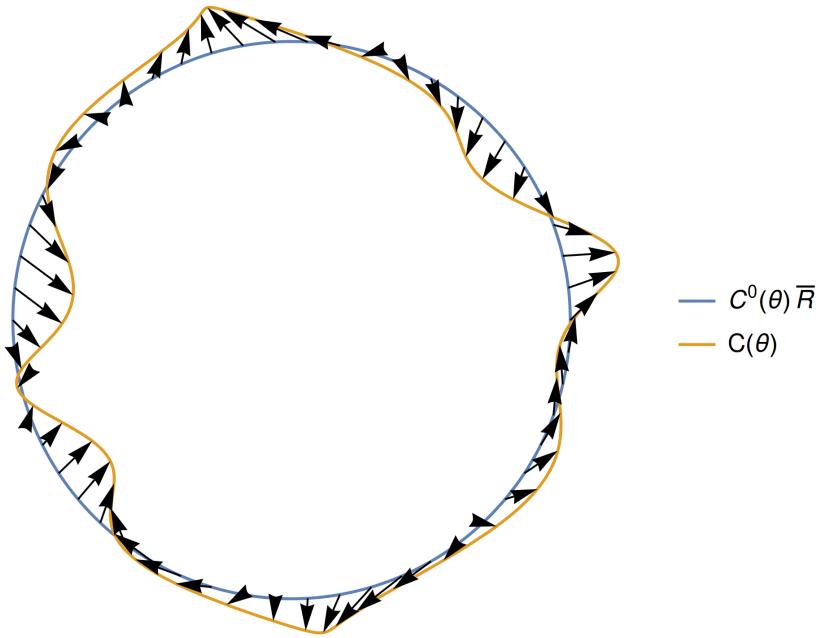


Figura 6.8: Aproximación de la curva $C(\theta)$ por una circunferencia. Las flechas representan la variación $\eta(\theta)$.

sentada por las flechas en dicha figura, y el objetivo es encontrar los parámetros que minimizan esas flechas. Para minimizar la distancia definida, derivamos respecto de los parámetros e igualamos a 0, obteniendo las siguientes dos condiciones:

1. Derivando respecto de \bar{R} :

$$\bar{R} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \mathbf{C}(\theta) \cdot \mathbf{C}^\circ(\theta - \theta_0).$$

2. Derivando respecto respecto de θ_0 :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \mathbf{C}(\theta) \cdot \dot{\mathbf{C}}^0(\theta - \theta_0) = 0.$$

De la primer condición obtenemos el valor de \bar{R} , mientras que la segunda ecuación define

implícitamente a θ_0 ³. Obtenidos estos parámetros, podemos escribir las condiciones (1) y (2) como condiciones sobre la variación $\boldsymbol{\eta}(\theta)$, a saber:

1. $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \boldsymbol{\eta}(\theta) \cdot \mathbf{C}^\circ(\theta - \theta_0) = 0.$
2. $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \boldsymbol{\eta}(\theta) \cdot \dot{\mathbf{C}}^\circ(\theta - \theta_0) = 0.$

Estas dos condiciones serán relevantes en breve.

Hemos definido de qué modo aproximar a la curva $\mathbf{C}(\theta)$ por una circunferencia. Utilicemos esta aproximación para demostrar que vale la siguiente propiedad:

$$\Theta_\varphi[\mathbf{C}(\theta)] \approx \Theta_\varphi [\bar{R}\mathbf{C}^\circ(\theta - \theta_0)] + \mathcal{O}(\eta^2), \quad (6.31)$$

la cual implica la ecuación 6.25, que es el objetivo de esta sección. Para validar esta aproximación, debemos mostrar que la corrección a primer orden se anula. Utilizando el cálculo variacional, escribimos Θ_φ desarrollado alrededor de \mathbf{C}° :

$$\Theta_\varphi[\mathbf{C}(\theta)] \approx \Theta_\varphi [\bar{R}\mathbf{C}^\circ(\theta - \theta_0)] + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \left. \frac{\delta \Theta_\varphi}{\delta \mathbf{C}(\theta)} \right|_{\mathbf{C}^\circ(\theta - \theta_0)} \cdot \boldsymbol{\eta}(\theta) + \mathcal{O}(\eta^2), \quad (6.32)$$

en donde la primer derivada del funcional es el término que define las ecuaciones de Euler-Lagrange del sistema:

$$\frac{\delta \Theta}{\delta \mathbf{C}(\theta)} := \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{C}(\theta)} \right|_\theta + \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{C}(\theta - \varphi)} \right|_{\theta+\varphi} - \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{C}}} \right)_\theta. \quad (6.33)$$

Nótese que debido a que el lagrangiano depende de la curva evaluada en dos puntos distintos, θ y $\theta - \varphi$, aparece un término adicional en las ecuaciones de Euler-Lagrange. También cabe notar que, dado que $\mathbf{C}(\theta)$ está definida en el plano y tiene dos componentes C_1, C_2 , las derivadas aquí utilizadas deben leerse como:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} := \left(\frac{\partial}{\partial C_1}, \frac{\partial}{\partial C_2} \right) = \nabla_C \quad (6.34)$$

Más allá del tedio, no hay complicaciones mayores en el cálculo de 6.33, ya que solo involucra hacer derivadas y luego evaluar en la circunferencia. El resultado de esta operación es:

$$\frac{\delta \Theta}{\delta \mathbf{C}(\theta)} [\bar{R}\mathbf{C}^\circ(\theta)] = A(\varphi)\mathbf{C}^\circ(\theta) + B(\varphi)\dot{\mathbf{C}}^\circ(\theta), \quad (6.35)$$

³Puede demostrarse que esta ecuación tiene siempre solución. Suponiendo que $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \mathbf{C}(\theta) \cdot \dot{\mathbf{C}}^0(\theta - \theta_0)$ tiene un dado signo para θ_0 , puede verse que para $\theta_0 + \pi$ posee el signo contrario, por continuidad debe valer 0 en algún punto intermedio.

donde

$$A(\varphi) := -\frac{\lambda \bar{R} \sin(\varphi) (\lambda^2 \bar{R}^2 \cos(2\varphi) - \lambda \cos(\varphi) ((\lambda^2 + 3) \bar{R}^2 + 3) + 2\lambda^2 \bar{R}^2 + \lambda^2 + \bar{R}^2 + 2)}{(\bar{R}^2 (-2\lambda \cos(\varphi) + \lambda^2 + 1))^{3/2}}$$

$$B(\varphi) := -\frac{\lambda \bar{R} (\lambda - \cos(\varphi)) (\lambda \cos(\varphi) - 1) (-2\lambda \bar{R}^2 \cos(\varphi) + (\lambda^2 + 1) \bar{R}^2 + 1)}{(\bar{R}^2 (-2\lambda \cos(\varphi) + \lambda^2 + 1))^{3/2}}.$$

Introduciendo este resultado en la expresión 6.32, obtenemos:

$$\Theta_\varphi [\mathbf{C}(\theta)] \approx \Theta_\varphi [\bar{R} \mathbf{C}^\circ(\theta - \theta_0)] + A(\varphi) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \mathbf{C}(\theta) \cdot \boldsymbol{\eta}(\theta) + B(\varphi) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \dot{\mathbf{C}}(\theta) \cdot \boldsymbol{\eta}(\theta) + \mathcal{O}(\eta^2). \quad (6.36)$$

Debido a las condiciones que definen a \bar{R} y θ_0 , mostramos que se cumplen las propiedades 1 y 2. Esto implica que las dos integrales que aparecen en el desarrollo de $\Theta_\varphi [\mathbf{C}(\theta)]$ deben anularse. Por último, mencionamos al comienzo de la sección anterior que la $\Theta_\varphi [\mathbf{C}(\theta)]$ era invariante ante traslaciones rígidas de la variable θ , por lo que podemos ignorar el corrimiento en θ_0 . En conclusión, obtuvimos que:

$$\Theta_\varphi [\mathbf{C}(\theta)] \approx \Theta_\varphi [\bar{R} \mathbf{C}^\circ(\theta)] + \mathcal{O}(\eta^2), \quad (6.37)$$

lo cual demuestra la proposición inicial de esta sección, es decir, que independientemente de los detalles de la curva, si la misma no es demasiado excéntrica, vale la siguiente aproximación: (ver ecuación 6.25):

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Delta\theta(\varphi + \theta_c, \theta_c) d\theta_c \approx \frac{\kappa}{\bar{R}} \frac{\sin(\varphi)}{\sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos(\varphi)}} \quad (6.38)$$

Comparación con los datos

Habiendo obtenido una expresión para la inducción promedio (Ec. 6.38), comparemos la predicción de nuestro cálculo con el promedio angular de los datos de KW. Para esta comparación, aproximaremos el promedio angular por un promedio sobre los 8 entornos medidos, los cuales están distribuidos equiespaciadamente en la variable θ . Es decir $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Delta\theta(\varphi + \theta_c, \theta_c) d\theta_c \approx \frac{1}{8} \sum_{i=0}^8 \Delta\theta(\varphi + \theta_i, \theta_i)$, con $\theta_i = 0, \pi/4, \pi/2, \dots, 7\pi/4$. El resultado puede verse en la figura 6.9.

Como podemos ver el acuerdo es excelente, y el único parámetro ajustado es $k/R = 0,0207 \pm 0,0008$, obteniéndose un $\chi^2_r = 1,08$, ya que $\lambda = 0,8$ es un dato del experimento. Esto nos muestra que incluso sin necesidad de suponer una geometría específica, encontramos fuerte evidencia a favor de que tiene consecuencias empíricas observables.

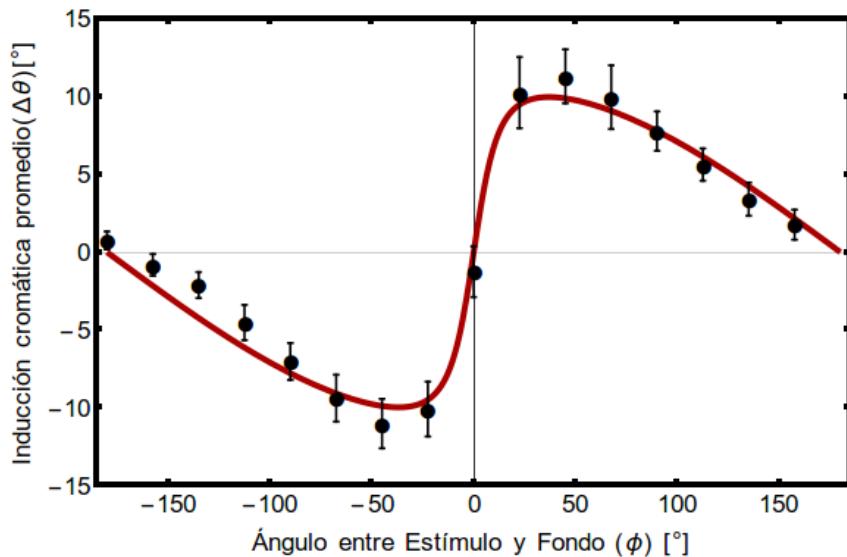


Figura 6.9: Promedio sobre entornos: Los puntos representan la inducción cromática promediada en los 8 entornos medidos, las barras corresponden a la combinación del error estadístico de la media y de la incertezza media de cada punto. La curva se obtiene mediante el ajuste del parámetro $\frac{\kappa}{R}$ en la ecuación 6.38.

Por último, cabe mencionar que de la expresión analítica que hemos obtenido para $\Delta\theta$ podemos calcular la posición del máximo θ_M , que satisface

$$\cos(\theta_M) = \lambda = 0,8, \quad (6.39)$$

con lo cual $\theta_M = 36^\circ$, que es lo que se observa en la figura 6.9. Esta predicción puede realizarse sin ajustar ningún parámetro, ya que la posición del máximo es producto de la relación de escalas entre la saturación de los entornos y la de los estímulos. Más aún, podríamos usar el valor de la curva en dicho máximo, para adimensionalizar la curva, y en ese caso habríamos obtenido un muy buen ajuste con los datos sin necesidad de ajustar ningún parámetro.

6.4. Discusión

En este capítulo hemos estudiado la inducción cromática a lo largo de una curva cromática cerrada basándonos en el experimento KW. Como la geometría del espacio de colores de cada sujeto era a priori desconocida, pues no se midió la capacidad de discriminación de los participantes, supusimos geometrías con distintos grados de complejidad, inspiradas en los resultados de los capítulos previos. Las distintas geometrías las caracterizamos por su tensor métrico, que a su vez define la transformación de las coordenadas $L - M$ y S a las coordenadas perceptuales. Como la curva cromática estaba definida en términos de $L - M$ y S , la geometría de la curva varía al cambiar el tensor métrico y su forma queda explícita al es-

cribirla en las coordenadas perceptuales. Demostramos que en nuestro modelo, la inducción cromática medida en este paradigma experimental depende únicamente de la geometría de la curva, lo cual es consecuencia suponer que la inducción cromática es radial y que alcanza un valor máximo (ver 6.9). Mostramos que asumir que la curva era circular permitía describir cualitativamente la inducción, pero no era capaz de explicar la variación–o anisotropía– que se observaba para distintos entornos. Luego mostramos que dicha anisotropía sí podía explicarse si se asumía que la discriminación cromática a lo largo del eje S posee una escala diferente de aquella a lo largo del eje $L - M$ –tal como vimos en experimentos previos–, implicando que la curva cromática es una elipse (ver figura 6.5). Si, adicionalmente, se considera que la elipse puede no estar alineada con los ejes utilizados –ver discusión en la sección 6.3–, el acuerdo es incluso mayor, reproduciéndose la variabilidad angular del máximo de la inducción cromática (ver figura 6.6).

Por último, realizamos un cálculo que nos permitió reproducir mediante el ajuste de un único parámetro la inducción promediada sobre distintos entornos (ver figura 6.9). Este cálculo se basa en la existencia de una geometría subyacente euclídea, pero sin necesidad de suponer que el tensor métrico en las coordenadas S y $L - M$ tome alguna forma particular. Concretamente, al hacer un cálculo variacional, consideramos toda una familia de curvas *cuasi-circulares*, y demostramos que el resultado final es independiente de la forma específica de la curva.

La descripción exitosa del experimento de KW aporta sustento a las hipótesis fundamentales de esta tesis, referidas a la existencia de una geometría del espacio de colores, identificable con experimentos de discriminación, y respecto de la cual la inducción cromática es isotrópica y homogénea.

Capítulo 7

Memoria Cromática

“La memoria juega con su propio contenido un oscuro juego del que cualquier tratado de psicología aporta pruebas ejemplares. Arritmia del hombre y su memoria, que a veces se queda atrás y otras finge un espejo impecable que la confrontación parece desmentir con escándalo.”

— Julio Cortázar, *La vuelta al día en ochenta mundos*

Existe una controversia de larga data respecto de las estrategias computacionales utilizadas por humanos para procesar el color. En una línea de investigación clásica [65, 81, 111–113] y en los experimentos previamente descritos en esta tesis, la precisión con el que los colores similares son discriminados fue explorada únicamente utilizando tareas perceptuales que no requieren de un procesamiento cognitivo adicional, como lenguaje o memoria. Otras líneas, en cambio, han explorado precisamente cómo el continuo de tonalidades cromáticas puede aparecer segmentado en categorías discretas, a veces correspondientes a las etiquetas lingüísticas de los diferentes colores. Algunos estudios concluyen que el proceso de segmentación no depende de las palabras asociadas, [114–116], mientras que otros argumentan que el lenguaje delimita los bordes entre las diferentes categorías cromáticas [117–121, 121–123], a veces distinguiendo incluso entre representaciones de bajo (discriminación sensorial) o de alto (atención, lenguaje) nivel de procesamiento[124]. Más aún, otros estudios reportan resultados mixtos que muestran que el efecto lingüístico en algunas –pero no en todas– de la fronteras entre categorías [125], lo cual puede depender del grado de entrenamiento [126]. En humanos, la fisiología de la región V4 ventral incluso provee evidencia de que la representación de los colores cambia, dependiendo de si la tarea involucra o no componen-

tes lingüísticas[127]. Los distintos resultados obtenidos por diferentes estudios han llevado a postular la hipótesis de que un dado experimento de procesamiento de color puede o no mostrar evidencia de categorización cromática dependiendo del tipo de cálculo cognitivo requerido por la tarea[118, 128, 129]. Desde esta óptica, la presencia de fronteras categóricas en un experimento particular no implica que las mismas categorías se encontrarán en otros experimentos [130]. Esta hipótesis cuestiona la idea de que el color es representado mediante un único código neuronal, y sugiere que podrían existir múltiples representaciones simultáneas –y no necesariamente equivalentes–[131]. Algunas de estas representaciones pueden volverse funcionales en una tarea mediada por lenguaje y resultar superfluas en una tarea puramente perceptual, y viceversa. Los códigos que operan en diferentes tareas deberían ser entonces analizados separadamente. En este capítulo, nos dedicamos a investigar las estrategias utilizadas para el almacenamiento transitorio y la recuperación en la memoria de un color, dado que no es claro si la memoria cromática está organizada en términos de unos pocos colores focales o si más bien se utiliza el continuo de posibles tonalidades. El experimento fue realizado durante el año 2014 por el autor de esta tesis y tres colaboradores: María da Fonseca, Rodrigo Echeveste y Federico Clavero, bajo la dirección de Inés Samengo [87]. El análisis de los resultados fue cronológicamente anterior al resto de los capítulos que componen esta tesis, pero son relatados recién al final, para no interrumpir el hilo argumental de los capítulos 2-6, que conforman una unidad conceptual. Esta discontinuidad temporal implica que la pregunta planteada en este capítulo, y el marco conceptual de la respuesta, no deben entenderse como una continuación inmediata de los capítulos anteriores.

En múltiples estudios previos [114, 117, 119, 120, 123, 132–134], se midió la precisión de la memoria cromática a lo largo del espacio de colores. Típicamente, se obtuvieron resultados dispares, observándose una correcta evocación del color en algunas regiones del espacio, pero no en otras. El objetivo era entonces determinar si esa variación entre regiones podía estar relacionada a las categorías de colores inducidas por el lenguaje, es decir, si el error en la evocación del color era mayor en el color focal de cada categoría y menos en el borde entre dos categoría, incluso si la tarea no requería etiquetas lingüísticas. Tomando un enfoque más neutral sobre el posible origen de las categorías, aquí definimos categorías en términos de las propiedades de la respuesta y no del uso específico de palabras para designar los colores. Diseñamos un juego de computadora en el que los jugadores deben recordar un color. Luego de un breve período de tiempo observando una pantalla de distracción, los jugadores debían responder qué color habían observado entre un continuo de posibilidades. La tarea de por sí no forzaba al jugador a usar ningún tipo de segmentación lingüística de los colores. Los participantes, sin embargo, eran libres para usar la estrategia mnemónica de su preferencia, la cual podía, en principio, estar basada en una táctica lingüística, o en la asociación con un objeto fácil de recordar que pudiera usarse como referencia.

En un extremo, una estrategia mnemónica completamente desestructurada es posible, en la cual el jugador memoriza y recupera una representación no-sesgada de cada color. En este caso los errores de respuesta correspondiendo a un color objetivo fijo tiene media cero, y la varianza representa la precisión necesariamente limitada del proceso de almacenamiento y evocación. Si la varianza es constante a lo largo del espacio de color, entonces la precisión mnemónica del jugador es uniforme. Si la varianza cambia de color a color, entonces la estrategia no es completamente desestructurada, dado que la memoria cromática del jugador es capaz de realizar discriminaciones más finas en ciertas regiones del espacio que en otras.

En el extremo opuesto, una estrategia completamente categórica es posible, mediante la cual el jugador divide el continuo de tonalidades cromática en categorías discretas y solo memoriza la categoría. Cuando se le pregunte sobre el color recordado, el jugador puede utilizar distintos procedimientos para seleccionar el color respondido dentro de la categoría recordada. Puede que utilice un color representativo de cada categoría, también llamado *color focal*, y que utilice este color como el referente de la categoría completa. Alternativamente, puede que responda un color elegido aleatoriamente dentro de la categoría. Para un color objetivo fijo, la distribución de probabilidad de la respuesta puede o no ser plana. Una distribución plana no tiene un color focal, pero aún así estará definida por los bordes de la categoría. Una distribución deltiforme en la que toda la probabilidad está concentrada en cierta región específica de colores es al mismo tiempo categórica y organizada en términos de atractores o focos. Todas estas estrategias categóricas producen errores de evocación cuyo promedio sobre realizaciones da distinto de cero, al menos, para todos los colores que no coinciden con el color focal. Descubrir un sesgo sistemático en la respuesta de los sujetos sería por lo tanto una señal de una estrategia mnemónica basada en la existencia de categoría. Por este motivo, en este capítulo realizaremos una medición cuidadosa de los errores medios de la respuesta para saber si difieren o no significativamente de cero. Si lo hacen, esta condición es tomada como una signo de una estrategia categórica.

