

Leitungen und Filter

Vorlesung 5. Semester D-ITET Fachnr. 227-0112-00

Vorlesung: Colombo Bolognesi

Skript: Werner Bächtold

Professur für Millimeterwellen Elektronik ETH Zürich

2010

Vorwort

In der modernen Elektronik und Kommunikationstechnik sind Signale, deren Wellenlängen vergleichbar mit den Abmessungen der Leiterstrukturen sind, sehr häufig. Wenn wir in elektronischen Systemen Taktraten von mehreren hundert MHz vorfinden, sind die Leitungslängen zwischen verschiedenen Komponenten durchaus von der Grösse der entsprechenden Wellenlänge und es wird dabei noch nicht von "Hochfrequenz" gesprochen. Das Verhalten von Signalen auf "elektrisch langen" Leitungen unterscheidet sich deutlich vom Verhalten in Netzwerken mit diskreten Komponenten mit Ausdehnungen, die sehr viel kleiner sind als die Signalwellenlängen.

Im ersten Teil des vorliegenden Skripts betrachten wir Signale im Frequenz- und im Zeitbereich auf Leitungen. Für eine umfassende Beschreibung des elektrodynamischen Verhaltens von Signalen auf Leitungen müsste eigentlich mit den Maxwellschen Gleichungen begonnen werden. Wir wählen einen etwas einfacheren Einstieg zu den Telegraphengleichungen, die das elektrische Verhalten einer Zweidrahtleitung beschreiben. Diese über 100 Jahre alten aber immer noch aktuellen Telegraphengleichungen bilden die Basis für die Betrachtung von harmonischen Signalen auf Leitungen, die verlustfrei oder verlustbehaftet sein können. Von besonderer Wichtigkeit ist dabei das Konzept der vorwärts- und rückwärts laufenden (Spannungs- und Strom-) Wellen und des Reflexionsfaktors. Für die graphische Darstellung von Reflexionsfaktoren und Impedanzen hat sich das Smithdiagramm bewährt, das ebenfalls eingeführt wird und für viele Aufgaben der Leitungstheorie geeignet ist.

Im Abschnitt über verschiedene Leitungstypen werden die gebräuchlichen Leitungen wie Zweidraht, Koaxial- und Mikrostreifenleitung behandelt. Bei der Betrachtung von Signalen auf Leitungen im Zeitbereich wird für den verlustlosen Fall das Bergerondiagramm eingeführt. Diese Methode erlaubt eine systematische Untersuchung von Leitungen mit beliebigen reellen Abschlüssen und gibt ein "Gefühl" für das Verhalten von Mehrfachreflexionen.

Von den vielen Varianten der Signalausbreitung auf verlustbehafteten Leitungen wird der in der Elektronik und Kommunikationstechnik wichtige Fall der Dispersion der skineffektbehafteten Leitung analysiert. Der letzte Abschnitt der Leitungstheorie gibt eine Einführung zu gekoppelten Leitungen. Ausgehend vom allgemeinen Fall eines beliebigen Systems gekoppelter Leitungen werden die in der Praxis wichtigen Fälle der querhomogenen gekoppelten Leitungen und der symmetrischen Dreifachleitung beschrieben.

Im zweiten Teil dieses Skripts werden, ausgehend von der Theorie der linearen Netzwerke die klassischen analogen Filter eingeführt, mit den Filterapproximationen nach Butterworth, Tschebyscheff und Bessel. Damit können mit minimalem mathematischem Aufwand und mit Hilfe der Tabellen im Anhang die einfachsten Filter dimensioniert werden.

Der Abschluss bildet eine Übersicht über die Elemente von aktiven Filtern, d.h. Filter, die als Komponenten Operationsverstärker aufweisen.

Diese Vorlesung richtet sich an Student/inn/en der Elektronik und Kommunikationstechnik mit Interesse an Hardwareentwicklung. Sie basiert auf dem in den Jahren 1992-98 gehaltenen Kurs und stützt sich teilweise auf eine Vorgängervorlesung von Prof. G.S. Moschytz. Für die mir zur Verfügung gestellten Unterlagen danke ich meinem Kollegen G.S. Moschytz ganz herzlich. Für die genaue Durchsicht, viele Verbesserungen sowie für die Textverarbeitung und die Ausarbeitung der Illustrationen bin ich meinem Mitarbeiter, Dr. Istvan Lamoth, zu grösstem Dank verpflichtet.

Februar 1998, W. Bächtold

Inhalt	Seite
Vorwort	3
Leitungen	8
1. Einleitung	8
2. Das Modell der zylindrischen Leitungen	11
3. Die Differentialgleichungen der elektrischen Leitung: Telegraphengleichungen	13
3.1 Differentialgleichung der verlustlosen Leitung	14
4. Die Telegraphengleichung der verlustbehafteten Leitung	18
4.1 Die Wellengleichung der verlustbehafteten Leitung	18
4.2 Wellenausbreitung auf der verlustbehafteten Leitung	20
4.2.1 Vorwärts- und rückwärtslaufende Wellen	20
4.2.2 Phasengeschwindigkeit v_p und Wellenlänge λ	21
5. Spannung $U(z)$ und Strom $I(z)$ auf der verlustbehafteten Leitung	23
6. Spannungsverlauf entlang der verlustfreien Leitung	29
6.1 Bestimmung des Reflexionsfaktors r aus dem Stehwellenverhältnis U_{\max}/U_{\min}	30
7. Impedanztransformation mittels der verlustfreien und verlustbehafteten Leitung	31
7.1 Die Kettenmatrix der Leitung	31
7.2 Impedanztransformation mit einer Leitung	32
7.3 Impedanztransformation des Reflexionsfaktors mit einer verlustbehafteten Leitung	34
7.4 Impedanztransformation mit einer verlustfreien Leitung	35
7.4.1 Der $\lambda/4$ -Transformator	35
7.4.2 Die $\lambda/2$ -Leitung	36
7.4.3 Transformation von Leerlauf und Kurzschluss	36
8. Das Smith-Diagramm	39
8.1 Eigenschaften des Smith-Diagramms	40
8.2 Anwendungen des Smith-Diagramms	44
8.2.1 Umwandlung zwischen Impedanz und Reflexionsfaktor	44
8.2.2 Bestimmung des Reflexionsfaktors entlang einer Leitung	45
8.2.3 Umwandlung zwischen Admittanz und Reflexionsfaktor	46
8.2.4 Die Lösung von Anpassungsproblemen mit dem Smith-Diagramm	47
9. Leitungstypen	52
9.1 Die Koaxialleitung	52

9.1.1 Berechnung der Leitungskapazität	53
9.1.2 Berechnung der Leitungsinduktivität	54
9.1.3 Verluste in Koaxialleitungen	57
9.2 Die Zweidrahtleitung	64
9.3 Die Mikrostreifenleitung	65
10. Betriebsbereiche von Leitungen mit Ohmschen Verlusten	67
10.1 Niederfrequenter Betrieb	67
10.1.1 Beispiel einer Leitung im niederfrequenten Betrieb: dünnes Koaxialkabel	68
10.1.2 Beispiel einer Leitung im niederfrequenten Betrieb: Mikrostreifenleitung einer integrierten Schaltung	68
10.2 Hochfrequenter Betrieb mit $R'(f) = \text{konstant}$	71
10.3 Hochfrequenter Betrieb mit ausgeprägtem Skineffekt	71
10.3.1 Fortsetzung des Beispiels nach Abschnitt 10.1.1: dünnes Koaxialkabel	73
11. Signale auf Leitungen im Zeitbereich	74
11.1 Signale auf der verlust- und dispersionsfreien Leitung mit resistiven Abschlüssen	74
11.1.1. Spannung und Strom auf der verlustfreien Leitung im Zeitbereich	74
11.1.2. Schrittantwort einer einseitig leerlaufenden verlustfreien Leitung mit resistiver Quelle	75
11.1.3 Das Bergeron-Verfahren	80
11.2 Die verlustfreie Leitung mit eingangsseitiger Anpassung und reaktiv-resistiver Last	85
11.2.1 Analyse der verlustfreien Leitung mit reaktiv-resistiver Last	86
11.3 Impulsverzerrung auf der Skineffekt-behafteten Leitung	89
11.4 Phasen- und Gruppenlaufzeit, Dispersion	93
11.4.1 Phasengeschwindigkeit und Gruppengeschwindigkeit	93
11.4.2 Dispersion von schmalbandigen Signalen: Dispersion des Gaußschen Impulses	96
12. Mehrfachleitungen	100
12.1 Die Analyse der allgemeinen Mehrfachleitung	102
12.2 Die querhomogene Mehrfachleitung mit idealen Leitern	109
12.3 Die einfachste querinhomogene Mehrfachleitung: die symmetrische Dreifachleitung	112
12.3.1 Interpretation der Eigenvektoren der symmetrischen Dreifachleitung: Gleichtakt- und Gegentaktwelle	113
12.3.2 Die symmetrische Dreifachleitung mit Beschaltung	115
12.3.3 Die symmetrische Dreifachleitung mit symmetrischer Beschaltung	118
12.3.4 Ein Fall aus der Praxis der Elektronik: Kopplung in einer kurzen symmetrischen TEM-Dreifachleitung mit schwacher Kopplung	124
Literatur für Leitungen	128

Filter	129
13. Einführung zur Filtersynthese	129
13.1 Die wichtigsten Resultate der Theorie linearer Netzwerke mit diskreten Elementen	131
13.1.1 Die Übertragungsfunktion (UTF)	131
13.1.2 Der Frequenzgang der Übertragungsfunktion	134
13.1.2 Die Betriebsübertragungsfunktion	138
14. Die Filtersynthese im Frequenzbereich: normierte Tiefpässe	140
14.1 Die Tiefpassapproximation nach Butterworth	141
14.1.1 Bestimmung der Pollage von $\underline{T}(\underline{S})$ der Butterworth-Approximation:	143
14.1.2 Bestimmung des Filtergrades n der Butterworth-Approximation	144
14.2 Die Tiefpassapproximation nach Tschebyscheff	147
14.2.1 Bestimmung der Pollage von $T(S)$ der Tschebyscheff-Approximation:	151
14.2.2 Bestimmung des Filtergrades n der Tschebyscheff-Approximation	153
14.3 Die Tiefpassapproximation nach Bessel	154
14.3.1 Vergleich der Pollagen von $T(S)$ der Bessel-, Butterworth- und Tschebyscheff-Approximationen	157
14.4 Übertragungsfunktion der verschiedenen Tiefpass-Filtertypen im Zeitbereich	159
15. Transformation der Filtertypen Hochpass, Bandpass, Bandsperre zum normierten Tiefpass	162
15.1 Die Hochpass-Tiefpass-Transformation	162
15.2 Die Bandpass-Tiefpass-Transformation	164
15.3 Die Bandsperre-Tiefpass-Transformation	166
16. Der Entwurf von LC-Filtern mit Filtertabellen	168
16.1 Die Bestimmung eines verlustfreien Filternetzwerkes ausgehend von der Spezifikation des Eingangsreflexionsfaktors	168
16.1.1 Beispiel: Synthesierung eines Butterworth-Tiefpasses 2. Ordnung	171
16.2 Entwurf von LC-Filtern mit Filtertabellen	172
16.2.1 Beispiel: Entwurf eines Tschebyscheff-Bandpasses	176
17. Aktive Filter	179
17.1 Das Kaskadenfilter	179
17.1.1 Sektionen 1. Ordnung	180
17.1.2 Die Sallen + Key-Schaltung: eine TP-Sektion 2. Ordnung	183
17.1.3 Die Delyannis-Friend-Schaltung: eine Bandpass-Schaltung 2. Ordnung	185
17.1.4 Realisierung einer UTF 2. Ordnung mit drei Operationsverstärkern	186
Literatur für Filtertheorie	188

Anhang	189
1. Normierte Tiefpassübertragungsfunktionen	189
A. Butterworth - Filter	189
B. Tschebyscheff - Filter	195
C. Bessel - Filter	207
2. Herleitung des Skin-Effektes	211
3. Streuparameterdarstellung von linearen Zwei- und Mehrtoren	214
Literatur für Filtertabellen	220
Sachwortverzeichnis	221

Leitungen

1. Einleitung

Üblicherweise wird unter dem Begriff einer elektrischen Leitung eine Anordnung von zwei parallelen, zylindrischen und metallischen Leitern verstanden, die von Luft oder einem festen Isolator umgeben sind und die Aufgabe haben, ein elektrisches Signal oder elektrische Energie von einer Quelle zu einer Senke zu führen. Ganz allgemein hat eine Leitung die Aufgabe, eine elektromagnetische Welle möglichst ohne Verluste zu führen. Um diese Aufgabe zu erfüllen, muss eine Leitung nicht notwendigerweise dem beschriebenen Aufbau entsprechen, es ist beispielsweise auch bekannt, dass sich elektromagnetische Signale leicht und mit wenig Verlusten mit einer Glasfaser, einer rein dielektrischen Struktur ohne Metalle übertragen lassen.

