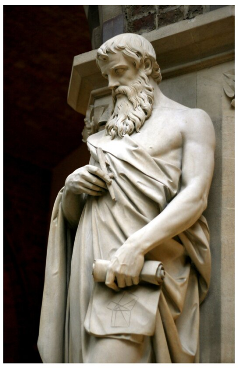
Punkt wspólny prostych

Źródło: Logan Armstrong, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Euklides w swoim słynnym dziele *“Elementy”* stwierdził, że „Dwie proste, które przecinają trzecią w taki sposób, że suma kątów wewnętrznych po jednej stronie jest mniejsza od dwóch kątów prostych, przetną się z tej właśnie strony”. Przez wiele lat zdanie to budziło wiele wątpliwości, które stały się inspiracją do rozwoju nowych gałęzi geometrii - geometrii nieeuklidesowych. Dziś zdanie to przyjmujemy za pewnik jedynie na tzw. płaszczyźnie euklidesowej - to ta, o której uczymy się w szkołach. W tej lekcji zajmiemy się wyznaczaniem współrzędnych punktów przecięcia prostych o danych równaniach.



Posąg Euklidesa

Źródło: Mark A. Wilson, dostępny w internecie: https://commons.wikimedia.org/, licencja: CC BY-SA 4.0.

Twoje cele

- Odczytasz współrzędne punktu wspólnego prostych.
- Wyznaczysz współrzędne punktu wspólnego prostych, rozwiązując układ równań.
- Rozwiążesz zadania z geometrii analitycznej dotyczące punktów przecięcia prostych.

Przeczytaj

Zacznijmy od pary prostych, z których żadna nie jest równoległa do osi Y, czyli można je opisać równaniami kierunkowymi $y = ax + b$ i $y = cx + d$. Wówczas współrzędne ich punktu wspólnego możemy wyznaczyć rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} y = ax + b \\ y = cx + d \end{cases},$$

z którego wynika równanie

$$ax + b = cx + d$$
$$(a - c)x = d - b.$$

Zauważmy, że jeśli $a - c = 0$, to $a = c$, więc proste są równoległe, co oznacza, że albo nie mają punktów wspólnych, albo mają ich nieskończenie wiele. Jeśli zaś $a - c \neq 0$, to

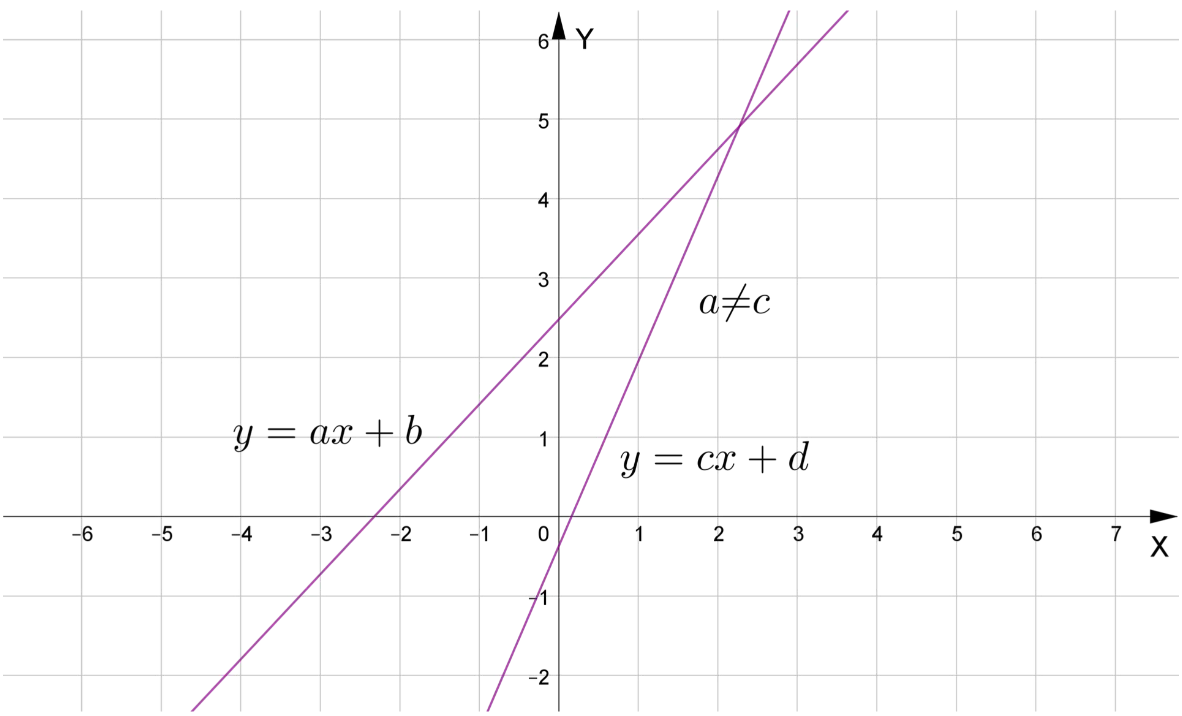
$$x = \frac{d-b}{a-c}.$$

Po podstawieniu do pierwszego równania powyższej równości, możemy wyznaczyć y. Istotnie

$$y = a \cdot \frac{d-b}{a-c} + b = \frac{ad-ab}{a-c} + \frac{ba-bc}{a-c} = \frac{ad-bc}{a-c}.$$

Zatem punkt przecięcia prostych ma współrzędne

$$\left(\frac{d-b}{a-c}, \frac{ad-bc}{a-c}\right).$$



Analogiczną analizę możemy przeprowadzić dla prostych opisanych równaniami ogólnymi, które obejmują również proste równoległe do osi Y. Aby wyznaczyć punkt wspólny prostych o równaniach $Ax + By + C = 0$, gdzie A i B nie są jednocześnie równe zeru, oraz $Dx + Ey + F = 0$, gdzie D i E nie są jednocześnie równe zeru, wystarczy rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ Dx + Ey + F = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} Ax + By = -C \\ Dx + Ey = -F \end{cases}$$