Uno de los objetivos específicos de explorar la memoria cromática fue el de construir, para cada observador, una escala cromática mnemónicamente uniforme. La herramienta natural para construir esta escala es la llamada Información de Fisher [135]. Esta herramienta puede ser utilizada para acotar la máxima precisión con la que dos colores recordados pueden ser discriminados. Una funcionalidad adicional, y menos advertida, de la información de Fisher es que constituye una métrica, permitiéndonos calcular distancias entre pares de colores [48, 59]. En oposición a, por ejemplo, la distancia euclídea en el espacio físico, la distancia basada en la métrica de Fisher representa qué tan distintos cada observador retiene los dos colores, en término de su habilidad para distinguirlos en una tarea mnemónica. Más aún, esta noción individual de distancia puede ser utilizada para construir una nueva escala

de color mnemónicamente uniforme para cada sujeto. Esta escala puede ser útil desde una perspectiva tanto teórica como práctica. Desde el punto de vista teórico, caracterizar las diferencias individuales en la escala mnemónicamente uniforme entre distintos observadores puede brindarnos información sobre la generalidad de los mecanismos que subyacen a la representación de los colores en la memoria. Desde la perspectiva práctica, tener una métrica hecha a la medida de cada sujeto podría ser útil para diseñar pantallas en las que los colores de los estímulos que se pretende memorizar están escalados de tal forma que se pueda aprovechar al máximo la capacidad mnemónica del sujeto en cuestión –incluyendo gente con daltonismo–. En este capítulo, utilizaremos los datos experimentales obtenidos mediante una tarea de memoria cromática para caracterizar las estrategias usadas por humanos para recordar colores. Encontramos evidencia de que los sujetos utilizan estrategias basados en categorías y calculamos la métrica de Fisher para cada observador. Aunque no hallamos evidencia conclusiva de que diferentes sujetos construyen categorías en torno a colores focales universales, sí observamos ciertas regularidades en la discriminación mnemónica de los sujetos testeados. Estas regularidades dan lugar a una escala mnemónicamente uniforme hecha a medida de cada sujeto que muestra similaridades en la muestra de observadores evaluados.

7.1. Un juego de computadora para medir la memoria cromática.

El juego de computadora fue diseñado por María da Fonseca, en base a un trabajo previo hecho por Rodrigo Echeveste y espectralmente calibrado por Federico Clavero. El juego consistía de una secuencia de tests de memoria. Los jugadores se sentaban a aproximadamente 60 cm de la pantalla de la computadora. La Figura 7.1 ilustra la estructura de cada test. Primero, los jugadores eran instruidos a recordar el color que se le mostraría a continuación, al que llamamos color *objetivo*. Inmediatamente después, la pantalla mostraba un cuadrado de 11 cm × 11 cm pintado con el color objetivo por 2.5 seg (Fig 7.1B). El área del cuadrado fue elegida grande y el fondo acromático, para minimizar el efecto perceptual que produce el contraste con el fondo [10, 13]. Luego, una pantalla de Mondrian aleatoria separaba el color objetivo del período de respuesta (Fig 7.1C). El intervalo de 5 segundos de la máscara asegura que la evocación ocurre una vez que la memoria fue estabilizada [136], y la máscara de Mondrian fue utilizada para eliminar los efectos de *afterimage* inducidos por el cuadrado coloreado uniformemente [137]. En el período de respuesta, un segundo cuadrado coloreado aparecía (Fig 7.1D), cuya tonalidad variaba continuamente a medida que el sujeto desplazaba el cursor sobre la barra. La barra se desliza entre 743 posibles colores. El jugador podía moverse libremente a lo largo de la barra el tiempo que quisiera –típicamente

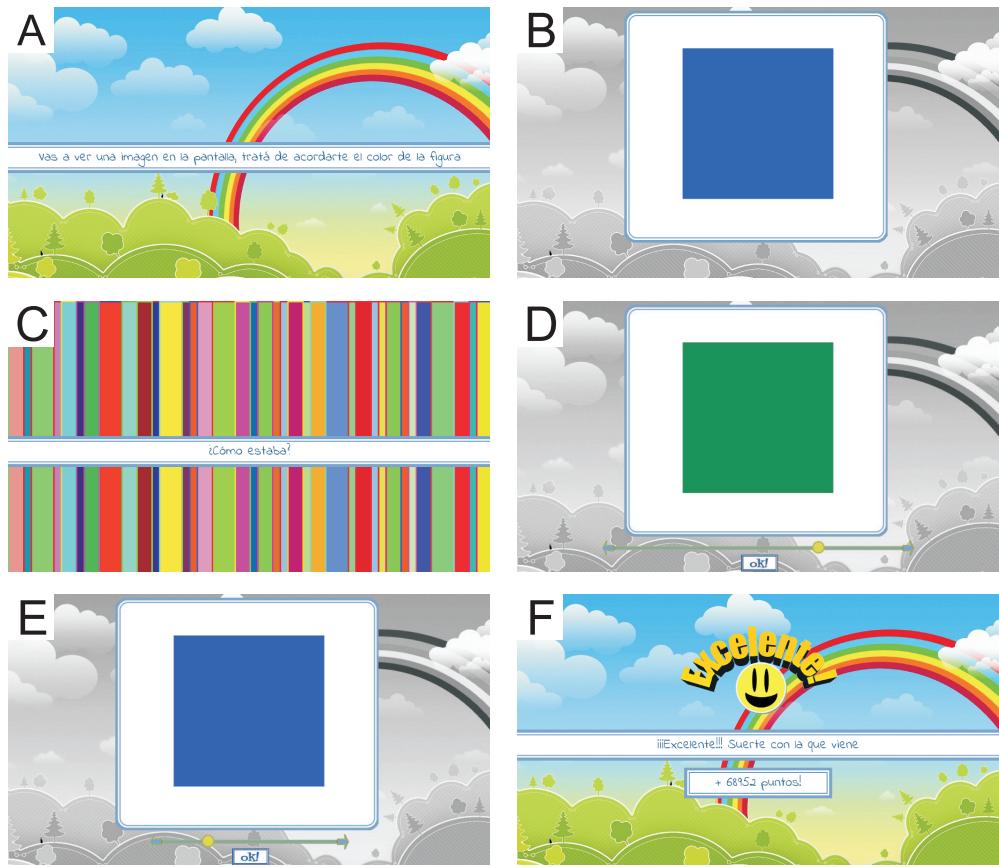


Figura 7.1: Organización del test de memoria. A: Pantalla explicatoria en la que el jugador es instruido a recordar el color mostrado a continuación B: Color objetivo t a ser recordado. C: Máscara de Mondrian en la que se muestra la instrucción de recordar el color para la siguiente pantalla. D y E: Pantallas de búsqueda, donde el jugador puede cambiar continuamente el color del cuadrado central desplazando el cursor sobre la barra inferior. El objetivo es recuperar el color objetivo mostrado antes (panel B). El color seleccionado es elegido al clickear sobre el botón con la etiqueta “Ok!”. F: Pantalla de Recompensa, donde la expresión del emoticón - que va de feliz a triste - y la puntuación obtenida son determinados por la similaridad entre el objetivo t y el color respondido r .

unos pocos segundos–, hasta que él/ella identificaba el color que consideraba como el más parecido al que recordaba. La elección era reportada clickeando en el botón *Ok!*. El puntaje de la respuesta dependía de la distancia entre el color objetivo y el color respondido. El jugador recibe una devolución de su desempeño en la forma de un puntaje numérico, y también con un emoticón cuya expresión dependía del puntaje. La devolución se incluyó porque ayudaba a los jugadores a mantener la atención en un juego, de por sí aburrido, y su presencia probablemente también mejoraba el desempeño [138]. En cada partida se evalúan 32 colores objetivos, cuyo orden era elegido azarosamente al comienzo de cada juego. Cada sujeto jugó al menos 10 partidas completas con 32 colores.

7.2. Elección de coordenadas para los colores

Los experimentos que involucran la percepción de colores deben ser siempre reportados en algún sistema de coordenadas específico que parametrice la región del espacio de colores muestreados. La precisión que se obtiene en una dada tarea perceptual se expresa a su vez como una medida de distancia en el espacio de colores y por lo tanto depende de dicha elección. Cuando los cambios de coordenadas vienen dados por una transformación no-lineal, expandiendo ciertas regiones del espacio de colores y contrayendo otras, la distancia entre colores medidas como el valor absoluto de la diferencia de sus coordenadas cambia de modo no uniforme. Estas alteraciones son un artefacto propia del método de medición y no aporta información sobre cómo la información está siendo procesada por el sistema visual. Hay evidencia previa [133, 136] de que los resultados varían al ser reportados en distintas coordenadas de colores. La distribuciones de respuesta que lucen anchas en unas coordenadas pueden verse angostas en otro sistema coordenado, y viceversa. Cuando estas discrepancias son consistentes entre sujetos, es difícil concluir si la forma de las distribuciones medidas revela una propiedad del sistema visual de los observadores o una propiedad de las coordenadas elegidas.

Para evitar las arbitrariedades en la elección de coordenadas, muchos estudios reportan los análisis de funciones cognitivas de alto nivel (por ejemplo lingüísticas, categóricas o mnemónicas) usan una escala de colores donde la percepción cromática se presupone uniforme, como el OSA System, o CIELUV o CIELAB. La alegada uniformidad es, sin embargo, solo aproximada [125, 133, 139]. Otra posibilidad es trabajar en el espacio DKL, construido para representar la escala natural de las neuronas del geniculado [125, 133, 139]. La distancia perceptual no es uniforme en esta escala tampoco, dado que las elipses de discriminación varían en tamaño y excentricidad punto a punto [10, 140]. Más aún, en el espacio DKL, el plano isoluminiscente es solo aproximadamente $L+M$, y el grado de participación de los conos S depende del observador [51]. De hecho, hay una amplia evidencia de que más allá de la luminancia y de las respectivas coordenadas hay diferencias perceptuales significativas entre tricrómatas [133, 140–142], lo que implica que no hay un único sistema coordinado que pueda ser visto como perceptualmente uniforme por múltiples observadores. Una forma de atacar este problema es definir coordenadas de colores hechas a medida de cada sujeto [59], como hicimos los capítulos previos de esta tesis. Sin embargo, al momento de realizar este experimento de memoria, todavía no habíamos desarrollado las técnicas experimentales y teóricas que nos hubieran permitido implementar este esquema.

Por estas razones, en este trabajo optamos por utilizar un criterio físico para la parametrización de los colores, de forma tal que los resultados del experimento nos den información

directa sobre el procesamiento de la información física de los estímulos a recordar y luego la misma pueda ser traducida fácilmente a otras coordenadas perceptuales. Nuestro objetivo principal es construir un nuevo conjunto de coordenadas que sea mnemónicamente uniforme para cada sujeto y de esta manera estimar la significancia de la diferencia entre observadores. Este objetivo se puede alcanzar independientemente de las coordenadas iniciales, con lo que uniformidad perceptual no resulta indispensable en este estudio. En vista de lo mencionado anteriormente, elegimos el círculo cromático del experimento utilizando un criterio físico para fijar el brillo total, para elegir el conjunto de tonalidades y para determinar la escala a lo largo de la curva. Las coordenadas se eligieron de forma tal que satisficieran los siguientes requisitos:

1. Todos los colores seleccionados tienen la misma intensidad lumínica, medida como la cantidad de energía irradiada en el rango visible.
2. Utilizamos colores máximamente saturados dentro de lo que es posible generar con un monitor de computadora, de forma tal que la curva se compone de tres tramos, cada uno de los cuales se encuentra en uno de los planos dados por las ecuaciones $R = 0$, $G = 0$ o $B = 0$.
3. Los pasos equi-espaciados a lo largo de la curva de colores corresponden a desplazar una cantidad fija de energía de un rango de longitudes de onda a otra. Es decir, dos colores consecutivos en la curva fueron elegidos de tal forma que la integral sobre el valor absoluto de la diferencia de sus espectros se mantiene constante.

Los criterios físicos 1-3 no parametrizan los colores utilizados en coordenadas perceptualmente uniformes, por lo que tienen como desventaja el no permitirnos hacer una neta separación entre percepción y memoria. La ventaja es que hay una descripción clara en términos de la física del estímulo mostrado. El procedimiento requerido para construir la curva cromática es descrito en la sección [7.6.1](#).

El conjunto de colores objetivo t (por *target*) en el experimento formaba una curva cerrada. Esto nos permite parametrizarlo utilizando una fase $t \in (-\pi, \pi]$. Asignamos arbitrariamente $t = 0$ a un azul oscuro, y como consecuencia el color opuesto $t = \pm\pi$ corresponde a rojo. Para cada color objetivo t , los sujetos generaron n respuestas, con n tomando valores entre 10 y 26 (media 12, desviación estándar 5.2). El promedio de la muestra $\bar{r}(t)$ de estas respuestas fue calculado para cada jugador y cada t junto con la varianza $\epsilon^2(t)$.

7.3. Caracterización de la respuesta de los jugadores

El experimento fue realizado por 11 sujetos (ver 7.6.2). La probabilidad de responder un dado color r cuando el color mostrado fue t es $P(r|t)$. Un jugador perfecto tendría $P(r|t) = \delta(r - t)$. Imprecisiones la respuesta se manifiestan en el hecho de que $P(r|t)$ difiere de $\delta(r - t)$. En la Fig 7.2 se muestran como ejemplo los histogramas de respuesta de un dado sujeto.

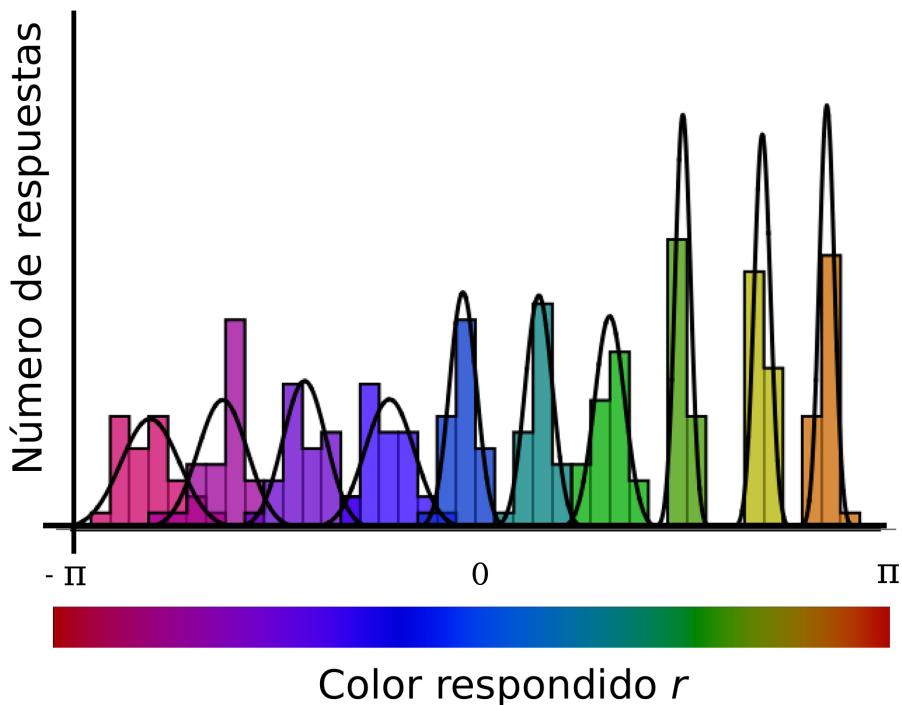


Figura 7.2: Histograma de respuestas condicionadas a un dado color mostrado. Un subconjunto de 10 histogramas obtenido al muestrear la probabilidad $P(r|t)$ de responder un color r cuando se presenta el color t . Cada histograma se obtuvo para un sujeto que jugó el juego 26 veces. Histogramas de distintos colores corresponden a distintos colores mostrados t .

La naturaleza unimodal de los histogramas sugiere que pueden ser aproximadas por una función gaussiana

$$P(r|t) = \frac{e^{-[r-\mu(t)]^2/2\sigma^2(t)}}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t)}} \quad (7.1)$$

de media $\mu(t)$ y varianza $\sigma^2(t)$. Todos los otros sujetos dieron lugar a resultados similares.

Las imprecisiones en la respuesta pueden ser asociados a dos causas distintas:

- $\mu(t)$ puede ser distinto de t , lo que implica la existencia de un sesgo: cuando el color t es almacenado en la memoria, el color recordado r está en promedio corrido respecto de t

- $\sigma(t) > 0$, lo que implica una variabilidad entre trials en el color respondido.

La primera causa da lugar a errores sistemáticos mientras que la segunda a fluctuaciones. Promediando en los colores mostrados y entre sujetos, el valor absoluto de la diferencia entre color respondido y color mostrado fue aproximadamente 0.15 radianes ($\approx 9^\circ$), lo que es del orden de la separación angular entre dos colores mostrados sucesivos ($2\pi/32 \approx 11^\circ$). La variabilidad sujeto a sujeto del valor absoluto del error - medido como la desviación estándar - fue de 0.023 radianes ($\approx 1.3^\circ$), lo que implica que la población de sujetos mostró una precisión de respuesta bastante uniforme. Dado que el error máximo es π , el error medio corresponde al $\sim 5\%$ del máximo posible. No hallamos evidencia de que el desempeño mejore con la práctica, como puede deducirse de la figura Fig 7.3. Concluimos que los jugadores construyeron su estrategia en las primeras partidas del juego, sin realizar modificaciones relevantes posteriores. El comportamiento esencialmente plano de las cajas en la Fig 7.3 implica que el estado estacionario fue alcanzado rápidamente.

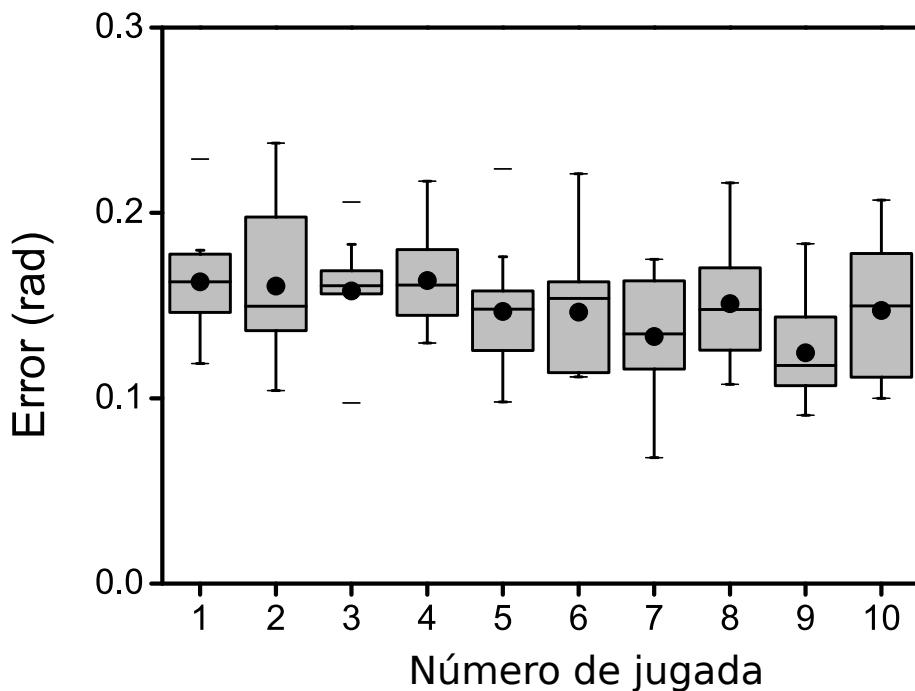


Figura 7.3: Constancia del error en la respuesta a lo largo de 10 jugadas. Histogramas de caja de la distribución de la muestra del valor absoluto del error, promediado en colores mostrados, en 10 partidas consecutivas del juego. El error del jugador en el k -ésimo juego está definido como $\langle |r_k^i(j) - t(j)| \rangle$, donde el paréntesis angular representa un promedio sobre los 32 colores mostrados. Cada caja representa el histograma recolectado de los 11 jugadores ($i \in [1, 11]$). Punto: Media de la muestra. Línea horizontal: Mediana de la muestra. Bordes superior e inferior de la caja: 25 % y 75 % percentiles de las respuestas. Barras verticales: 5 % y 95 %. Barras horizontales: Respuestas máxima y mínima.

