CH13. 라플라스 변환

NO. DATE.

1. 라플라스 변환

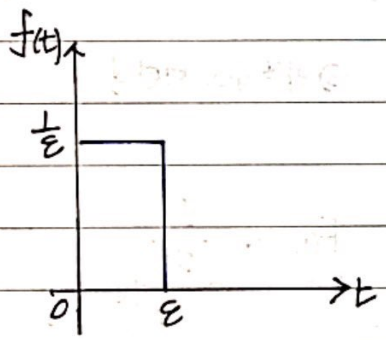
1. 정의

· 시간 함수 $f(t)$를 복소함수 $F(s)$로 변환시킨다. : $f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s)$

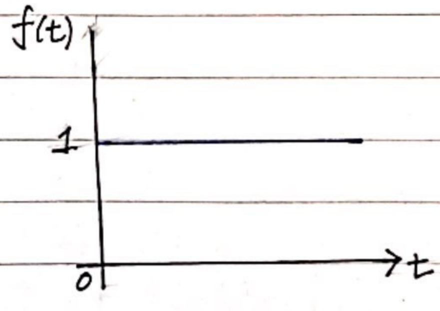
· $f(t)$라는 시간함수에 e^{-st} 지수함수를 곱한 후 시간 t에 대해서 $0 \sim \infty$ 까지 적분한 값을 라플라스 변환한 값, $F(s)$라 한다. : $F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$

2. 라플라스 변환의 기본식

1). 단위 임펄스 함수 = 델타 함수 = 중량 함수 = 하중함수

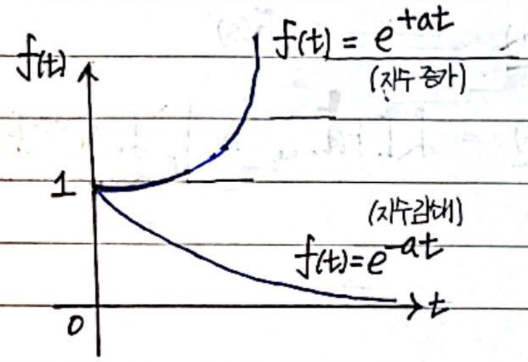
① 파형	② 시간 함수	③ 라플라스 변환식
	$f(t) = \delta(t)$	$F(s) = 1$

2). 단위계단 함수

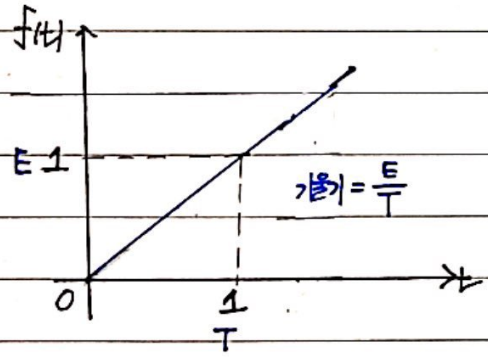
① 파형	② 시간 함수	③ 라플라스 변환식
	$f(t) = u(t) = 1$	$F(s) = \frac{1}{s}$

Scanned with CamScanner

3) 지수감쇠 , 지수증가 함수

① 파형	② 시간 함수	③ 라플라스 변환식
	$f(t) = e^{\mp at}$	서로 부호가 반대 $F(s) = \frac{1}{s \pm a}$ ☆

4) 단위 램프 함수

① 파형	② 시간함수	③ 라플라스 변환식
	$f(t) = t u(t)$ $= t$ $* f(t) = \frac{E}{T} t u(t)$ $= \frac{E}{T} t$	$F(s) = \frac{1}{s^2}$ ☆ $* F(s) = \frac{E}{Ts^2}$

5) n차 램프 함수

① 시간 함수 $f(t) = t^n$

② 라플라스 변환식 $F(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$ ☆

Scanned with CamScanner

NO. DATE.

6) 삼각함수의 라플라스 변환

시간함수	라플라스 변환
$f(t) = \sin \omega t$	$F(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ ☆
$f(t) = \cos \omega t$	$F(s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$ ☆
$f(t) = \sinh \omega t$	$F(s) = \frac{\omega}{s^2-\omega^2}$ ☆
$f(t) = \cosh \omega t$	$F(s) = \frac{s}{s^2-\omega^2}$ ☆

2. 라플라스 변환에 관한 여러가지 정리

1. 선형의 정리. : 두개이상의 시간 함수의 합이나 차. ('곱셈, 나눗셈은 안됨)

$$\mathcal{L}[af_1(t) \pm bf_2(t)] = aF_1(s) \pm bF_2(s)$$

예)

1) $f(t) = 1 - e^{-at} \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+a} = \frac{a}{s(s+a)}$

따로 따로 라플라스변환하여 뺀다.

