

# ★ CH5. 안정도 판별법

NO.

DATE.

## 1. 안정 필요조건

특성방정식이 다음 조건을 만족할 경우 안정할 수도 있으며 이 조건을 만족하는 경우에 안정도 판별법을 적용하여 안정·불안정 여부를 결정해준다.

ex) 불안정 (-부번바)

$$s^3 + 2s^2 - 5s - 6 = 0$$

$$s^3 + 2s + 5 = 0$$

불안정 (또 차수 X)

$$s^3 + 2s^2 + 5s + 2 = 0$$

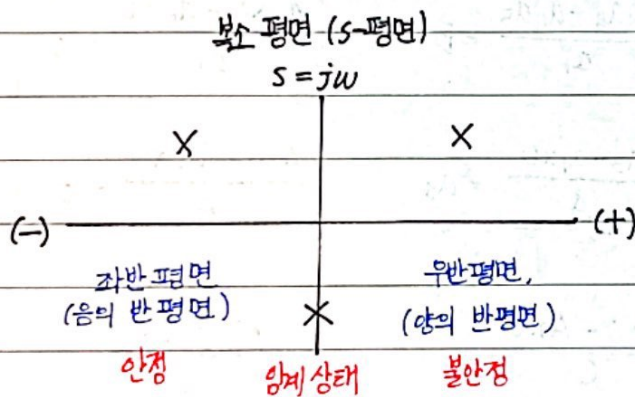
→ 필요조건을 갖춤

1. 특성방정식의 모든 차수가 존재하여야 한다.

2. 특성방정식의 부번바가 없어야 한다.

## 2. 복소평면 (s-평면)에 의한 안정판별

복소평면 좌반평면 (음의 반평면)에 특성방정식의 근(극점)이 존재 시 제어계는 안정하고  
우반평면 (양의 반평면)에 특성방정식의 근(극점)이 존재하면 불안정하게 되며  
허수축에 존재 시 임계상태가 된다.





### 3. Routh 수열에 의한 안정판별

$$\text{특성방정식} = a_0 s^5 + a_1 s^4 + a_2 s^3 + a_3 s^2 + a_4 s^1 + a_5 = 0$$

#### 1. Routh 수열 작성법

1) 1단계 : 특성방정식의 계수를 다음과 같이 두 줄로 나열한다.

$$a_0 \quad a_2 \quad a_4 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad \dots$$

$$a_1 \quad a_3 \quad a_5 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad \dots$$

2) 2단계 : 다음 표와 같은 Routh 수열을 계산하여 만든다.

$s^5$	$a_0$	$a_2$	$a_4$	0
$s^4$	$a_1$	$a_3$	$a_5$	0
$s^3$	$\frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} = A$	$\frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1} = B$	$\frac{a_1 \times 0 - a_0 \times 0}{a_1} = 0$	0
$s^2$	$\frac{A a_3 - a_1 B}{A} = C$	$\frac{A a_5 - a_1 \times 0}{A} = a_5$	$\frac{A \times 0 - a_1 \times 0}{A} = 0$	0
$s^1$	$\frac{BC - A a_5}{C} = D$	$\frac{C \times 0 - A \times 0}{C} = 0$	$\frac{C \times 0 - A \times 0}{C} = 0$	0
$s^0$	$\frac{D a_5 - C \times 0}{D} = a_5$	0	0	0

#### \* Routh 수열 별해

$$\text{특성방정식} = as^3 + bs^2 + cs + d = 0, \text{ 특성방정식이 3차로 주어질 경우}$$

$bc > ad$  인 경우 : 안정

$bc < ad$  인 경우 : 불안정

$bc = ad$  인 경우 : 임계상태



## 2. 안정판별

1) 제 1열의 부호변화가 없다 : 안정

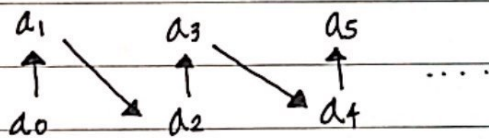
2) 제 1열의 부호변화가 있다 : 불안정

3) 제 1열의 부호변화의 수 : 불안정한 근의 수 또는 복소평면 (s-평면) 우반평면 (양의 반평면)에 존재하는 근의 수

## 4. Hurwitz 안정판별법

이 방법은 특성방정식의 계수만 만들어지는 행렬식에 의하여 판별한다. 모든 리이 좌반평면에 존재하려면 Hurwitz 랭글식  $D_k$  ( $k=1, 2, \dots, n$ )가 모든  $k$ 에 대하여  $+$ 의 값을 가져야하며, 제어계는 안정하다.

1) 계수를 다음과 같이 두줄로 나열한다.



2) 하부에서 상위 계수가  $a_0 \rightarrow a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow a_3 \dots$ 의 순서가 되도록 나열한다.