Por lo tanto, no es necesario descartar las respuestas iniciales debido a un proceso de aprendizaje transitorio. En el resto del trabajo, nos centramos en la dependencia de los errores de respuesta en el color del objetivo.

Promediando en los colores objetivo y en los sujetos, la media de la desviación estándar de las respuestas fue de 0,17 radianes ($\approx 9,7^\circ$). Una función gaussiana con una desviación estándar de 0,17 radianes contiene el 99 % de su masa en una región de ancho angular de 0,88 radianes, lo que representa el 14 % del intervalo $(-\pi, \pi)$. Para todos los jugadores y todos los colores probados las probabilidades de respuesta $P(r|t)$ se concentraron alrededor de la media, y las colas no eran lo suficientemente anchas para notar la naturaleza circular de la variable r . La máxima desviación estándar (el sujeto y el color con mayor distribución) fue de 0,85 radianes ($\approx 48^\circ$), lo que implica que la distribución más ancha concentra el 99 % de su masa alrededor del 27 % del intervalo disponible $(-\pi, \pi]$. Esta precisión en la respuesta justifica la elección de funciones no circulares, como las gaussianas, para ajustarse a las probabilidades de respuesta. La gaussiana están definidas en el conjunto $(-\infty, +\infty)$, mientras que los colores respondido pertenecen al intervalo $(-\pi, \pi]$. Por lo tanto, una distribución circular, como por ejemplo von Mises, sería un elección más apropiada para describir a la variable angular r . Aún así, el pequeño valor de la desviación estándar implica que desde el punto de vista práctico, una Gaussiana es una muy buena aproximación a la distribución de von Mises con la mismas media y varianza. Elegimos trabajar con la aproximación Gaussiana dado que es más fácil de tratar analíticamente (ver Secc. 7.5). Un test de Smirnov-Kolmogorov sobre las 352 distribuciones medida mostró que todos los datos son compatibles con la hipótesis Gaussiana (valor p de 0.05, corregido para múltiples comparaciones).

En los paneles superiores de la Fig 7.4, se muestran a modo de ejemplo las respuestas medias $\bar{r}(t)$ de dos jugadores, junto con el error estándar de la media $\epsilon(t)/\sqrt{n}$, donde n es la cantidad de veces que el usuario jugó. Para algunos colores, el apartamiento $\bar{r}(t) \pm \epsilon(t)/\sqrt{n}$ del color mostrado t sugiere que el color respondido se desvía sistemáticamente del mostrado. Para confirmar si tales desviaciones son significativas y para evaluar si este efecto se verifica también en otros jugadores, evaluamos para cada sujeto la hipótesis nula de que la respuesta media $\bar{r}(t)$ fuera igual al color testeado t más la adición de un ruido gaussiano de amplitud $\epsilon(t)/\sqrt{n}$. Realizando un test de chi-cuadrado en el error cuadrático acumulado

$$S = \sum_{i=1}^{32} \left[\frac{\bar{r}(t) - t}{\epsilon(t)/\sqrt{n}} \right]^2,$$

usando un valor p de 0.01, y luego aplicando la corrección de Bonferoni para tests múltiples, rechazamos la hipótesis nula para todos los sujetos. En otras palabras, la discrepancia entre $\bar{r}(t)$ y t es significativamente mayor que la esperada únicamente por fluctuaciones en el orden del error estándar $\epsilon(t)/\sqrt{n}$. Concluimos que sería altamente improbable obtener tales errores sistemáticos de un número limitado de muestras de una función gaussiana centrada en t .

Los sujetos de los dos ejemplos de la Fig.7.4 cometan errores positivos alrededor de la

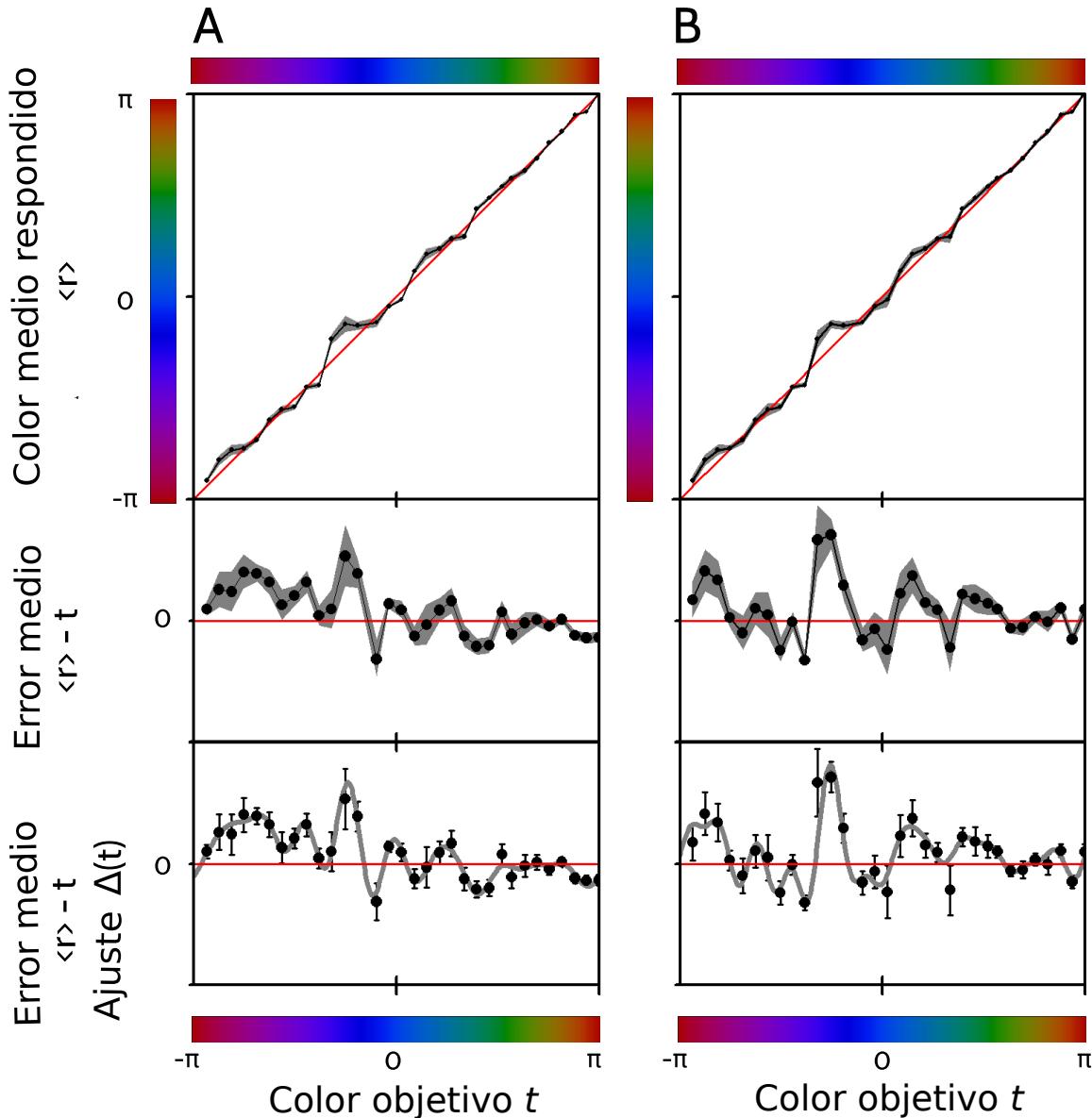


Figura 7.4: Caracterización de las respuestas Los paneles A y B muestran como ejemplo a dos jugadores. Superior: Línea negra: Respuesta media \bar{r} como función del color mostrado t . Área gris: Rango de valores en $\bar{r}(t) \pm \epsilon(t)/\sqrt{n}$. Medio: Error medio $\bar{r}(t) - t$ (línea negra), junto con el error esperado de la media $\epsilon(t)/\sqrt{n}$ (barras de error). Inferior: Curva ajustada $\Delta(t)$, junto con los datos experimentales $\bar{r}(t) - t$ (puntos negros) y el error estándar de la media $\epsilon(t)/\sqrt{n}$ (barras de error). En los recuadros medio e inferior, la escala vertical va de $-\pi/6$ a $+\pi/6$.

frontera entre azul y violeta. Más aún, las desviaciones estándar de ambos parecen volverse particularmente pequeñas en la zona entre el amarillo y el naranja. Para decidir si estas características también ocurren en otros jugadores, calculamos el histograma poblacional de error medio en la respuesta $\bar{r}(t) - t$ y de la desviación estándar de las respuestas $\epsilon(t)$ como función del color mostrado t , como se ve en la Fig 7.5

El Panel A confirma que para la población muestreada de sujetos, colores específicos

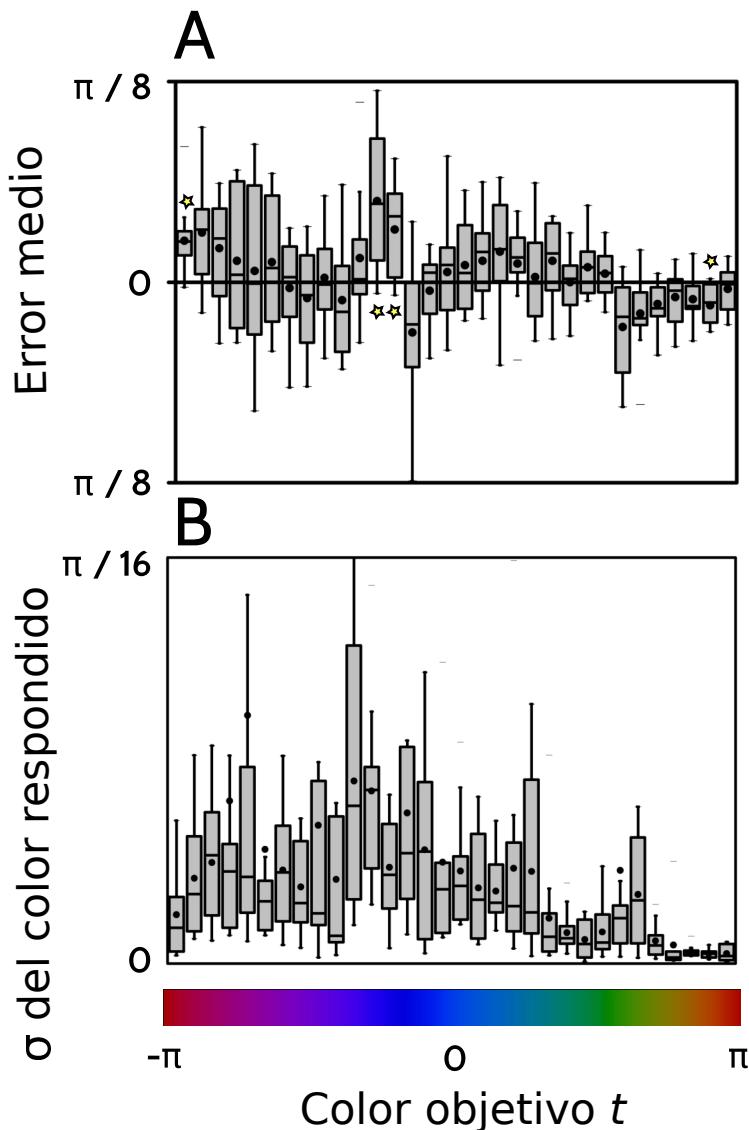


Figura 7.5: Estadística poblacional de las respuestas. Histograma poblacional del error medio $\bar{r}(t) - t$ (panel A) y de la desviación estándar de las respuesta $\epsilon(t)$ (panel B) para los 11 jugadores. En A, las estrellas amarillas muestran que un t -test apareado, evaluando si $\bar{r} - t$ es significativamente diferente de cero da lugar a un valor particularmente pequeño de valor p . De izquierda a derecha: $p = 0.004, 0.004, 0.004$ y 0.002 . Convención de histograma de cajas igual que en Fig 7.4.

están asociados con errores específicos, por ejemplo en la región rojo-púrpura y en la región violeta-azul los errores tienen a ser positivos, mientras que la zona naranja, tienden a ser negativos (estrellas en Fig 7.5A). Del panel B deducimos que para la población muestreada, la desviación estándar es particularmente alta en la región azul-violeta, y particularmente baja en la zona amarillo-naranja.

7.4. Atractores y repulsores en el círculo cromático.

Muchos estudios[114, 117, 119, 120, 123, 132–134] se han preguntado si la precisión de la memoria cromática podría estar relacionada con las categorías lingüísticas asociadas a los colores –tal como discutimos en el capítulo 5–. En algunos experimentos los sujetos debían marcar los bordes y/o el mejor representante (color focal) de cada categoría. En otros, se evaluó la memoria cromática (a) en colores que estaban cerca de un borde entre categoría, (b) en colores que estaban lejos del borde, (c) en colores que estuvieran cerca de un color focal y (d) colores que estuvieran lejos de un color focal. Si la precisión de la memoria cromática resultaba estar modulada por la proximidad de los bordes categóricos o de un color focal, entonces era un indicio de que la memoria estaría influida por la segmentación lingüística en el continuo de colores.

Este paradigma requiere de dos experimentos: uno para determinar los bordes entre categorías –o alternativamente, el color focal de cada categoría– y otro para medir la precisión de la memoria cromática. La precisión era medida utilizando una cierta medida en la dispersión de los colores recordados en respuesta a un único objetivo memorizado, mayor dispersión implicando peor desempeño. En nuestro trabajo, cambiamos el paradigma clásico de dos maneras. En primer lugar, no anclamos el concepto de categorías al de etiquetas lingüísticas preestablecidas. Esta propuesta fue adoptada con el fin de poder detectar –en caso de haberlas– categorías no lingüísticas. En segundo lugar, la presencia de categorías no fue evaluada en términos de cambios en la dispersión de respuestas de un único color recordado, sino por cambios en su media. Como se explica más adelante, ciertas variaciones sistemáticas en la media nos permiten definir el concepto de colores atractores y repulsores para cada jugador, los cuales se relacionan con el concepto de memoria categórica. La ventaja de definir la categorización con una medida definida en términos de la media –en lugar de la dispersión– es que la media es menos sensible a la elección de coordenadas. Supongamos, por ejemplo, que al intentar memorizar un cierto tipo de azul un dado jugador tiende a recordar colores que están desplazados hacia los violetas. Las fluctuaciones en la respuesta pueden ser largas o pequeñas y el valor numérico que se les asigna depende de las coordenadas elegidas. Sin embargo, el hecho de que las respuestas del sujeto estén sistemáticamente sesgadas hacia el violeta no depende de la elección de coordenadas.

Si los jugadores utilizan una estrategia puramente categórica para memorizar colores, entonces cada color objetivo t es representado internamente como miembro de una categoría $c(t)$. Si solamente la categoría del color es almacenada en la memoria, entonces la media $\mu(t)$ de la probabilidad condicional de la respuesta de la Ec. 7.1, depende solo de la categoría c . Bajo estas circunstancias, la respuesta medida $\bar{r}(t)$ forma una escalera compuesta

por segmentos de líneas rectas dentro de cada categoría, y cada una de ellas cruza la identidad con pendiente 0, tal como se muestra en el panel superior de la Fig 7.4. El punto en el que cruza la identidad puede ser pensado como el centro de la categoría respectiva, porque en ese punto la media del color respondido coincide con el color mostrado. Más aún, los colores donde la respuesta media muestra una discontinuidad marcada, constituyen los bordes entre categorías sucesivas. Se espera que la respuesta media $\mu(t)$ sea plana dentro de cada categoría en el caso de que los jugadores recuerden únicamente la categoría del color mostrado. Esta es una estrategia bastante radical. Un mecanismo menos drástico es que los jugadores utilicen una estrategia mixta, tal que la respuesta media $\mu(t)$ está determinada en parte por la categoría y en parte por el color particular t [134]. En este caso, la escalera bien definida que se observaría para el caso puramente categórico debería aparecer suavizada en cierto grado, convirtiéndose en una función continua de t . Dentro de cada categoría $\bar{r}(t)$ no será plana. Aún así, la componente categórica de la estrategia debería aún ser visible en el hecho de que la respuesta medida $\bar{r}(t)$ aumente lentamente con t , con una pendiente entre 0 (completamente categórico) y 1 (no categórico). Por lo tanto, al cruzar el borde de la categoría, no se espera que $\bar{r}(t)$ sea discontinuo, pero sí debería tener una pendiente mayor a uno. Estas características pueden reconocerse también en el error medio de la respuesta $\bar{r}(t) - t$ como segmentos donde el error disminuye y cruza el eje horizontal con pendiente negativa –dentro de cada categoría–, y segmentos donde cruza el eje horizontal con pendiente positiva –transición entre categorías–. Formalizaremos estas ideas definiendo atractores y repulsores.

Un atractor es un color t_a que tiende a concentrar las respuestas de los colores vecinos. Matemáticamente, una atracción implica que los colores que yacen a la derecha de t_a producen una respuesta con un error medio negativo, mientras que los colores que están a la izquierda de t_a producen una respuesta con un error medio positivo. Exactamente en t_a , el error medio se anula. La cuenca de atracción de cada atractor corresponde a una categoría cromática.

Un color respulsor t_r , en cambio, tiende a alejar las respuestas. En otras palabras, respuestas para colores mostrados que están cerca a un repulsor son desviadas sistemáticamente, alejándose del repulsor t_r . Matemáticamente, la repulsión implica que los colores que están a la derecha de t_r producen una respuesta con error medio positivo, mientras que colores a la izquierda de t_r tienen un error medio negativo. De nuevo, en t_r , el error medio es cero.

El signo del error no depende de la elección de coordenadas. Si la escala usada para medir los colores muestreados es modificada con una transformación invertible que conserve la orientación de la curva, la magnitud del error puede variar de un punto a otro, pero no su signo. Por lo tanto, la existencia y posición de los atractores y repulsores es independiente de la parametrización de la curva cromática.

Para verificar el número y la ubicación de los atractores y los repulsores de un dado jugador, modelamos la respuesta media $\bar{r}(t)$ obtenida experimentalmente como una función continua de t

$$\mu(t) = t + \Delta(t), \quad (7.2)$$

donde $\Delta(t)$ es la diferencia entre la respuesta media y el color mostrado, la cual debe ser periódica para ser continua. Por lo tanto, podemos modelarla utilizando una suma trigonométrica:

$$\Delta(t) = \sum_{j=1}^m a_j \sin(jt) + \sum_{j=0}^m b_j \cos(jt) \quad (7.3)$$

En la Ec. 7.3, las sumas están restringidas a caer en el intervalo $(-\pi, \pi]$. El número n de términos en la suma, así como los coeficientes a_j y b_j fueron ajustados utilizando un procedimiento de máxima verosimilitud descrito en la sección de Métodos, Sec. 7.6.3. El procedimiento calcula no solo los valores óptimos de n , a_i y b_i sino también sus incertezas. En los paneles inferiores de Fig 7.4, podemos ver el ajuste para el error de dos de los sujetos a modo de ejemplo.

Para un dado jugador, se consideró como candidato a atractor a aquel color t_a tal que

1. El ajuste óptimo del error se anula en ese punto, es decir $\Delta^{\text{opt}}(t_a) = 0$, y
2. si la pendiente al cruzar es negativa, es decir, $d\Delta^{\text{opt}}(t)/dt|_{t=t_a} < 0$.