Figur 1.1 zeigt eine Zusammenstellung von verschiedenen technisch bedeutenden Leitungen. Allen diesen Strukturen ist gemeinsam, dass sie aus Leitern und Dielektrika aufgebaut und zylindrisch sind, d.h. dass sie in der Transversalebene eine von der z-Koordinate unabhängige Geometrie aufweisen.

Die Leitungstheorie beschreibt die elektrischen Eigenschaften von Leitungen aller Art und liefert die Grundlagen zur Beschreibung des Verhaltens von Signalen im Frequenzbereich und im Zeitbereich. Es wird gezeigt, dass diese Eigenschaften nicht mit einfachen Ersatzschaltungen, bestehend aus diskreten linearen Elementen wie Widerstände, Induktivitäten, Kapazitäten und Quellen nachgebildet werden können. Zwar sind die hier behandelten Leitungen linear, sie müssen aber, da ihre Längsdimension vergleichbar oder grösser sein kann als die Wellenlängen der übertragenen Signale, als verteilte Elemente betrachtet werden.

Da die Leitungstheorie im wesentlichen die eindimensionale Ausbreitung von Wellen beschreibt, bildet sie auch einen Grundstock zum Verständnis ähnlicher Vorgänge in der Physik, wie das Verhalten von

- ebenen elektromagnetische Wellen im Raum
- akustischen Wellen als Volumenwellen oder Oberflächenwellen
- Materiewellen u.a.

Leitungen müssen immer dann als verteilte Strukturen dargestellt werden, wenn die betrachteten Signalzeiten oder -perioden vergleichbar werden mit den Leitungslaufzeiten. Als grobe Regel gilt, dass eine Leitung als verteilte Struktur behandelt werden muss, wenn deren Länge grösser als 1/10 der Wellenlänge des betrachteten Signals ist. Dazu drei Beispiele:

1. Eine Standard-CMOS-Logik zeigt typische Signalanstiegszeiten $t_r \approx 2 \text{ ns}$. In dieser Zeit legt ein Signal einen Weg von 60 cm zurück, wenn die Signalgeschwindigkeit der Lichtgeschwindigkeit in Vakuum $c_0 = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ entspricht. Auf typischen Leiterplatten und auf Halbleiterchips wird die Signalgeschwindigkeit durch die Dielektrizität des Materials auf 0.3 c_0 bis 0.7 c_0 reduziert. Auf einem Halbleiterchip mit maximalen Leiterlängen von ca. 1 cm kann damit der Leitungscharakter der elektrischen Verbindungen vernachlässigt werden. Auf einer Karte mit maximalen Leitungslängen im Bereich ca. 20 cm wird das Verhalten des Signals durch die verteilte Leitungsstruktur deutlich bestimmt und auf dem Systembus, der in einem 19 Zoll Gehäuse eine Länge von 50 cm annehmen kann, ist die Beeinflussung durch die Leitung sehr ausgeprägt.

Typ	Form	Anwendung	Signalgrößen	Frequenzbereich
Zwei- und Mehrleitersysteme	Koaxial	Energieübertragung, Signalübertragung und Schaltelement		
	Parallel-draht	Energieübertragung und Signalübertragung	definierte Ströme und Spannungen	für verlustlose Leiter: $0 \leq f \leq \infty$
	Streifen	Signalübertragung und Schaltelement		praktische obere Frequenzgrenze: - Dämpfung - Störwellen
	Drehstrom	Energieübertragung		
Hohlleiter	Rechteck	Signalübertragung und Schaltelement	nicht definierte Ströme und Spannungen, quasioptische Ausbreitung	theoretisch $f > \frac{c}{2a \sqrt{\mu_r \epsilon_r}}$ $\lambda < 2a$ $(\epsilon_r = 1, \mu_r = 1)$
dielektrische Wellenleiter	Streifen	optisches Verbindungs- und Schaltelement	nicht definierte Ströme und Spannungen, quasioptische Ausbreitung	theoretisch $0 \leq f \leq \infty$
	Glasfaser	optische Signalübertragung	(Totalreflexion an den Trennschichten)	praktische Einschränkung: Abstrahlung und Materialverluste

Figur 1.1 Beispiele von Leitungen: Zwei- und Mehrleitersysteme, metallischer Hohlleiter und dielektrischer Wellenleiter.

2. In Kabelfernsehsystemen werden Signale mit Trägerfrequenzen bis zu ca. 500 MHz übertragen. Bei dieser Frequenz beträgt die Wellenlänge $\lambda = 60 \text{ cm}$ im Vakuum und ca. 40 cm in typischen in der CATV-Technik (community antenna TV system: Gemeinschaftsantennen-Anlagen) verwendeten Kabeln. Jedes Kabelstück mit einer Länge 4 cm wird sich damit als verteiltes Leitungselement bemerkbar machen.

3. Bei einer Energieübertragungsleitung mit einer Netzfrequenz von 50 Hz beträgt die Wellenlänge $\lambda = 6000 \text{ km}$. Das elektrische Verhalten einer Hochspannungsleitung mit einer Länge von 600 km würde damit bereits durch die verteilten Leitungseigenschaften bestimmt. Beim Auftreten von Transienten, wie beim Zu- oder Abschalten der Betriebsspannung, wird der Leitungscharakter sehr ausgeprägt.

In der vorliegenden Einführung in die Leitungstheorie beschränken wir uns auf die Behandlung von Leitungen die aus zwei oder mehreren metallischen Leitern aufgebaut sind, entsprechend den Beispielen überschrieben mit "Zwei- und Mehrleiterysteme" in Figur 1.1. Auf solchen Leitungen werden sogenannte TEM-Wellen geführt: TEM-Wellen (transverse electromagnetic waves) zeigen nur elektrische und magnetische Feldstärken in der Transversalebene, d.h. in der zur Ausbreitungsrichtung normalen Ebene. Obwohl die reine TEM-Welle theoretisch auch von Leitungen mit sehr grossen Abmessungen in der transversalen Geometrie geführt wird, machen wir hier die Einschränkung, dass die Lateraldimensionen immer wesentlich kleiner als die betrachteten Signalwellenlängen sein sollen, wie dies der technischen Realisierung der meisten Zwei- und Mehrleiterysteme entspricht. Ein Verzicht auf diese Einschränkung würde bedeuten, dass noch andere Arten von geführten Wellen auf den Leitungen auftreten könnten und dass zudem die Leitung als Antenne wirken könnte, d.h. dass elektromagnetische Abstrahlung auftreten könnte. Die Theorie dieses allgemeinen Falles von zylindrischen Leitungen ist wesentlich aufwendiger und würde den Rahmen dieser Einführung sprengen.

Wie in den obigen drei Beispielen gezeigt wurde, liegt die Signalgeschwindigkeit v_g auf Leitungen im Bereich: $0.3 c_0 < v_g < c_0$

Es ist dabei nützlich, gewisse "handliche" Zahlenwerte auswendig zu wissen:

Frequenz	Periode	Wellenlänge im Vakuum
1 MHz	1 μs	300 m
10 MHz	100 ns	30 m
100 MHz	10 ns	3 m
1 GHz	1 ns	30 cm

Die folgenden Konstanten sind ständige Begleiter in der Leitungstheorie:

$$\text{Dielektrizitätskonstante im Vakuum } \epsilon_0 = 8.85418 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm} \approx 8.85 \text{ pF/m}$$

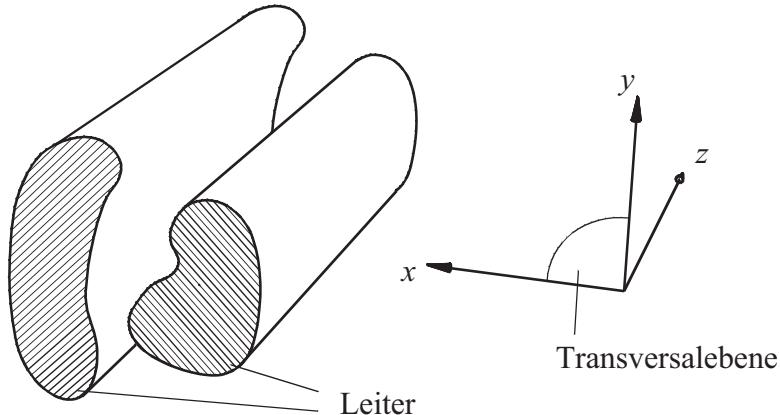
$$\text{Permabilitätskonstante im Vakuum } \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/Am} \approx 1.26 \mu\text{H/m},$$

$$\text{Lichtgeschwindigkeit im Vakuum } c_0 = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0} = 2.99792 \cdot 10^8 \text{ m/s} \approx 30 \text{ cm/ns}$$

2. Das Modell der zylindrischen Leitungen

Eine allgemeine Behandlung von elektromagnetischen Wellen auf zylindrischen Leitungsstrukturen verlangt den Einsatz der Theorie des elektromagnetischen Feldes, beginnend mit den Maxwell'schen Gleichungen. In dieser Einführung verzichten wir auf diese rigurose Behandlung und nehmen eine einfachere aber plausible und anschauliche Betrachtung zu Hilfe, in der zurückgegriffen wird auf die bekannten Gesetze der Elektrostatik und Magnetostatik.

Figur 2.1 zeigt, schematisch dargestellt, eine zylindrische Zweidrahtleitung.



Figur 2.1 Allgemeine geometrische Form einer Zweidrahtleitung

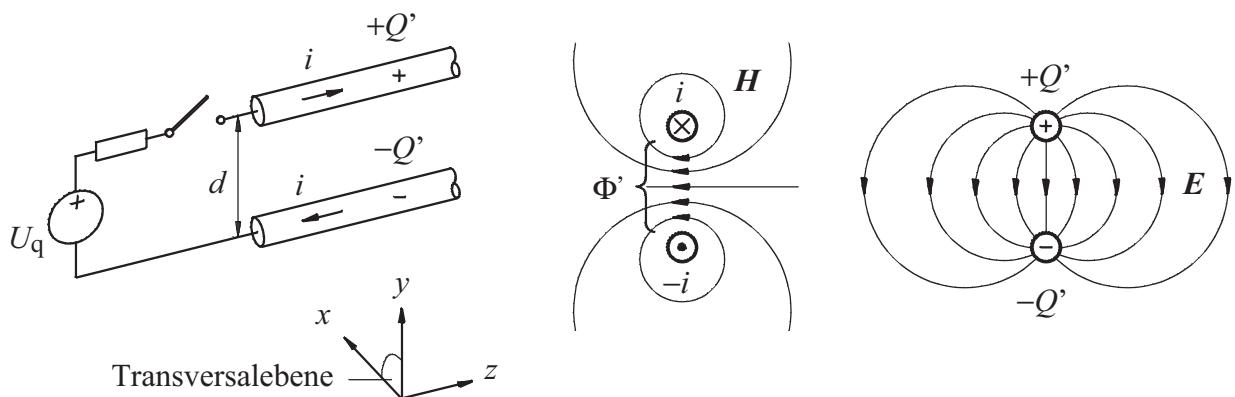
Wir setzen voraus, dass der Abstand d zwischen den Leitern wesentlich kleiner ist als die Wellenlänge λ des auf der Leitung auftretenden Signals im Dielektrikum der Leitung:

$$d \ll \lambda = \frac{c_0}{f\sqrt{\epsilon_r}} \quad (2.1)$$

c_0 : Lichtgeschwindigkeit im Vakuum f : Frequenz

ϵ_r : relative Dielektrizitätskonstante

Wird auf eine Leitung gemäss Figur 2.1 eine Spannungsquelle U_q aufgeschaltet, dann wird sich auf den beiden Leitern der Leitung sofort ein Strom i einstellen. Ohne zu wissen, wie schnell sich dieser Stromschritt auf der Leitung fortbewegt, können wir feststellen, dass dieser Strom ein die Leiter umgebendes magnetisches Feld erzeugen wird, wie dies in Figur 2.2 dargestellt ist. Der Strom i ist damit mit einem magnetischen Flussbelag Φ' , d.h. einen auf die Leitungslänge bezogene magnetischen Fluss mit der Dimension Vs/m verbunden.



Figur 2.2 Symmetrische Zweidrahtleitung mit Leitungssymbol und Feldlinienverteilung der magnetischen und elektrischen Feldstärke H und E in der Transversalebene.