Po pomnożeniu pierwszego równania przez D, zaś drugiego przez A, otrzymujemy równania

$$\begin{cases} ADx + BDy = -CD \\ ADx + AEy = -AF \end{cases}$$

Po odjęciu stronami drugiego równania od pierwszego otrzymujemy równanie z niewiadomą y:

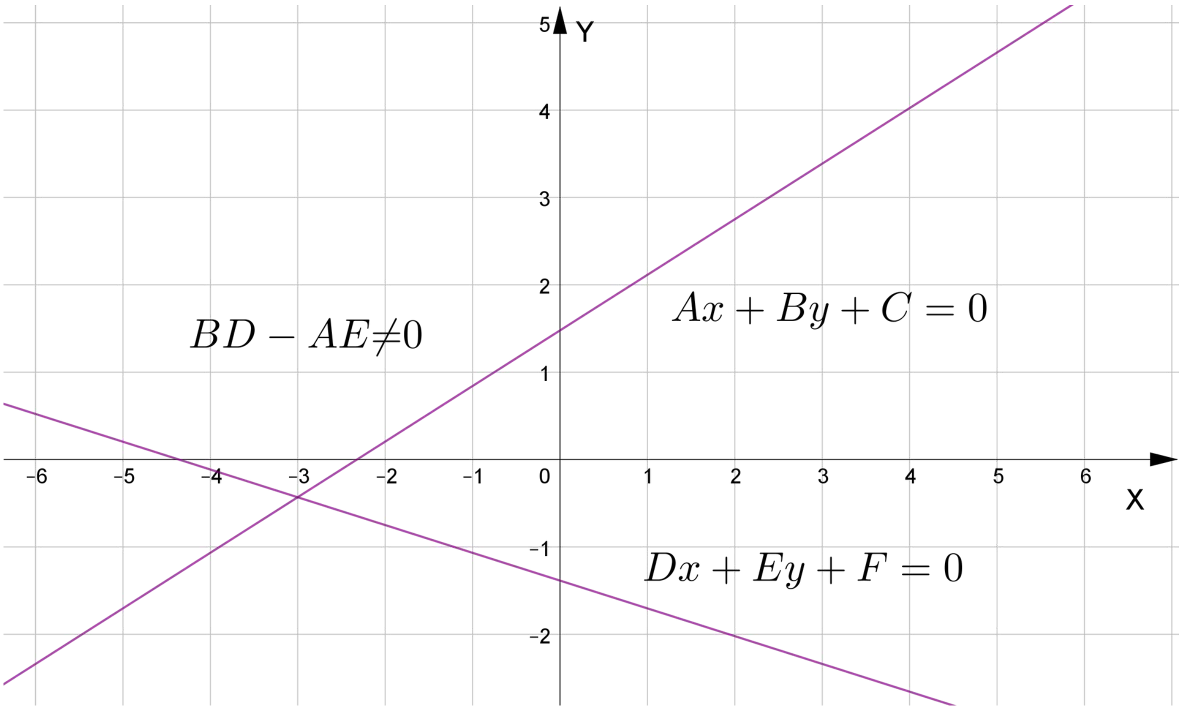
$$(BD - AE)y = AF - CD.$$

Analogiczne równanie możemy otrzymać dla niewiadomej x:

$$(BD - AE)x = CE - BF.$$

Zwróćmy uwagę, że jeśli $BD - AE = 0$, to powyższe równania są sprzeczne albo tożsamościowe, więc rozważane proste nie przecinają się w jednym punkcie. Jeśli zaś $BD - AE \neq 0$, to każde z równań możemy obustronnie podzielić przez wyrażenie $BD - AE$, co prowadzi do otrzymania współrzędnych punktu przecięcia

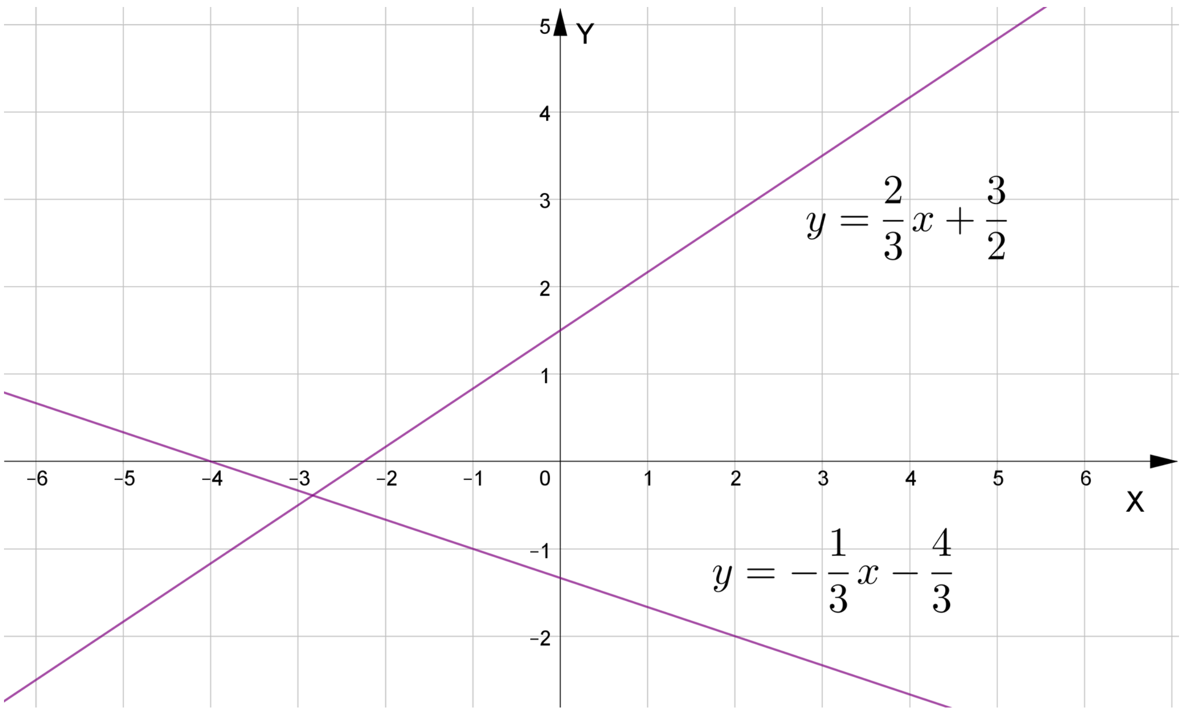
$$(x, y) = \left(\tfrac{CE-BF}{BD-AE}, \tfrac{AF-CD}{BD-AE}\right).$$



