강의 2: 계산 모델

강의 개요

- 알고리즘이란? 시간이란?
- 임의 접근 머신
- 포인터 머신
- 파이썬 모델
- 문서 거리: 문제 & 알고리즘

역사

Al-Khwārizmī "al-kha-raz-mi" (c. 780-850)

- "대수학의 아버지"로, "완성과 균형 맞춤을 통한 계산에 대해 모든 것을 담은 책(The Compendious Book on Calculation by Completion & Balancing)" 저술
- 1차 & 2차 방정식 풀기: 최초의 알고리즘 중 일부

알고리즘이란?

- 컴퓨터 프로그램의 수학적 추상화
- 문제 해결을 위한 계산 과정

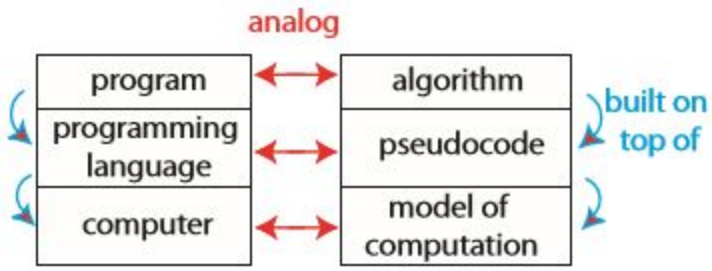
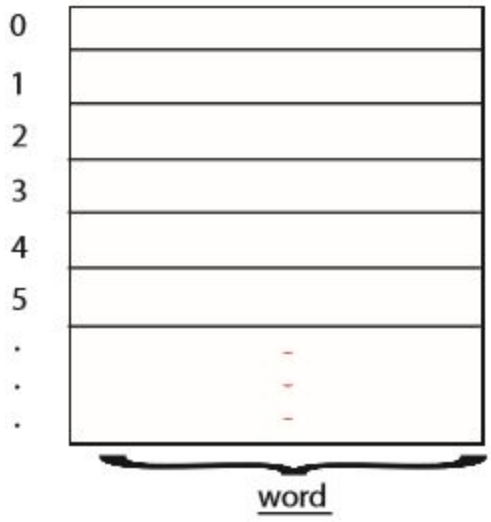


그림 1: 알고리즘

계산 모델이 규정하는 것

- 알고리즘이 할 수 있는 연산
- 각 연산의 비용 (시간, 공간, ...)
- 알고리즘의 비용 = 연산 비용의 합

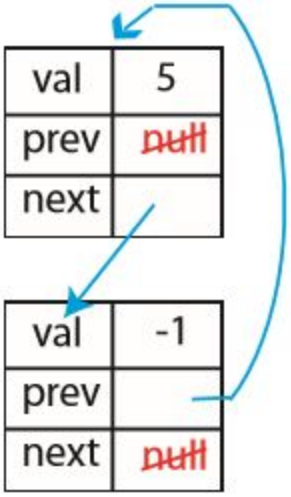
임의 접근 머신 (RAM)



- 거대한 배열로 만들어진 임의 접근 머신 (RAM)
- Θ(1) 레지스터 (각 1개의 워드)
- Θ(1) 시간 안에 할 수 있는 일
  - 레지스터 r_i 에 있는 워드를 레지스터 r_j 으로 불러오기
  - 레지스터에서 (+, –, *, /, &, |, ^) 계산
  - 레지스터 r_j 를 r_i 에 있는 메모리에 저장
- 워드란? $w \geq \log_2$ (memory size) bit
  - 기본적인 객체(e.g., 정수)가 워드에 들어맞는다고 가정한다
  - 4단원에서 큰 수를 다룬다
- 현실적이고 강력함 → 추상적 개념 구현

포인터 머신

- 동적 할당된 객체 (네임드 튜플)
- 객체는 O(1)개의 필드를 갖는다.
- 필드 = 워드 (e.g., 정수) 또는 객체/널을 가리키는 포인터 (a.k.a. 참조)
- RAM보다 약하다 (RAM으로 구현 가능)



파이썬 모델

파이썬은 두 가지 사고를 모두 적용할 수 있다.