Über einem infinitesimalen kurzen dz der Leitung wird der magnetische Fluss $\Phi' dz$ auftreten. Somit kann ein *Induktivitätsbelag* L' , Leitungsinduktivität pro Längeneinheit der Leitung, definiert werden:

$$\Phi' dz = i L' dz \quad (2.2)$$

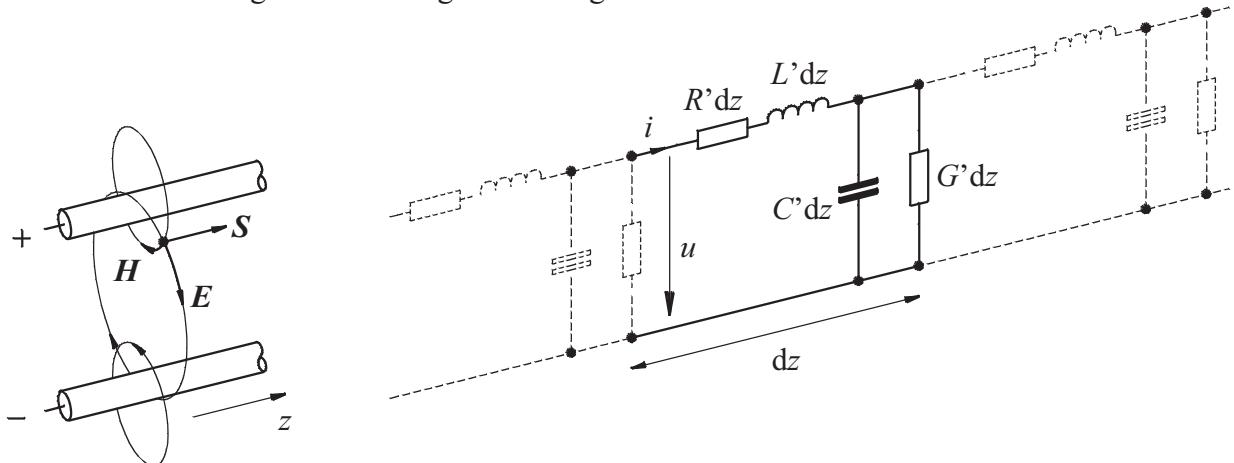
In gleicher Weise wird eine über den Leitern auftretende Spannung u eine Oberflächenladung auf den Leitern verursachen. Dieser Ladungsbelag Q' , Ladung pro Längeneinheit der Leitung ist mit der Spannung u über den *Kapazitätsbelag* C' , Leitungskapazität pro Längeneinheit der Leitung, verbunden:

$$Q' dz = u C' dz \quad (2.3)$$

In Figur 2.3 ist die im Moment noch verlustfrei angenommene Leitung mit einer elektrischen Ersatzschaltung mit den reaktiven Elementen L' und C' gezeigt: über einer infinitesimalen Länge dz der Leitung erscheint also eine Längsinduktivität $L' dz$ und eine Querkapazität $C' dz$. Die Induktivitäts- und Kapazitätsbeläge L' und C' sind primäre Leitungskonstanten und sind typischerweise von der Größenordnung von

$$L' = 1 \mu\text{H/m} \quad C' = 10 \text{ pF/m} .$$

Induktivitäts- und Kapazitätsbeläge können mit üblichen L- und C-Messgeräten gemessen werden. Sie lassen sich für einfache Leitungsgeometrien analytisch bestimmen. Bei komplizierteren Strukturen wie Streifenleiter u.a. müssen numerische Methoden zur Berechnung von L' und C' herangezogen werden. In Kapitel 9 werden die primären Leitungskonstanten von gängigen Leitungsstrukturen untersucht. Eine reale Leitung mit metallischen, verlustbehafteten Leitern und einem verlustbehafteten Dielektrikum zeigt einen gewissen *Widerstandsbelag* R' , der einen Längsspannungsabfall bewirkt sowie einen *Leitwertbelag* G' parallel zu C' , der den Verluststrom im Dielektrikum modelliert. Das vollständige Ersatzschaltbild einer Leitung der infinitesimalen Länge dz ist in Figur 2.3 dargestellt.

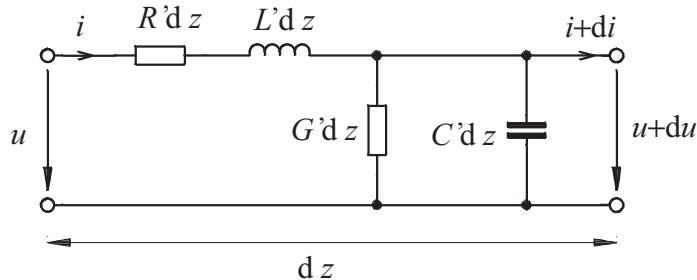


Figur 2.3 Ersatzschaltbild der verlustbehafteten Leitung.

Dabei ist zu beachten, dass der Widerstandsbelag R' den metallischen Widerstand beider Leiter der Leitung beinhaltet. Im allgemeinen sind die reaktiven Beläge L' und C' sehr wenig frequenzabhängig. Dagegen sind die Verlustelemente R' und G' meist stark frequenzabhängig. In Praxis zeigt es sich, dass der von R' verursachte Verlust meist über den Verlust in G' dominiert. Daher wird der Leitwertbelag G' häufig vernachlässigt. Wir betrachten vorerst alle primären Leitungskonstanten L' , C' , R' und G' als frequenzunabhängig.

3. Die Differentialgleichungen der elektrischen Leitung: Telegraphengleichungen

Figur 3.1 zeigt nochmals das Ersatzschaltbild der verlustbehafteten Leitung infinitesimaler Länge dz , diesmal mit der zugehörigen Spannung u und dem Strom i am Eingang und der Spannung $u+du$ und dem Strom $i+di$ am Ausgang.



Figur 3.1 Ersatzbild der verlustbehafteten Leitung infinitesimaler Länge.

Spannung u und Strom i sind Funktionen des Ortes z entlang der Leitung und der Zeit t :

$$u(z, t), \quad i(z, t)$$

Spannungs- und Stromänderungen in der Leitung lassen sich durch die partiellen Ableitungen dieser Funktionen ausdrücken:

$$du = \frac{\partial u}{\partial z} dz \quad di = \frac{\partial i}{\partial z} dz \quad (3.1)$$

Die Kirchhoffschen Gesetze liefern folgende Beziehungen:

$$u = \underbrace{i R' dz + \frac{\partial i}{\partial t} L' dz}_{\text{Längsspannungsabfall über } R' dz \text{ und } L' dz} + u + \frac{\partial u}{\partial z} dz \quad (3.2)$$

Längsspannungsabfall über $R' dz$ und $L' dz$

$$i = \underbrace{u G' dz + \frac{\partial u}{\partial t} C' dz}_{\text{Querstrom durch } G' dz \text{ und } C' dz} + i + \frac{\partial i}{\partial z} dz \quad (3.3)$$

Querstrom durch $G' dz$ und $C' dz$

Mit Subtraktion von u bzw. i aus (3.2) und (3.3) erhalten wir die beiden Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = - \left(R' + L' \frac{\partial}{\partial t} \right) i \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial i}{\partial z} = - \left(G' + C' \frac{\partial}{\partial t} \right) u \quad (3.5)$$

Die Gleichungen (3.4) und (3.5) bilden ein System von partiellen linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Zu Lösung und Diskussion dieses Systems gehen wir wie folgt vor:

In einem ersten Schritt, Kapitel 3.1, vereinfachen wir das Problem, indem wir die Verlust-

terme R' und G' vernachlässigen. In einem zweiten Schritt, Kapitel 4 werden die vollständigen Gleichungen (3.4) und (3.5) gelöst und interpretiert.

3.1 Differentialgleichung der verlustlosen Leitung

Mit der Vernachlässigung der Verlustterme R' und G' vereinfachen sich die Gleichungen (3.4) und (3.5) zu

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -L' \frac{\partial i}{\partial t} \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial i}{\partial z} = -C' \frac{\partial u}{\partial t} \quad (3.7)$$

Die so erhaltene Gleichungen (3.6) und (3.7) sind die Telegraphengleichungen der verlustlosen Leitung. Sie wurden erstmals von J. C. Maxwell um 1860 formuliert. Sie beinhalten beide Strom und Spannung. Indem (3.6) nach z und (3.7) nach t abgeleitet werden, kann der Strom i eliminiert werden:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = L'C' \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.8)$$

In gleicher Weise, durch Ableiten von (3.6) nach t und von (3.7) nach z kann die Spannung u eliminiert werden:

$$\frac{\partial^2 i}{\partial z^2} = L'C' \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \quad (3.9)$$

Die beiden gefundenen Gleichungen (3.8) und (3.9) für die Spannung u und den Strom i sind identisch und entsprechen der aus der Physik bekannten eindimensionalen Wellengleichung. Als homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung haben diese Wellengleichungen Lösungen, die sich aus der Summe von zwei Partiallösungen, die wir mit Index a und b bezeichnen, bestehen.

Jede zweimal differenzierbare Funktion der Form

$$u(t, z) = u_a(t - z/v) + u_b(t + z/v) \quad \text{bzw.} \quad (3.10)$$

$$i(t, z) = i_a(t - z/v) - i_b(t + z/v) \quad (3.11)$$

befriedigt (3.8) bzw. (3.9) für $\frac{1}{v^2} = L'C'$ oder

$$v = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} \quad (3.12)$$

Durch Einsetzen von (3.10), (3.11) und (3.12) in (3.6) und (3.7) folgt zudem für die Partiallösungen:

$$\frac{d u_a}{d i_a} = \frac{d u_b}{d i_b} = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = L' v = \frac{1}{C' v} = \text{konstant} \quad (3.13)$$

Die Integration von (3.13) nach t liefert

$$u_a(t, z) = \sqrt{\frac{L'}{C'}} i_a(t, z) + K_a \quad (3.14)$$

$$u_b(t, z) = \sqrt{\frac{L'}{C'}} i_b(t, z) + K_b \quad (3.15)$$

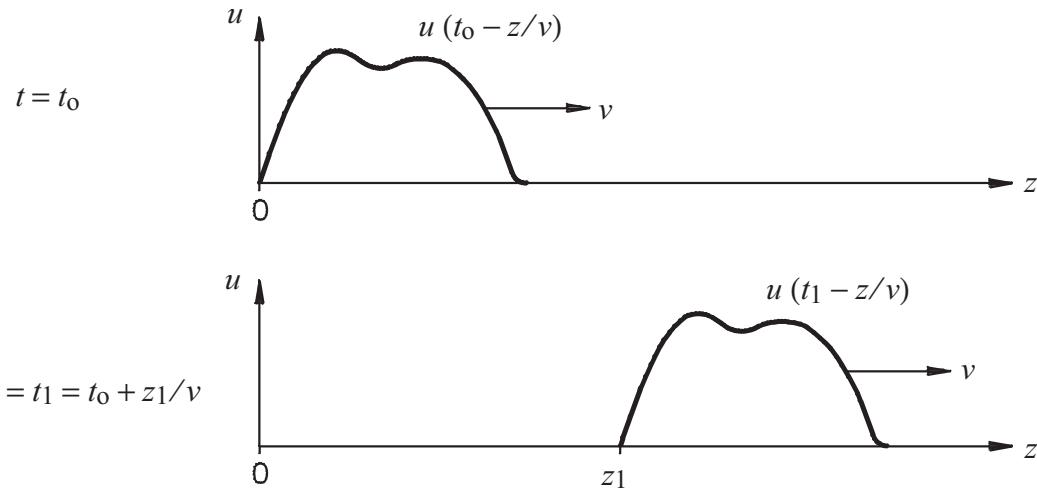
Wenn wir uns nur für den dynamischen Teil von $u(t, z)$ interessieren, entfallen die Integrationskonstanten K_a und K_b :

$$\frac{u_a(t, z)}{i_a(t, z)} = \frac{u_b(t, z)}{i_b(t, z)} = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = Z_w \quad (3.16)$$

Dabei ist Z_w die *Wellenimpedanz der Leitung*.

Interpretation der Resultate der Gleichungen (3.10) bis (3.16):

a) Die in (3.10) und (3.11) gefundenen Partiallösungen u_a , u_b , i_a und i_b sind beliebige Spannung- und Stromverläufe der Form: $u(t, z) = u(t \pm z/v)$ bzw. $i(t, z) = i(t \pm z/v)$, die sich auf der Leitung für das negative Vorzeichen von z/v in positiver z -Richtung und für das positive Vorzeichen von z/v in negativer z -Richtung bewegen. Daher werden diese Partiallösungen als vorwärts bzw. rückwärts laufende Wellen bezeichnet. Wie Figur 3.2 veranschaulicht, ist die Ausbreitung der Wellen auf der verlustfreien Leitung völlig dispersionsfrei, d.h. verzerrungsfrei.



Figur 3.2 Ausbreitung eines Signals $u(t)$ auf der verlustfreien Leitung.

In einem homogenen Medium gilt für die Ausbreitungsgeschwindigkeit v

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r}} = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} \quad (3.17)$$

mit ϵ : Dielektrizitätskonstante $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$

ϵ_r : relative Dielektrizitätskonstante

μ : Permeabilitätskonstante $\mu = \mu_0 \mu_r$

μ_r : relative Permeabilitätskonstante

Damit ist für Leitungen mit Vakuum oder Luft als Dielektrikum die Ausbreitungsgeschwindigkeit v gleich der Lichtgeschwindigkeit c_0 . In einem Dielektrikum mit relativer Dielektrizitätskonstante ϵ_r und relativer Permeabilitätskonstante $\mu_r = 1$ ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit $v = c_0 / \sqrt{\epsilon_r}$.