Czasami współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych możemy odczytać z rysunku, jednak warto wtedy zachować ostrożność. Przede wszystkim współrzędne punktu przecięcia prostych odczytujemy z rysunku tylko wtedy, gdy są one liczbami całkowitymi, czyli punkt przecięcia prostych jest punktem kratowym. Warto też sprawdzić odczytane współrzędne podstawiając je do równań prostych.

Przykład 1

Wyznaczymy punkt wspólny prostych o równaniach $y = \frac{2}{3}x + \frac{3}{2}$ i $y = -\frac{1}{3}x - \frac{4}{3}$.



W tym celu rozwiążemy układ równań:

$$\begin{cases} y = \frac{2}{3}x + \frac{3}{2} \\ y = -\frac{1}{3}x - \frac{4}{3} \end{cases},$$

z którego wynika równanie

$$\frac{2}{3}x + \frac{3}{2} = -\frac{1}{3}x - \frac{4}{3}.$$

Można je rozwiązać następująco

$$\begin{gathered} 4x + 9 = -2x - 8 \\ 6x = -17 \\ x = -\frac{17}{6} \end{gathered}$$

Zatem rozwiązaniem układu jest para liczb

$$\begin{cases} x = -\frac{17}{6} \\ y = \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{17}{6}\right) + \frac{3}{2} = -\frac{7}{18} \end{cases}$$

Punkt przecięcia danych prostych ma współrzędne $\left(-\frac{17}{6}; -\frac{7}{18}\right)$. Zauważmy, że trudno byłoby je odczytać z rysunku.

Przykład 2

Wyznaczymy współrzędne punku wspólnego prostych o równaniach $x = 3$ oraz $4x - 2y = -1$. Aby wyznaczyć współrzędne punktu wspólnego tych prostych, wystarczy rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x = 3 \\ 4x - 2y = -1 \end{cases},$$

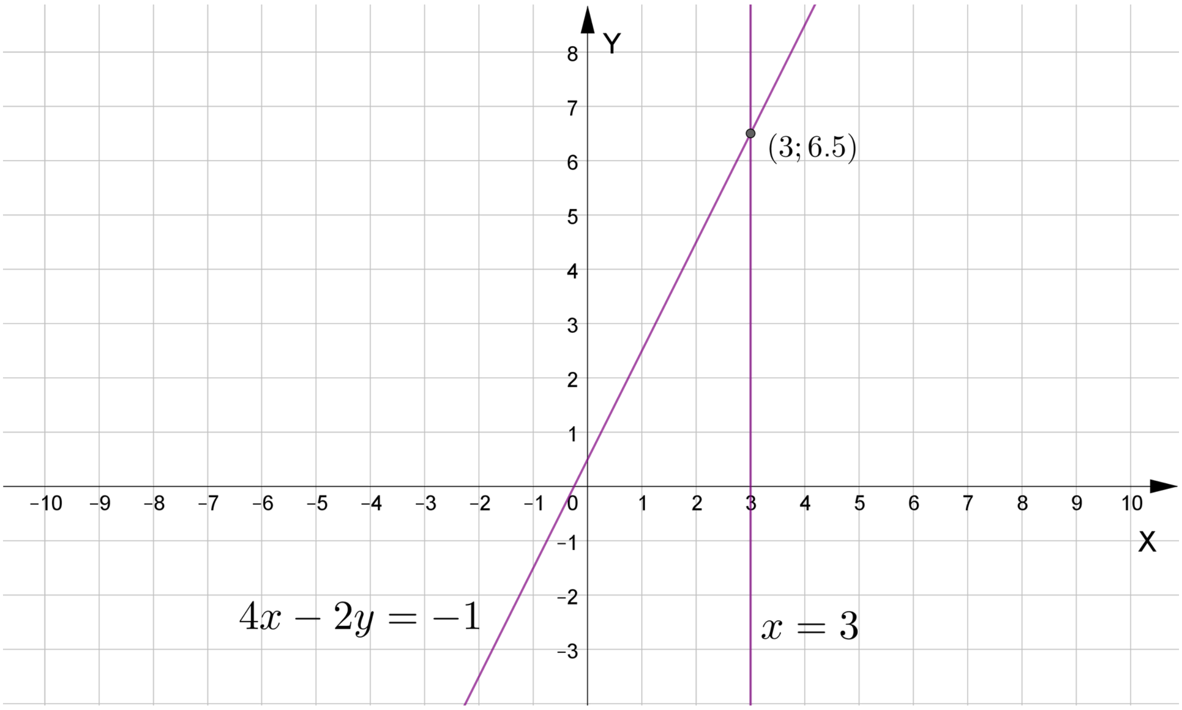
z którego wynika równanie

$$4 \cdot 3 - 2y = -1.$$

Przekształcając je, otrzymamy y

$$\begin{gathered} -2y = -1 - 12 \\ y = 6,5 \end{gathered}$$

Zatem współrzędne punktu wspólnego danych prostych to $(3; 6,5)$.