1. "리스트"는 사실 배열이다. → RAM

   L[i] = L[j]+5 → Θ(1) 시간

2. O(1)개의 속성(참조 포함)을 가진 객체 → 포인터 머신

   x = x.next → Θ(1) 시간

파이썬에는 많은 연산이 있다. 각 연산의 비용을 알아보려면 (1)이나 (2)로 구현해보면 된다. :

1. 리스트

(a) L.append(x) → $\theta(1)$ time

obvious if you think of infinite array

but how would you have > 1 on RAM?
via *table doubling* [Lecture 9]

(b) $\underbrace{L = L1 + L2}_{(\theta(1+\lvert L1\rvert+\lvert L2\rvert)\text{ time})} \equiv L = [] \rightarrow \theta(1)$

for x in $L1$:
  L.append(x) → $\theta(1)$ } $\theta(\lvert L_1\rvert)$

for x in $L2$:
  L.append(x) → $\theta(1)$ } $\theta(\lvert L_2\rvert)$

(c) $L1.\text{extend}(L2) \equiv$ for x in $L2$:
$\equiv L1 += L2$ $L1.\text{append(x)}$ $\rightarrow \theta(1)$ } $\theta(1 + |L_2|)$ time

(d) $L2 = L1[i:j] \equiv L2 = []$
for k in range(i, j):
$L2.\text{append}(L1[i]) \rightarrow \theta(1)$ } $\theta(j - i + 1) = O(|L|)$

(e) $b = x$ in L $\equiv$ for y in L:
& L.index(x) if $x == y$:
& L.find(x) $b = True$;
break
else
$b = False$
} $\theta(1)$ } $\theta(\text{index of } x) = \theta(|L|)$

(f) len(L) → θ(1) 시간 - 리스트는 자신의 길이를 필드에 저장한다

(g) L.sort() → θ(|L| log |L|) - 비교 정렬을 사용 [강의 3, 4 & 7]

2. tuple, str: similar, (think of as immutable lists)

3. dict: via *hashing* [Unit 3 = Lectures 8-10]
D[key] = val
key in D } $\theta(1)$ time w.h.p.

4. set: similar (think of as dict without vals)

5. heapq: heappush & heappop - via *heaps* [Lecture 4] → $\theta(\log(n))$ time

6. long: via *Karatsuba algorithm* [Lecture 11]
$x + y \rightarrow O(|x| + |y|)$ time where $|y|$ reflects # words
$x * y \rightarrow O((|x| + |y|)^{\log(3)})$ $\approx O((|x| + |y|)^{1.58})$ time

문서 거리 문제 — d(D_1 D_2) 계산

문서 거리 문제는 유사한 문서 탐색이나 중복(위키피디아 미러 사이트와 구글)과 표절 발견, 그리고 웹 검색에 적용된다. (D_2 = 질의어).

정의:

- 단어 = 영어와 숫자로 이루어진 문자열
- 문서 = 단어의 나열 (공백, 문장 부호 등 무시)

공통으로 갖는 단어를 통해 거리를 정의하고자 한다. 문서 D를 벡터로 생각한다. : D[w] = 단어 W의 등장 횟수. 예를 들면:

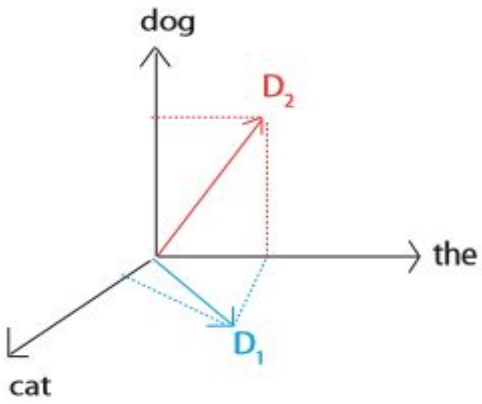


그림 2: D_1 = “the cat”, D_2 = “the dog”