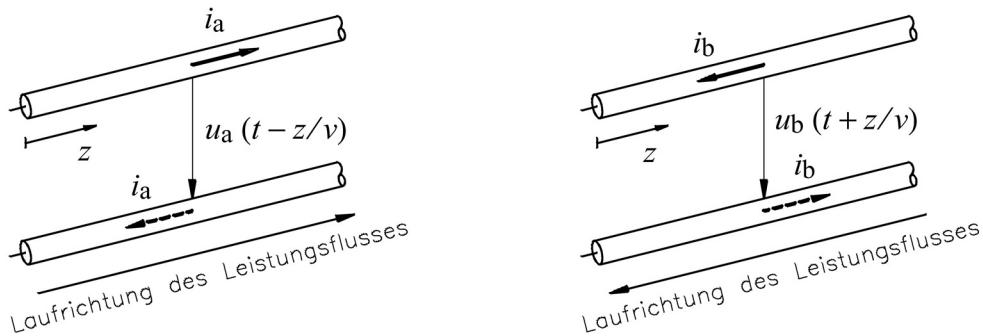
b) Vorwärts bzw. rückwärts laufende Spannungen $u_a(t - z/v)$ und $u_b(t + z/v)$ sind über die Wellenimpedanz Z_w mit den vorwärts und rückwärts laufenden Strömen $i_a(t - z/v)$ und $i_b(t + z/v)$ verknüpft.

$$i_a = u_a / Z_w \quad i_b = u_b / Z_w \quad (3.18)$$

Dies bedeutet, dass die Spannungen und Ströme so gerichtet sind, dass *ein Leistungstransport in der Laufrichtung* stattfindet. Nach Betrag gilt immer:

$$\frac{u_a(t, z)}{i_a(t, z)} = \frac{u_b(t, z)}{i_b(t, z)} = Z_w = \sqrt{\frac{L'}{C'}} \quad (3.19)$$

Für die verlustfreie Leitung ist die Wellenimpedanz Z_w reell. Die reelle Wellenimpedanz Z_w zeigt, dass u_a und i_a bzw. u_b und i_b in Phase sind und damit ein reiner Wirkleistungstransport stattfindet. Diese Eigenschaft der verlustfreien Leitung wird in Figur 3.3 veranschaulicht.

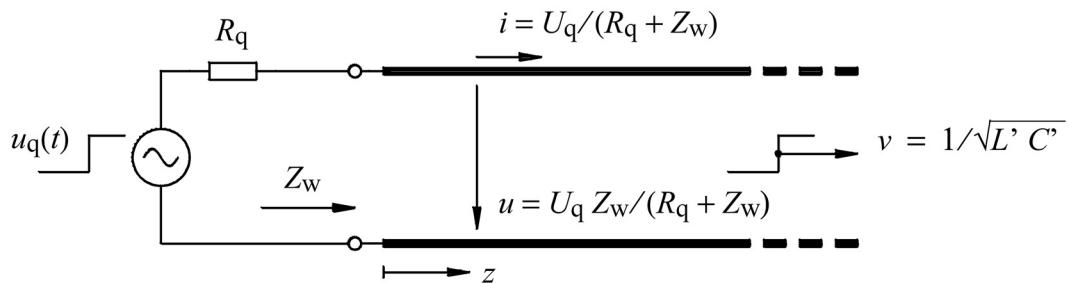


Figur 3.3 Richtung von Strom und Spannung in einer vorwärts- und einer rückwärtslaufenden Welle

Die Bedeutung des reellen Wellenwiderstandes soll an zwei Beispielen erläutert werden:

Beispiel 1

Eine sehr lange Leitung nach Figur 3.4 wird durch eine Spannungsquelle mit einem Spannungsschritt gespeist.

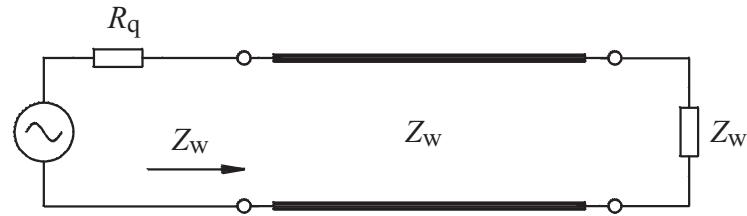


Figur 3.4 Lange Leitung mit der reellen Wellenimpedanz Z_w , die mit einem Spannungsschritt gespeist wird.

Solange auf der Leitung nur eine vorwärtslaufende Welle existiert, "sieht" die Quelle in der Leitung die reelle Wellenimpedanz Z_w , d.h. auf der Leitung erscheint ein Spannungsschritt der Höhe $U_q Z_w / (R_q + Z_w)$ der sich mit der Geschwindigkeit $v = 1/\sqrt{L' C'}$ in z-Richtung bewegt.

Beispiel 2

Wird eine Leitung nach Figur 3.5 mit der Wellenimpedanz Z_w abgeschlossen, dann kann auf der Leitung keine rückwärtslaufende Welle auftreten. Die Leitung ist reflexionsfrei abgeschlossen und zeigt die Eingangsimpedanz Z_w .



Figur 3.5 Eine mit der Wellenimpedanz Z_w abgeschlossene Leitung zeigt die Eingangsimpedanz Z_w .

Nach dieser kurzen Betrachtung der verlustfreien Leitung wenden wir uns dem allgemeineren Fall der verlustbehafteten Leitung zu.

4. Die Telegraphengleichung der verlustbehafteten Leitung

4.1 Die Wellengleichung der verlustbehafteten Leitung

Die Differentialgleichungen (3.4) und (3.5) der verlustbehafteten Leitung nach Kapitel 3 lauteten:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = - \left(R' + L' \frac{\partial}{\partial t} \right) i \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial i}{\partial z} = - \left(G' + C' \frac{\partial}{\partial t} \right) u \quad (4.2)$$

Aus diesem Gleichungssystem wird in einem ersten Schritt die Variable i eliminiert, indem (4.1) nach z abgeleitet und (4.2) eingesetzt wird, sowie (4.2) nach t abgeleitet wird. Es resultiert eine partielle lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = R' G' u + (R' C' + L' G') \frac{\partial u}{\partial t} + L' C' \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (4.3)$$

In gleicher Weise finden wir durch Elimination von u aus (4.1) und (4.2) die zu (4.3) identische Gleichung für i :

$$\frac{\partial^2 i}{\partial z^2} = R' G' i + (R' C' + L' G') \frac{\partial i}{\partial t} + L' C' \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \quad (4.4)$$

(4.3) und (4.4) sind die *Telegraphengleichungen der verlustbehafteten Leitungen*.

Sie sind lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten und sind völlig identisch, d.h. die Lösungen für $u(t, z)$ und $i(t, z)$ müssen von gleicher Form sein.

Für die Lösung von (4.3) bzw. (4.4) ist der einfache Ansatz nach Gleichung (3.10) bzw. (3.11), der für die verlustfreie Leitung zum Ziel geführt hat, nicht anwendbar. Die verlustbehaftete Leitung ist i. a. dispersiv, d.h. eine im Zeitbereich dargestellte Signalform $u(t, z)$ wird in Funktion der Zeit t und des Ortes z verzerrt.

Wie in der Analyse von linearen Schaltungen mit diskreten Elementen führt hier die Betrachtung von zeitlich stationären sinusförmigen Signalen zum Ziel. Bekanntlich ist die Antwort eines linearen zeitunabhängigen Systems auf ein zeitlich sin-förmiges Signal wieder ein sin-förmiges Signal. Bei bekanntem Frequenzgang der Übertragungsfunktion eines linearen Netzwerkes kann das Verhalten im Zeitbereich über die Fouriertransformation gefunden werden.

Wir führen für $u(t, z)$ und $i(t, z)$ Phasoren ein:

$$u(t, z) = \operatorname{Re} \left[\underline{U}(z) e^{j\omega t} \right] \quad (4.5)$$

$$i(t, z) = \operatorname{Re} \left[\underline{I}(z) e^{j\omega t} \right] \quad (4.6)$$

mit \underline{U} und \underline{I} : Amplituden; ω : Kreisfrequenz, $\omega = 2\pi f$

Diese Phasoren werden in (4.1) und (4.2) eingesetzt:

$$\frac{d \underline{U}}{dz} = -(R' + j\omega L') \underline{I} \quad (4.7)$$

$$\frac{d \underline{I}}{d z} = -(G' + j\omega C') \underline{U} \quad (4.8)$$

Aus (4.7) und (4.8) wird \underline{I} eliminiert:

$$\frac{d^2 \underline{U}}{d z^2} = (R' + j\omega L') (G' + j\omega C') \underline{U} \quad (4.9)$$

Im Unterschied zu (4.3) tritt in (4.9) die Zeit t nicht mehr auf: (4.9) ist eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Durch Elimination von \underline{U} aus (4.7) und (4.8) finden wir die (4.9) entsprechende Gleichung für \underline{I} :

$$\frac{d^2 \underline{I}}{d z^2} = (R' + j\omega L') (G' + j\omega C') \underline{I} \quad (4.10)$$

(4.9) und (4.10) sind die Wellengleichungen der verlustbehafteten Leitung und werden üblicherweise in folgender Form geschrieben:

Wellengleichungen der verlustbehafteten Leitung:

$$\frac{d^2 \underline{U}}{d z^2} = \gamma^2 \underline{U} \quad (4.11)$$

$$\frac{d^2 \underline{I}}{d z^2} = \gamma^2 \underline{I} \quad (4.12)$$

$$\text{mit } \gamma = \sqrt{(R' + j\omega L') (G' + j\omega C')} \quad (4.13)$$

Dabei ist γ die komplexe Wellenausbreitungskonstante (propagation constant) mit der Dimension 1/m.

Die Lösungen von (4.11) und (4.12) sind von folgender Form:

$$\underline{U}(z) = \underline{U}_a + \underline{U}_b = \underline{U}_{ao} e^{-\gamma z} + \underline{U}_{bo} e^{\gamma z} \quad (4.14)$$

$$\underline{I}(z) = \underline{I}_a - \underline{I}_b = \underline{I}_{ao} e^{-\gamma z} - \underline{I}_{bo} e^{\gamma z} \quad (4.15)$$

Wird (4.14) nach z abgeleitet und mit (4.13) in (4.7) eingesetzt, dann finden wir eine Beziehung zwischen den Leitungsspannungen und -strömen:

$$\underline{I}(z) = \frac{-1}{R' + j\omega L'} \cdot \frac{d \underline{U}}{d z} = \sqrt{\frac{G' + j\omega C'}{R' + j\omega L'}} \cdot (\underline{U}_{ao} e^{-\gamma z} - \underline{U}_{bo} e^{\gamma z}) \quad (4.16)$$

Durch Koeffizientenvergleich mit (4.15) erhält man für die

$$\text{Wellenimpedanz: } \underline{Z}_w = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}} = \frac{\underline{U}_{ao}}{\underline{I}_{ao}} = \frac{\underline{U}_{bo}}{\underline{I}_{bo}} \quad (4.17)$$

Für den schon behandelten Fall der verlustlosen Leitung ist die Wellenimpedanz nach (3.16) rein reell:

$$Z_w = \underline{Z}_w = \sqrt{\frac{L'}{C'}} \quad (4.18)$$

Nach dieser formalen Lösung der Wellengleichungen (4.11) und (4.12) sollen die gefundenen Resultate interpretiert werden.

4.2 Wellenausbreitung auf der verlustbehafteten Leitung

4.2.1 Vorwärts- und rückwärtslaufende Wellen

Wie nachfolgend gezeigt wird, kann der Lösungsansatz nach (4.14) einfach und plausibel interpretiert werden. (4.14) als Zeitfunktion ausgeschrieben ist:

$$u(t, z) = \operatorname{Re} \left[\underbrace{\underline{U}_{ao} e^{-\gamma z} e^{j\omega t}}_{a)} + \underbrace{\underline{U}_{bo} e^{\gamma z} e^{j\omega t}}_{b)} \right] \quad (4.19)$$

a)

b)

Wir spalten die Wellenausbreitungskonstante γ nach *Real- und Imaginärteil* auf:

$$\gamma = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')} = \alpha + j\beta \quad (4.20)$$

mit α : Dämpfungsbelag mit Dimension Np/m
 β : Phasenbelag mit Dimension rad/m

Da der Dämpfungsbelag α nach (4.20) als Exponent zu e erscheint, ist die Dimension Np/m (Neper/Meter). Häufig wird α in dB/m angegeben.