Przykład 3

Punkt $A = (-6, 1)$ jest wierzchołkiem trójkąta ABC, a punkt D jest środkiem odcinka AB. Równania prostych AB, CD oraz symetralnej boku BC to odpowiednio

$$y = \frac{1}{2}x + 4,\ y = -\frac{7}{4}x - 5 \text{ i } y = x + 11.$$

Wyznaczymy równanie prostej zawierającej wysokość trójkąta ABC opuszczoną z wierzchołka C. Zaczniemy od wyznaczenia współrzędnych punktu D, rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 4 \\ y = -\frac{7}{4}x - 5 \end{cases},$$

z którego wynika równanie

$$\frac{1}{2}x + 4 = -\frac{7}{4}x - 5.$$

Wykonując kolejne przekształcenia otrzymujemy:

$$\begin{gathered} 2x + 16 = -7x - 20 \\ 9x = -36, \end{gathered}$$

więc

$$x = -4.$$

Pozostaje wyznaczyć niewiadomą y:

$$\begin{cases} x = -4 \\ y = \frac{1}{2} \cdot (-4) + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -4 \\ y = 2 \end{cases}$$

Zatem punkt D ma współrzędne $(-4, 2)$. Współrzędne punktu $B(x_B, y_B)$ możemy wyznaczyć, korzystając ze wzorów na współrzędne środka odcinka o danych końcach:

$$\frac{x_B-6}{2} = -4 \text{ i } \frac{y_B+1}{2} = 2.$$

Zatem współrzędne punktu B to $(-2, 3)$. Ponieważ prosta BC jest prostopadła do prostej o równaniu $y = x + 11$, więc jej współczynnik kierunkowy jest równy (-1). Wykorzystując współrzędne punktu B możemy wyznaczyć równanie prostej BC:

$$y = -(x + 2) + 3$$
$$y = -x + 1.$$

Współrzędne punktu C, możemy wyznaczyć rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} y = -x + 1 \\ y = -\frac{7}{4}x - 5 \end{cases}$$

Zatem punkt C ma współrzędne $(-8, 9)$. Współczynnik kierunkowy prostej zawierającej wysokość poprowadzoną z wierzchołka C to (-2), więc jej równanie to

$$y = -2(x + 8) + 9$$
$$y = -2x - 7.$$

Słownik

proste równoległe

w geometrii euklidesowej są to proste, które nie mają punktów wspólnych; wg Euklidesa są to proste, które przecięte trzecią prostą tworzą z nią kąty wewnętrzne po jednej jej stronie o miarach, których suma jest równa 180°

punkt przecięcia prostych

punkt wspólny dwóch różnych prostych

Film samouczek

Polecenie 1

Obejrzyj film i dowiedz się w jaki sposób wyznacza się współrzędne punktu wspólnego dwóch prostych.

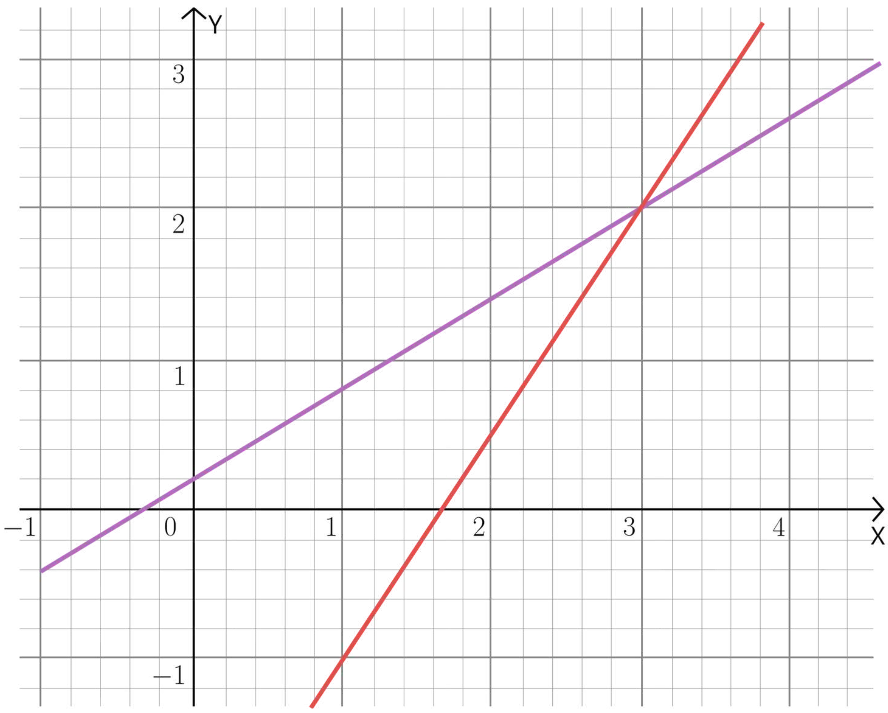
Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DPFUD3Xl6