3) 행렬식에서  $n$ 보다 크거나 0보다 작은 인덱스는 0으로 대체한다.

$$\text{특성방정식} = a_0 s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4 = 0$$

$$D_1 = a_1$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}$$

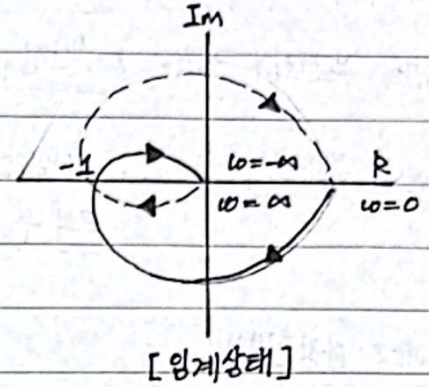
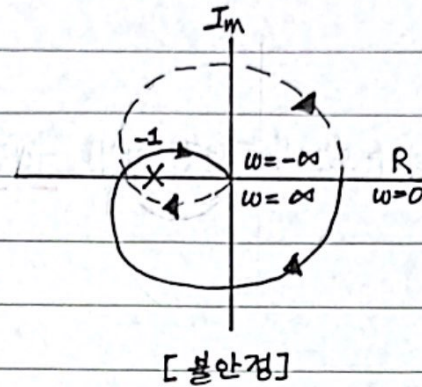
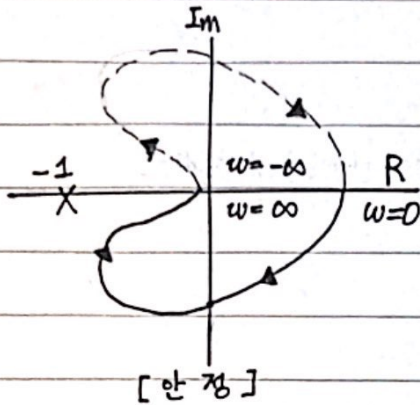
$$D_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix}$$

$D_1, D_2, D_3, D_4$  값이 모두  $+$ 일 때 제어계는 안정하다.



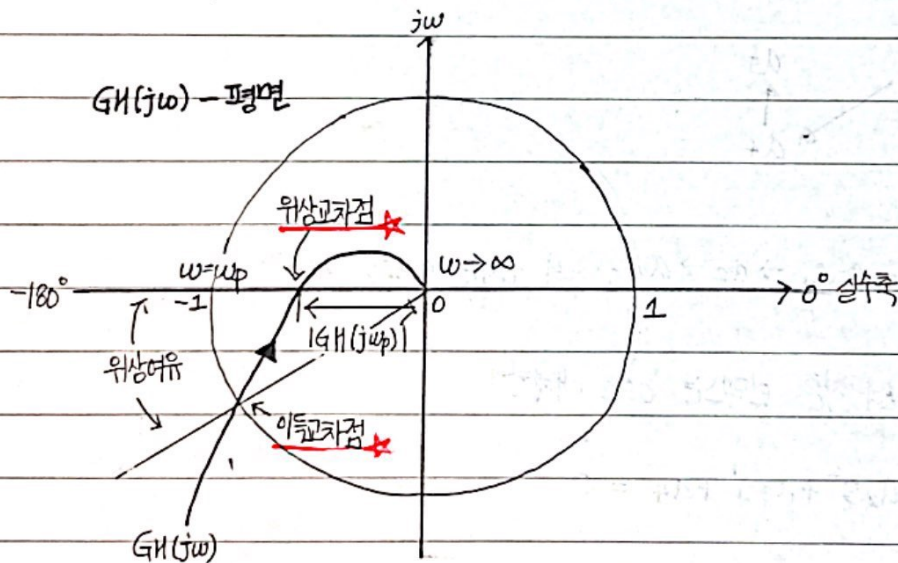
## 5. Nyquist 선 안정 판별

### 1. 안정 판별법



시스템의 개루프 전달함수  $G(s)H(s)$ 의 나이퀴스트 선도가 반시계 방향으로 시계방향으로  $\omega$ 가 증가하는 방향으로 따라갈 때  $(-1, j0)$  점이 나이퀴스트 선도 왼쪽에 있으면 안정하고 오른쪽에 있으면 불안정하다.

### 2. 이득여유 G.M [dB] 및 위상여유 P.M



[극대표에서 이득여유 및 위상여유]

위 그림은 Nyquist 선도가 부의 실수축을 지나는  $G_H(j\omega)$ 의 크를  $|G_H(j\omega)|$  일 때 부의 실수축  $(-1, j0)$ 과의 교차점 위상교차점이라 하며 Nyquist 선도가  $(-1, j0)$ 점을 지나는 단위원과의 교차점 이득교차점이라 한다.