Los repulsores t_r se definen de modo análogo, pero reemplazando la derivada negativa por positiva. Este análisis debe realizarse con cierto cuidado, ya que el modelo ajustado $\Delta^{\text{opt}}(t)$ tiene un cierto nivel de incerteza, debido por supuesto al muestreo finito y a la incerteza propia de los datos. Por lo tanto, atractores y repulsores espurios pueden aparecer debido a esta incerteza. Para decidir si un candidato a atractor o a repulsor es espurio o no necesitamos algún criterio que nos permita asegurar que el signo de la derivada se mantenga al incluir la incerteza en los ajustes de $\Delta(t)$. Los coeficientes que definen la expansión de $\Delta(t)$ como serie trigonométrica tienen un grado distinto de confiabilidad, dependiendo del tamaño de las barras de error de los datos. La estimación por Máxima Verosimilitud de los coeficientes nos provee también el grado de confianza de cada coeficiente. Cambiar los coeficientes de la expansión de los valores óptimos por otros subóptimos –pero aún así probables– puede producir la desaparición de los atractores o repulsores espurios, pero no de aquellos que consideraremos significativos si satisfacen el siguiente criterio:

3. Las desviaciones del modelo ajustado $\Delta(t)$ dentro del conjunto de parámetros en 2σ alrededor del óptimo también satisfacen la condición 2. (ver Secc. 7.6.4).

Hemos verificado que los criterios 1-3 no detectan atractores/repulsores significativos con sujetos simulados cuyas respuestas eran generadas por distribuciones gaussiana de media $\mu(t) = t$, jugando la misma cantidad de juegos que los sujetos reales. En los datos reales, la cantidad de atractores y repulsores varió entre 1 y 6 (número medio de atractores 3.5, DE 1.4, número medio de repulsores 3.5, DE 1.6). En la Fig 7.6 A podemos ver el ajuste $\Delta(t)$ para los 11 jugadores y también el promedio poblacional.

Los jugadores tienden a responder los colores atractores y no lo repulsores. El conjunto de atractores y repulsores de un jugador, por lo tanto, caracteriza su propia estrategia mnemónica. Para decidir si las estrategias individuales son compartidas por la colección de sujetos muestreados, analizamos la función de distribución acumulada de los atractores y repulsores de la muestra completa (Fig 7.6B y C). Si el conjunto de todos los atractores y repulsores estuviera distribuida uniformemente en el intervalo $(-\pi, \pi]$, entonces no hay estrategia universal. En cambio, si atractores y repulsores tienden a agruparse alrededor de colores específicos, la hipótesis de que los humanos tricrómatas tienden a compartir los mismos prototipos (los atractores) y las fronteras entre categorías (los repulsores) gana fuerza. En las figuras Figs. 7.6B y C comparamos la función de distribución acumulada (puntos grises) con la esperada bajo la hipótesis uniforme (línea punteada). En caso de formarse clusters, éstos deberían evidenciarse como secuencias de puntos con una pendiente significativamente mayor que la de la línea punteada. Sin embargo, realizando un test de Smirnov-Kolmogorov, obtuvimos que no es posible concluir que hay una desviación estadísticamente significativa ($p = 0,8$ para atractores y $p = 0,5$ para los repulsores). Por lo tanto, no hay suficiente evidencia para concluir que la estrategia mnemónica es compartida por la muestra de 11 sujetos.

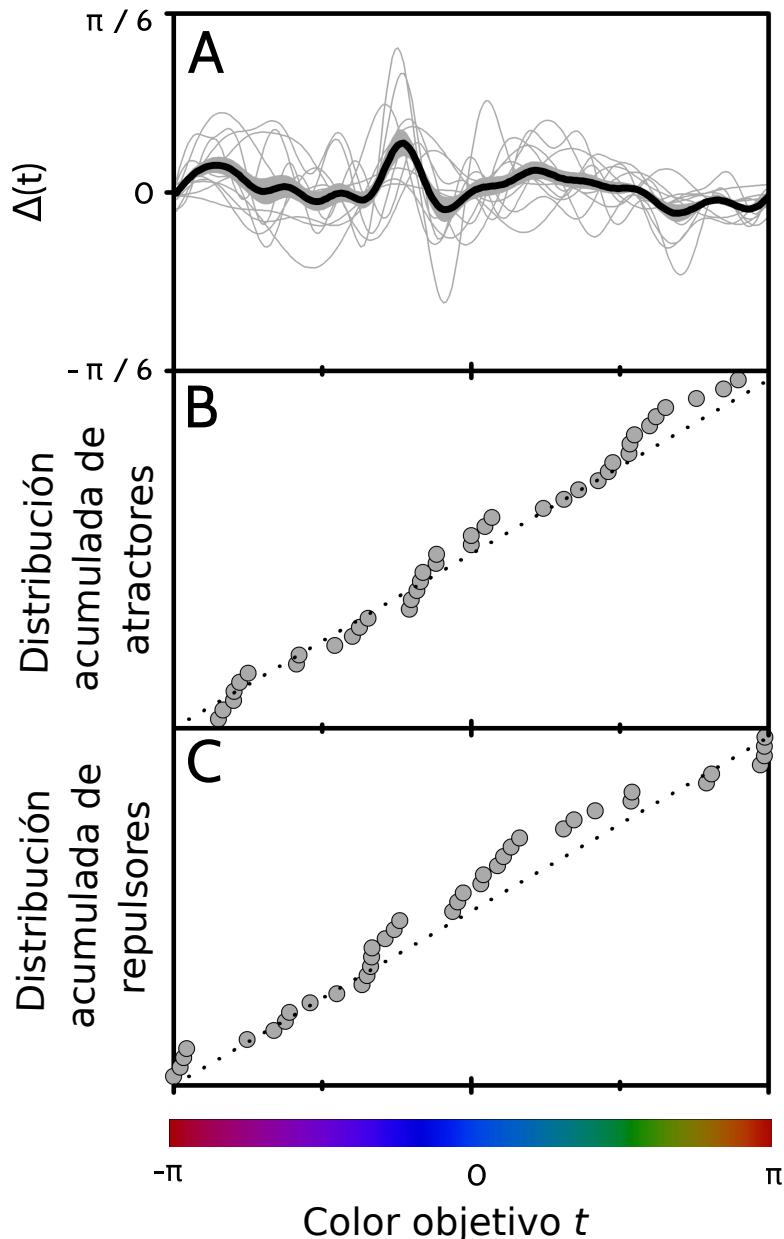


Figura 7.6: Análisis de atractores y repulsores para la población de sujetos muestreados. A: Línea gruesa: Promedio poblacional del error ajustado ($\Delta(t)$). Área gris: Región de valores contenidos en $(\Delta(t)) \pm$ error estándar de la muestra . Líneas finas: ajustes individuales $\Delta(t)$ para cada uno de los 11 jugadores. B: Círculos: Función de distribución acumulada empírica del conjunto de atractores obtenidos para los 11 jugadores. Línea punteada: Función de distribución esperada para un proceso distribuido uniformemente. C: Igual que en B, pero para repulsores. En B y C, el eje vertical va de 0 a 1.

7.5. La métrica mnemónica de los colores.

Uno de los objetivos del experimento era revelar si la memoria cromática es uniformemente precisa en el espacio de colores. En otras palabras, saber si tendemos a recordar un dado color (por ejemplo, azul) con mayor o menor precisión que algún otro color (por ejemplo, naranja). La magnitud del error es cuantificada por la distancia entre el color mostrado

y el recordado. Este procedimiento de cuantificación requiere de una noción de distancia en el espacio de colores. Los colores del experimento fueron elegidos de tal forma que al moverse de un color a otro, la luminosidad total se mantuviera constante y solo cambiara en una cantidad fija entre los distintos LEDs del monitor. La precisión para recordar colores no tiene por qué ser constante en esta métrica. De hecho, los resultados muestran que tanto la media como la varianza de los datos varía con t . Si la precisión para recordar varía de un color a otro, uno puede decir que desde el punto de vista subjetivo, los colores del juego no son equidistantes.

Aquí introducimos una noción de proximidad basada en la idea de que dos colores t_1 y t_2 pueden considerarse cercanos si las respuestas correspondientes están gobernadas por distribuciones de probabilidad similares $P(r|t_1) \approx P(r|t_2)$. La información de Fisher es un tensor métrico que captura esta noción localmente.

$$J(t) = - \left\langle \frac{\partial^2}{\partial t^2} \ln P(r|t) \right\rangle, \quad (7.4)$$

donde el valor medio es calculado con respecto a $P(r|t)$. Si la probabilidad de respuesta puede ser modelado por la función gaussiana de la ecuación 7.1, la información de Fisher resulta

$$J(t) = \left(\frac{\mu'(t)}{\sigma(t)} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{[\sigma^2(t)]'}{\sigma^2(t)} \right)^2. \quad (7.5)$$

Una propiedad importante de la métrica de Fisher es la desigualdad de Crámer-Rao, la cual establece que $1/J(t)$ es una cota inferior para el error cuadrático medio de cualquier estimación del color objetivo t a partir de la respuesta r . En otras palabras, si la información de Fisher $J(t)$ es pequeña para cierto t , entonces la probabilidad de $P(r|t)$ varía poco al variar t , implicando que no es posible hacer una estimación precisa de t a partir de r . Esta implicación es independiente del algoritmo de decodificación utilizado para la estimación [143, 144]. Esta propiedad nos permite asociar $J(t)$ con una medida de discriminabilidad. A grandes rasgos, J es similar al parámetro κ controlando el ancho de la distribución de von Mises en Bae et al [133], o la inversa de la diferencia apenas perceptible utilizada en los experimentos de Witzel et al [125]. Aún así, de la ecuación 7.5, uno debería tener en cuenta que las variaciones en $J(t)$ no reflejan únicamente variaciones en la varianza de la respuesta $\sigma^2(t)$, sino también, en la respuesta media $\mu(t)$.

Con la métrica de Fisher, el elemento de distancia entre dos colores vecinos t y $t + dt$ es

$$ds = \sqrt{J(t)} dt,$$

de forma tal que la distancia total entre dos colores objetivos t_1 y t_2 es

$$D(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} ds = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{J(t)} dt. \quad (7.6)$$

Introduciendo la Ec 7.5 en Ec 7.6,

$$D(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{\mu'(t)}{\sigma(t)}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{[\sigma^2(t)]'}{\sigma^2(t)}\right)^2} dt. \quad (7.7)$$

De la Ec. 7.5, vemos que el cálculo de $J(t)$ requiere las derivadas $d\mu/dt$ y $d\sigma^2/dt$. Esas derivadas fueron obtenidas a partir del ajuste de la expresión analítica $\mu(t) = t + \Delta(t)$ de la media experimental $\bar{r}(t)$, y otro ajuste similar de la varianza experimental $\epsilon^2(t)$, ambas modeladas mediante una serie trigonométrica. Las líneas delgadas de la Fig 7.7A representan la cantidad de información de Fisher obtenida para cada uno de los 11 sujetos. La línea gruesa es la media poblacional de las líneas delgadas, y el área gris representa el error estándar de la media poblacional. Los sujetos presentan una secuencia individualizada de máximos y mínimos, implicando que recuerdan algunos colores más precisamente (los máximos) y otros con mayor dificultad (los mínimos).

Los máximos locales en $J(t)$ representan colores que son particularmente bien recordados. No todos los máximos locales, sin embargo, tienen la misma relevancia; solo aquellos con un número particularmente alto son significativos, ya que $\sqrt{J(t)}$ determina la distancia entre colores (Ec 7.6). Para cada jugador, por lo tanto, identificamos todos los máximos locales de $J(t)$ que eran mayores a $\bar{J} + 2S_J$, donde \bar{J} es el valor medio de $J(t)$ en el intervalo $t \in (-\pi, \pi]$ y S_J es la desviación estándar. La colección de máximos obtenidos para los 11 jugadores se muestra en la Fig 7.7B. A la vez, un mínimo local de $J(t)$ representa colores que son particularmente difíciles de recordar. Nuevamente, para cada jugador identificamos un mínimo local en $J(t)$ siempre que el valor $1/J(t)$ es mayor que $\bar{J}^{-1} + 2S_{J^{-1}}$. Estos mínimos se muestran en la Fig 7.7C. A modo de comparación, los paneles B y C muestran en líneas punteadas las funciones de distribución acumulada bajo la hipótesis de una densidad de probabilidad uniforme. Un test de Smirnov-Kolmogorov evaluando la diferencia entre distribuciones empíricas y la línea recta dando un resultado significativo, $p = 0,00007$ en el caso de máximos (panel B) y $p = 0,006$ en el caso de mínimos (panel C). Por lo tanto concluimos que en la colección de sujetos muestreados, los jugadores tienden a recordar con buena precisión los colores cian, verde, amarillo y rojo (clusters en el panel B) y a recordar con dificultad los colores púrpura y azul (clusters en el panel C).

Una vez que $J(t)$ es conocida es posible definir una nueva escala de color $s = s(t)$ en la

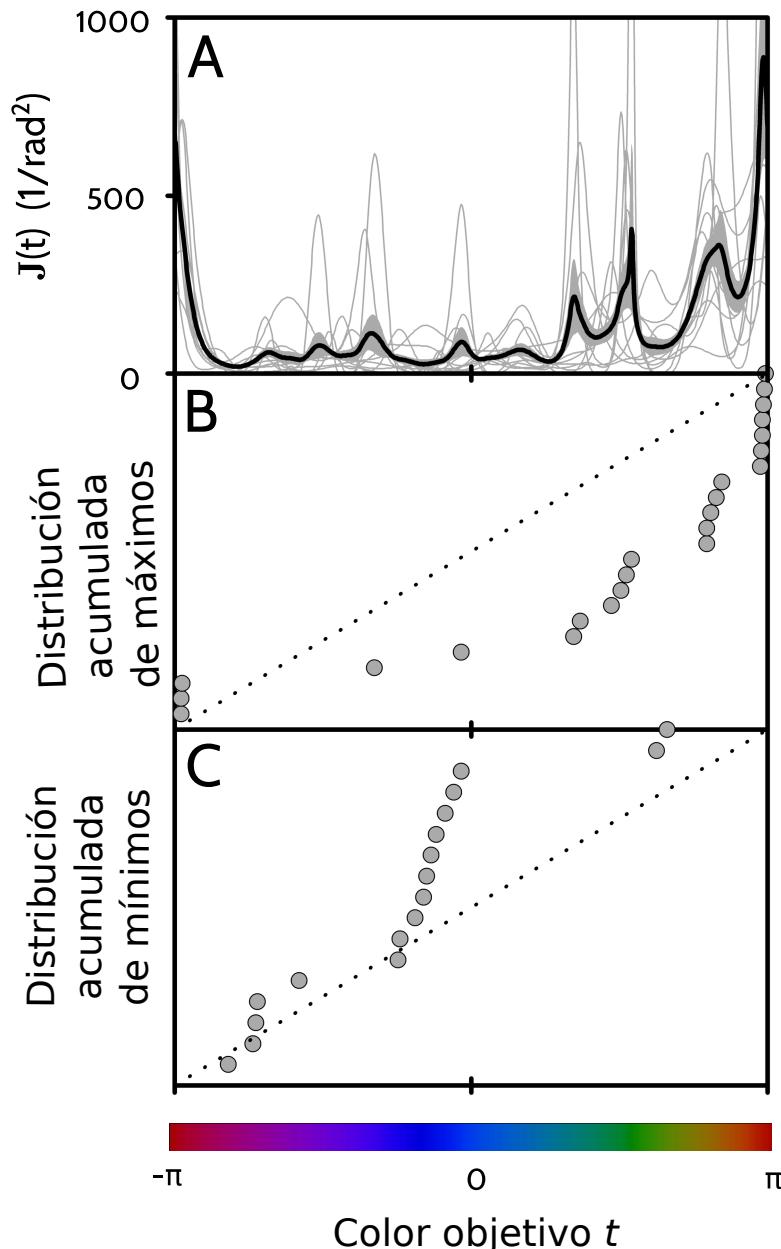


Figura 7.7: Información de Fisher a lo largo de la curva de colores muestreados. A: Línea gruesa: Promedio poblacional de la Información de Fisher obtenida para los jugadores. Área gris: Región de valores contenidos en $\langle J(t) \rangle \pm S_J$. Líneas delgadas: curvas individuales $J(t)$ para cada uno de los 11 jugadores. B: Puntos: Función de distribución acumulada del conjunto de máximos relevantes de $J(t)$ obtenido de los 11 jugadores. Línea punteada: Función de distribución acumulada esperado por un proceso con distribución de probabilidad uniforme. C: Puntos: Función de distribución acumulada para el conjunto de los máximos relevantes de $1/J(t)$ obtenida por los 11 jugadores. Línea punteada: Lo mismo que en B. En B y en C, el eje vertical va de 0 a 1.

que los colores son recordados uniformemente por un dado observador. Matemáticamente,

esto significa $J(s) = \text{cnst}$.

$$\begin{aligned}
 \text{cnst} &= J(s) \\
 &= - \int P(r|s) \frac{\partial^2}{\partial s^2} \log_2 P(r|s) dr \\
 &= - \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 \int P[r|s^{-1}(t)] \frac{\partial^2}{\partial s^2} \log_2 P[r|s^{-1}(t)] dr \\
 &= \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 J(t).
 \end{aligned} \tag{7.8}$$

Por lo que,

$$ds = \text{cnst}^{-1/2} \sqrt{J(t)} dt,$$

implicando que

$$s(t) = s_0 + \text{cnst}^{-1/2} \int_{t_0}^t \sqrt{J(t')} dt'. \tag{7.9}$$

La proporcionalidad entre Eq 7.9 y 7.6 implica que la variable mnemónicamente uniforme $s(t)$ representa la distancia subjetiva entre t y un dado color de referencia t_0 . La nueva noción de distancia subjetiva introducida aquí representa la discriminabilidad mnemática acumulada $\sum ds$ con el que el observador diferencia todos los pares de colores t' y $t' + dt'$ en el camino de t_0 a t . En Fig 7.11 comparamos la escala de color original t , con la nueva escala uniforme $s(t)$ ajustada individualmente para cada observador.

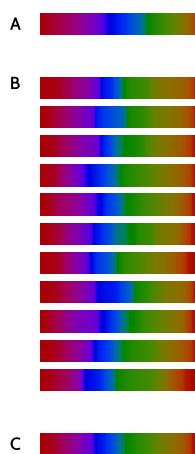


Figura 7.8: Una escala de color mnemónicamente uniforme. Comparación entre la escala de color original t usada en el juego (A) con la nueva escala uniforme s diseñada para cada jugador (B). C: Escala cromática uniforme obtenida con el promedio poblacional de $J(t)$.

En todos los casos, vemos que la región violeta-azul es comprimida, mientras que la región verde-amarillo-rojo es expandida. En C, la escala cromática uniforme para un observador promedio es mostrada, y resulta bastante evidente, que difiere poco de las escalas de observadores individuales.

La Información de Fisher es calculada con Eq 7.5, la cual contiene dos términos positivos. El primer término pesa la contribución de la tasa de cambio en $\mu(t)$. Los colores para los cuales $\mu(t)$ varía rápidamente con t permiten al observador detectar diferencias entre colores vecinos más fácilmente. El segundo término pesa la tasa de cambio en $\sigma^2(t)$. Para todos los sujetos, el primer término era siempre más importante que el segundo. El cociente entre el primer y el segundo término variaba entre 4.1 y 57 para todos los jugadores (media 19, DE 14). La tasa de cambio de $\sigma^2(t)$ fue por lo tanto un efecto relativamente menor.

El color medio respondido $\mu(t)$ es igual a $t + \Delta(t)$, por lo que la derivada $\mu'(t) = 1 + \Delta'(t)$. La contribución relativa entre el 1 y el término $\Delta'(t)$ es también dispar. El cociente varía entre 1.9 y 62 para los distintos sujetos (media 16, DE 21). En consecuencia, para muchos sujetos, el comportamiento de $J(t)$ estaba principalmente determinado por $1/\sigma^2(t)$. Los datos de $\epsilon(t)$ que fueron usados para ajustar la función $\sigma^2(t)$ se muestran en la Fig 7.5. El alto valor de $\sigma(t)$ en la región azul/violeta, y su caída en la región verde/amarillo/rojo traza un paralelo respecto de $J(t)^{-1}$.

En la Fig 7.7, la información de Fisher $J(t)$ parece tener aproximadamente el mismo comportamiento para todos los sujetos. Este resultado puede parecer en discordancia con los resultados anteriores, de que la ubicación de los atractores y los repulsores varían de jugador a jugador. La ubicación de atractores y repulsores, sin embargo, está solo débilmente conectada con el comportamiento de $J(t)$.

