

경영과학1 2018학년도 2학기 기말 프로젝트
정수선형계획을 활용한 열차스케줄 결정 문제

민태규

2016-15996

공과대학 산업공학 전공

<본문 목차>

1. 수리모형	2
1.1. 파라미터	2
1.2. 결정변수	5
1.3. 목적함수	7
1.4. 제약조건	7
2. 최적해 및 목적함수 값	9

1. 수리모형

파라미터는 알파벳 대문자로, 결정변수는 알파벳 소문자로 표기하였다.

1.1. 파라미터

네트워크의 각 마디는 역을 나타내고, 각 호는 역과 역 사이의 선로(구간)을 나타낸다. 모든 선로는 단선(Single-track)이다. 편의상 역2, 역4, 역5와 인접한 분기점의 명칭을 역11로, 역6, 역7, 역9와 인접한 분기점의 명칭을 역12로 설정하였다. 총 12개의 마디 중 역1, 역2, 역3, 역4, 역5, 역6, 역7, 역8, 역9, 역10은 플랫폼 마디이며, 역11과 역12는 분기점 마디이다. 열차는 마디에서만 정차할 수 있으며, 플랫폼 마디에서는 적어도 30초 이상 정차하여야 한다.

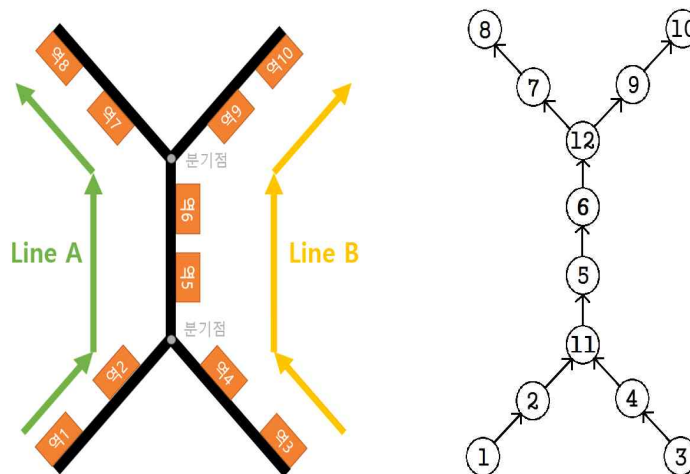


그림 1 (왼쪽) 주어진 네트워크와 (오른쪽) 단순화한 네트워크

문제에서 주어진 파라미터들을 정리하면 표 1과 같다.

표기	용어(명칭)	설명	값
H	안전시격	열차간의 충돌을 막기 위해 특정 위치를 연속된 두 열차가 지나갈 때 만족해야 하는 시간간격	60초
T_p	운행시간	열차가 각 호를 통과하는 데 걸리는 최소시간	표 2
S	정차시간	열차가 각 플랫폼 마디에서 정차해야 하는 최소시간	30초
M	라지 엠	아주 큰 양의 상수	$\sum a_n^i + H^{1)}$
$D_n^{i\ 2)}$	예정출발시각	열차 i 의 플랫폼 마디 n 에서의 예정출발시각	표 4
I	열차 집합	열차 전체의 집합	표 3
N	마디 집합	플랫폼과 분기점 등 네트워크 마디 전체의 집합	표 3
N^i	열차 i 의 마디 집합	열차 i 가 지나는 네트워크 마디의 집합	표 3
N_p	플랫폼 집합	네트워크 마디 중 플랫폼 마디의 집합	생략
N_p^i	열차 i 의 플랫폼 집합	열차 i 가 지나는 플랫폼 마디의 집합	생략
P	호 집합	네트워크 호 전체의 집합	표 2
P^i	열차 i 의 호 집합	열차 i 가 지나는 호의 집합	생략

표 1 파라미터 전체

호	(1,2)	(2,11)	(3,4)	(4,11)	(11,5)	(5,6)	(6,12)	(12,7)	(7,8)	(12,9)	(9,10)
운행시간	135	75	105	60	45	90	60	60	135	45	135

표 2 파라미터: 호 집합과 각 호별 운행시간 (단위: 초)

열차 집합	{101,102,103,104,201,202,203,204}
마디 집합	{역1,역2,역3,역4,역5,역6,역7,역8,역9,역10,역11,역12}
열차	주어진 시각 이후 지나는 역(마디)
101	역7, 역8
102	역6, 역12, 역7, 역8
103	역2, 역11, 역5, 역6, 역12, 역7, 역8
104	역1, 역2, 역11, 역5, 역6, 역12, 역7, 역8
201	역9, 역10
202	역5, 역6, 역12, 역9, 역10
203	역4, 역11, 역5, 역6, 역12, 역9, 역10
204	역3, 역4, 역11, 역5, 역6, 역12, 역9, 역10