★ 1) 이득 여유

$$G.M = 20 \log_{10} \frac{1}{|GH(j\omega)|} \Big|_{\omega=\omega_p} [dB], \quad \text{여기서 } \omega_p \text{는 } \text{극점의 실수부가 0이 되는 } \omega \text{ 값}$$

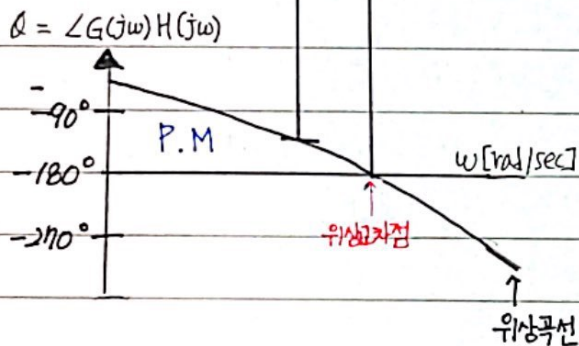
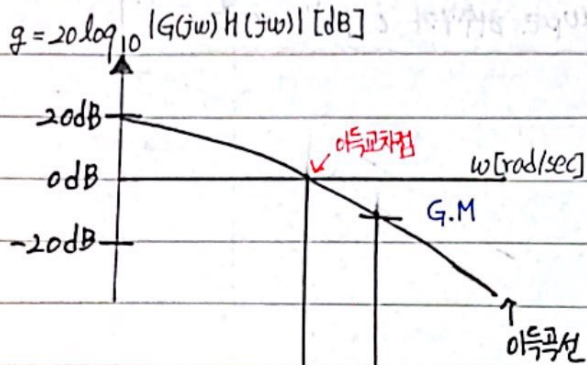
> 극점의 실수부가 0이 되는 주파수  $\omega_p = \omega_c = 0$

2) 위상 여유

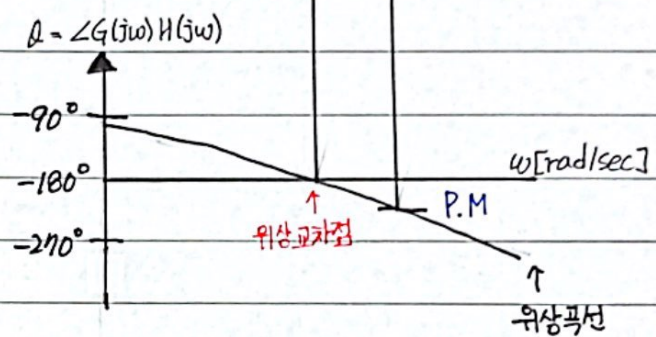
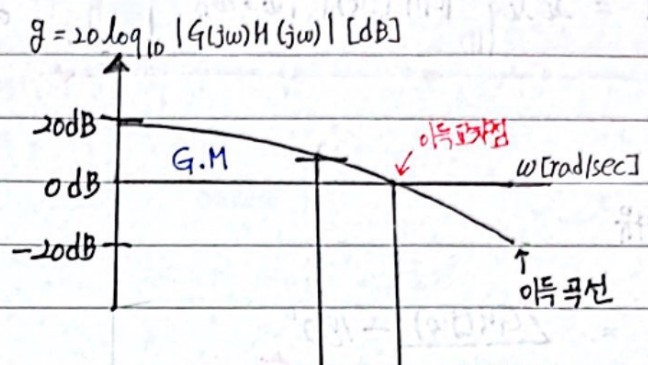
$$P.M = \angle GH(j\omega) - 180^\circ$$



## 3. 보드 도면에서의 안정판별



[안정]



[불안정]

- 1) 위상교차점 ( $-180^\circ$ )에서의  $GH(jw)$ 의 이득값을 이득여유라 하며 크기가 이득  $g$  [dB] 이 음수이면 이득여유  $G.M$  [dB]는 양수이고, 계는 안정하다. 즉 이득여유는  $0$  [dB] 축 아래쪽에서 측정된다.  
 이득여유를  $0$  [dB] 축 위쪽에서 받게 되면 이득  $g$  [dB] 이 양수이며 이득여유  $G.M$  [dB]는 음수가 되고 계는 불안정하다.

- 2) 이득교차점 ( $0$  [dB])에서  $GH(jw)$ 의 위상을 위상여유라 하며  $-180^\circ$ 보다 위쪽에서 측정되면 위상여유가 양수이고 계는 안정하다.  $-180^\circ$  아래에서 위상여유가 구해지면 위상여유는 음수이고 계는 불안정하다.

\* 정리

$\star$  이득  $g < 0$   
 이득여유  $G.M > 0$   
 위상여유  $P.M > 0$

} 안정

$g \uparrow$  불안정해진다.  
 $G.M \uparrow$  안정해진다.  
 $P.M \uparrow$

$\star$  이득  $g > 0$   
 이득여유  $G.M < 0$   
 위상여유  $P.M < 0$

} 불안정