Die Umrechnung erfolgt dann nach der Definition der Dämpfung im logarithmischen Mass:

$$10^{0.05} \frac{\alpha}{[\text{dB}/\text{m}]} z = e^{\frac{\alpha}{[\text{Np}/\text{m}]} z}$$

daraus

$$\frac{\alpha}{[\text{dB}/\text{m}]} = 8.686 \frac{\alpha}{[\text{Np}/\text{m}]} \quad (4.21)$$

Ebenso kann der Phasenbelag β in Grad/m angegeben werden.

Der Anteil a) in (4.19) entspricht einer vorwärts, d.h. in positiver z -Richtung laufenden gedämpften Spannungswelle $u_a(t, z)$:

$$u_a(t, z) = \operatorname{Re} \left[\underline{U}_{ao} e^{-\gamma z} e^{j\omega t} \right] = \operatorname{Re} \left[\underline{U}_{ao} e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \beta z)} \right] \quad (4.22)$$

oder $\underline{U}_a(z) = \underline{U}_{ao} e^{-\gamma z}$ (4.23)

Der Anteil b) in (4.19) entspricht einer rückwärts, d.h. in negativer z -Richtung laufenden gedämpften Spannungswelle $u_b(z, t)$:

$$u_b(t, z) = \operatorname{Re} \left[\underline{U}_{bo} e^{\gamma z} e^{j\omega t} \right] = \operatorname{Re} \left[\underline{U}_{bo} e^{\alpha z} e^{j(\omega t + \beta z)} \right] \quad (4.24)$$

oder $\underline{U}_b(z) = \underline{U}_{bo} e^{\gamma z}$ (4.25)

4.2.2 Phasengeschwindigkeit v_p und Wellenlänge λ

Wir stellen uns nun die Frage, mit welcher Geschwindigkeit v_p sich die Welle in der z -Richtung bewegt, d.h. wie schnell sich beispielsweise der Nulldurchgang der in positiver z -Richtung laufenden Welle ($\omega t - \beta z = \pi/2$) bewegt. Mit der Phasengeschwindigkeit v_p bewegt sich der Beobachtungspunkt z mit $z = z_0 + v_p t$. Die Phase ($\omega t - \beta(z_0 + v_p t)$) bleibt also konstant, wenn die Phasengeschwindigkeit

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} \quad (4.26)$$

Die Phasengeschwindigkeit der rückwärtslaufenen Welle, Anteil b) in (4.19), läuft mit der Geschwindigkeit v_{pr}

$$v_{pr} = -v_p = -\frac{\omega}{\beta} \quad (4.27)$$

ist.

Figur 4.1 zeigt die beiden in positiver und in negativer z -Richtung laufenden, mit dem Dämpfungsbelag α gedämpften Teilwellen.

Die Wellenlänge λ entspricht der Periodenlänge in Ausbreitungsrichtung, d.h. der Länge in z -Richtung die einer Phasendrehung von 2π entspricht:

$$e^{j\beta(z + \lambda)} = e^{j\beta z + j2\pi} \quad (4.28)$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad (4.29)$$

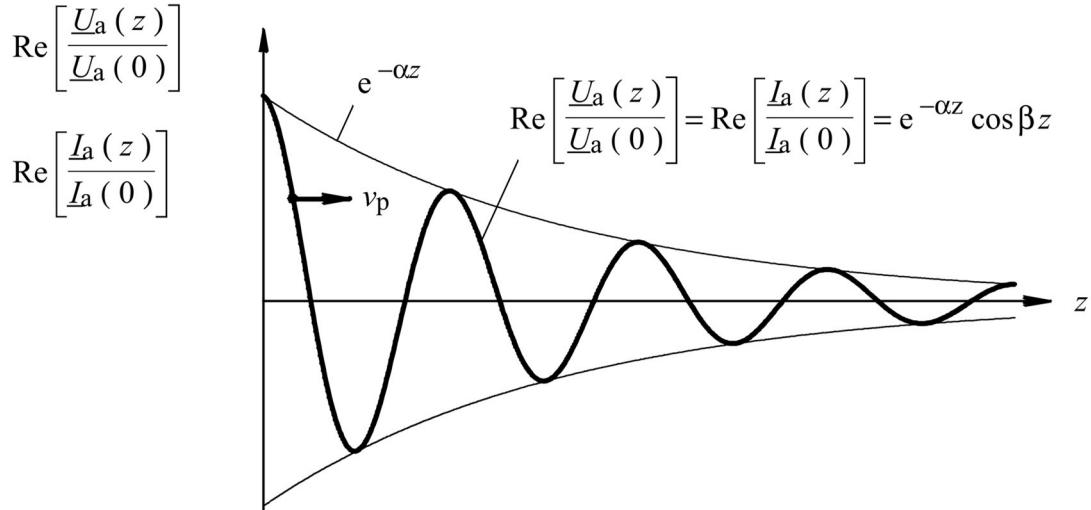
Die Ströme der vor- und rückwärtslaufenen Wellen lassen sich nach (4.17), (4.23) und (4.25) wie folgt bestimmen für die

$$\text{vorwärtslaufende Welle: } \underline{I}_a(z) = \frac{\underline{U}_{ao} e^{-\gamma z}}{\underline{Z}_w} = \frac{\underline{U}_a(z)}{\underline{Z}_w} \quad (4.30)$$

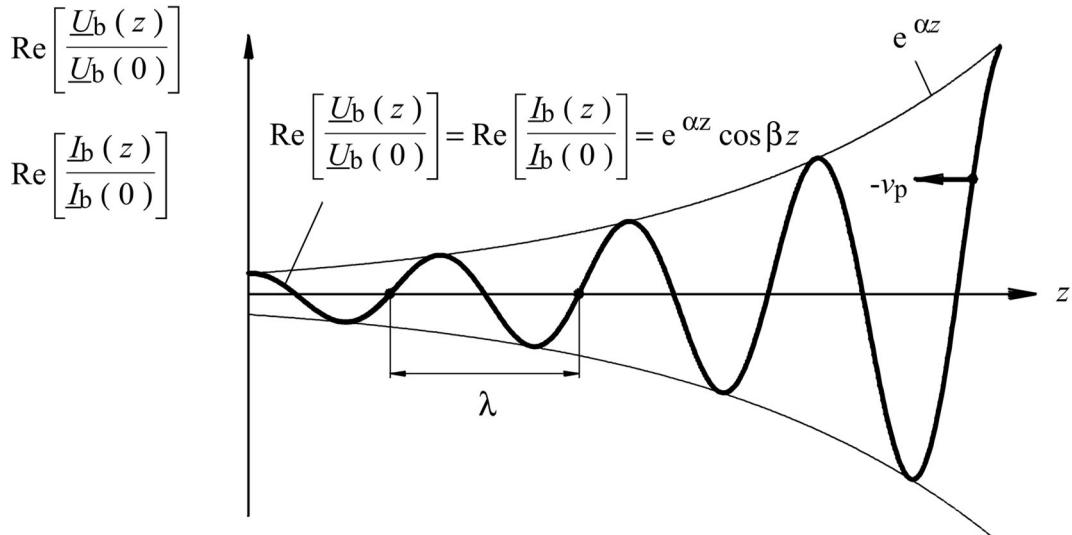
$$\text{rückwärtslaufende Welle: } I_b(z) = \frac{\underline{U}_{bo} e^{\gamma z}}{\underline{Z}_w} = \frac{\underline{U}_b(z)}{\underline{Z}_w} \quad (4.31)$$

Wie im Fall der verlustfreien Leitung stellt auch die verlustbehaftete Leitung für die reine vorwärtslaufende Welle bzw. für die reine rückwärtslaufende Welle eine Impedanz, die Wellenimpedanz \underline{Z}_w dar. Durch diese Wellenimpedanz \underline{Z}_w ist die *vorwärtslaufende Spannungswelle* mit einem *in Vorwärtsrichtung laufenden Strom* und die *rückwärtslaufende Spannungswelle* mit einem *in Rückwärtsrichtung laufenden Strom* verbunden.

Vorwärts laufende Welle:



Rückwärts laufende Welle:

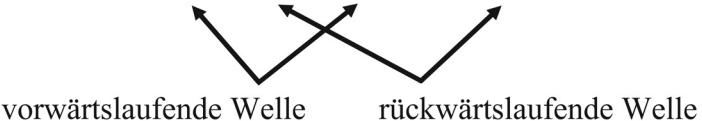


Figur 4.1 In positive und negative z -Richtung laufende gedämpfte Spannungs- und Strom-Teilwellen.

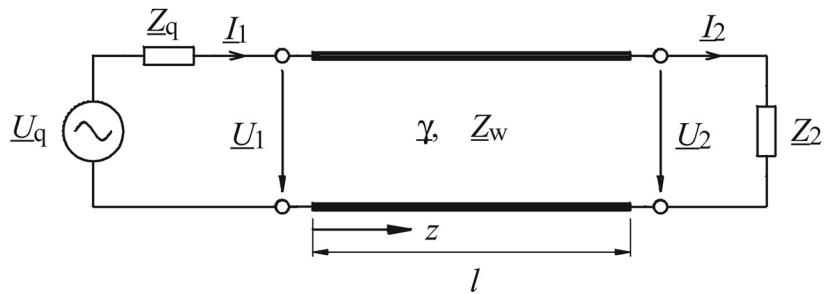
5. Spannung $\underline{U}(z)$ und Strom $\underline{I}(z)$ auf der verlustbehafteten Leitung

Nach (4.14), (4.15), (4.30) und (4.31) können die Leitungsspannungen $\underline{U}(z)$ und Ströme $\underline{I}(z)$ in Funktion der vorwärts- und rückwärtslaufenden Spannungswellen $\underline{U}_a(z)$ und $\underline{U}_b(z)$ dargestellt werden:

$$\underline{U}(z) = \underline{U}_a + \underline{U}_b = \underline{U}_{ao} e^{-\gamma z} + \underline{U}_{bo} e^{\gamma z} \quad (5.1)$$

$$\underline{I}(z) = \underline{I}_a - \underline{I}_b = \underline{I}_{ao} e^{-\gamma z} - \underline{I}_{bo} e^{\gamma z} \quad (5.2)$$


Die Amplituden \underline{U}_{ao} und \underline{U}_{bo} der Teilwellen werden durch die Beschaltung der Leitung mit Quelle und Last bestimmt. Im folgenden betrachten wir nur einfache Beschaltungen an den Leitungsenden. Die Verallgemeinerung für beliebige lineare Netzwerke an den Leitungsenden ist problemlos. Figur 5.1 zeigt eine einfache Beschaltung einer Leitung der Wellenimpedanz Z_w mit einer Spannungsquelle \underline{U}_q mit Quellenimpedanz Z_q und Lastimpedanz Z_2 .



Figur 5.1 Beschaltete Leitung.

Am Ort $z = 0$ gilt nach (5.1) und (5.2):

$$\underline{U}(0) = \underline{U}_1 = \underline{U}_{ao} + \underline{U}_{bo} \quad (5.3)$$

$$\underline{I}(0) = \underline{I}_1 = \frac{1}{Z_w} (\underline{U}_{ao} - \underline{U}_{bo}) \quad (5.4)$$

Am Ort $z = l$ sind

$$\underline{U}(l) = \underline{U}_2 = \underline{U}_{ao} e^{-\gamma l} + \underline{U}_{bo} e^{\gamma l} \quad (5.5)$$

$$\underline{I}(l) = \underline{I}_2 = \frac{1}{Z_w} (\underline{U}_{ao} e^{-\gamma l} - \underline{U}_{bo} e^{\gamma l}) \quad (5.6)$$

Die Amplituden \underline{U}_{ao} und \underline{U}_{bo} der Teilwellen können in Funktion von Strom und Spannung am rechten Leitungsende ausgedrückt werden. Durch Addition und Subtraktion von (5.5) und (5.6) finden wir:

$$\underline{U}_{ao} = \frac{\underline{I}_2}{2} (Z_2 + Z_w) e^{\gamma l} \quad (5.7)$$

$$\underline{U}_{bo} = \frac{I_2}{2} (\underline{Z}_2 - \underline{Z}_w) e^{-\gamma l} \quad (5.8)$$

Für den Spezialfall $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_w$ wird nach (5.8) $\underline{U}_{bo} = 0$.

Für $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_w$ verschwindet also die rückwärtslaufende Welle (\underline{U}_b und I_b). Die vorwärtslaufende Welle "sieht" an jedem Ort $z = 0 \dots l$ der Leitung die gleiche Impedanz wie an einer unendlich langen Leitung nähmlich die Wellenimpedanz \underline{Z}_w .

Dieser wichtige Fall mit $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_w$ wird als *Wellenanpassung* bezeichnet. Aus der Netzwerktheorie ist bekannt, dass eine Quelle mit einer Lastimpedanz belastet werden muss, die dem konjugiert komplexen Wert der Quellenimpedanz entspricht, um einen maximalen Leistungstransfer zu ermöglichen. Für die Leistungsanpassung ist also mit $Z_q = \underline{Z}_w$:

$$\underline{Z}_2 = \underline{Z}_w^* \quad (5.9)$$

Für die Wellenanpassung, d.h. für eine "reflexionsfreie" Anpassung gilt dagegen: $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_w$.