Film samouczek przedstawia sposoby wyznaczania punktu wspólnego dwóch prostych na podstawie wykresu lub układu równań. Przykład pierwszy. Metoda na podstawie wykresu polega na narysowaniu przebiegu funkcji w układzie współrzędnych przy wykorzystaniu punktów kratowych. W tym celu pierwszy punkt zaznacza się biorąc pod uwagę wartość wyrazu wolnego, którą to wartość oznaczamy na osi Y. Następnie na podstawie współczynnika kierunkowego określamy zmianę funkcji. I tak, dla funkcji y równa się minus jedna trzecia x odjąć dwa, pierwszy punkt zaznaczamy na osi Y dla wartości minus dwa, kolejne w prawo przesuwamy o trzy jednostki w prawo i jedną jednostkę w dół, w lewo kolejne punkty przesuwamy o trzy jednostki w lewo i jedną jednostkę w górę. Dla funkcji y równa się dwie trzecie x dodać jeden, pierwszy punkt zaznaczamy na osi Y dla wartości jeden, kolejne w prawo przesuwamy o trzy jednostki w prawo i dwie jednostki w górę, w lewo kolejne punkty przesuwamy o trzy jednostki w lewo i dwie jednostki w dół. Sprawdzenie poprawności wyznaczenia punktu przecięcia dokonuje się poprzez podstawienie do obu równań w miejsce zmiennych x i y wartości odczytanych z wykresu dla punktu przecięcia. Równania powinny stanowić tożsamość. Rozwiązanie algebraiczne polega na rozwiązaniu układu równań. Pod wartość y drugiego równania, podstawiamy wartość y z pierwszego równania, co spowoduje utworzenie równania z pojedynczą zmienną x. Po rozwiązaniu równania otrzymujemy wartość liczbową x, którą podstawiamy do dowolnego z pierwotnych równań, otrzymując wartość y. Przykład drugi. Wyznaczanie współrzędnych punktu wspólnego prostych o równaniach ogólnych. Pierwsze rozwiązanie jest algebraiczne. Równania zapisuje się w klasycznej postaci występującej w układzie równań: na początku iksxy, potem igreki, a wyraz wolny po prawej stronie. Taki układ równań rozwiązujemy metodą przeciwnych współczynników – po przemnożeniu jednego z równań przez odpowiedni współczynnik, i dodajemy do siebie równania, co powoduje eliminację jednego typu zmiennej. Otrzymujemy równanie o jednej zmiennej, którego rozwiązanie daje pierwszą współrzędną punktu przecięcia. Otrzymana wartość zmiennej podstawiamy do jednego z równań, i po rozwiązaniu otrzymujemy wartość drugiej współrzędnej. Punktu przecięcia. Dla rozwiązania przy użyciu wykresu, dla wyznaczenia prostych będących wykresami funkcji podstawiamy kolejno pod zmienne X i Y wartość zero, i dla każdego podstawienia rozwiązujemy równanie. Otrzymujemy współrzędne punktów na linii wykresu dla wartości x równej zero i dla wartości y równej zero. Przez dwa wyznaczone punkty możemy narysować prostą będącą wykresem funkcji. Dla drugiej funkcji postępujemy analogicznie. Niestety, precyzyjne odczytanie wartości współrzędnych dla punktu przecięcia nie jest możliwe, dlatego że punkt przecięcia nie leży na punkcie kratowym. Sposobem jest narysowanie z punktu przecięcia pionowego odcinka do osi X. Długość odcinka to wartość y punktu przecięcia. Odcinek z osią X tworzy kąt prosty, a odcinek z osią X i wykresem jednej z funkcji tworzy kąt prosty. Podobny trójkąt prostokątny tworzy wykres tej funkcji z osią X i osią Y, z tym ze tutaj znamy długości boków trójkąta. Ich stosunek przekładamy na mniejszy trójką utworzony przez narysowanie odcinka pionowego. Zatem przyprostokątne mają odpowiednio długości y i ułamek z y. Analogicznie dla drugiego trójkąta utworzonego przez odcinek pionowy y, oś X i wykres drugiej funkcji, otrzymujemy trójkąt prostokątny o długościach przyprostokątnych y oraz ułamek z y. Suma długości przyprostokątnych trójkątów, które położone są na osi X jest równa długości odcinka pomiędzy punktami przecięcia wykresów obu funkcji z osią X. Zatem, dodajemy obie długości przyprostokątnych położonych na osi X stosując współczynniki długości y, i porównujemy do odległości miedzy punktami przecięcia funkcji z osią X. otrzymujemy równanie z jedną niewiadomą y. Po rozwiązaniu, otrzymaną wartość podstawiamy do jednego z równań funkcji, i otrzymujemy wartość X punktu przecięcia wykresów funkcji.

Polecenie 2

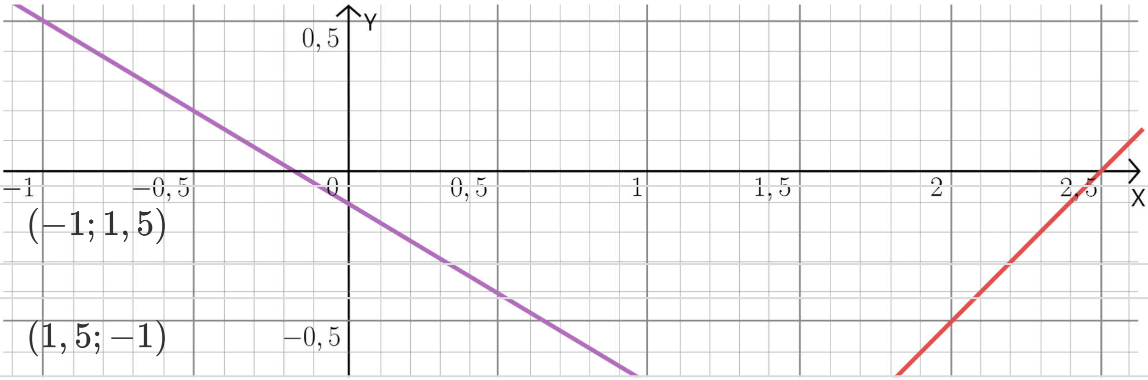
Rozwiąż test.

Współrzędne punktu przecięcia prostych narysowanych poniżej są równe



- $(3, 2)$
- $(2, 3)$

Proste na poniższym rysunku przecinają się w punkcie o współrzędnych



- $(-1; 1,5)$
- $(1,5; -1)$

Proste o równaniach $y = 3x - 1$ i $2x - 2y = 3$ przecinają się w punkcie o współrzędnych

- $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{7}{4}\right)$
- $\left(-\frac{7}{4}, -\frac{1}{4}\right)$

Proste o równaniach $y = 2x - 3$ i $y = -\frac{1}{2}x + 2$ przecinają się w punkcie o współrzędnych

- $(1, 2)$
- $(2, 1)$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Dla danych równań prostych wyznacz współrzędne ich punktu przecięcia. Połącz w pary.