Para ver la conexión entre ambos, reescribamos Ec 7.5

$$J(t) = \left(\frac{1 + \Delta'(t)}{\sigma(t)} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{[\sigma^2(t)]'}{\sigma^2(t)} \right)^2. \quad (7.10)$$

Los atractores y repulsores están localizados en colores en los que $\Delta(t) = 0$, y $\Delta'(t) \leq 0$. De la Ec 7.10, vemos que el signo positivo de $\Delta'(t)$ (un repulsor) tenderá a aumentar $J(t)$, mientras que un signo negativo (un atractor), disminuirá. De hecho, discriminaciones más finas son esperadas en la región donde la respuesta media varía con el color mostrado más marcadamente que la respuesta correcta (el error tiene derivada positiva), y discriminaciones menos precisas cuando la respuesta media es más plana. Es por lo tanto natural esperar que la información de Fisher decaiga alrededor de los atractores y tenga sus picos alrededor de los repulsores. Aún así, el rol de $\Delta'(t)$ es comparativamente pequeño con respecto a la unidad, por lo que $J(t)$ viene más determinada por $\sigma(t)$ que por $\Delta(t)$. La relación entre ellos, por lo tanto, no es tan predecible. Aún así, puede ser levemente percibida en la Fig 7.9.

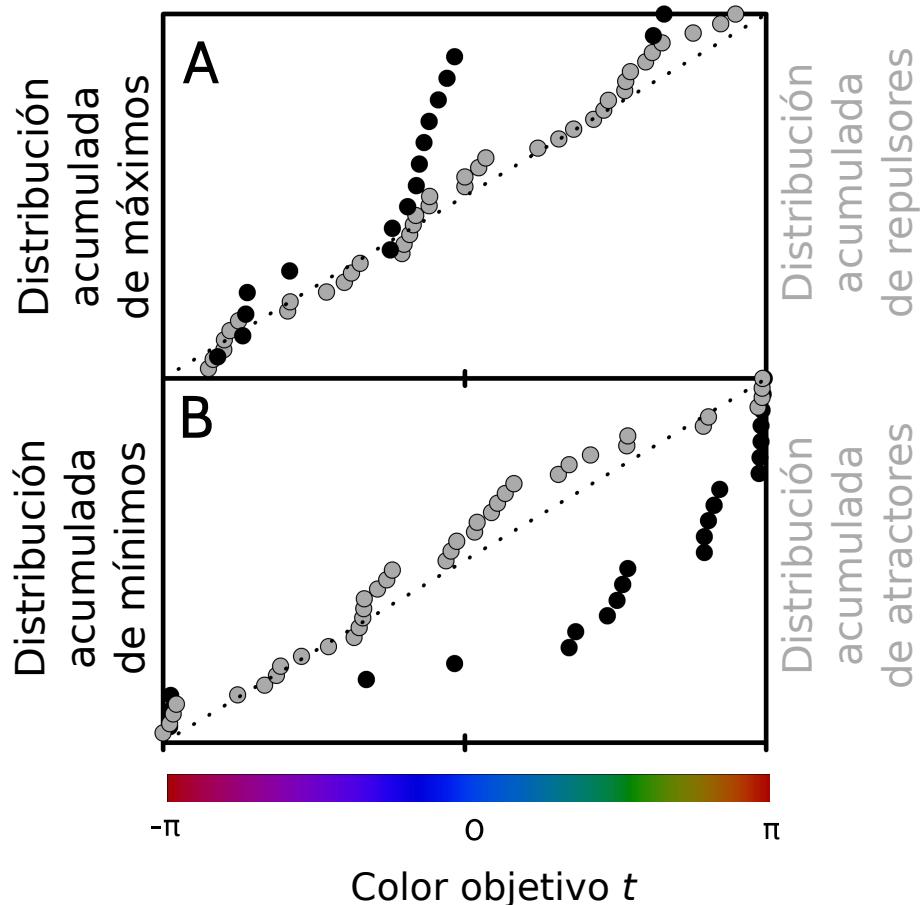


Figura 7.9: Relación entre atractores, repulsores e Información de Fisher. Comparación de la ubicación de atractores y repulsores de la Fig 7.6 con la de los máximos y mínimos en $J(t)$ (Fig 7.7). A: Función de distribución acumulada de los repulsores (gris) y de los máximos de la información de Fisher (negro). Las cajas coloreadas muestran la region en el espacio de color donde ambas distribuciones aumentan con pendiente mayor a uno. B: Función de distribución acumulada de atractores (gris) y de mínimos de la información de Fisher(negro). Cajas coloreadas: Igual que en A. En ambos paneles el eje vertical va de 0 a 1.

donde la ubicación de atractores y repulsores se comparan a las posiciones de los máximos y mínimos prominentes de $J(t)$. Parece haber cierto grado de coincidencia en las ubicaciones donde los puntos aumentan rápidamente, marcado por las barras coloreadas.

7.6. Discusión

En este capítulo presentamos un método para construir una métrica mnemónica de colores para cada sujeto. Utilizando esta métrica se espera que la capacidad de un sujeto para evocar un color resulte uniforme bajo el criterio establecido por la información de Fisher, es decir $J = cte$. Para establecer cuantitativamente las diferencias entre la métrica mnemónica y la métrica perceptual construida en los capítulos anteriores, sería necesario realizar para

cada sujeto un experimento de discriminación cromática y uno de memoria en la misma curva cromática. Sin embargo, cabe destacar la siguiente observación. Los colores utilizados en este experimento de memoria eran perceptualmente distinguibles, es decir, cada vez que el sujeto se desplazaba de un color al siguiente sobre la barra de colores disponible, el cambio en el estímulo era tal que el sujeto percibía una diferencia. Esto quiere decir que la estructura de atractores y repulsores halladas en este experimento, cuyas cuencas pueden abarcar una gran cantidad de colores perceptualmente distinguibles, debe reflejar características propias de la estrategia mnemónica del jugador. Por ejemplo, la cuenca en torno al atractor en el azul que muestran los resultados del sujeto presentados en la figura 7.4 posee una extensión angular de aproximadamente $0,5 \text{ rad}$, que equivale a alrededor de 50 tonos distintos que el sujeto sistemáticamente evoca erróneamente, asociándolos al atractor de esa región. Adicionalmente, otro factor que aporta relevancia a la métrica mnemónica aquí medida es que, por construcción, la barra de colores mnemónicamente uniforme es independiente de las coordenadas utilizadas originalmente en el experimento.

Por otro lado, al igual que ocurre en los experimentos de discriminación, la métrica mnemónica parece ser idiosincrática de cada observador. Esto se deduce de la figura 7.6, en donde vemos que la distribución poblacional de atractores y repulsores no difiere significativamente de una distribución uniforme, indicando que, al menos para nuestra muestra, no se observa una estructura de atractores y repulsores que sea representativa para toda la población.

Apéndice: Métodos

7.6.1. Calibración de los colores de la pantalla

El color de cada pixel en la pantalla está determinada por las coordenadas (R, G, B) establecida por el programa, dando lugar a un espacio de 3 dimensiones. Los estímulos acromáticos están localizados a lo largo de la dirección $\alpha = (1, 1, 1)$, estando el negro puro en el punto $(0, 0, 0)$ (es decir, $\alpha = 0$) y la luminosidad aumenta a para valores mayores de α . Los colores saturados, en cambio, están localizados en la región del espacio que está tan lejos de la dirección $(1, 1, 1)$ como es posible. Estas regiones coinciden con los planos coordinados, es decir con $R = 0$ (del azul, al cian y al verde), $G = 0$ (del rojo al púrpura y al azul) y $B = 0$ (de verde al amarillo y al rojo). Las coordenadas RGB usadas en el juego definen una curva cerrada en el espacio de colores. Los colores en la curva fueron elegidos con el criterio descrito en la Sección 7.2.

Cada pixel en el monitor de la computadora puede ser instruido a emitir luz con ciertas intensidades *RGB*, regulando la cantidad de energía emitida por los tres LEDs correspondientes. El espectro de cada uno los LEDs en la computadora usada en el experimento (*Dell Inspiron N5010*) fue medido con un espectrómetro *Ocean Optics USB* controlado con el software *Spectra Suite*. Las densidades espectrales se muestran en la Fig 7.10A.

Las coordenadas *R*, *G* y *B* podían variar entre 0 y 255. La transformación entre las coordenadas *RGB* y la intensidad de luz en la pantalla de la computadora era no-lineal, como se muestra en Fig 7.10B. Es decir, cuando la pantalla representaba las coordenadas (128,128,128), el espectro medido defería del cual se obtendría por la suma de los tres espectros en Fig 7.10A. Por lo tanto, construimos un modelo cuadrático que nos permitía predecir el espectro generado por la pantalla como un polinomio de segundo grado de las coordenadas *RGB*. El modelo cuadrático resultó significativamente más preciso que el lineal (comparar Figs. 7.10C y 7.10D)

El modelo cuadrático nos provee una expresión analítica para el espectro para cada terna *RGB*, lo cual nos permite calcular la cantidad de energía para cada punto en el espacio *RGB*, como se muestra en la Fig 7.10E. La intensidad crece más rápidamente en la dirección de *G* y más lentamente en la dirección de *B*. Estas características no son sorprendentes, dado que el sistema visual humano es más sensible a la intensidad de luz en longitudes de onda intermedias [5], y las pantallas están diseñadas para ajustarse a las capacidades visuales humanas.

La naturaleza cuadrática de la transformación implica que los colores con igual intensidad - como requiere el criterio 1 de la Secc. 7.2 - yacen sobre un elipsoide en el espacio *RGB* (Fig 7.10F). Los colores del juego pertenecían al borde del elipsoide maximal que cabe en el espacio *RGB*. Para satisfacer la condición de saturación impuesta por el criterio 2, los colores del juego fueron elegidos como la curva definiendo el borde externo del elipsoide elegido. El paso entre dos colores consecutivos fue elegido de acuerdo al criterio 3, dando lugar a la curva en la Fig 7.10G. La parametrización lineal de los colores en la barra se muestra en la Fig 7.10H. La Tabla 7.1 contiene las coordenadas CIE xy de los colores objetivo.

Dado que la curva de colores es cerrada, los colores fueron reportados con un ángulo en el intervalo $(-\pi, \pi]$. Todos los promedios y desviaciones estándar de colores fueron calculados usando estadística circular. Es decir, para una dada colección de ángulos r_1, \dots, r_n , el valor

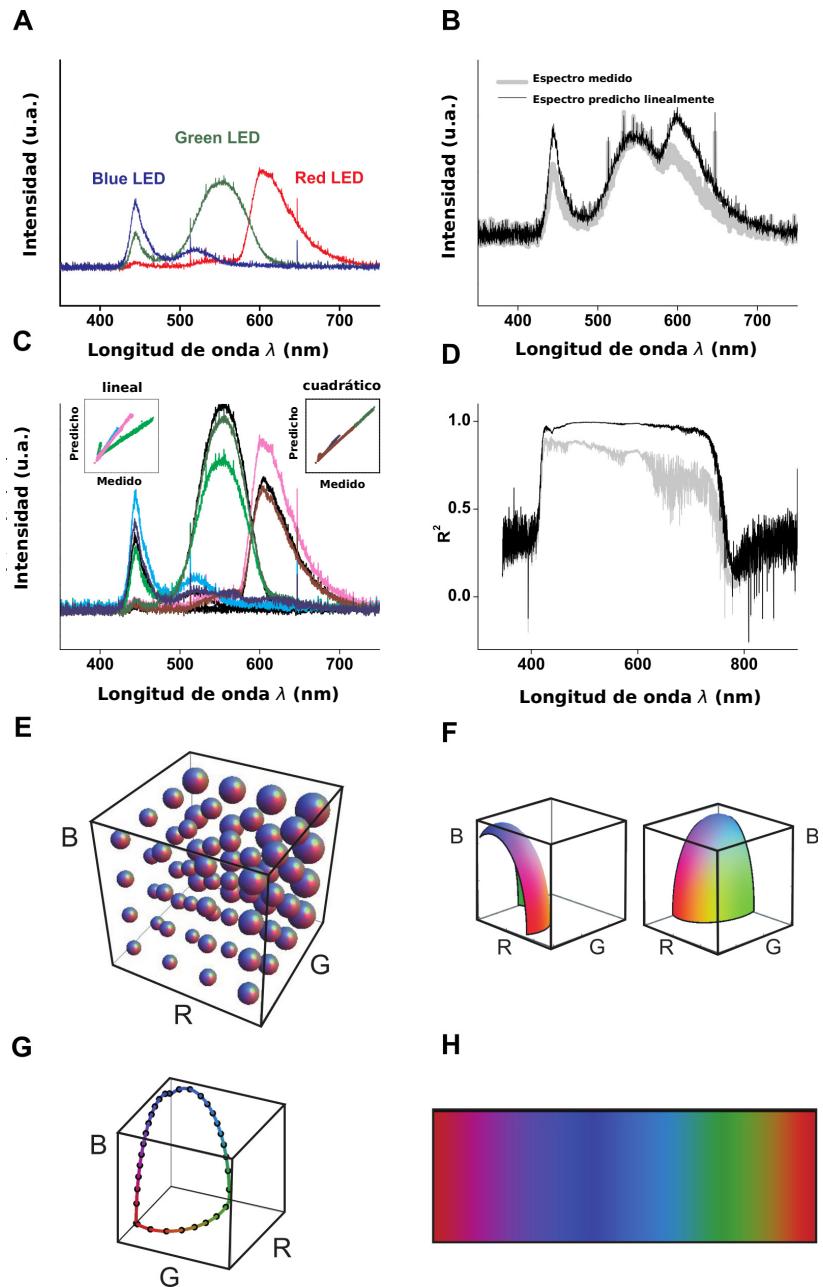


Figura 7.10: Calibración del juego. A: Espectros de los tres LEDs del monitor, con coordenadas (128,0,0) (rojo), (0,128,0) (verde) y (0,0,128) (azul). B: Espectros medidos (gris) y linealmente predicho (negro) para una pantalla gris con $RGB=(128,128,128)$. C: Curvas negras: espectros medidos para $RGB=(255,0,0)$, (0,255,0) y (0,0,255). Colores claros (rosa, verde y cian): espectros predichos con el modelo lineal. Colores oscuros (rojo, verde, azul): predicciones realizadas por el modelo cuadrático. Recuadro: comparación entre intensidades medidas y predichas por los dos modelos. D: Residuos al cuadrado de los dos modelos propuestos en función la longitud de onda. Negro: Modelo cuadrático. Gris: modelo lineal. E: Intensidad lumínica total en función de las coordenadas R, G y B. La intensidad es representada por el volumen de cada esfera. Los ejes van de 0 a 255. F: Ajuste cuadrático de una superficie con intensidad constante. Cada eje va de 0 a 255. G: Curva de colores utilizados en el juego. Curva coloreada continua: los 743 colores disponibles en la barra. Puntos negros: Los 32 colores objetivo. H: Parametrización lineal de los colores mostrados en G.

medio es calculado como

$$\bar{r} = \text{ArcTan}(S_n/C_n) \quad \text{con } S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sin(r), \quad C_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos(r).$$

Tabla 7.1: Coordenadas CIE xyY de los colores mostrados.

x	y	Y	x	y	Y
0.640	0.330	8.293	0.582	0.298	8.332
0.502	0.254	8.250	0.427	0.212	8.147
0.362	0.177	8.041	0.310	0.148	7.937
0.268	0.125	7.833	0.233	0.106	7.721
0.207	0.091	7.600	0.188	0.081	7.454
0.174	0.073	7.246	0.162	0.067	6.889
0.151	0.060	5.394	0.151	0.064	6.384
0.154	0.074	7.997	0.160	0.096	9.736
0.167	0.120	10.955	0.175	0.151	12.056
0.195	0.221	12.365	0.201	0.244	13.997
0.219	0.309	14.808	0.242	0.390	15.527
0.268	0.485	16.121	0.294	0.577	16.450
0.308	0.593	18.203	0.342	0.567	19.117
0.390	0.529	18.420	0.443	0.487	17.066
0.503	0.438	15.237	0.566	0.389	13.051
0.616	0.349	10.767	0.638	0.331	8.577

y la desviación estándar es calculada como:

$$\epsilon = -2 \log \left(\sqrt{S_n^2 + C_n^2} \right).$$

7.6.2. Adquisición de los datos

Participaron del experimento 11 sujetos, 5 mujeres, 6 hombres, con edades entre 23 y 43. Todos poseían visión normal o corregida y visión de color normal según el test de visión en color de Farnsworth-Munsell [145]. Todos los jugadores eran hispanohablantes nativos y con inglés fluído. Todos dieron su consentimiento por escrito. El experimento fue aprobado por el comité de ética del Instituto Balseiro.

Los sujetos no tenían ninguna restricción temporal para elegir el color respondido y frecuentemente exploraban la barra varias veces. En todas las jugadas, los colores de la barra se mostraban en el mismo orden, con la posición media del cursor correspondiendo al cian, y los dos extremos al rojo. Aunque en principio esta constancia podría inducir un sesgo motor, observamos que los jugadores, antes de seleccionar el color respondido, típicamente oscilaban alrededor de la zona de interés, de tal forma que se acercaba a su elección final a veces por la izquierda y a veces por la derecha. Debido a la larga duración de cada juego (≈ 15 minutos), algunos jugadores no podían evitar distracciones ocasionales, en cuyo caso no les quedaba registro alguno del color mostrado. En esas ocasiones no tenían más alternativa que

responder un color seleccionado al azar. Tales respuestas no reflejan la discriminabilidad del color recordado, dado que el sujeto no recordaba ningún color. Para descartar estos eventos (muy poco frecuentes), todas las respuestas que deferían en más de 3 desviaciones estándar de la respuesta media de ese jugador a ese color fueron descartadas y no se utilizaron en el análisis. El número total de respuestas descartadas fue menor a 0,3 % del número total de respuestas.

7.6.3. Ajustando el error medio en la respuesta

En la Ec. 7.3, $\Delta(t)$ está definida en término de $2m + 1$ parámetros a_j y b_j , y m determina la frecuencia máxima de la expansión. Los parámetros óptimos a_i^{opt} y b_i^{opt} fueron obtenidos por minimización del χ^2

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{32} \left[\frac{\bar{r}(t_j) - \mu(t_j)}{\epsilon(t)/\sqrt{n_j}} \right]^2, \quad (7.11)$$

donde n_j es el número de veces que un jugador respondió al color t_j . Bajo la hipótesis de que las fluctuaciones son gaussiasnas, minimizar el valor de χ^2 es equivalente a una estimación de máxima verosimilitud. Los coeficientes óptimos fueron calculados para valor crecientes de m empezando desde $m = 2$. El mejor modelo es aquel con un valor de m óptimo. Para elegir el valor óptimo de m , consideramos el hecho de que a medida que m se vuelve más grande, la precisión del ajuste dado por la Ec. 7.3 mejoraba, pero a costa de aumentar el riesgo de sobre-ajustar. Para evaluar el compromiso entre estos dos factores, para cada valor de m construimos la hipótesis nula de que los datos fueron generado a partir de una distribución normal de media $\mu(t) = t + \Delta(t)$ y varianza $\epsilon^2(t)$, donde la forma de $\Delta(t)$ es definida por los parámetros ajustados a_i y b_i que corresponden al valor de m elegido. Bajo la hipótesis nula, la probabilidad de obtener un valor χ^2 al menos tan grande como el valor numérico obtenido por la Ec. 7.11 es

$$\text{pvalue} = \int_{\chi^2}^{+\infty} P_{\text{gl}}(z) dz,$$

donde $P_{\text{gl}}(z)$ es la distribución de χ^2 con $\text{gl} = 32 - (2m + 1)$ grados de libertad. Por lo tanto, cada coeficiente ajustado en la expansión de Eq 7.3 resta un grado de libertad de la distribución $P_{\text{gl}}(z)$, por lo tanto pesando apropiadamente la mejora en el ajuste y el precio de agregar nuevos parámetros. La hipótesis nula es aceptada a menos que el valor p sea

muy pequeño como para que la hipótesis nula sea plausible. Definimos el m óptimo como el menor m que da lugar a un máximo local en la curva valor $p(m)$, para el cual $\chi^2 \leq 32$. El m óptimo varió de 4 a 12 (media 8.2, desviación estándar 2.7).