첫 번째 시도로, 문서 거리를 다음과 같이 정의한다:

$$d'(D_1, D_2) = D_1 \cdot D_2 = \sum_W D_1[W] \cdot D_2[W]$$

문제는 규모에 따라 변한다는 것이다. 즉, 99%의 단어가 일치하는 긴 문서들이 10%만 일치하는 짧은 문서들보다 거리가 멀게 된다.

이 문제는 단어의 개수로 정규화함으로써 해결할 수 있다:

$$d''(D_1, D_2) = \frac{D_1 \cdot D_2}{|D_1| \cdot |D_2|}$$

여기서 |Di|는 문서 i에 들어있는 단어의 개수이다. 이것을 기하학적으로 해석(재구성)하면 다음과 같다. :

$$d(D_1, D_2) = \arccos(d''(D_1, D_2))$$

즉, 문서 거리는 두 벡터 사이의 각도이다. 0°는 두 문서가 같다는 것을 의미하고, 90°는 공통 단어가 없다는 것을 의미한다. 이 방법은 1975년에 Salton, Wong, Yang에 의해 소개되었다.

문서 거리 알고리즘

1. 각 문서를 단어들로 쪼갠다.

2. 단어 빈도를 센다. (문서 벡터)

3. 내적을 계산한다. (& 나눈다.)

(1) re.findall (r" w+", doc) → what cost?

in general re can be exponential time

→ for char in doc: — $\Theta(|doc|)$

  if not alphanumeric

    add previous word (if any) to list; start new word — $\Theta(1)$

(2) sort word list ← $O(k \log k \cdot |word|)$ where k is #words

for word in list: — $O(\sum |word|) = O(|doc|)$

  if same as last word: ← $O(|word|)$

    increment counter — $\Theta(1)$

  else:

    add last word and count to list; reset counter to 0 — $\Theta(1)$

(3)

```
for word, count1 in doc1:    ← Θ(k1)
    if word, count2 in doc2:    ← Θ(k2)
        total += count1 * count2    Θ(1)
```

$O(k_1 \cdot k_2)$

(3)'

```
start at first word of each list
if words equal:    ← O(|word|)
    total += count1 * count2
if word1 ≤ word2:  ← O(|word|)
    advance list1
else:
    advance list2
repeat either until list done
```

$O(\sum |word|) = O(|doc|)$

Dictionary Approach

(2)' count = {}

```
for word in doc:                          ← O(|doc|) w.h.p.
    if word in count:    ← Θ(|word|) + Θ(1) w.h.p
        count[word] += 1
    else                                  ← Θ(1)
        count[word] = 1
```

(3)' as above → $O(|doc_1|)$ w.h.p.

코드 (웹 사이트의 lecture_code.zip & _data.zip)

t2.bobsey.txt 268,778 chars/49,785 words/3354 uniq

t3.lewis.txt 1,031,470 chars/182,355 words/8534 uniq

seconds on Pentium 4, 2.8 GHz, C-Python 2.62, Linux 2.6.26

- docdist1: 228.1 — (1), (2), (3) (추가적인 정렬)

  words = words + words_on_line
- docdist2: 164.7 — words += words_on_line
- docdist3: 123.1 — (3)' . . . 삽입 정렬 이용
- docdist4: 71.7 — (2)' 이지만 (3)'의 정렬 이용
- docdist5: 18.3 — string.translate로 단어 분할
- docdist6: 11.5 — 병합 정렬 (vs. 삽입 정렬)
- docdist7: 1.8 — (3) (완전한 딕셔너리)
- docdist8: 0.2 — 한 줄 한 줄이 아닌 문서 전체

6.006 알고리즘 개론
가을 2011