$x = 3$ $y = 2x - 3$	$(0, 3)$
$y = 3$ $y = 2x - 9$	$(3, 3)$
$x = 3$ $y = 2x - 9$	$(3, -3)$
$y = 3$ $y = 2x + 3$	$(6, 3)$

Ćwiczenie 3

Dla danych równań prostych wyznacz współrzędne ich punktu przecięcia. Połącz w pary.

$y = 3x - 1$ $y = x + 3$	$(0, 3)$
$y = 3x - 2$ $y = 2x - 4$	$(2, 5)$
$y = x - 2$ $y = 2x - 5$	$(3, 1)$
$y = x + 3$ $y = 2x + 3$	$(-2, -8)$

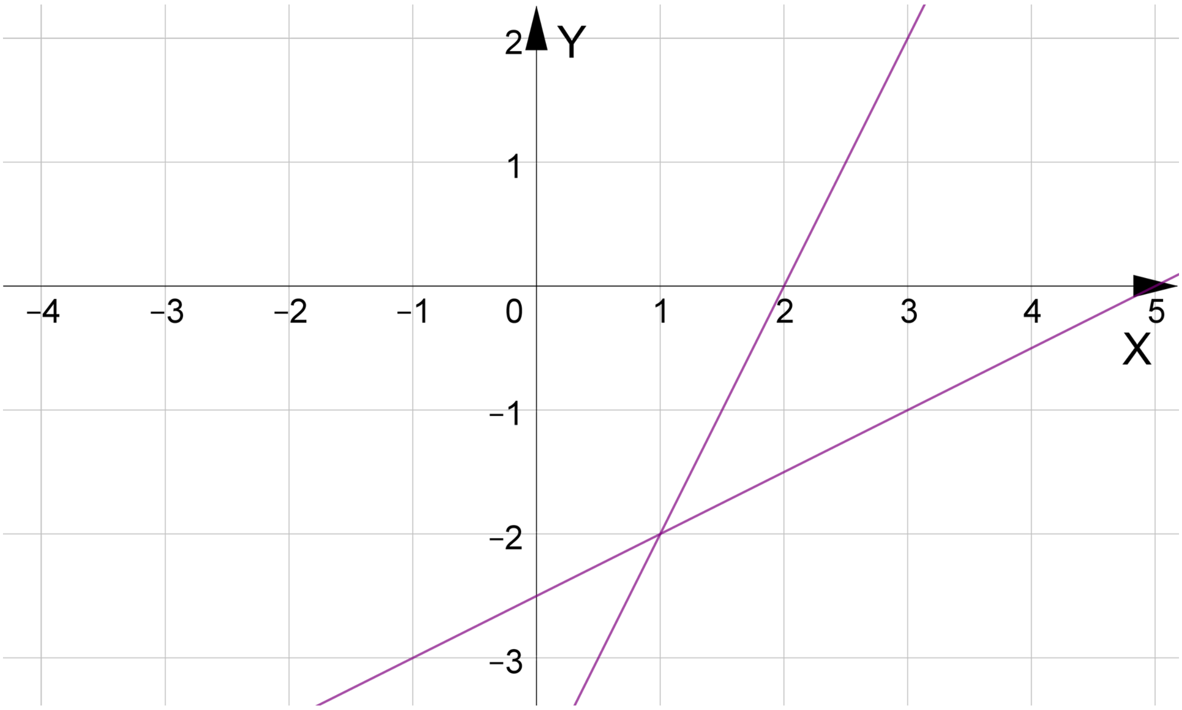
Ćwiczenie 4

Dla danych równań prostych wyznacz współrzędne ich punktu przecięcia. Połącz w pary.

$x + y - 1 = 0$ $2x - y + 3 = 0$	$\left(-\frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$
$x + 2y + 3 = 0$ $2x + y + 3 = 0$	$(-1, -1)$
$3x - y - 2 = 0$ $2x + y - 4 = 0$	$\left(\frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right)$
$x - y - 2 = 0$ $2x + y - 5 = 0$	$\left(\frac{7}{3}, \frac{1}{3}\right)$

Ćwiczenie 5

Jakie wzory opisują proste przedstawione na poniższym rysunku?