표 3 파라미터: 열차 집합과 마디 집합, 열차별 마디 집합

- 1) 이때, $i \in I, n \in N^i$ 이다. M 은 안전시격에 대한 제약조건을 나타내는 데 쓰인다(1.4.1. 안전시격 제약 참고). M 을 모든 a_n^i 과 안전시격 H 의 총합으로 두면, 각 결정변수 a_n^i 는 비음조건을 갖기 때 문에 제약조건을 나타내는 두 개의 부등식 중 적어도 하나는 성립한다. Xpress-MP 코드 상에서는 충분한 시도와 검증을 통해 D_n^i 의 값을 $\sum a_n^i + H$ 대신 구체적 값인 10,000으로 두었다.
- 2) Xpress-MP 코드 상에서는 결정변수 D_n^i 을 D_i_n으로 표기하였다.

00:00:00 와 같이 시간을 나타내는 데이터를 시간 데이터라고 하자. 문제에서 주어진 시각은 08:00:00이다. 어떤 시각과 주어진 시각간의 시간 차이를 초 단위로 나타낸 값을 그 어떤 시각의 실수 데이터라 하자. 문제에서 주어진 예정 출발시각표는 표 4와 같으며, 각각의 시간 데이터를 실수 데이터로 변환하면 표 5와 같다.

예정출발시각표									
노선 A					노선 B				
	101	102	103	104		201	202	203	204
역1	7:46:45	7:49:45	7:52:45	7:55:45	역3	7:49:00	7:52:00	7:55:00	7:58:00
역2	7:49:30	7:52:30	7:55:30	7:58:30	역4	7:51:15	7:54:15	7:57:15	8:00:15
역11	-	-	-	-	역11	-	-	-	-
역5	7:52:00	7:55:00	7:58:00	8:01:00	역5	7:53:30	7:56:30	7:59:30	8:02:30
역6	7:54:00	7:57:00	8:00:00	8:03:00	역6	7:55:30	7:58:30	8:01:30	8:04:30
역12	-	-	-	-	역12	-	-	-	-
역7	7:56:30	7:59:30	8:02:30	8:05:30	역9	7:57:45	8:00:45	8:03:45	8:06:45
역8	7:59:15	8:02:15	8:05:15	8:08:15	역10	8:00:30	8:03:30	8:06:30	8:09:30

표 4 파라미터: 예정출발시각표 (시간 데이터)

예정출발시각표									
노선 A					노선 B				
	101	102	103	104		201	202	203	204
역1	-795	-615	-435	-255	역3	-660	-480	-300	-120
역2	-630	-450	-270	-90	역4	-525	-345	-165	15
역11	-	-	-	-	역11	-	-	-	-
역5	-480	-300	-120	60	역5	-390	-210	-30	150
역6	-360	-180	0	180	역6	-270	-90	90	270
역12	-	-	-	-	역12	-	-	-	-
역7	-210	-30	150	330	역9	-135	45	225	405
역8	-45	135	315	495	역10	30	210	390	570

표 5 파라미터: 예정출발시각표 (실수 데이터)

1.2. 결정변수

이 문제의 결과로 주어진 시점 이후의 열차 시각표(역 별 변경된 출/도착시각)를 제시할 것이다. 시각표는 경합이 해소된 상태이고, 지연오차의 합을 최소화한 결과여야 한다. 열차 시각표를 나타내는 결정변수는 다음과 같다. 결정변수의 데이터 타입은 실수 데이터이다. Xpress-MP 코드 상에서는 결정변수 a_n^i 을 a_i_n으로, d_n^i 을 d_i_n으로 표기하였다.

a_n^i : 열차 i 가 마디 n 에서 실제 도착하는 시각 $\dots i \in I, n \in N^i$ (표 6)

d_n^i : 열차 i 가 마디 n 에서 실제 출발하는 시각 $\dots i \in I, n \in N^i$ (표 7)