Bei komplexen Wellenimpedanzen ist also Leistungsanpassung und Reflexionsfreiheit nicht gleichzeitig realisierbar. In den meisten praktischen Fällen ist aber die Wellenimpedanz elektrisch langer Leitungen nahezu reell, sodass gleichzeitig Wellen- und Leistungsanpassung erreicht werden kann.

Für den allgemeinen Fall einer beliebigen Abschlussimpedanz \underline{Z}_2 tritt nach (5.8) gleichzeitig eine vorwärts- und eine rückwärtslaufende Welle auf. Figur 5.2 zeigt die beiden Spannungswellen $\underline{U}_a(z)$ und $\underline{U}_b(z)$ für einen beliebigen Zeitpunkt t .

Bei einer beliebigen Abschlussimpedanz \underline{Z}_2 gilt mit (5.1) am Ort $z = l$:

$$\underline{U}_a(l) = \underline{U}_{ao} e^{-\gamma l}, \quad \underline{U}_b(l) = \underline{U}_{bo} e^{\gamma l} \quad (5.10)$$

Mit (5.7) und (5.8) sind

$$\underline{U}_a(l) = \frac{I_2}{2} (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_w) \quad (5.11)$$

$$\underline{U}_b(l) = \frac{I_2}{2} (\underline{Z}_2 - \underline{Z}_w) \quad (5.12)$$

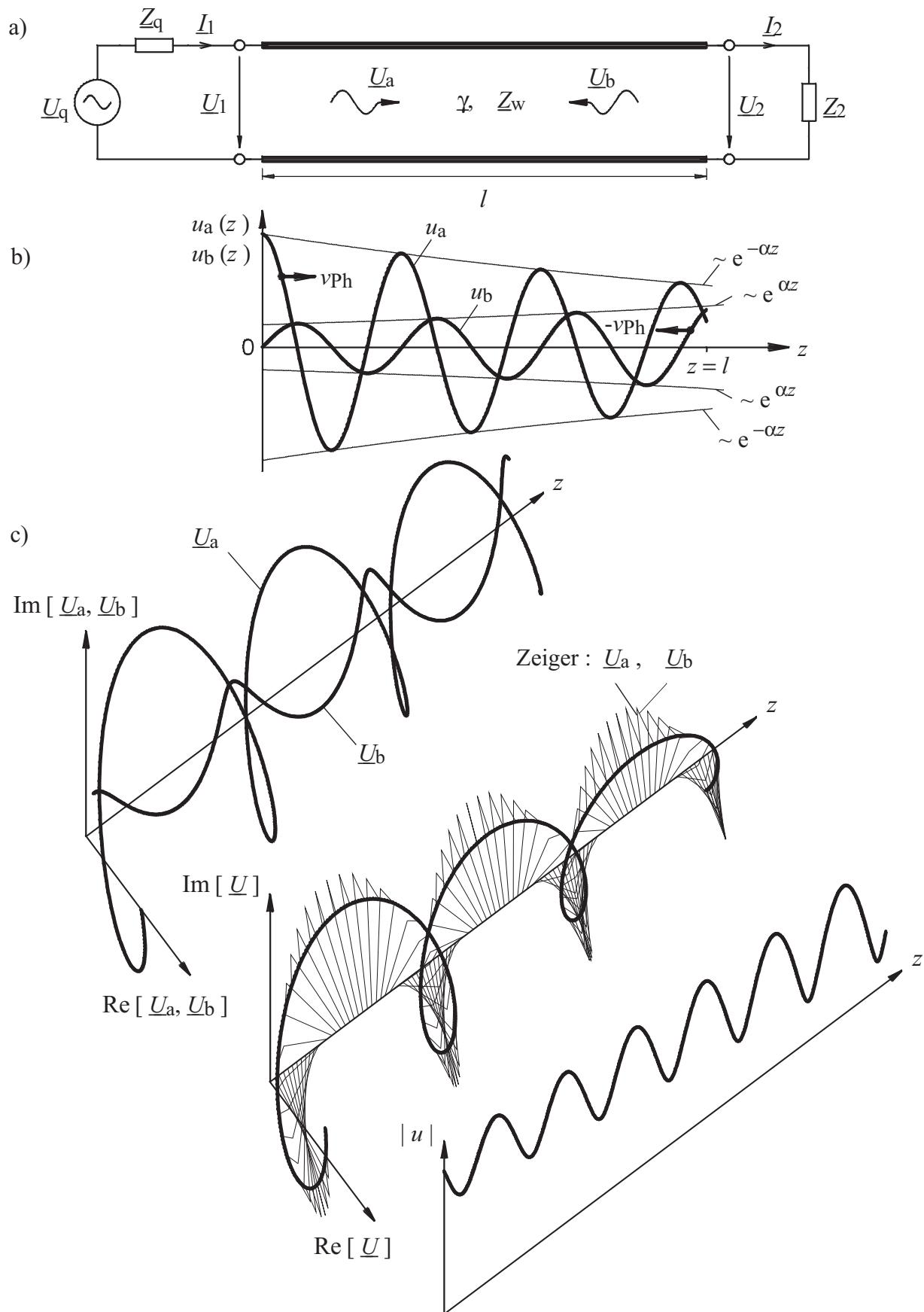
Damit finden wir für das Verhältnis $\underline{U}_b(l)/\underline{U}_a(l)$, das *Reflexionsfaktor* r_2 genannt wird:

$$\text{Reflexionsfaktor} \quad r_2 = \frac{\underline{U}_b(l)}{\underline{U}_a(l)} = \frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_w}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_w} \quad (5.13)$$

Mit dem Reflexionsfaktor r_2 ist der Spannungsreflexionsfaktor gemeint.

Der Stromreflexionsfaktor, definiert analog durch das Stromverhältnis $I_b(l)/I_a(l)$, ist nach (4.30) und (4.31):

$$\frac{I_b(l)}{I_a(l)} = \frac{\underline{U}_b(l)}{\underline{U}_a(l)} = r_2$$



Figur 5.2 Leitung im allgemeinen Betriebszustand:
 a) Leitung mit Beschaltung,
 b) Vor- und rückwärtslaufende Wellen $u_a(z)$ und $u_b(z)$,
 c) Wellen U_a , U_b und ihre Überlagerung $\underline{U} = \underline{U}_a + \underline{U}_b$ in komplexer Darstellung.

Der Reflexionsfaktor r_2 ist nach (5.13) vom Verhältnis $\underline{Z}_2/\underline{Z}_w$ und nicht von den Absolutwerten abhängig und wird daher häufig in Funktion der normierten Impedanz $\underline{z}_2 = \underline{Z}_2/\underline{Z}_w$ ausgedrückt:

$$r_2 = \frac{\underline{Z}_2/\underline{Z}_w - 1}{\underline{Z}_2/\underline{Z}_w + 1} = \frac{\underline{z}_2 - 1}{\underline{z}_2 + 1} \quad (5.14)$$

Die komplexe Abbildung r_2 (\underline{z}_2) wird in den Kapiteln 7 und 8 genauer untersucht.

Für den Moment seien hier nur die folgenden Spezialfälle genannt:

- a) Bereits gezeigter Fall der Wellenanpassung (keine Reflexion):

$$\underline{Z}_2 = \underline{Z}_w \rightarrow r_2 = 0$$

- b) Leerlaufende Leitung: $\underline{Z}_2 = \infty \rightarrow r_2 = 1$, reell

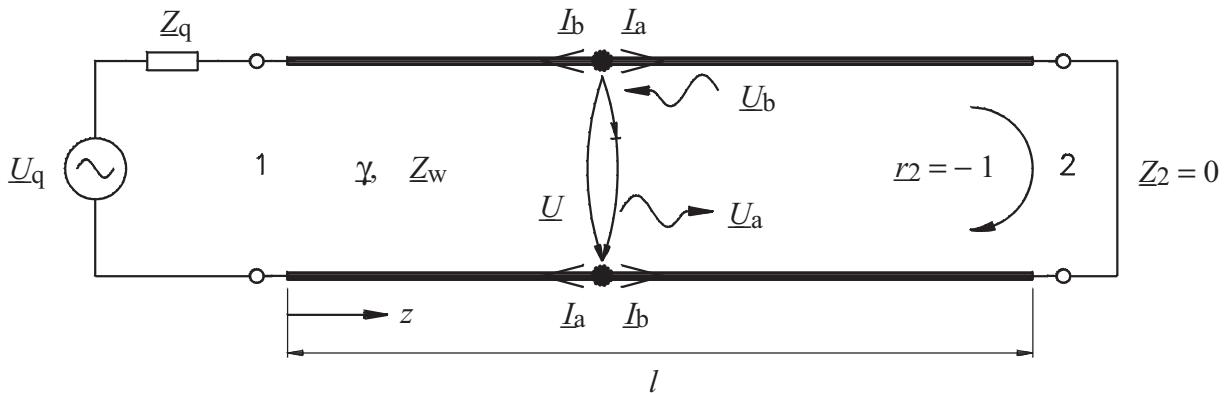
- c) Kurzgeschlossene Leitung: $\underline{Z}_2 = 0 \rightarrow r_2 = -1$, reell

- d) Reelle Wellen- und Abschlussimpedanzen Z_2 und Z_w :

$$\text{für } Z_2 \geq Z_w \rightarrow 0 \leq r_2 \leq 1, \text{ reell}$$

$$\text{für } Z_2 \leq Z_w \rightarrow -1 \leq r_2 \leq 0, \text{ reell}$$

Nach dieser Betrachtung von Spannungs- und Stromwellen an den Leitungsenden und des Reflexionsfaktors soll nun der Spannungs- und Stromverlauf entlang der Leitung näher untersucht werden. Dabei starten wir mit dem unter c) gegebenen Spezialfall der am Ende kurzgeschlossenen Leitung, dargestellt in Figur 5.3



Figur 5.3 Am Ende kurzgeschlossene Leitung

Der Leitungskurzschluss bewirkt einen Reflexionsfaktor $r_2 = -1$.

Damit und mit $\underline{U}_a(z) = \underline{U}_{ao} e^{-\gamma z}$ und $\underline{U}_b(z) = \underline{U}_{bo} e^{\gamma z}$ wird

$$\underline{U}_b(z) = \underline{U}_b(l) e^{\gamma(z-l)} = \underline{U}_a(l) r_2 e^{\gamma(z-l)} = -\underline{U}_{ao} e^{\gamma(z-2l)} \quad (5.15)$$

Damit wird die Gesamtspannung $\underline{U}(z)$ am Ort z :

$$\underline{U}(z) = \underline{U}_a + \underline{U}_b = \underline{U}_{ao} \left(e^{-\gamma z} - e^{\gamma(z-2l)} \right) \quad (5.16)$$

Mit γ aufgeteilt nach Real- und Imaginärteil: $\gamma = \alpha + j\beta = \alpha + j2\pi/\lambda$:

$$\underline{U}(z) = \underbrace{\underline{U}_{ao} e^{-\alpha z - j z 2\pi/\lambda}}_{U_a} - \underbrace{\underline{U}_{ao} e^{\alpha(z-2l) + j(z-2l) 2\pi/\lambda}}_{U_b} \quad (5.17)$$

Der Gesamtstrom $\underline{I}(z)$ am Ort z erhält man aus

$$\underline{I}(z) = I_a - I_b = \frac{\underline{U}_a}{Z_w} - \frac{\underline{U}_b}{Z_w} = \underbrace{\frac{\underline{U}_{ao}}{Z_w} e^{-\alpha z - j z 2\pi/\lambda}}_{I_a} + \underbrace{\frac{\underline{U}_{ao}}{Z_w} e^{\alpha(z-2l) + j(z-2l) 2\pi/\lambda}}_{-I_b} \quad (5.18)$$

Figur 5.4 zeigt die durch (5.17) und (5.18) gegebene Strom- und Spannungsverläufe entlang der kurzgeschlossenen verlustbehafteten Leitung nach Figur 5.3.