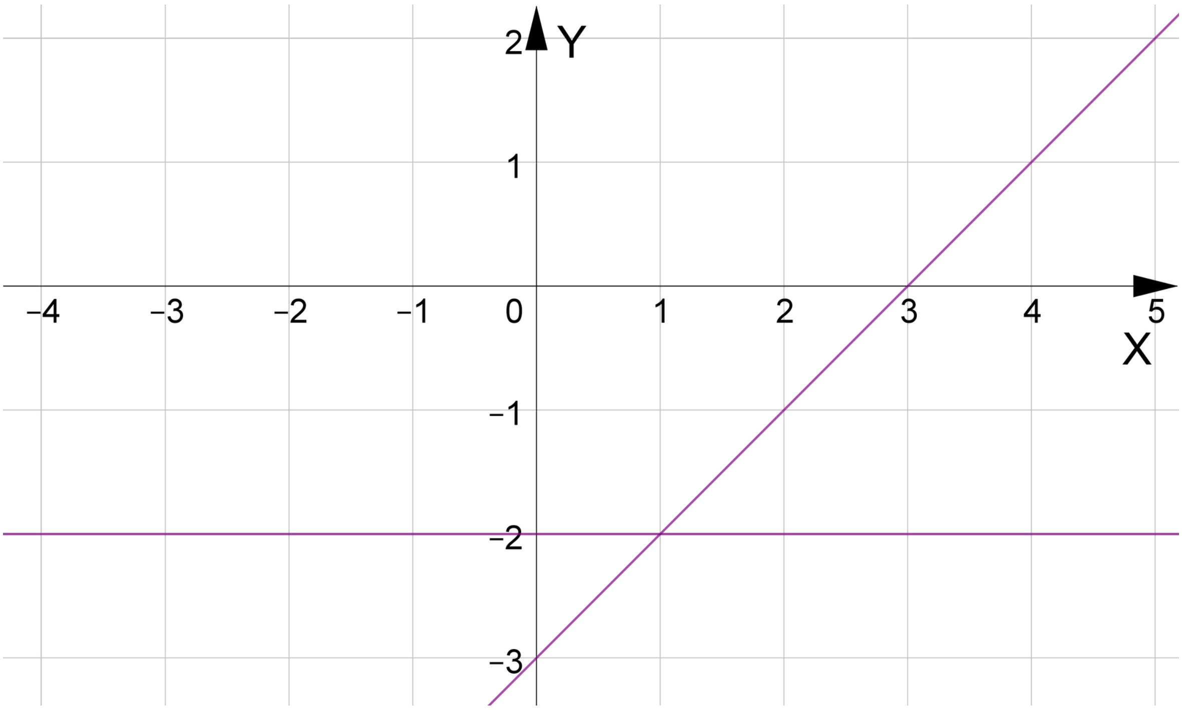


Wskaż prawidłową odpowiedź.

- $3x - y = 5$
  $x + 3y = -5$
- $x - 2y = 5$
  $2x - y = 4$
- $2x - 3y = 8$
  $x - 3y = 7$
- $y = -2$
  $x - y = 3$

Ćwiczenie 6

Jakie wzory opisują proste przedstawione na poniższym rysunku?

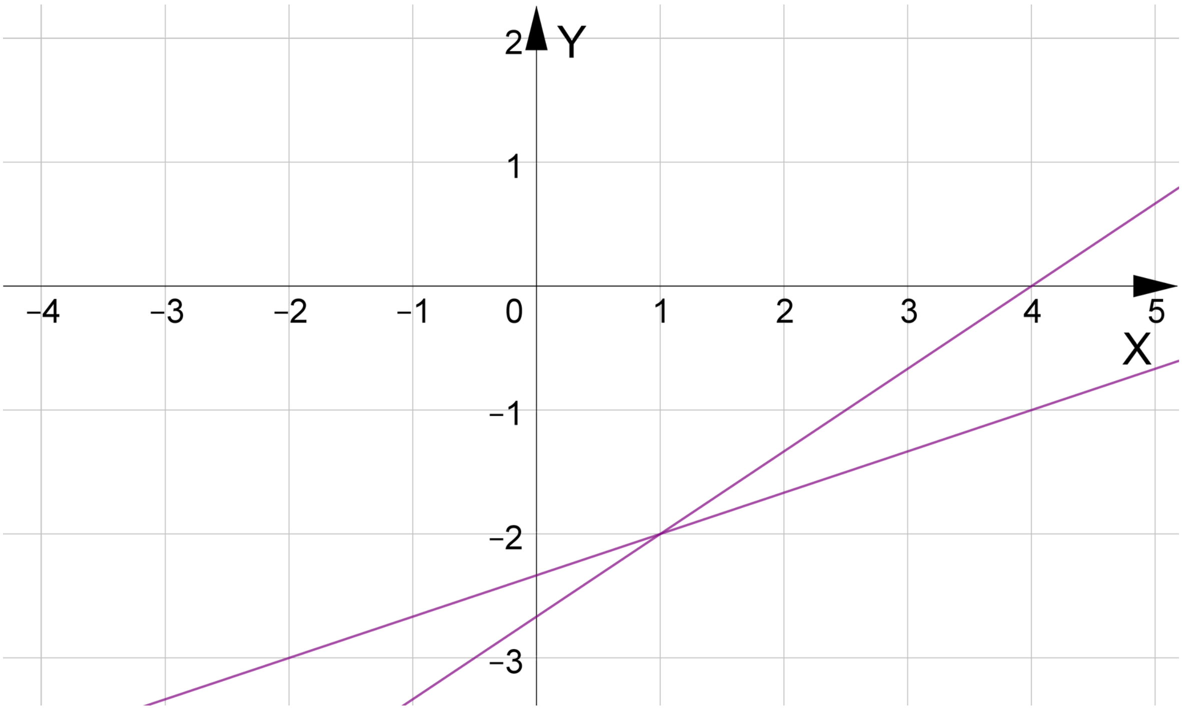


Wskaż prawidłową odpowiedź.

- $y = -2$
  $x - y = 3$
- $2x - 3y = 8$
  $x - 3y = 7$
- $x - 2y = 5$
  $2x - y = 4$
- $3x - y = 5$
  $x + 3y = -5$

Ćwiczenie 7

Jakie wzory opisują proste przedstawione na poniższym rysunku?