실제도착시각표									
노선 A					노선 B				
	101	102	103	104		201	202	203	204
역1	–	–	–	a_1^{104}	역3	–	–	–	a_3^{204}
역2	–	–	a_2^{103}	a_2^{104}	역4	–	–	a_4^{203}	a_4^{204}
역11	–	–	a_{11}^{103}	a_{11}^{104}	역11	–	–	a_{11}^{203}	a_{11}^{204}
역5	–	–	a_5^{103}	a_5^{104}	역5	–	a_5^{202}	a_5^{203}	a_5^{204}
역6	–	a_6^{102}	a_6^{103}	a_6^{104}	역6	–	a_6^{202}	a_6^{203}	a_6^{204}
역12	–	a_{12}^{102}	a_{12}^{103}	a_{12}^{104}	역12	–	a_{12}^{202}	a_{12}^{203}	a_{12}^{204}
역7	a_7^{101}	a_7^{102}	a_7^{103}	a_7^{104}	역9	a_9^{201}	a_9^{202}	a_9^{203}	a_9^{204}
역8	a_8^{101}	a_8^{102}	a_8^{103}	a_8^{104}	역10	a_{10}^{201}	a_{10}^{202}	a_{10}^{203}	a_{10}^{204}

표 6 결정변수: 실제도착시각표 (실수 데이터)

실제출발시각표									
노선 A					노선 B				
	101	102	103	104		201	202	203	204
역1	–	–	–	d_1^{104}	역3	–	–	–	d_3^{204}
역2	–	–	d_2^{103}	d_2^{104}	역4	–	–	d_4^{203}	d_4^{204}
역11	–	–	d_{11}^{103}	d_{11}^{104}	역11	–	–	d_{11}^{203}	d_{11}^{204}
역5	–	–	d_5^{103}	d_5^{104}	역5	–	d_5^{202}	d_5^{203}	d_5^{204}
역6	–	d_6^{102}	d_6^{103}	d_6^{104}	역6	–	d_6^{202}	d_6^{203}	d_6^{204}
역12	–	d_{12}^{102}	d_{12}^{103}	d_{12}^{104}	역12	–	d_{12}^{202}	d_{12}^{203}	d_{12}^{204}
역7	d_7^{101}	d_7^{102}	d_7^{103}	d_7^{104}	역9	d_9^{201}	d_9^{202}	d_9^{203}	d_9^{204}
역8	d_8^{101}	d_8^{102}	d_8^{103}	d_8^{104}	역10	d_{10}^{201}	d_{10}^{202}	d_{10}^{203}	d_{10}^{204}

표 7 결정변수: 실제출발시각표 (실수 데이터)

주어진 네트워크와 입력 데이터로부터 열차들 사이의 선행 관계를 파악할 수 있다. 이때, i 번 열차가 j 번 열차보다 선행한다는 것은 i 번 열차와 j 번 열차가 모두 지나는 역과 선로상의 임의의 지점을 i 번 열차가 j 번 열차보다 이른 시각에 지난다는 것을 의미한다. 동일한 노선을 지나는 열차들 사이에는 선행 관계가 분명하다. 아래 리스트에서 왼쪽의 열차는 오른쪽의 열차보다 선행한다. 예를 들어, 102번 열차는 103번, 104번 열차보다 선행한다. 그러나 101번 열차보다는 후행한다.

$$\begin{array}{l} [101, 102, 103, 104] \\ [201, 202, 203, 204] \end{array}$$

노선이 다른 열차들 간에는 선행관계가 분명한 경우도 있고, 그렇지 않은 경우도 있다. 역6과 역12에서 102번 열차는 202번, 203번, 204번 열차보다 선행한다. 102번 열차와 201번 열차는 선행관계를 따질 필요가 없다. 주어진 시점 이후의 각 열차의 이동 경로에서 두 열차가 모두 지나는 역 또는 선로가 없기 때문이다.

반면에, 노선이 다른 열차들 사이에는 선행관계가 결정되지 않은 경우도 있다. 103번 열차와 203번 열차는 모두 분기점(역11)을 지나게 돼 있는데, 안전시격을 유지하기 위해 두 열차 중 어느 열차가 먼저 분기점을 지날지 결정해야 한다. 따라서 103번 열차와 203번 열차간의 선행관계는 그 자체로 결정변수이다. 네트워크에서 열차가 앞의 열차를 추월할 수 없다는 가정을 하였으므로, 열차간의 선행관계는 역과 선로의 위치에 상관없이 전체운행시간(time horizon) 내내 유지된다. 그러므로 i 번 열차와 j 번 열차간의 선행관계를 다음과 같이 결정변수로 나타낼 수 있다. 열차간의 선행관계가 결정변수인 경우는 103번 열차와 203번 열차, 103번과 204번, 104번과 203번, 104번과 204번 이렇게 총 4가지이며, 정리하면 표 8과 같다. Xpress-MP 코드 상에서는 결정변수 $x^{i,j}$ 을 x_i_j 으로 표기하였다.