Figur 5.4 a) zeigt die Spannungsamplituden $|\underline{U}_a|$, $|\underline{U}_b|$ und $|\underline{U}|$:

am Ort ① $z = l$: ist $\underline{U}_b = -\underline{U}_a$ und damit $\underline{U} = 0$

am Ort ② $z = l - \lambda/8$: $\underline{U}_a(z)$ läuft gegenüber $\underline{U}_a(l)$ um $\pi/4$ vor
 $\underline{U}_b(z)$ läuft gegenüber $\underline{U}_b(l)$ um $\pi/4$ nach,

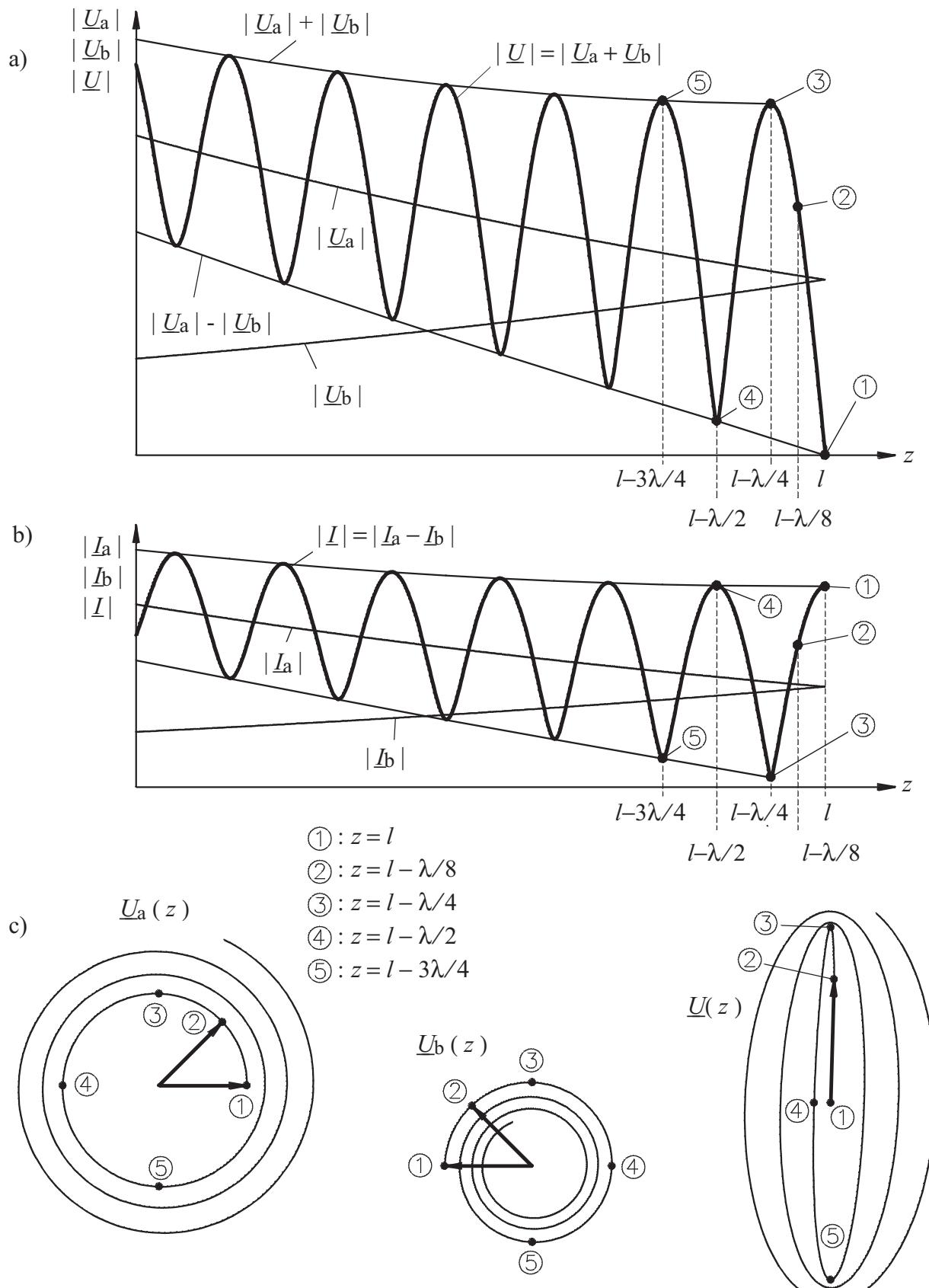
am Ort ③ $z = l - \lambda/4$ $\underline{U}_a(z)$ läuft gegenüber $\underline{U}_a(l)$ um $\pi/2$ vor
 $\underline{U}_b(z)$ läuft gegenüber $\underline{U}_b(l)$ um $\pi/2$ nach
 usw.

die Amplitude $|\underline{U}|$ der Gesamtspannung berührt die Enveloppen
 $|\underline{U}_a| + |\underline{U}_b|$ und $|\underline{U}_a| - |\underline{U}_b|$ im Abstand von $\Delta z = \lambda/2$,

Figur 5.4 b) zeigt die entsprechende Stromamplituden $|I_a|$, $|I_b|$ und $|I|$

am Ort ① $z = l$, Ort des Kurzschlusses, sind die Teilströme I_a und I_b in Phase und überlagern sich zu einem Strommaximum. Die Amplitude des Gesamtstromes variiert entlang der Leitung in gleicher Weise wie die Spannung und berührt die Enveloppen im Abstand von $\Delta z = \lambda/2$

Figur 5.4 c) zeigt die Ortskurven der Spannungsamplituden U_a , U_b und U in der komplexen Ebene



Figur 5.4 Spannungen und Ströme entlang einer kurzgeschlossenen verlustbehafteten Leitung nach Figur 5.3.

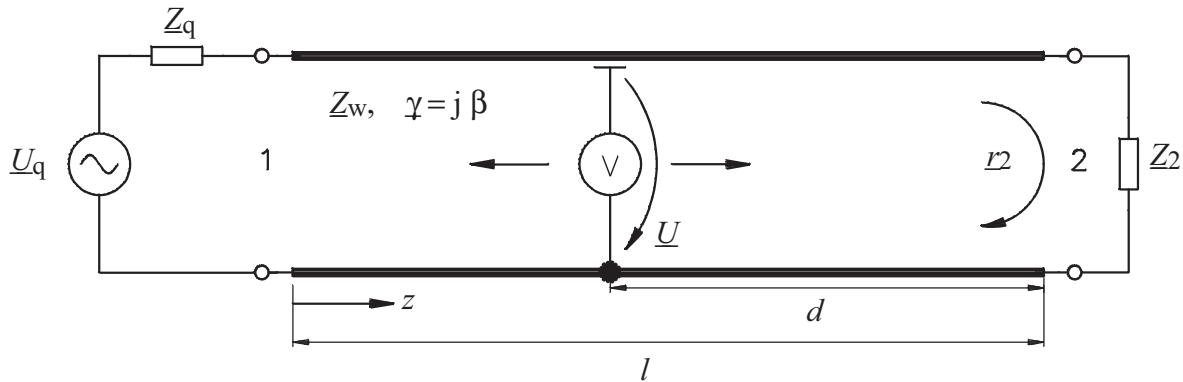
a) Spannungsamplituden $|U_a|$, $|U_b|$ und $|U| = |U_a + U_b|$

b) Stromamplituden $|I_a|$, $|I_b|$ und $|I| = |I_a - I_b|$

c) Ortskurven der Zeiger $U_a(z)$, $U_b(z)$ und $U(z) = U_a + U_b$

6. Spannungsverlauf entlang der verlustfreien Leitung

Als Spezialfall der im vorhergehenden Kapitel behandelten verlustbehafteten Leitung wenden wir uns nun der verlustfreien Leitung zu. Obwohl in der Realität alle Leitungen verlustbehaftet sind, sind namentlich bei kurzen Leitungen auch noch bei höheren Frequenzen die Verluste oft so klein, dass mit guter Genauigkeit eine verlustfreie Anordnung angenommen werden kann. Relativ kurze verlustarme Leitungen mit in z -Richtung verschiebbaren Spannungsdetektoren, sogenannten Messleitungen, wurden auch früher häufig zur Bestimmung von Reflexionsfaktoren verwendet. Figur 6.1 zeigt schematisch dieses Messsystem. Dabei kann mit der verschiebbaren Sonde, die eine verschwindend kleine elektrische Belastung für die Leitung darstellt, nur der Betrag der Leitungsspannung $\underline{U} = \underline{U}_a + \underline{U}_b$ bestimmt werden.



Figur 6.1 Messleitung mit verschiebbarer Sonde zur Abtastung der Spannung $|\underline{U}|$ entlang der Leitung

Am Ort $z = l$ gilt:

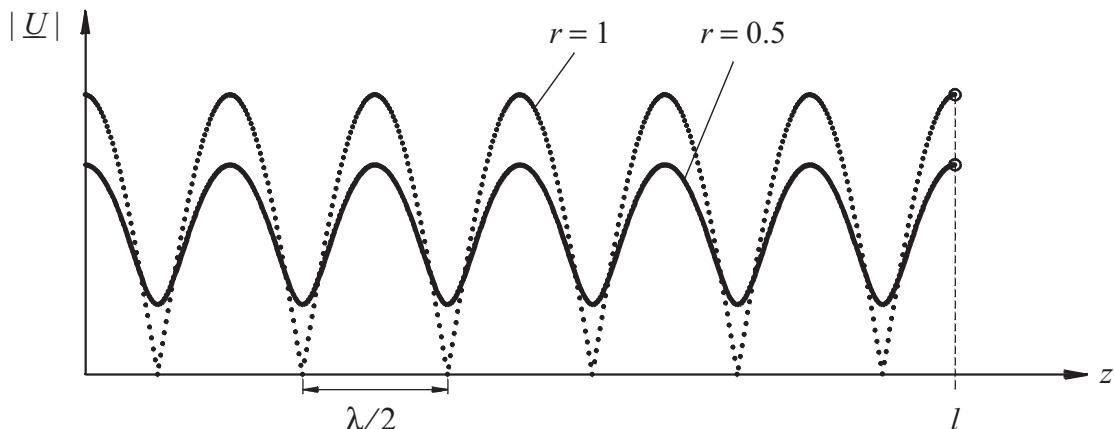
nach rechts laufende Welle $\underline{U}_a(l)$

nach links laufende Welle $\underline{U}_b(l) = r_2 \underline{U}_a(l)$

Am Ort $z = l - d$ gilt:

Leitungsspannung $\underline{U}(l-d) = \underline{U}_a(l-d) + \underline{U}_b(l-d) = \underline{U}_a(l) \left(e^{j\beta d} + r_2 e^{-j\beta d} \right)$

Figur 6.2 zeigt den Verlauf $|\underline{U}(z)|$ für die Reflexionsfaktoren $r_2 = 0.5$ und $r_2 = 1$.



Figur 6.2 Sondenspannungen $|\underline{U}|$ für Reflexionsfaktoren $r = 1$ und $r = 0.5$

Die Sondenspannung $| \underline{U}(z) |$, variiert periodisch mit einer Periode $\lambda/2$. Für den Reflexionsfaktor $r_2 = 1$ sind die Extremalwerte der Sondenspannung:

$$U_{\max} = 2 |\underline{U}_a|, \quad U_{\min} = 0$$

6.1 Bestimmung des Reflexionsfaktors r aus dem Stehwellenverhältnis U_{\max}/U_{\min}

Die Überlagerung der vorwärtslaufenden und der rückwärtslaufenden Welle mit der in Figur 6.2 dargestellten periodischen Schwankung des Betrages wird *Stehwelle* genannt.

Das Stehwellenverhältnis VSWR (voltage standing wave ratio) ist das Verhältnis der Extremalwerte der Sondenspannung:

$$\text{VSWR} = \frac{|\underline{U}|_{\max}}{|\underline{U}|_{\min}} = \frac{\text{Spannungsmaximum}}{\text{Spannungsminimum}} \quad (6.1)$$

mit $|\underline{U}|_{\max} = |\underline{U}_{ao}|(1 + |\underline{r}|)$ und $|\underline{U}|_{\min} = |\underline{U}_{ao}|(1 - |\underline{r}|)$ wird das Stehwellenverhältnis

$$\text{VSWR} = \frac{1 + |\underline{r}|}{1 - |\underline{r}|} \quad \Leftrightarrow \quad |\underline{r}| = \frac{\text{VSWR} - 1}{\text{VSWR} + 1} \quad (6.2)$$

Für $|\underline{r}| = 1$ ist der Verlauf der Stehwelle $\sim \left| \sin \frac{2\pi z}{\lambda} \right|$

Die einfache Methode der Stehwellenmessung zur Bestimmung von Reflexionsfaktoren wurde in der Mikrowellentechnik bis vor ca. 30 Jahren intensiv angewendet. Heute werden Reflexionsfaktoren elektronisch mit Hilfe von Netzwerkanalysatoren im ganzen technisch interessanten Frequenzbereich von Hz bis 100 GHz gemessen.

7. Impedanztransformation mittels der verlustfreien und verlustbehafteten Leitung

In den bisherigen Betrachtungen wurde das elektrische Verhalten der Leitung mit Hilfe der vorwärts- und rückwärtslaufenden Wellen \underline{U}_a und \underline{U}_b einfach und plausibel dargestellt. Auf Grund dieser Betrachtung wurde auch der Begriff des Reflexionsfaktors r eingeführt.

Wenn Leitungen als Elemente von grösseren Schaltungen auftreten, dann ist die Darstellung mittels den Wellen \underline{U}_a und \underline{U}_b unter Umständen nicht vorteilhaft. Eine Darstellung der Leitung in Form eines allgemeinen Vierpols wäre dann vorzuziehen.