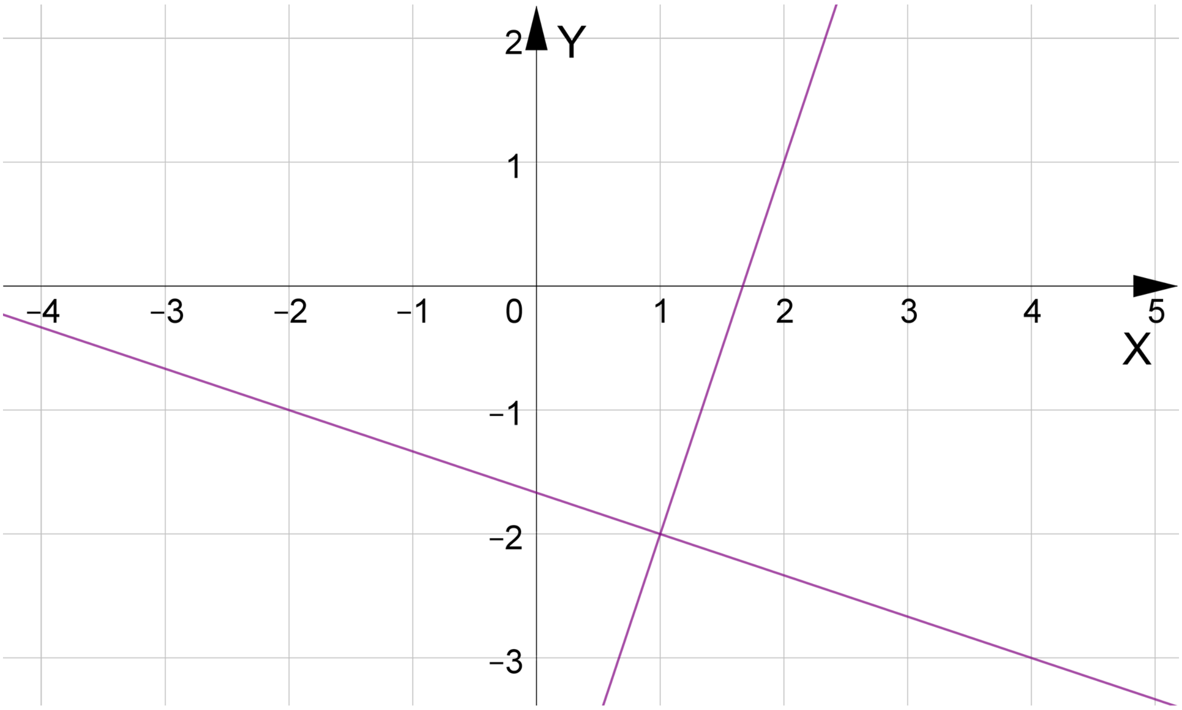


Wskaż prawidłową odpowiedź.

- $3x - y = 5$
  $x + 3y = -5$
- $x - 2y = 5$
  $2x - y = 4$
- $2x - 3y = 8$
  $x - 3y = 7$
- $y = -2$
  $x - y = 3$

Ćwiczenie 8

Jakie wzory opisują proste przedstawione na poniższym rysunku?



Wskaż prawidłową odpowiedź.

- $y = -2$
  $x - y = 3$
- $2x - 3y = 8$
  $x - 3y = 7$
- $x - 2y = 5$
  $2x - y = 4$
- $3x - y = 5$
  $x + 3y = -5$

Ćwiczenie 9

Proste o równaniach $y = x + 1$ oraz $y = 4bx - 2b$ przecinają się w punkcie, który należy do prostej o równaniu $y = -2x + 7$. Wyznacz wartość parametru b.

Ćwiczenie 10

Dane są punkty $A(-4, 0)$ i $M(2, 9)$ oraz prosta k o równaniu $y = -2x + 10$. Wierzchołek B trójkąta ABC to punkt przecięcia prostej k z osią X układu współrzędnych, a wierzchołek C jest punktem przecięcia prostej k z prostą AM. Oblicz pole trójkąta ABC.

Ćwiczenie 11

Dany jest trójkąt ABC o danych wierzchołkach $A(-4, 3)$, $B(4, -1)$ oraz punkcie przecięcia wysokości $P(3, 3)$. Wyznacz współrzędne wierzchołka C.

Dla nauczyciela

Autor: Sebastian Guz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Punkt wspólny prostych

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:
Treści nauczania – wymagania szczegółowe:
IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zakres podstawowy. Uczeń:
2) posługuje się równaniami prostych na płaszczyźnie, w postaci kierunkowej i ogólnej, w tym wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach (takich jak na przykład przechodzenie przez dwa dane punkty, znany współczynnik kierunkowy, równoległość lub prostopadłość do innej prostej, styczność do okręgu);

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

- Odczytasz współrzędne punktu wspólnego prostych.
- Wyznaczysz współrzędne punktu wspólnego prostych, rozwiązując układ równań.
- Rozwiążesz zadania z geometrii analitycznej dotyczące punktów przecięcia prostych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- rozmowa nauczająca w oparciu o treści zawarte w sekcji „Film samouczek” i ćwiczenia interaktywne;

- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj".

Faza wstępna:

1. Nauczyciel prosi wybraną osobę o odczytanie tematu lekcji tj. „Punkt wspólny prostych", a następnie określa cele i kryteria sukcesu.
2. Nauczyciel zadaje uczniom pytanie dotyczące ich aktualnego stanu wiedzy w zakresie poruszanej tematyki. Prosi wybranego ucznia lub uczennicę o zapisywanie propozycji.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel czyta polecenie numer 1 z sekcji „Film samouczek" - „Obejrzyj film i dowiedz się w jaki sposób wyznacza się współrzędne punktu wspólnego dwóch prostych". Uczniowie zapoznają się z treścią zawartą w materiale, w razie wątpliwości zadają pytania nauczycielowi na forum klasy.
2. Prowadzący zapowiada uczniom, że w kolejnym kroku będą rozwiązywać ćwiczenia nr 1 i 2 z sekcji „Sprawdź się". Każdy z uczniów robi to samodzielnie. Po ustalonym czasie wybrani uczniowie przedstawiają rozwiązania. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
3. Kolejne ćwiczenia nr 3-5 uczniowie wykonują w parach. Następnie konsultują swoje rozwiązania z inna parą uczniów i ustalają jedną wersję odpowiedzi, zapisują problemy, które napotkali podczas rozwiązywania ćwiczeń.
4. Uczniowie realizują indywidualnie ćwiczenia 6-8 z sekcji „Sprawdź się". Po ich wykonaniu nauczyciel omawia najlepsze rozwiązania zastosowane przez uczniów.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności.

Praca domowa:

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Punkt wspólny prostych”).

Materiały pomocnicze:

- Proste równoległe, proste prostopadłe

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Film samouczek” można wykorzystać jako materiał służący powtórzeniu materiału w temacie „Punkt wspólny prostych”.