Para verificar si los datos obtenidos nos permitían hacer estimaciones confiables de las funciones $\Delta(t)$ ajustadas, realizamos dos experimentos de control. el primer control, (Fig 7.11A) determinó el muestro de 32 colores era suficiente para obtener una curva continua $\Delta(t)$ sin perder estructura relevante en los colores intermedios no-muestreados.

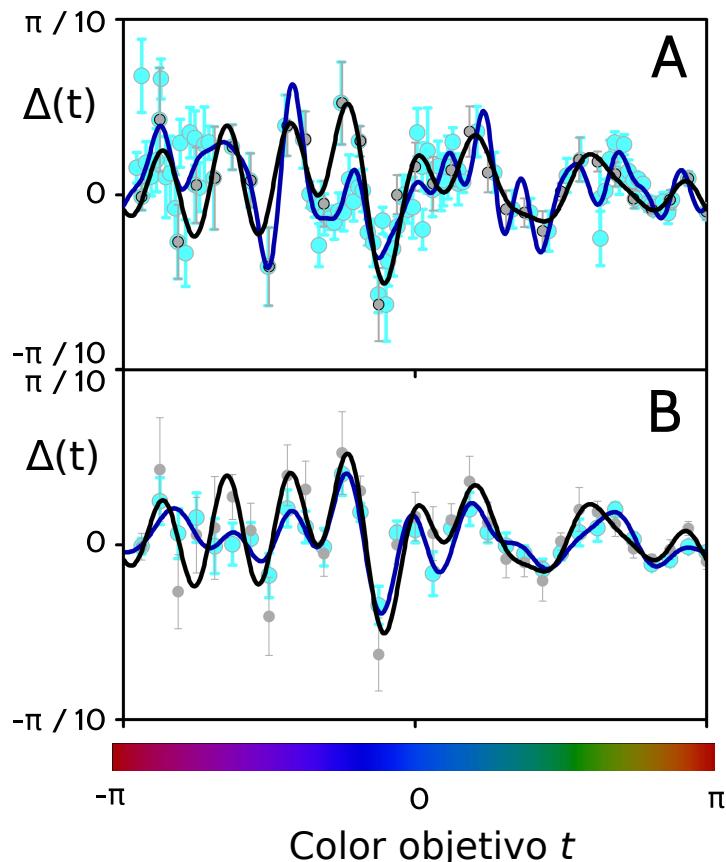


Figura 7.11: Errores ajustados $\Delta(t)$ en dos experimentos control. A: Error ajustado obtenido por un observador que jugó la versión normal de 32 colores del juego (puntos grises, curva negra ajustada), y una versión modificada de 96 colores. Ambos juegos constan de 10 partidas. B: Error ajustado obtenido para un observador que jugó la versión de 32 colores del juego 10 veces (puntos grises, curva ajustada negra) y 26 veces (puntos cian, curva ajustada azul) .

Uno de los observadores jugó la versión normal de 32-colores del juego, y también una versión modificada en la que se evaluaron 96 colores, con un muestreo más fino en tres regiones del círculo cromático: una zona magenta, una zona azul y una zona amarilla. Las funciones ajustadas $\Delta(t)$ obtenidas con un muestreo fino y un muestreo grueso difieren poco una de otra, con muy pocas discrepancias en la zona verde-amarillo-roja, y un poco más en la región azul-magenta. La diferencia entre las curvas fue en todos los casos del mismo orden de magnitud que el error estándar del color medio respondido, obtenido de las fluctuaciones

entre partidas. El segundo control testeó si jugar 10 veces era suficiente para estimar $\Delta(t)$. Uno de los participantes jugó el juego 26 veces, y la curva $\Delta(t)$ obtenida fue comparada con la que se obtiene de usar solamente los primeros 10 trials (Fig 7.11B). Los dos ajustes son similares, y su diferencia fue siempre del mismo orden de magnitud que el del error esperando de la media calculado con 10 trials.

7.6.4. Significancia de atractores y repulsores

Un atractor (repulsor) está definido como un color t para el cual $\Delta(t) = 0$ y $d\Delta(t)/dt < 0$ ($d\Delta(t)/dt > 0$). Sin embargo, las funciones ajustadas $\Delta(t)$ pueden cambiar de signo debido a que las limitaciones en la cantidad de datos. Por puro azar, las fluctuaciones en una cierta región de colores puede tener un signo diferente a las fluctuaciones en alguna otra región. Debido a que nosotros asociamos una función cognitiva a los colores atractores o repulsores, es importante que un dado color t sea considerado un atractor o un repulsores solo si estamos seguro que la condición $\Delta(t) = 0$ y $d\Delta(t)/dt \leq 0$ se mantiene más allá de las fluctuaciones estocásticas. Para juzgar si este es el caso, construimos un criterio de significancia para identificar atractores y repulsores, evaluando el grado de certeza en el ajuste de $\Delta(t)$, y el grado con el cual la condición $d\Delta(t)/dt \leq 0$ se cumple no solo para el ajuste óptimo, sino para toda una familia de funciones cercanas al ajuste óptimo.

Mediante el proceso de estimación por máxima verosimilitud se obtienen los parámetros a_i^{opt} y b_i^{opt} , así como sus errores de estimaciones esperados. Dado que los parámetros forman un vector $(2m+1)$ -dimensional, los errores son capturados por una matriz de covarianza C de tamaño $(2m+1) \times (2m+1)$. Los términos diagonales C_{ii} son los errores cuadráticos esperado de los parámetros ajustados, y los términos no diagonales, sus correlaciones. Podemos por lo tanto asumir que el vector de coeficientes $\mathbf{q} = (b_0, a_1, b_1, \dots, a_m, b_m)$ es gobernado por una distribución Gaussiana multivariada de media $\mathbf{q}_0 = (b_0^{\text{opt}}, a_1^{\text{opt}}, b_1^{\text{opt}}, \dots, a_m^{\text{opt}}, b_m^{\text{opt}})$ y matriz de covarianza C . En otras palabras,

$$\text{Prob}(\mathbf{q}) = \frac{\exp [-(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0)C^{-1}(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0)^t/2]}{(2\pi)^{(2m+1)/2}\sqrt{\det C}}, \quad (7.12)$$

donde el supra-índice t indica transposición del vector. Vamos a juzgar si la condición $d\Delta(t)/dt \leq 0$ se mantiene con un cierto grado de significancia en base a la fracción de modelos (pesados con la distribución de la Ec.7.12) para la cual la condición se verifica. Un atractor significativo es uno para el cual una larga fracción de modelos cumple la condición. Aquí aceptamos a un dado color t como un atractor/repulsor significativo solo si el

conjunto ajustes subóptimos $\Delta(t)$ que capturan el 95 % de la distribución de probabilidad de la Ec 7.12 aún verificaba la condición $d\Delta(t)/dt \leq 0$. También verificamos que con este criterio, respuestas simuladas obtenidas de un sujeto ficticio con $\Delta(t)$ plano, y que repitió el experimento la misma cantidad de veces que un jugador real, nunca dio lugar a un atractor o repulsor significativo.

Capítulo 8

Conclusiones

“Everything that has a beginning has an end, Neo.”

— Agente Smith, *The Matrix Revolutions*

En las ciencias físicas se asume la existencia de entidades que no podemos percibir directamente, pero cuyas propiedades se pueden inferir a través de métodos empíricos. Por ejemplo, nadie nunca ha “visto” o “sentido” un electrón, sin embargo, su existencia puede inferirse a partir de múltiples experimentos. Una característica esencial que le otorga identidad a un electrón son sus propiedades intrínsecas: su carga, su masa, su espín, etc. Estas propiedades tienen un valor definido que es independiente del paradigma experimental. De igual modo, el espacio y el tiempo son en sí mismos imperceptibles, sólo podemos observar y medir las propiedades de objetos físicos que asumimos que “ocurren en” el espacio-tiempo. Dentro de los límites de la física clásica, los teoremas abstractos de la geometría euclídea se materializan en leyes físicas que relacionan distancias y ángulos subtendidos entre objetos reales, y a partir de allí inferimos que el espacio “es euclídeo”.

Al estudiar la percepción cromática, nos hallamos en la situación complementaria. Por definición, los colores son elementos perceptuales, toda persona con visión normal sabe *cómo se siente* el rojo de una manzana, en base a su propia experiencia privada. Además, también accedemos perceptualmente a propiedades relativas entre colores: todos percibimos que el celeste es más similar – o “es más cercano”– al azul que al rojo, sin necesidad de medirlo o siquiera reflexionar al respecto. Sin embargo, la experiencia subjetiva en sí misma es inaccesible por métodos objetivos. Por lo tanto, para otorgarle a una entidad perceptual –sea un color o una distancia entre colores– un estatus equivalente al de una entidad física,

parece razonable exigirle que satisfaga el mismo criterio: poseer propiedades intrínsecas o invariantes que se manifiesten en diversos paradigmas experimentales. **En esta tesis proponemos una metodología teórico-experimental que permite caracterizar la geometría del espacio de colores considerando tres paradigmas experimentales distintos.**

Una primera caracterización del espacio de colores parte de los experimentos de matcheo (sección 1.8.2), los cuales permiten establecer un mapeo entre un conjunto de propiedades físicas de un haz de luz (sus valores tri-estímulos) y la percepción de un color. Dicho mapeo es estrictamente válido en las condiciones de observación estándar que se utilizaron en los experimentos de matcheo. Como hemos mostrado en esta tesis, las condiciones de observación influyen en la percepción cromática, lo que implica que, si no se especifican tales condiciones, el mapeo estándar se vuelve ambiguo: los mismos valores tri-estímulos producirán distintas experiencias perceptuales al variar el contexto, en particular, debido a la cromaticidad del entorno del estímulo. Para remediar esta ambigüedad, Resnikoff propuso tratar a los perceptos como clases de equivalencia, considerando que todos los pares estímulo-entorno en los que el color del estímulo es percibido como idéntico forman una misma clase y, por lo tanto, instancian el mismo percepto. Tratar dicho problema en general es muy costoso, por lo que Resnikoff –y también nosotros– se restringió a considerar estímulos y entornos cromáticamente uniformes. Sin embargo, Resnikoff supuso que los cambios perceptuales inducidos por el entorno podían describirse mediante transformaciones que respetaban la estructura lineal proveniente de los experimentos de matcheo. En esta tesis vimos que los experimentos contradicen esta hipótesis de linealidad. Adicionalmente, Resnikoff postuló que la geometría del espacio de colores –que captura la noción de similaridad entre colores– debía ser tal que la inducción producida por el entorno conformara una isometría, es decir, que las distancias perceptuales entre distintos estímulos se mantuviera constante. Nuevamente esta hipótesis es refutada por nuestras observaciones experimentales.

En este contexto, las principales contribuciones de este trabajo fueron:

1. Postular un nuevo marco teórico del espacio de colores, incluyendo en su descripción una geometría perceptual y la interacción cromática con el entorno de modo que sea consistente con las observaciones experimentales previas.
2. Poner a prueba las hipótesis de nuestro modelo realizando experimentos nuevos y reanalizando experimentos previos. En particular, utilizando las coordenadas perceptuales, hallamos evidencia en múltiples experimentos de la isotropía y homogeneidad en la inducción cromática.

El primer punto fue tratado en el capítulo 2. La primera diferencia de nuestro modelo con

lo planteado por Resnikoff fue tomar como representantes de las clases de equivalencia a aquellos pares estímulo-entorno, en los que el estímulo y el entorno poseían la misma cromaticidad, a los que denominamos *representantes uniformes*. En términos de los representantes uniformes, caracterizamos la inducción cromática mediante la función $\Phi_b(x)$, la cual establece, dado un entorno b y un estímulo x , cuál es el representante uniforme con el que el par $x // b$ matchea perceptualmente. Esta elección se basó en dos criterios: en primer lugar, evita la arbitrariedad en la elección de un entorno específico –usualmente algún tipo de “gris” o color neutro–. En segundo lugar, por una cuestión fisiológica, la inducción cromática se asocia usualmente a las interacciones laterales entre neuronas que reciben señales de regiones espaciales con distinta cromaticidad, por lo tanto, la condición uniforme es aquella en que la interacción es nula. Adicionalmente, vimos que escoger esta representación permite visualizar la inducción cromática como un campo vectorial –repulsivo y centrado en el color del entorno– que produce un desplazamiento en la percepción de los estímulos vistos en ese entorno. Esta visualización vectorial es particularmente útil para predecir cualitativamente el resultado de un experimento de matcheo.

El siguiente paso de nuestro modelo fue establecer una unidad de distancia perceptual. Postulamos como unidad la separación entre dos perceptos apenas distinguibles, siguiendo los criterios empíricos usuales para definir los umbrales de discriminación. Es decir, si p, p' son los perceptos instanciados por estímulos apenas distinguibles, postulamos que $dist(p, p') = 1$. Dada la función $\Phi_b(x)$, podemos mapear cualquier par estímulo-entorno a un representante uniforme y calcular la distancia en esa representación. Mostramos que esta distancia así definida es independiente de qué elementos de las clases de equivalencia que conforman a p y p' escogemos para calcularla y constituye, por lo tanto, una propiedad bien definida para distintas configuraciones experimentales.

Utilizamos dos tipos de paradigmas experimentales para construir y evaluar el modelo: experimentos de matcheo asimétrico y experimentos de discriminación. A su vez, los de discriminación se dividieron en paradigmas de tipo I (cromaticidad del entorno igual a la de referencia) y de tipo II (distinta). En la tabla 8.1, resumimos cómo se relacionan las dos estructuras de nuestro modelo del espacio de colores, d y Φ_b , con las cantidades que se midieron en estos experimentos.

Como la estructura del espacio queda definida con dos cantidades, y las mismas permiten describir tres experimentos, los resultados de los tres experimentos no son independientes, sino que están vinculados, de modo tal que uno puede describir, por ejemplo, los resultados del experimento de discriminación tipo II utilizando los resultados de los otros dos, siempre y cuando se realicen en las mismas condiciones experimentales.

Tabla 8.1: Relación entre cantidades medidas en los experimentos y la estructura del espacio de colores dada por el par (d, ϕ_b) .

Experimento	Medición	Relación con el modelo
Matcheo asimétrico	$\Phi_{b^\alpha \rightarrow b^\beta}(x)$	$\Phi_{b^\alpha \rightarrow b^\beta} = \Phi_{b^\beta}^{-1} \circ \Phi_{b^\alpha}$
Discriminación tipo I	$\varepsilon^I(x, \hat{e}_i)$	$d([x + \varepsilon^I(x, \hat{e}_i)] // x), [x // x]) = 1$
Discriminación tipo II	$\varepsilon^{II}(x, b, \hat{e}_i)$	$d(\Phi_b(x + \varepsilon^{II}(x, b, \hat{e}_i)), \Phi_b(x)) = 1$

Para poder caracterizar la estructura (d, ϕ_b) realizamos una serie de hipótesis heurísticas, basadas en experimentos previos y argumentos teóricos que luego pusimos a prueba experimentalmente. Las hipótesis fueron las siguientes:

1. El espacio de perceptos tiene una geometría riemanniana, siendo d la distancia geodésica asociada a un tensor métrico J .
2. El tensor métrico J en el plano $(L - M, S)$ se descompone como una suma directa, lo cual implica que tiene curvatura nula y que la distancia es euclídea en las *coordenadas perceptuales*, análogas a las coordenadas cartesianas del espacio físico.
3. (Simetría) La inducción cromática es radial, isótropa y homogénea.

La hipótesis 1 es fuertemente avalada por los múltiples experimentos que muestran que los umbrales de discriminación conforman elipses en el plano cromático [10, 65]. La hipótesis 2 fue probada como una buena aproximación en el capítulo 4, basado en los experimentos de Krauskopff y Gegenfurtner [10] que muestran que las elipses de discriminación están alineadas con los ejes cromáticos. En cambio, la hipótesis 3 es una contribución original de esta tesis. Su importancia radica en dos aspectos: en primer lugar nos permite simplificar sobremanera la caracterización de la inducción cromática al restringirse a un único grado de libertad. Por el otro, pone en evidencia la relevancia de la geometría perceptual en la descripción del espacio de colores, ya que implica que la interacción cromática entre un estímulo y su entorno depende únicamente de la distancia entre ellos, tal como ocurre con las interacciones gravitatoria y electromagnética en la física clásica.

Los experimentos que llevamos a cabo tuvieron como objetivo evaluar la capacidad del modelo para explicar los datos, enfatizando la búsqueda de evidencia de la hipótesis de simetría propuesta. Para ello realizamos un experimento de cada tipo enunciado en la tabla 8.1, a lo largo de los ejes cromáticos S y $L - M$. Utilizamos un experimento de discriminación tipo I para calcular las coordenadas perceptuales de cada sujeto, lo que nos brinda una forma sucinta de caracterizar su geometría. Luego, mostramos que los umbrales de discriminación

en el experimento tipo II resultan homogéneos e isótropos al ser descritos en las coordenadas perceptuales de cada sujeto. Es decir, verificamos que los umbrales sólo dependen de la distancia perceptual entre entorno y estímulo, lo cual es evidencia a favor de la hipótesis de simetría. A la vez, en el experimento de matcheo asimétrico verificamos que la inducción a lo largo de los ejes adquiría la misma escala al ser representada en coordenadas perceptuales, propiedad que no se satisfacía en las coordenadas de contraste de conos.

La hipótesis de simetría también se reveló al analizar experimentos previos. Se manifiesta en la radialidad de las elipses en el experimento de KG (capítulo 4), extendiendo de este modo nuestros resultados –restringidos a los ejes cardinales– a todo el plano cromático. También se manifiesta en la existencia de una geodésica que atraviesa todos los mínimos de discriminación en el experimento MD (capítulo 5), y también en la forma simple que adopta la inducción al ser proyectada sobre una circunferencia en el experimento KW (capítulo 6). En todos estos experimentos la hipótesis de simetría permite interpretar los resultados en términos geométricos, mostrando nuevamente la relevancia que adopta la geometría del espacio de colores a la hora de entender la percepción. Dicha geometría adopta su forma más sencilla al ser descrita en términos de las coordenadas perceptuales de cada sujeto.

Para completar la descripción cuantitativa, le dimos una forma paramétrica a las dos cantidades que determinamos experimentalmente, por un lado, el tensor métrico:

$$J(L - M, S) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 + \alpha_3 S \end{pmatrix} + \mathcal{O}(2), \quad (8.1)$$

que depende de los tres parámetros α_i y a partir de los cuales se pueden obtener las coordenadas perceptuales (x_1, x_2) . Por otro lado, la inducción cromática, que en las coordenadas perceptuales toma la forma:

$$\Phi_b(x) = x + \kappa \left(1 - e^{-\frac{\|x-b\|}{\ell}}\right) \frac{x-b}{\|x-b\|}, \quad (8.2)$$

que implica que la inducción satura exponencialmente hasta un valor máximo κ en una longitud característica ℓ . Esta versión paramétrica del modelo contiene un total de cinco parámetros –tres para la geometría y dos para la inducción– y puede, en principio, aplicarse en cualquier versión de los tres tipos de experimentos descritos. En particular, fue la utilizada para analizar todos los experimentos descritos en esta tesis, obteniendo un buen desempeño en reproducir los datos. Adicionalmente, pudimos ver que la variabilidad en los valores de estos parámetros intersujetos es significativa en nuestros experimentos, poniendo de relieve la importancia de las coordenadas perceptuales individualizadas. Cabe notar la validez del modelo ha sido verificada únicamente en el plano $L + M = cte$ y para colores no completamente saturados. Queda como interrogante si el modelo permite explicar también la

inducción en la dirección de luminosidad y qué ocurre con los colores que están cerca del borde del espacio de colores.

Para finalizar, estudiamos también dos propiedades de los colores que corresponden a aspectos cognitivos de mayor orden que el perceptual. Por un lado, la influencia del lenguaje en la percepción de colores, discutida en el capítulo 5. En su trabajo, Mollon y Danilova buscan una relación entre la existencia de categorías cromáticas –azul, amarillo, etc– y una optimalidad en la discriminación cromática. Mediante nuestro modelo, mostramos que la discriminación en esas regiones puede ser explicada puramente en términos perceptuales, rechazando de este modo la interpretación en términos lingüísticos de sus resultados. Por otro lado, exploramos la memoria cromática, mostrando la existencia de estructuras en el espacio de colores que parecen provenir de niveles de procesamiento posterior al perceptual, ya que las cuencas de los atractores encontrados poseen tamaños bastante mayores a la resolución que impone la discriminación perceptual. Además, la variabilidad intersujeto en la posición de estos atractores es significativa, sugiriendo que quizás el experimento esté reflejando las estrategias mnemónicas individuales.