$x^{i,j}$: 열차 i 가 열차 j 보다 앞서서 운행하면 1, 아니면 0
 $(i,j) \in \{(103, 203), (103, 204), (104, 203), (104, 204)\}$

	101	102	103	104	201	202	203	204
101	-	1	1	1	-	-	-	-
102	-	-	1	1	-	1	1	1
103	-	-	-	1	-	0	$x^{103, 203}$	$x^{103, 204}$
104	-	-	-	-	-	0	$x^{104, 203}$	$x^{104, 204}$
201	-	-	-	-	-	1	1	1
202	-	-	-	-	-	-	1	1
203	-	-	-	-	-	-	-	1
204	-	-	-	-	-	-	-	-

표 8 결정변수: i 번 열차(행)과 j 번 열차(열)간의 선행 관계

1.3. 목적함수

열차들의 지연오차의 합을 최소화해야 한다. 이때, 지연오차란 역 별 예정된 출발시각과 실제 출발시각의 차이를 말한다. 이를 수식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\min z = \sum_i \sum_n (d_n^i - D_n^i) \dots \forall i \in I, n \in N_p^i$$

1.4. 제약조건

1.4.1. 안전시격 제약

안전시격이란, 특정 위치를 연속된 두 열차가 지나갈 때 만족해야 하는 시간간격이다. 열차간의 충돌을 막는 역할을 한다. 안전시격은 네트워크의 마디에서만 만족 여부를 확인하면 충분하다. 즉, 네트워크 마디에 도착하는 시각과 출발하는 시각만으로도 안전시격 제약을 표현할 수 있다. 열차 운행의 현실성과 네트워크의 구조를 고려했을 때, 어떤 마디 n 에서 열차 i 가 열차 j 보다 선행할 경우 열차 i 가 마디 n 에 도착, 열차 i 가 마디 n 에서 다음 행선지로 출발, 열차 j 가 마디 n 에 도착, 열차 j 가 마디 n 에서 다음 행선지로 출발하는 사건은 다음 그림 2와 같은 시간 순서대로 발생한다.

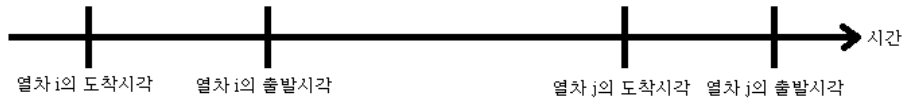


그림 2 안전시격

따라서 열차 i 가 마디 n 에서 다음 행선지로 출발하는 시각과 열차 j 가 마디 n 에 도착하는 시각의 차이(단위: 초)에 대해 안전시격을 고려해야 한다. 이를 수식으로 정리하면 다음과 같다. Xpress-MP 코드 상에서는 중복된(redundant) 제약식을 제거하였다. 예를 들어, 역7에서 101번 열차와 103번 열차간의 안전시격 제약식은 동일한 역에서 101번 열차와 102번 열차, 102번 열차와 103번 열차간의 안전시격 제약식으로 표현되므로 코드 상에서 제거하였다.

$$\forall i, j \in I, n \in N^i \cap N^j \begin{cases} x^{i,j}M + a_n^i - d_n^j \geq H \\ (1 - x^{i,j})M + a_n^j - d_n^i \geq H \end{cases}$$

1.4.2. 예정출발시각표

열차는 주어진 시각표보다 일찍 출발할 수 없다.

$$d_n^i - D_n^i \geq 0 \dots \forall i \in I, n \in N_p^i$$

1.4.3. 추월금지 제약

네트워크에서 열차가 앞의 열차를 추월할 수 없다. 열차간의 선행관계가 결정된다면, 안전시각 제약으로 추월금지 제약을 나타낼 수 있다. 선행관계에 따라 선행 열차는 후행 열차보다 일정 시간 이상 빠르게 달리도록 제약을 두었기 때문이다. 즉, 안전시각 제약이 추월금지 제약을 포함하고 있다. 다만, 추월금지 제약에 대한 가정은 열차간의 선행관계를 역과 선로의 위치에 상관없이 나타낼 수 있도록 하였다는 데 의의가 있다.