2) $f(t) = \sin t - 2\cos t \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) = \frac{1}{s^2+1^2} + \frac{2s}{s^2+1^2} = \frac{2s+1}{s^2+1^2}$

morning glory

Scanned with CamScanner

2. 복소추이정리 : 시간함수 $f(t)$와 자연지수 함수 $e^{\pm at}$ 곱 (지수함수 $e^{\pm at}$가 곱해져 있을 때 Laplace Transform)

$$\cdot\ \mathcal{L}\left[e^{\pm at}f(t)\right] = F(s)\Big|_{s=s\mp a\text{ 대입}} = F(s\mp a)$$

예)

1) $f(t) = e^{-2t}\cos\omega t \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) = \dfrac{s}{s^2+\omega^2}\Big|_{s=s+2} = \dfrac{s+2}{(s+2)^2+\omega^2}$

지수함수를 가려놓고 나머지를 라플라스 변환을 한다

2) $f(t) = te^{-at} \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) = \dfrac{1}{s^2}\Big|_{s=s+a} = \dfrac{1}{(s+a)^2}$

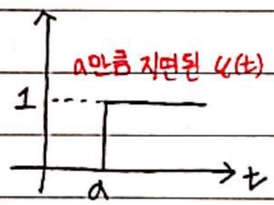
이 경우 복소추이, 복소미분 2가지 풀이법 존재

3. 시간 추이 정리 : 시간이 지연된 경우

$$\cdot\ \mathcal{L}\left[f(t-a)\right] = F(s)e^{-as}$$

예)

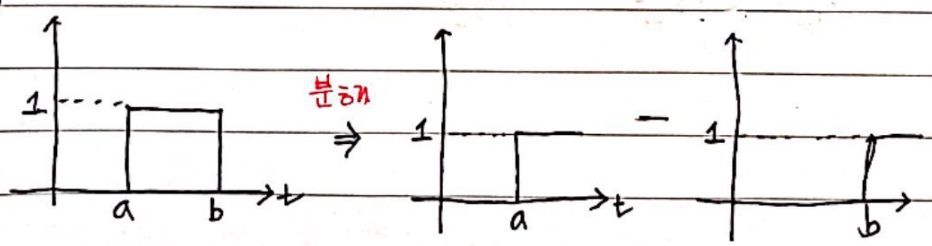
1)



$\Rightarrow f(t) = u(t-a) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) = \dfrac{1}{s}e^{-as}$

u(t)에 대하여 라플라스 변환 / 지연된 시간만큼 곱함

2)



$\Rightarrow f(t) = u(t-a) - u(t-b)$

$\xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) = \dfrac{1}{s}e^{-as} - \dfrac{1}{s}e^{-bs}$

$\therefore F(s) = \dfrac{1}{s}\left(e^{-as} - e^{-bs}\right)$

morning glory

Scanned with CamScanner

NO. DATE.

4. 복소미분정리 : 시간함수 $f(t)$와 n차 램프함수 t^n의 곱 (n차 램프함수 t^n이 곱해져 있을 때 Laplace Transform)

$$\cdot\ \mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$$

→ n차 램프함수를 가리고 나머지만 Laplace Transform 한뒤 n번 미분

예)

1) $f(t) = t\sin\omega t \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) = \frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$

2) $f(t) = t\cos\omega t \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) = \frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$

암기, 1차만 나옴.

5. 실미분 정리 : 시간 함수 $f(t)$가 미분되어 있는 경우 (n번 미분된 시간함수를 Laplace Transform)

$$\cdot\ \mathcal{L}\left[\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots$$

단 초기값 $f(0) = 0$인 경우, $\mathcal{L}\left[\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right] = s^n F(s)$ ⇒ 미분한 횟수만큼 s를 곱함

→ 미분된 시간함수 $f(t)$를 Laplace Transform

6. 실적분 정리 (초기값 : $f(0) = 0$) : 시간 함수 $f(t)$가 적분되어 있는 경우 (n번 적분된 시간함수를 Laplace Transform)

$$\cdot\ \mathcal{L}\left[\int f(t)\,dt\right] = \frac{1}{s} F(s)$$

→ 적분된 시간함수 $f(t)$를 Laplace Transform

⇒ 적분한 횟수 만큼 s를 나눔

7. 초기값 정리 ($t=0$)

$$\cdot\ f(0) = \lim_{t=0} f(t) = \lim_{s=\infty} sF(s)$$

sF(s) 에서.

① 분모의 차수가 높다 : 0

② 분자의 차수가 높다 : ∞

③ 동차 : 최고차항의 계수를 나눈다.

morning glory

Scanned with CamScanner

NO. DATE.

=정상상태

8. 최종값 정리 $(t=\infty)$

· $f(\infty) = \lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$

3. 역라플라스 변환

$f(t) \xleftarrow{\mathcal{L}^{-1}} F(s)$ 으로, $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$

1. 역라플라스 변환 기본식

라플라스변환	시간함수
1	$\delta(t)$
$\frac{1}{s}$	$u(t) = 1$
$\frac{1}{s^2}$	t
$\frac{n!}{s^{n+1}}$	t^n
$\frac{1}{s \pm a}$	$e^{\mp at}$
$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$
$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$.

2. 기본모양이 아닌 경우

1) 인수분해 O : 부분 분수 전개

2) 인수분해 X : 완전제곱꼴.

Scanned with CamScanner