En conclusión, hemos mostrado que el estudio de la geometría del espacio de los colores puede ser tratado rigurosamente, tanto desde el punto de vista teórico como empírico. La existencia de simetrías sugiere que el espacio de colores posee un estatus similar al del espacio físico. Habiendo probado la utilidad de dichas simetrías en la reducción de la descripción de la inducción cromática, lo cual nos da una poderosa herramienta para mapear el objeto físico entorno-estímulo al percepto que este instancia, estamos en condiciones de afirmar que esta tesis puede ser de utilidad para el futuro *Arquitecto* o *Arquitecta*, o cualquiera sea el nombre con el que se autodenomine aquella inteligencia artificial maligna que se proponga manipular nuestra percepción.

Bibliografía

- [1] Brouwer, G. J., Heeger, D. J. Decoding and reconstructing color from responses in human visual cortex. *Journal of Neuroscience*, **29** (44), 13992–14003, nov. 2009. URL <https://doi.org/10.1523/jneurosci.3577-09.2009>. [viii](#), [16](#), [17](#)
- [2] Bowmaker, J. K., Dartnall, H. J. Visual pigments of rods and cones in a human retina. *The Journal of Physiology*, **298** (1), 501–511, ene. 1980. URL <https://doi.org/10.1113/jphysiol.1980.sp013097>. [ix](#), [29](#)
- [3] Crawford, B. H. The scotopic visibility function. *Proceedings of the Physical Society. Section B*, **62** (5), 321–334, may 1949. URL <https://doi.org/10.1088/0370-1301/62/5/305>. [ix](#), [34](#)
- [4] Judd. Report on colorimetry and artificial daylight. *J. Opt. Soc. Am.*, **38** (9), 803–803, Sep 1948. URL <http://www.osapublishing.org/abstract.cfm?URI=josa-38-9-803>. [ix](#), [34](#)
- [5] Sharpe, L. T., Stockman, A., Jagla, W., Jägle, H. A luminous efficiency function $v^*(\lambda)$ for daylight adaptation. *Journal of Vision*, **5** (1), 948–968, 2005. [171](#)
- [6] Guild, J. The colorimetric properties of the spectrum. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A*, **230** (681–693), 6149–187, 1932. [ix](#), [34](#), [70](#)
- [7] Hansen, T., Gegenfurtner, K. R. Classification images for chromatic signal detection. *Journal of the Optical Society of America A*, **22** (10), 2081, oct. 2005. URL <https://doi.org/10.1364/josaa.22.002081>. [ix](#), [36](#)
- [8] Resnikoff, H. L. Differential geometry and color perception. *Journal of Mathematical Biology*, **1**, 97–131, 1974. [x](#), [18](#), [19](#), [37](#), [41](#), [43](#), [47](#), [64](#), [76](#), [86](#)
- [9] Provenzi, E. Geometry of color perception. part 1: structures and metrics of a homogeneouscolor space. *Journal of Mathematical Neuroscience*, **10** (7), 2020. [x](#), [19](#), [21](#), [37](#), [43](#), [64](#), [86](#)

- [10] Krauskopf, J., Gegenfurtner, K. Color discrimination and adaptation. *Vision Research*, **32** (11), 2165–2175, 1992. [xiv](#), [47](#), [60](#), [61](#), [65](#), [73](#), [74](#), [76](#), [86](#), [91](#), [94](#), [100](#), [125](#), [150](#), [152](#), [182](#)
- [11] Danilova, M. V., Mollon, J. Parafoveal color discrimination: a chromaticity locus of enhanced discrimination. *Journal of vision*, **10** (1), 4–4, 2010. [xv](#), [xv](#), [103](#), [105](#), [107](#), [108](#)
- [12] Danilova, M., Mollon, J. Foveal color perception: minimal thresholds at a boundary between perceptual categories. *Vision research*, **62**, 162–172, 2012. [xv](#), [103](#), [105](#), [118](#)
- [13] Klauke, S., Wachtler, T. “tilt” in color space: Hue changes induced by chromatic surrounds. *Journal of Vision*, **15** (13), 1–11, 2015. [xvi](#), [37](#), [53](#), [65](#), [88](#), [121](#), [122](#), [150](#)
- [14] Borges, J. L. El hacedor. Argentina, Buenos Aires: Emecé Editores SA, 1960. [3](#)
- [15] Beaver, H. A. Ophthalmology, 3rd edition. *Journal of Neuro-Ophthalmology*, **29** (4), 371, dic. 2009. URL <https://doi.org/10.1097/01.wno.0000365408.81897.14>. [3](#)
- [16] Fish, W. Philosophy of Perception. Routledge, 2010. URL <https://doi.org/10.4324/9780203880586>. [8](#)
- [17] Robinson, H. Perception. London: Routledge, 1994.
- [18] (Ed), E. Z. Stanford Encyclopedia of Philosophy – <http://plato.stanford.edu/>. The Metaphysics Research Lab Center for the Study of Language and Information Stanford University Stanford, CA 94305-4115, 2015. URL <http://plato.stanford.edu/>. [8](#)
- [19] Noë, A. Action in perception. Cambridge, Mass: MIT Press, 2005. [10](#)
- [20] Moser, E. I., Kropff, E., Moser, M.-B. Place cells, grid cells, and the brain’s spatial representation system. *Annual Review of Neuroscience*, **31** (1), 69–89, 2008. URL <https://doi.org/10.1146/annurev.neuro.31.061307.090723>, pMID: 18284371. [10](#)
- [21] Vilarroya, O. Neural representation. a survey-based analysis of the notion. *Frontiers in Psychology*, **8**, ago. 2017. URL <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2017.01458>. [11](#)
- [22] Bruce, V. Visual perception : physiology, psychology, and ecology. Hove New York: Psychology Press, 2003. [13](#)

- [23] Weber, E. H. De pulsu, resorptione, auditu et tactu (on stimulation, response, hearing and touch). *Annotationes, anatomical et physiological*. Leipzig, Austria: Koehler, 1834. 14
- [24] Read, J. The place of human psychophysics in modern neuroscience. *Neuroscience*, **296**, 116–129, jun. 2015. URL <https://doi.org/10.1016/j.neuroscience.2014.05.036>. 15
- [25] Kim, I., Hong, S. W., Shevell, S. K., Shim, W. M. Neural representations of perceptual color experience in the human ventral visual pathway. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **117** (23), 13145–13150, mayo 2020. URL <https://doi.org/10.1073/pnas.1911041117>. 15
- [26] Bouvier, S. E., Engel, S. A. Behavioral deficits and cortical damage loci in cerebral achromatopsia. *Cerebral Cortex*, **16** (2), 183–191, abr. 2005. URL <https://doi.org/10.1093/cercor/bhi096>. 16
- [27] Mongillo, G., Loewenstein, Y. Neuroscience: Formation of a percept in the rat cortex. *Current Biology*, **27** (11), R423–R425, jun. 2017. URL <https://doi.org/10.1016/j.cub.2017.04.019>. 17
- [28] Linster, C., Johnson, B. A., Yue, E., Morse, A., Xu, Z., Hingco, E. E., *et al.* Perceptual correlates of neural representations evoked by odorant enantiomers. *The Journal of Neuroscience*, **21** (24), 9837–9843, dic. 2001. URL <https://doi.org/10.1523/jneurosci.21-24-09837.2001>. 17
- [29] Aronov, D., Nevers, R., Tank, D. W. Mapping of a non-spatial dimension by the hippocampal–entorhinal circuit. *Nature*, **543** (7647), 719–722, 2017. 18
- [30] Radvanski, B. A., Dombeck, D. A. An olfactory virtual reality system for mice. *Nature Communications*, **9** (1), 839, 2018. 18
- [31] Constantinescu, A. O., O'Reilly, J. X., Behrens, T. E. J. Organizing conceptual knowledge in humans with a gridlike code. *Science*, **352** (6292), 1464–1468, 2016. 18, 20
- [32] Kumaran, D., Banino, A., Blundell, C., Hassabis, D., Dayan, P. Computations underlying social hierarchy learning: Distinct neural mechanisms for updating and representing self-relevant information. *Neuron*, **92** (5), 1135–1147, 2016. 18
- [33] Bellmund, J. L. S., Gärdénfors, P., Moser, E. I., Doeller, C. F. Navigating cognition: Spatial codes for human thinking. *Science*, **362** (6415), eaat6766, 2018. 18

- [34] Horner, A. H., Bisby, J. A., Zotow, E., Bush, D., Burgess, N. Grid-like processing of imagined navigation. *Current Biology*, **26** (6), 842–847, 2018. [18](#)
- [35] Bellmund, J. L. S., Deuker, L., Schröder, T. N., Doeller, C. F. Grid-cell representations in mental simulation. *Elife*, **5**, e17089, 2016. [18](#)
- [36] Kaplan, R., Schuck, N. W., Doeller, C. F. The role of mental maps in decision-making. *Trends in Neurosciences*, **40** (5), 256–259, 2017. [18](#)
- [37] von Helmholtz, H. Physiological optics der Akademie zu Berlin. 17. Dezember 1891. *Vision Research*, **29:11**, 163–1647, 1896. [19](#), [37](#)
- [38] Schrödinger, E. Grundlinien einer theorie der farbenmetrik im tagessehen. *Annalen der Physik*, **368** (21), 427–456, 1920. [37](#), [47](#)
- [39] Stiles, W. S. A modified helmholtz line element in brightness-colour space. *Proceedings of the Physical Society*, **58** (1), 41–65, 1946. [19](#), [47](#)
- [40] Berthier, M., Provenzi, E. When geometry meets psycho-physics and quantum mechanics: Modern perspectives on the space of perceived colors. In: Lecture Notes in Computer Science, págs. 621–630. Springer International Publishing, 2019. URL https://doi.org/10.1007/978-3-030-26980-7_64. [19](#), [86](#)
- [41] Berthier, M. Geometry of color perception. part 2: perceived colors from real quantum states and hering’s rebit. *The Journal of Mathematical Neuroscience*, **10** (1), sep. 2020. URL <https://doi.org/10.1186/s13408-020-00092-x>. [19](#), [86](#)
- [42] Rieke, F., Baylor, D. A. Single-photon detection by rod cells of the retina. *Reviews of Modern Physics*, **70** (3), 1027–1036, jul. 1998. URL <https://doi.org/10.1103/revmodphys.70.1027>. [22](#)
- [43] Schanda, J. Colorimetry: understanding the CIE system. *Choice Reviews Online*, **45** (06), 45–3204–45–3204, feb. 2008. URL <https://doi.org/10.5860/choice.45-3204>. [25](#)
- [44] Dubois, E. The structure and properties of color spaces and the representation of color images. *Synthesis Lectures on Image, Video, and Multimedia Processing*, **4** (1), 1–129, ene. 2009. URL <https://doi.org/10.2200/s00224ed1v01y200910ivm011>. [25](#)
- [45] Baylor, D. A., Nunn, B. J., Schnapf, J. L. The photocurrent, noise and spectral sensitivity of rods of the monkey macaca fascicularis. *The Journal of Physiology*, **357** (1), 575–607, dic. 1984. URL <https://doi.org/10.1113/jphysiol.1984.sp015518>. [29](#)

- [46] Baylor, D. How photons start vision. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **93** (2), 560–565, ene. 1996. URL <https://doi.org/10.1073/pnas.93.2.560>. 30
- [47] Zhaoping, L., Geisler, W. S., May, K. A. Human wavelength discrimination of monochromatic light explained by optimal wavelength decoding of light of unknown intensity. *PLoS ONE*, **6** (5), e19248, 2011. 30
- [48] da Fonseca, M., Samengo, I. Derivation of human chromatic discrimination ability from an information-theoretical notion of distance in color space. *Neural Computation*, **28** (12), 2628–2655, 2016. 30, 37, 47, 86, 149
- [49] Song, Z., Zhou, Y., Juusola, M. Random photon absorption model elucidates how early gain control in fly photoreceptors arises from quantal sampling. *Frontiers in Computational Neuroscience*, **10**, jun. 2016. URL <https://doi.org/10.3389/fncom.2016.00061>. 30
- [50] Stockman, A., Sharpe, L. T. Spectral sensitivities of the middle- and long-wavelength sensitive cones derived from measurements in observers of known genotype. *Vision Research*, **40** (13), 1711–1737, 2000. 32, 66, 122
- [51] Teufel, H. J., Wehrhahn, C. Evidence for the contribution of s cones to the detection of flicker brightness and red–green. *Journal of the Optical Society of America A*, **17** (6), 994, jun. 2000. URL <https://doi.org/10.1364/josaa.17.000994>. 34, 123, 135, 152
- [52] Masland, R. H. The neuronal organization of the retina. *Neuron*, **76** (2), 266–280, oct. 2012. URL <https://doi.org/10.1016/j.neuron.2012.10.002>. 35
- [53] Derrington, A. M., Krauskopf, J., Lennie, P. Chromatic mechanisms in lateral geniculate nucleus of macaque. *Journal of Physiology*, **357** (1), 241–265, 1984. 36, 37, 72
- [54] Johnston, J., Esposti, F., Lagnado, L. Color vision: Retinal blues. *Current Biology*, **22** (16), R637–R639, ago. 2012. URL <https://doi.org/10.1016/j.cub.2012.07.022>. 36
- [55] MacAdam, D. L. On the geometry of color space. *Journal of the Franklin Institute*, **238** (5), 195–201, 1944. 37, 47
- [56] Chichilnisky, E. J., Wandell, B. A. Seeing gray through the ON and OFF pathways. *Visual Neuroscience*, **13** (3), 591–596, mayo 1996. URL <https://doi.org/10.1017/s0952523800008270>. 46, 69

- [57] von Helmholtz, H. Kürzeste linien im farbensystem: Auszug aus einer abhandlung gleichen titels in sitzgsber. der akademie zu berlin. 17. dezember 1891. *Zeitschrift für Psychologie und Physiologie der Sinnesorgane*, **3**, 108–122, 1892. [47](#)
- [58] Silberstein, L. Investigations on the intrinsic properties of the color domain. *Journal of the Optical Society of America*, **33** (1), 1–10, 1943. [47](#)
- [59] da Fonseca, M., Samengo, I. Novel perceptually uniform chromatic space. *Neural Computation*, **30** (6), 1612–1623, 2018. URL https://doi.org/10.1162/neco_a_01073, pMID: 29566354. [47](#), [86](#), [149](#), [152](#)
- [60] Jameson, D., Hurvich, L. M. Opponent chromatic induction: Experimental evaluation and theoretical account. *JOSA*, **51** (1), 46–53, 1961. [53](#)
- [61] Jameson, D., Hurvich, L. M. Theory of brightness and color contrast in human vision. *Vision Research*, **4** (1-2), 135–154, mayo 1964. URL [https://doi.org/10.1016/0042-6989\(64\)90037-9](https://doi.org/10.1016/0042-6989(64)90037-9).
- [62] Shevell, S. K. The dual role of chromatic backgrounds in color perception. *Vision Research*, **18** (12), 1649–1661, 1978. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0042698978902572>. [53](#), [65](#)
- [63] Atick, J. J. Could information theory provide an ecological theory of sensory perception? network: Computation in neural systems. *Network: Computation in neural systems*, **3** (2), 213–251, 1992. [56](#)
- [64] Lee, J. M. Introduction to Riemannian Manifolds. Springer International Publishing, 2018. URL <https://doi.org/10.1007/978-3-319-91755-9>. [61](#)
- [65] MacAdam, D. L. Visual sensitivities to color differences in daylight. *Journal of the Optical Society of America*, **32** (5), 247–274, 1942. [65](#), [147](#), [182](#)
- [66] Danilova, M., Mollon, J. Is discrimination enhanced at the boundaries of perceptual categories? a negative case. *Proceedings of the Royal Society B: Biological Sciences*, **281** (1785), 20140367, 2014. [65](#), [103](#), [105](#), [118](#)
- [67] Kellner, C. J., Wachtler, T. Stimulus size dependence of hue changesinduced by chromatic surrounds. *Journal of the Optical Society of America*, **33** (3), A267–A272, 2016. [65](#), [66](#)
- [68] Rinner, O., Gegenfurtner, K. R. Time course of chromatic adaptation for color appearance and discrimination. *Vision Research*, **40** (14), 1813–1826, jun. 2000. URL [https://doi.org/10.1016/s0042-6989\(00\)00050-x](https://doi.org/10.1016/s0042-6989(00)00050-x). [67](#)

- [69] Commission Internationale de l'Eclairage. Proceedings 1931. Cambridge: Cambridge University Press, 1932. 70
- [70] Stiles, W. S., Burch, J. M. Npl colour-matching investigation: final report. *Journal of Modern Optics*, **6** (1), 1–26, 1959. 86
- [71] Wyszecki, G., Stiles, W. S. Color Science: Concepts and Methods, Quantitative Data and Formulae. New York: Wiley Interscience, 2000. 70, 79
- [72] Wachtler, T., Albright, T. D., Sejnowski, T. J. Nonlocal interactions in color perception: nonlinear processing of chromatic signals from remote inducers. *Vision Research*, **12**, 1535–1546, jun. 2001. URL [https://doi.org/10.1016/s0042-6989\(01\)00017-7](https://doi.org/10.1016/s0042-6989(01)00017-7). 71
- [73] Granata, D., Carnevale, V. Accurate estimation of the intrinsic dimension using graph distances: Unraveling the geometric complexity of datasets. *Scientific Reports*, **6** (1), ago. 2016. URL <https://doi.org/10.1038/srep31377>. 83
- [74] Spall, J. C. Implementation of the simultaneous perturbation algorithm for stochastic optimization. *Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on, IEEE*, **34**, 817–823, 1998. 84
- [75] Mayer, A., Mora, T., Rivoire, O., Walczak, A. M. Diversity of immune strategies explained by adaptation to pathogen statistics. *PNAS*, **113** (31), 8630–8635, 2016. 84
- [76] Lenz, R., Carmona, P. L., Meer, P. The hyperbolic geometry of illumination-induced chromaticity changes. In: 2007 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. IEEE, 2007. URL <https://doi.org/10.1109/cvpr.2007.383212>. 86
- [77] Farup, I. Hyperbolic geometry for colour metrics. *Optics Express*, **22** (10), 12369, mayo 2014. URL <https://doi.org/10.1364/oe.22.012369>. 86
- [78] Berthier, M., Provenzi, E. From riemannian trichromacy to quantum color opponency via hyperbolicity. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, feb. 2021. URL <https://doi.org/10.1007/s10851-021-01023-5>. 86
- [79] Berthier, M., Provenzi, E. The quantum nature of color perception: Uncertainty relations for chromatic opposition. *Journal of Imaging*, **7** (2), 40, feb. 2021. URL <https://doi.org/10.3390/jimaging7020040>. 86
- [80] Provenzi, E. On the issue of linearity in chromatic induction by a uniform background. *Coloration Technology*, **137** (1), 68–71, nov. 2020. URL <https://doi.org/10.1111/cote.12507>. 86