1.4.4. 정차시간 제약

열차는 마디에서만 정차할 수 있으며, 플랫폼 마디에서는 주어진 최소정차시간 이상 정차하여야 한다.

$$\begin{aligned} d_n^i - a_n^i &\geq S \dots \forall i \in I, n \in N_p^i \\ d_n^i - a_n^i &\geq 0 \dots \forall i \in I, n \in (N^i - N_p^i) \end{aligned}$$

1.4.5. 운행시간 제약

호의 양 끝마디에서의 정차 여부와 상관없이 열차가 호를 통과하는데 걸리는 최소 시간은 일정하다.

$$a_r^i - d_q^i \geq T_p \dots \forall i \in I, p = (q, r) \in P_i$$

1.4.6. 주어진 시점 제약

주어진 시점에 모든 열차는 각 플랫폼에 도착하기 직전이다. 따라서 다음 결정변수들의 값은 모두 0이다: $a_7^{101}, a_6^{102}, a_2^{103}, a_1^{104}, a_9^{201}, a_5^{202}, a_4^{203}, a_3^{204}$

또한, 열차스케줄에 대한 모든 결정변수는 주어진 시점 이후의 시각을 나타내므로 비음조건을 갖는다.

$$a_n^i \geq 0, d_n^i \geq 0 \dots \forall i \in I, n \in N^i$$

2. 최적해 및 목적함수 값

문제를 모형화한 뒤 Xpress-MP를 이용해 푼 결과, 최적해는 다음과 같다.

실제도착시각표									
노선 A					노선 B				
	101	102	103	104		201	202	203	204
역1	-	-	-	0	역3	-	-	-	0
역2	-	-	0	165	역4	-	-	0	135
역11	-	-	150	285	역11	-	-	90	225
역5	-	-	225	405	역5	-	0	135	315
역6	-	0	345	525	역6	-	120	255	435
역12	-	90	435	615	역12	-	210	345	525
역7	0	150	495	675	역9	0	255	390	570
역8	165	315	660	840	역10	165	420	555	735

표 9 최적해: 실제도착시각표 (실수 데이터)

실제출발시각표									
노선 A					노선 B				
	101	102	103	104		201	202	203	204
역1	-	-	-	30	역3	-	-	-	30
역2	-	-	30	195	역4	-	-	30	165
역11	-	-	150	285	역11	-	-	90	225
역5	-	-	255	435	역5	-	30	165	345
역6	-	30	375	555	역6	-	150	285	465
역12	-	90	435	615	역12	-	210	345	525
역7	30	180	525	705	역9	30	285	420	600
역8	195	345	690	870	역10	195	450	585	765

표 10 최적해: 실제출발시각표 (실수 데이터)

$$x^{103,203} = 0, x^{103,204} = 1, x^{104,203} = 0, x^{104,204} = 0$$

실제도착시각표(표 9)와 실제출발시각표(표 10)를 살펴보면 103번 열차가 203번 열차보다 후행, 103번 열차가 204번 열차보다 선행, 104번 열차가 203번 열차보다 후행, 104번 열차가 204번 열차보다 후행한다는 것을 확인할 수 있다.

$z = 8325 \dots$ 최적목적함수값

실제도착시각표									
노선 A					노선 B				
	101	102	103	104		201	202	203	204
역1	-	-	-	08:00:00	역3	-	-	-	08:00:00
역2	-	-	08:00:00	08:02:45	역4	-	-	08:00:00	08:02:15
역5	-	-	08:03:45	08:06:45	역5	-	08:00:00	08:02:15	08:05:15
역6	-	08:00:00	08:05:45	08:08:45	역6	-	08:02:00	08:04:15	08:07:15
역7	08:00:00	08:02:30	08:08:15	08:11:15	역9	08:00:00	08:04:15	08:06:30	08:09:30
역8	08:02:45	08:05:15	08:11:00	08:14:00	역10	08:02:45	08:07:00	08:09:15	08:12:15

표 11 최적해: 실제도착시각표 (시간 데이터)

실제출발시각표									
노선 A					노선 B				
	101	102	103	104		201	202	203	204
역1	-	-	-	08:00:30	역3	-	-	-	08:00:30
역2	-	-	08:00:30	08:03:15	역4	-	-	08:00:30	08:02:45
역5	-	-	08:04:15	08:07:15	역5	-	08:00:30	08:02:45	08:05:45
역6	-	08:00:30	08:06:15	08:09:15	역6	-	08:02:30	08:04:45	08:07:45
역7	08:00:30	08:03:00	08:08:45	08:11:45	역9	08:00:30	08:04:45	08:07:00	08:10:00
역8	08:03:15	08:05:45	08:11:30	08:14:30	역10	08:03:15	08:07:30	08:09:45	08:12:45

표 12 최적해: 실제출발시각표 (시간 데이터)

	101	102	103	104	201	202	203	204
101	-	1	1	1	-	-	-	-
102	-	-	1	1	-	1	1	1
103	-	-	-	1	-	0	0	1
104	-	-	-	-	-	0	0	0
201	-	-	-	-	-	1	1	1
202	-	-	-	-	-	-	1	1
203	-	-	-	-	-	-	-	1
204	-	-	-	-	-	-	-	-

표 13 최적해: i 번 열차(행)과 j 번 열차(열)간의 선행 관계