- [81] Wyszecki, G., Fielder, G. H. New color-matching ellipses. *Journal of the Optical Society of America*, **61** (9), 1135–1152, 1971. [86, 147](#)
- [82] Alfvín, R. L., Fairchild, M. D. Cobserver variability in metameric color matches using color reproduction media. *Color Research & Application*, **22** (3), 530–539, 1997.
- [83] Fairchild, M. D., Heckaman, R. L. Metameric observers: A monte carlo approach. *Color and Imaging Conference*, **2013** (1), 185–190, 2013. URL <https://www.ingentaconnect.com/content/ist/cic/2013/00002013/00000001/art00033>.
- [84] Fairchild, M. D., Heckaman, R. L. Measuring observer metamerism: The nimeroff approach. *Color Research & Application*, **41** (2), 115–124, 2016. URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/col.21954>.
- [85] Asano, Y., Fairchild, M. D., Blondé, L., Morvan, P. Color matching experiment for highlighting interobserver variability. *Color Research and Application*, **41** (15), 530–539, 2016.
- [86] Asano, Y., Fairchild, M. D., Blondé, L. Individual colorimetric observer model. *PLoS ONE*, **11** (2), 1–19, 02 2016. URL <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0145671>. [86](#)
- [87] da Fonseca, M., Vattuone, N., Clavero, F., Echeveste, R., Samengo, I. The subjective metric of remembered colors: A fisher-information analysis of the geometry of human chromatic memory. *PLOS ONE*, **14**, 1–30, 01 2019. URL <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0207992>. [87, 148](#)
- [88] Zeki, S. Colour coding in the cerebral cortex: The responses of wavelength-selective and colour-coded cells in monkey visual cortex to changes in wavelength composition. *Neuroscience*, **9** (4), 767–781, ago. 1983. URL [https://doi.org/10.1016/0306-4522\(83\)90266-x](https://doi.org/10.1016/0306-4522(83)90266-x). [88](#)
- [89] Schein, S., Desimone, R. Spectral properties of v4 neurons in the macaque. *The Journal of Neuroscience*, **10** (10), 3369–3389, oct. 1990. URL <https://doi.org/10.1523/jneurosci.10-10-03369.1990>.
- [90] Wachtler, T., Sejnowski, T. J., Albright, T. D. Representation of color stimuli in awake macaque primary visual cortex. *Neuron*, **37** (4), 681–691, feb. 2003. URL [https://doi.org/10.1016/s0896-6273\(03\)00035-7](https://doi.org/10.1016/s0896-6273(03)00035-7). [88](#)
- [91] Churchland, P. Chimerical colors: some phenomenological predictions from cognitive neuroscience. *Philosophical Psychology*, **18** (5), 527–560, oct. 2005. URL <https://doi.org/10.1080/09515080500264115>. [88](#)

- [92] Danilova, M., Mollon, J. Is discrimination enhanced at a category boundary? the case of unique red. *JOSA A*, **33** (3), A260–A266, 2016. [103](#), [105](#), [118](#)
- [93] Whorf, B. L. Language, thought, and reality. John b. carroll ed^{ón}. Technology Press of MIT., 1956. [104](#)
- [94] Pinker, S. The language instinct. 1^a ed^{ón}. W. Morrow and Co, 1994. [104](#)
- [95] Wolff, P., Holmes, K. J. Linguistic relativity. *Wiley Interdisciplinary Reviews: Cognitive Science*, **2** (3), 253–265, oct. 2010. URL <https://doi.org/10.1002/wcs.104>. [104](#)
- [96] Gladstone, W. E. Studies on Homer and the Homeric Age. Cambridge University Press, 1858. [104](#)
- [97] Brown, R. W., Lenneberg, E. H. A study in language and cognition. *The Journal of Abnormal and Social Psychology*, **49** (3), 454–462, 1954. URL <https://doi.org/10.1037/h0057814>. [104](#)
- [98] Roberson, D., Hanley, J. R., Pak, H. Thresholds for color discrimination in english and korean speakers. *Cognition*, **112** (3), 482–487, sep. 2009. URL <https://doi.org/10.1016/j.cognition.2009.06.008>. [104](#)
- [99] Boroditsky, L. Does language shape thought?: Mandarin and english speakers' conceptions of time. *Cognitive Psychology*, **43** (1), 1–22, ago. 2001. URL <https://doi.org/10.1006/cogp.2001.0748>. [105](#)
- [100] Loftus, E. F., Palmer, J. C. Reconstruction of automobile destruction: An example of the interaction between language and memory. *Journal of Verbal Learning and Verbal Behavior*, **13** (5), 585–589, oct. 1974. URL [https://doi.org/10.1016/s0022-5371\(74\)80011-3](https://doi.org/10.1016/s0022-5371(74)80011-3). [105](#)
- [101] Kay, P., Kempton, W. What is the sapir-whorf hypothesis? *American Anthropologist*, **86** (1), 65–79, mar. 1984. URL <https://doi.org/10.1525/aa.1984.86.1.02a00050>. [105](#)
- [102] Winawer, J., Witthoft, N., Frank, M. C., Wu, L., Wade, A. R., Boroditsky, L. Russian blues reveal effects of language on color discrimination. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **104** (19), 7780–7785, abr. 2007. URL <https://doi.org/10.1073/pnas.0701644104>. [105](#)
- [103] Regier, T., Kay, P., Cook, R. S. Focal colors are universal after all. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **102** (23), 8386–8391, mayo 2005. URL <https://doi.org/10.1073/pnas.0503281102>. [105](#)

- [104] MacLeod, D. I. A., Boynton, R. M. Chromaticity diagram showing cone excitation by stimuli of equal luminance. *Journal of the Optical Society of America*, **69** (8), 1183, ago. 1979. URL <https://doi.org/10.1364/josa.69.001183>. 106, 111
- [105] Nagy, A. L., Doyal, J. A. Red–green color discrimination as a function of stimulus field size in peripheral vision. *Journal of the Optical Society of America A*, **10** (6), 1147, jun. 1993. URL <https://doi.org/10.1364/josaa.10.001147>. 111
- [106] Siegel, M. H. Color discrimination as a function of exposure time. *Journal of the Optical Society of America*, **55** (5), 566, mayo 1965. URL <https://doi.org/10.1364/josa.55.000566>. 111
- [107] Brown, W. R. J. The influence of luminance level on visual sensitivity to color differences. *Journal of the Optical Society of America*, **41** (10), 684, oct. 1951. URL <https://doi.org/10.1364/josa.41.000684>. 112
- [108] Gibson, J. J., Radner, M. Adaptation, after-effect and contrast in the perception of tilted lines. i. quantitative studies. *Journal of Experimental Psychology*, **20** (5), 453–467, mayo 1937. URL <https://doi.org/10.1037/h0059826>. 123
- [109] Webster, M. A., Mollon, J. Adaptation and the color statistics of natural images. *Vision Research*, **37** (23), 3283–3298, dic. 1997. URL [https://doi.org/10.1016/s0042-6989\(97\)00125-9](https://doi.org/10.1016/s0042-6989(97)00125-9). 124
- [110] Song, A., Faugeras, O., Veltz, R. A neural field model for color perception unifying assimilation and contrast. *PLOS Computational Biology*, **15** (6), e1007050, jun. 2019. URL <https://doi.org/10.1371/journal.pcbi.1007050>. 126
- [111] Wright, W. D., Pitt, F. H. G. Hue discrimination in normal colour vision. *Proceedings of the Physical Society*, **46** (3), 459–473, 1934. 147
- [112] Holtsmark, T. Colour discrimination and hue. *Nature*, **224** (5217), 366–367, 1969.
- [113] Pokorny, J., Smith, V. C. Wavelength discrimination in the presence of added chromatic fields. *Journal of the Optical Society of America*, **60** (4), 562–569, 1970. 147
- [114] Heider, E. R., Olivier, D. C. The structure of the color space in naming and memory for two languages. *Cognitive Psychology*, **3** (2), 337–354, abr. 1972. URL [https://doi.org/10.1016/0010-0285\(72\)90011-4](https://doi.org/10.1016/0010-0285(72)90011-4). 147, 148, 159
- [115] Kay, P., Regier, T. Resolving the question of color naming universals. *Proceedings of the National Academy of Science or the United States of America*, **100** (15), 9085–9089, 2003.

- [116] Brown, A. M., Lindsey, D. T., Guckes, K. M. G. Color names, color categories, and color-cued visual search: Sometimes, color perception is not categorical. *Journal of Vision*, **11** (2), 1–21, 2011. [147](#)
- [117] Bornstein, M. H. Name codes and color memory. *The American Journal of Psychology*, **89** (2), 269, jun. 1976. URL <https://doi.org/10.2307/1421410>. [147, 148, 159](#)
- [118] Bornstein, M. H., Korda, N. O. Discrimination and matching within and between hues measured by reaction times: Some implications for categorical perception and levels of information processing. *Psychological Research*, **46** (3), 207–222, 1984. [148](#)
- [119] Boynton, R. M., Fargo, L., Olson, C. X., Smallman, H. S. Category effects in color memory. *Color Research & Application*, **14** (5), 229–234, oct. 1989. URL <https://doi.org/10.1002/col.5080140505>. [148, 159](#)
- [120] Uchikawa, K., Shinoda, H. Influence of basic color categories on color memory discrimination. *Color Research & Application*, **21** (6), 430–439, dic. 1996. URL [https://doi.org/10.1002/\(sici\)1520-6378\(199612\)21:6<430::aid-col5>3.0.co;2-x](https://doi.org/10.1002/(sici)1520-6378(199612)21:6<430::aid-col5>3.0.co;2-x). [148, 159](#)
- [121] Roberson, D., Davidoff, J., Davies, I. R., Shapiro, L. R. The development of color categories in two languages: A longitudinal study. *Journal of Experimental Psychology: General*, **133** (4), 554–571, 2005. [147](#)
- [122] Özgen, E., L., D. I. R. Acquisition of categorical color perception: A perceptual learning approach to the linguistic relativity hypothesis. *Journal of Experimental Psychology: General*, **131** (4), 477–493, 2002.
- [123] Pilling, M., Wiggett, A., Özgen, E., Davies, I. R. L. Is color “categorical perception” really perceptual? *Memory & Cognition*, **31** (4), 538–551, jun. 2003. URL <https://doi.org/10.3758/bf03196095>. [147, 148, 159](#)
- [124] Witzel, C., Gegenfurtner, K. R. Categorical perception for red and brown. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, **42** (4), 540–570, abr. 2016. URL <https://doi.org/10.1037/xhp0000154>. [147](#)
- [125] Witzel, C., Gegenfurtner, K. R. Categorical sensitivity to color differences. *Journal of Vision*, **13** (7(1)), 1–33, 2013. [147, 152, 164](#)
- [126] Witzel, C., Gegenfurtner, K. R. Categorical facilitation with equally discriminable colors. *Journal of Vision*, **15** (8), 22, jun. 2015. URL <https://doi.org/10.1167/15.8.22>. [147](#)

- [127] Brouwer, G. J., Heeger, D. J. Categorical clustering of the neural representation of color. *The Journal of Neuroscience*, **33** (39), 15454–15465, sep. 2013. URL <https://doi.org/10.1523/jneurosci.2472-13.2013>. 148
- [128] Koida, K., Komatsu, H. Effects of task demands on the responses of color-selective neurons in the inferior temporal cortex. *Nature Neuroscience*, **10** (1), 108–116, 2007. 148
- [129] Webster, M. A., Kay, P. Color categories and color appearance. *Cognition*, **122** (3), 175–392, 2012. 148
- [130] Huette, S. Encyclopedia of Color Science and Technology, cap. Dynamics of Color Category Formation and Boundaries, págs. 1–5. New York: Springer Science and Business Media, 2012. 148
- [131] Dennet, D. D. Consciousness explained. London: Penguin Science, 1993. 148
- [132] Roberson, D., Davies, I., Davidoff, J. Color categories are not universal: Replications and new evidence from a stone-age culture. *Journal of Experimental Psychology: General*, **129** (3), 369–398, 2000. URL <https://doi.org/10.1037/0096-3445.129.3.369>. 148, 159
- [133] Bae, G.-Y., Olkkonen, M., Allred, S. R., Wilson, C., Flombaum, J. I. Stimulus-specific variability in color working memory with delayed estimation. *Journal of Vision*, **14** (4), 7–7, abr. 2014. URL <https://doi.org/10.1167/14.4.7>. 152, 164
- [134] Bae, G.-Y., Olkkonen, M., Allred, S. R., Flombaum, J. I. Why some colors appear more memorable than others: A model combining categories and particulars in color working memory. *Journal of Experimental Psychology: General*, **144** (4), 744–763, ago. 2015. URL <https://doi.org/10.1037/xge0000076>. 148, 159, 160
- [135] Amari, S. I., Nagaoka, H. Methods in information Geometry. Oxford: Oxford University Press, 2000. 149
- [136] Nemes, V. A., Parry, N. R. A., McKeefry, D. J. A behavioural investigation of human visual short term memory for colour. *Ophthalmic and Physiological Optics*, **30** (5), 594–601, ago. 2010. URL <https://doi.org/10.1111/j.1475-1313.2010.00772.x>. 150, 152
- [137] Nemes, V. A., Parry, N. R. A., Whitaker, D., McKeefry, D. J. The retention and disruption of color information in human short-term visual memory. *Journal of Vision*, **12** (1), 26–26, ene. 2012. URL <https://doi.org/10.1167/12.1.26>. 150

- [138] Tabachnick, B., Parducci, A. Improved recognition with feedback: Discriminatety and range-frequency effects. *Bulletin of the Psychonomic Society*, **1** (1), 56–58, ene. 1973.
URL <https://doi.org/10.3758/bf03333339>. 151
- [139] Gravesen, J. The metric of colour space. *Graphical Models*, **82**, 77–86, nov. 2015.
URL <https://doi.org/10.1016/j.gmod.2015.06.005>. 152
- [140] Romero, J., García, J. A., del Barco, L. J., Hita, E. Evaluation of color-discrimination ellipsoids in two-color spaces. *JOSA A*, **10** (5), 827–837, 1993. 152
- [141] Brown, W. R. J. Color discrimination of twelve observers. *Journal of the Optical Society of America*, **47** (2), 137, feb. 1957. URL <https://doi.org/10.1364/josa.47.000137>.
- [142] Webster, M. A., Miyahara, E., Malkoc, G., Raker, V. E. Variations in normal color vision i cone-opponent axes. *Journal of the Optical Society of America A*, **17** (9), 1535, sep. 2000. URL <https://doi.org/10.1364/josaa.17.001535>. 152
- [143] Cramér, H. A contribution to the theory of statistical estimation. *Scandinavian Actuarial Journal*, **1946** (1), 458–463, 1946. 164
- [144] Cover, T. M., Thomas, J. A. Elements of Information Theory. New York: Wiley, 1991.
164
- [145] Farnsworth, D. The farnsworth-munsell 100-hue and dichotomous tests for color vision. *Journal of the Optical Society of America*, **33** (10), 568–574, 1943. 173

Publicaciones asociadas

1. da Fonseca M* , Vattuone N* , Clavero F, Echeveste R, Samengo I (2019) The subjective metric of remembered colors: A Fisher-information analysis of the geometry of human chromatic memory. **PLOS ONE** 14(1): e0207992. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0207992>
2. Vattuone N, Wachtler T, Samengo I (2021) Perceptual spaces and their symmetries: The geometry of color space. **Mathematical Neuroscience and Applications**, Volume 1. <https://doi.org/10.46298/mna.7108>

Agradecimientos

“Qué duro es saber que no soy sólo fotones vibrando, que mi frecuencia no me define. No tener identidad sin la percepción de un sujeto. Qué terror salir de mi espacio físico, verme las caras con la quimera.”

— Lucas J. Albornoz

Dejando de lado los motivos, atengámonos a la manera correcta de escribir un agradecimiento, entendiendo por esto un texto que no decante en una mera enumeración de personas e instituciones, ni que insulte a la solemnidad del lector desluciendo una torpe emotividad. Un agradecimiento medio u ordinario consiste de una página -o dos- compuesta principalmente por nombres propios y la forma presente de la primera persona del singular del verbo “agradecer”. Hay dos tipos de lectores que quizás lleguen a estas palabras. Aquel que, por inexplicables razones, ha leído la totalidad de la tesis y llega ahora en busca del último punto final. El otro, el lector amigo, que no va a leer la tesis, pero sabe cuánto esfuerzo le ha llevado tolerar al autor durante su escritura y espera ahora un mínimo reconocimiento. Este segundo lector, pasará por encima de múltiples nombres desconocidos hasta alcanzar ese breve encuentro consigo mismo. Es responsabilidad del autor no decepcionar a este lector, mas tampoco aburrirlo con una lista interminable.

A continuación, se enumera a los agradecidos. Al Instituto Balseiro, por sus casi 10 años de formación constante. Al CONICET, por otorgarme las condiciones materiales que permitieron hacer este trabajo. Al Departamento de Física Médica del Centro Atómico Bariloche y a todas las personas que lo componen, por ser el lugar donde el trabajo se gestó. A la educación pública y gratuita de la Nación Argentina, en la cual tuve la suerte de caer. A la Ludwig-Maximilian Universität München, que me dio los medios para ir a hacer los experimentos a Múnich.

A mi directora Inés Samengo, a quien admiro profundamente como persona y como

científica. Gracias por siempre creer en mí y estar abierta a discutir sobre todo, ya sea pre-guntarnos si es correcto colocar un guión de cierre antes de un punto o cuál es el destino de una persona cayéndose dentro de un agujero negro.

A Thomas Wachtler, por una gran colaboración y haberme dado la posibilidad de realizar los experimentos en su laboratorio. También por su cálida recibida en Múnich y su apoyo en el proyecto.

A María da Fonseca, Rodrigo Echeveste y Federico Clavero, con quienes hicimos en conjunto el experimento de memoria cromática.

Al tribunal evaluador, Sebastián Risau, Javier Fernández y Emilio Kropff, por haber leído la tesis y por sus comentarios y preguntas durante la defensa.

A la gente del laboratorio de Múnich: Hongbin Wu, Sarah Theimer, Ibrahim Alperen Tunc, Giulia Manca, Achilleas Koutsou y Michael Sonntag.

A mis amigos en Múnich: Beto, Mauri, Aldi y Rebe.

A mis padres, Roberto y Susana, y a mis hermanos, Giselle y Mauro, por su gran apoyo en todos estos años.

A mis amigos, mi segunda familia, por acompañarme en cada paso. Particularmente a Luqui, Fer, Mangu e Isa, que estuvieron siempre muy cerca. También a mis amigos que están lejos: David, Pampa, Chona, Nico, Rodri, Fran, Fede, Pali. A los del Acosta, que después de tantos años me siguen haciendo el aguante: Ale, Dramis, Martín, Sofí, Monse.

A Sabri, por su cariño y compañía en este largo proceso.

Acknowledgments

Leaving aside the reasons, let's stick to the proper way to write an Acknowledgements section, understanding by this a text that does not decay into a mere enumeration of people and institutions, nor that insults the solemnity of the reader by invoking a clumsy emotionality. An average or ordinary acknowledgement consists of a page -or two- composed mainly of proper nouns and the present form of the first person in singular of the verb “to thank”. There are two types of readers who might accomplish arriving to these words. He who, for inexplicable reasons, has read the entire thesis and now comes in search of the last final point. The other, the friend, who is not going to read the thesis, but knows how much effort it has taken him to tolerate the author during his writing and now expects a minimal sign of recognition. This second reader will go over multiple unknown names until reaching that brief encounter with himself. It is the author's responsibility not to disappoint this reader, nor to bore him with an endless list.

Now, we list the acknowledged . To the Balseiro Institute, for its almost 10 years of constant training. To CONICET, for granting me the material conditions that allowed me to do this work. To the Department of Medical Physics of the Bariloche Atomic Center and to all the people who compose it, for being the place where the work was conceived. To the public and free education of the Argentine Nation, in which I was lucky to fall. To the Ludwig-Maximilian Universität München, which gave me the means to go to Munich to do the experiments.

To my supervisor Inés Samengo, whom I deeply admire as a person and as a scientist. Thank you for always believing in me and being open to discussing everything, whether it is asking ourselves if it is correct to place a closing dash before a period or what is the fate of a person falling into a black hole.

To Thomas Wachtler, for a great collaboration and for giving me the opportunity to carry out the experiments in his laboratory. Also for the warm welcome from him in Munich and

his support for the project.

To María da Fonseca, Rodrigo Echeveste and Federico Clavero, with whom we did the chromatic memory experiment together.

To the juries, Sebastián Risau, Javier Fernández and Emilio Kropff, for having read the thesis and for their comments and questions during the defense.

To the people of the Munich laboratory: Hongbin Wu, Sarah Theimer, Ibrahim Alperen Tunc, Giulia Manca, Achilleas Koutsou and Michael Sonntag.

To my Friends in Munich: Mauri, Beto, Aldi y Rebe.

To my parents, Roberto and Susana, and to my brothers, Giselle and Mauro, for their great support in all these years.

To my friends, my second family, for accompanying me at every step. Particularly Luqui, Fer, Mangu and Isa, who were always very close. Also to my friends who are far away: David, Pampa, Chona, Nico, Rodri, Fran, Fede, Pali. To those from Acosta, who after so many years continue with me: Ale, Dramis, Martín, Sofi, Monse.

To Sabri, for her love and company in this long process.