In diesem Kapitel soll die Leitung als allgemeiner Vierpol mit Spannungen und Ströme dargestellt und eine einfache graphische Konversion des Reflexionsfaktors r in Impedanzen und Admittanzen vorgestellt werden.

Wir gehen dazu wie folgt vor:

1. Auf Grund der schon eingeführten Wellengleichung werden die Kettenmatrix und zwei Leitungsersatzschaltungen ermittelt.
2. Zur Umrechnung zwischen Reflexionsfaktoren und Impedanzen/Admittanzen sowie zur Transformation von Impedanzen über Leitungen wird das Smith-Diagramm, ein einfaches graphisches Hilfsmittel eingeführt.

7.1 Die Kettenmatrix der Leitung

Die Kettenmatrix A dient zur Berechnung der Zweitorparameter von in Kette geschalteten Zweitoren. Die Kettenmatrix des resultierenden Zweitores erhält man durch Multiplikation der Kettenmatrizen der einzelnen Zweitore.

Die Kettenmatrix eines allgemeinen linearen Zweitors nach Figur 7.1 ist wie folgt definiert:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} = [A] \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ -\underline{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ -\underline{I}_2 \end{bmatrix} \quad (7.1)$$



Figur 7.1 Strom- und Spannungsdefinition der Kettenmatrix

Das negative Vorzeichen von I_2 in (7.1) ermöglicht die Stromrichtungen in Figur 7.1 symmetrisch zu definieren. Ausgehend von (5.3), (5.4), (5.5) und (5.6) und finden wir durch Elimination der Amplituden U_{ao} und U_{bo} die

Kettengleichungen der verlustbehafteten Leitung:

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 \cosh \gamma l - \underline{I}_2 \underline{Z}_w \sinh \gamma l \quad (7.2)$$

$$\underline{I}_1 = \underline{U}_2 \frac{\sinh \gamma l}{\underline{Z}_w} - \underline{I}_2 \cosh \gamma l \quad (7.3)$$

Die Kettenmatrix der verlustbehafteten Leitung ist also

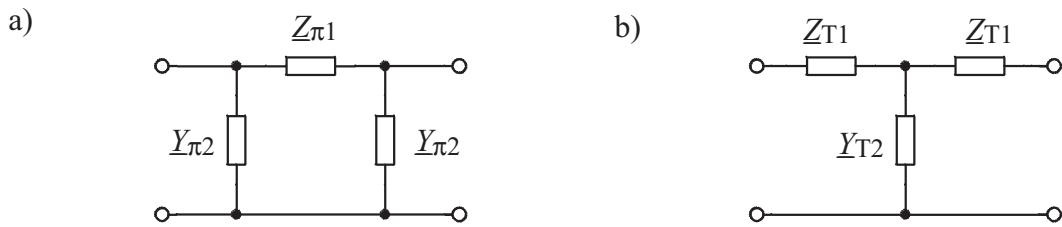
$$[\underline{A}] = \begin{bmatrix} \cosh \gamma l & \underline{Z}_w \sinh \gamma l \\ \frac{\sinh \gamma l}{\underline{Z}_w} & \cosh \gamma l \end{bmatrix} \quad (7.4)$$

Die Leitung ist ein reziprokes, symmetrisches Zweitor, was in dieser Kettenmatrix zum Ausdruck kommt:

1. Reziprozität: $\det [\underline{A}] = 1$

2. Symmetrie: $\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22}$

Die Beziehungen zwischen den Strömen und Spannungen an den Leitungsenden (7.2) und (7.3) können mit π - oder T-Ersatzschaltungen nach Figur 7.2 dargestellt werden.



Figur 7.2 Leitungseratzschaltungen, a) π -Schaltung, b) T-Schaltung

Die Elementwerte sind:

a) π -Schaltung:

$$\underline{Z}_{\pi 1} = \underline{Z}_w \sinh \gamma l \quad \underline{Y}_{\pi 2} = \frac{1}{\underline{Z}_w} \tanh \frac{\gamma l}{2} \quad (7.5)$$

b) T-Schaltung:

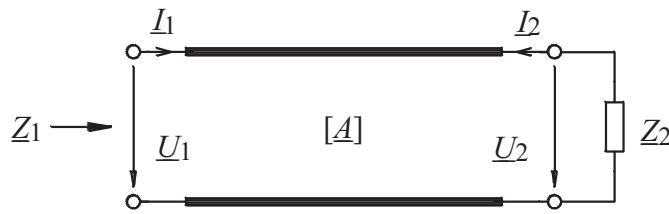
$$\underline{Z}_{T1} = \underline{Z}_w \tanh \frac{\gamma l}{2} \quad \underline{Y}_{T2} = \frac{1}{\underline{Z}_w} \sinh \gamma l \quad (7.6)$$

Die \sinh - und die \tanh -Funktionen haben dabei komplexe Argumente. Die Ersatzelemente sind in transzendentaler Weise frequenzabhängig und können nicht mit Netzwerken mit einer endlichen Anzahl von diskreten Komponenten R, L und C dargestellt werden.

7.2 Impedanztransformation mit einer Leitung

Mit Hilfe der Kettenmatrix oder einer Leitungseratzschaltung nach Figur 7.2 kann die am Eingang einer Leitung auftretende Impedanz \underline{Z}_1 bestimmt werden, wenn die Leitung ausgangsseitig mit der Impedanz \underline{Z}_2 belastet wird, wie in Figur 7.3 dargestellt ist. Mit $\underline{Z}_2 = -\underline{U}_2/\underline{I}_2$ finden wir mit (7.2) und (7.3) :

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_w \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_w \tanh \gamma l}{\underline{Z}_w + \underline{Z}_2 \tanh \gamma l} \quad (7.7)$$



Figur 7.3 Transformation einer Impedanz \underline{Z}_2 über eine verlustbehaftete Leitung auf die Impedanz \underline{Z}_1 .

Mit der Normierung $\underline{z}_1 = \underline{Z}_1 / \underline{Z}_w$ und $\underline{z}_2 = \underline{Z}_2 / \underline{Z}_w$ der Impedanzen \underline{Z}_1 und \underline{Z}_2 wird (7.7) zu

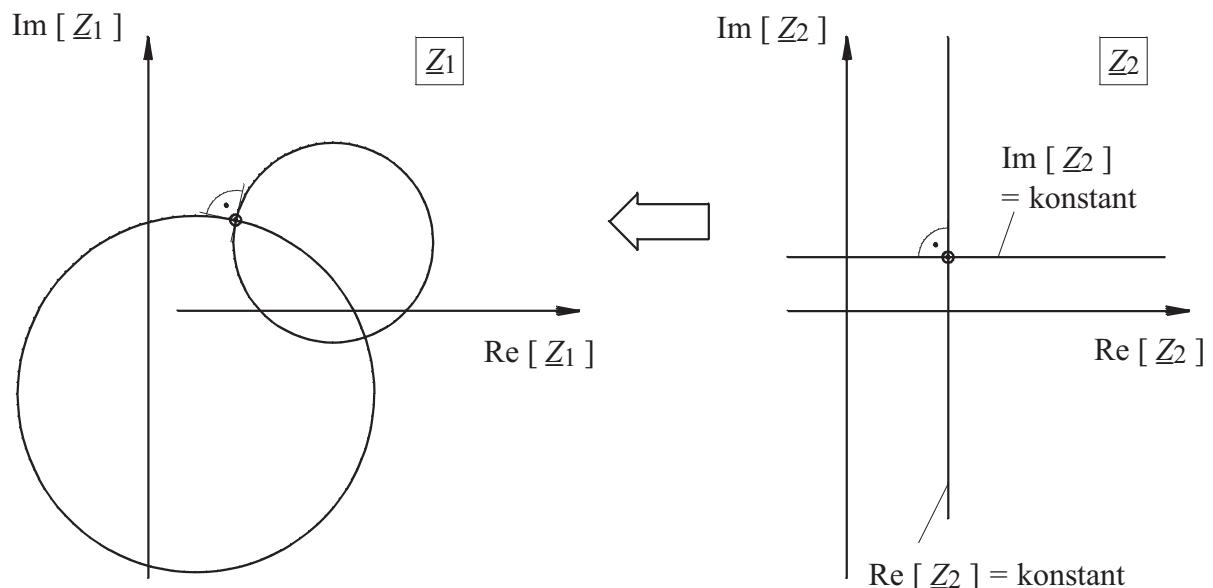
$$\underline{z}_1 = \frac{\underline{z}_2 + \tanh \gamma l}{1 + \underline{z}_2 \tanh \gamma l} \quad (7.8)$$

Die komplexe tanh-Funktion kann mit Hilfe eines bekannten Additionstheorems nach Real- und Imaginärteil dargestellt werden:

$$\tanh \gamma l = \tanh (\alpha + j \beta)l = \frac{\tanh \alpha l + j \tan \beta l}{1 + j \tanh \alpha l \tan \beta l} \quad (7.9)$$

Wenn die Abschlussimpedanz \underline{Z}_2 gleich der Wellenimpedanz der Leitung \underline{Z}_w entspricht, dann ist nach (7.7) die Eingangsimpedanz $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_w$, wie dies zu erwarten ist.

Bei der Transformation nach (7.7) wird die Impedanz \underline{Z}_2 in die Impedanz \underline{Z}_1 transformiert. Die Transformation von \underline{Z}_1 (\underline{Z}_2) bei konstanten γl und \underline{Z}_w ist eine *bilineare Transformation* oder *Möbius-Transformation*. Diese Abbildung von \underline{Z}_2 auf \underline{Z}_1 ist *winkelgetreu* und *kreistreu*. In Figur 7.4 wird ein Beispiel dieser Transformation dargestellt: wird der Realteil von \underline{Z}_2 konstant gehalten und der Imaginärteil variiert, dann bewegt sich die Impedanz \underline{Z}_1 in der komplexen Ebene auf einer Kreisbahn.



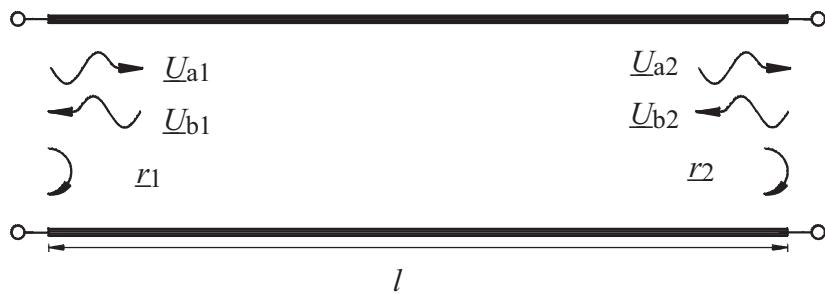
Figur 7.4 Bilineare Transformation einer Impedanz \underline{Z}_2 über eine Leitung auf die Impedanz \underline{Z}_1

Wird andererseits der Imaginärteil von \underline{Z}_2 konstant gehalten und der Realteil variiert, dann ist die Ortskurve von \underline{Z}_1 wiederum ein Kreis, der den ersten Kreis mit rechten Winkeln schneidet. Die Kreistreue ist dabei erhalten, wenn die Gerade als Spezialfall des Kreises betrachtet wird. Bei dieser Abbildung kann ohne weitere Angabe sofort die Zuordnung der Kreise zu den Geraden bestimmt werden: Die Gerade mit $\text{Re}[\underline{Z}_2] = \text{konstant}$ wird in den ganz in der rechten \underline{Z}_1 -Halbebene liegenden Kreis abgebildet, während die Gerade \underline{Z}_2 mit $\text{Im}[\underline{Z}_2] = \text{konstant}$ im Bereich $\text{Re}[\underline{Z}_2] < 0$ eine aktive Impedanz darstellt und damit auch über eine verlustbehaftete Leitung zu einer Impedanz mit negativem Realteil abgebildet werden kann.

Bei einer sehr langen verlustbehafteten Leitung ($\alpha l \gg 1$) strebt die Eingangsimpedanz \underline{Z}_1 gegen den Wellenwiderstand \underline{Z}_w , wie dies mit einer Grenzwertbetrachtung von (7.7) gezeigt werden kann.

7.3 Impedanztransformation des Reflexionsfaktors mit einer verlustbehafteten Leitung

Während die Transformation der Impedanz nach (7.7) keine einfache, mit "Kopfrechnung" abschätzbare Funktion ist, kann die Transformation sehr einfach dargestellt werden, wenn statt der Impedanz \underline{Z}_2 der entsprechende Reflexionsfaktor r_2 bezüglich der Wellenimpedanz \underline{Z}_w betrachtet wird. In Figur 7.5 ist der Reflexionsfaktor am Leitungsende r_2 und der auf den Leitungseingang transformierte Reflexionsfaktor r_1 dargestellt.



Figur 7.5 Wellen und Reflexionsfaktoren einer mit der Lastimpedanz \underline{Z}_2 belasteten Leitung. Transformation des Reflexionsfaktors.

Gemäss Definition (5.13) ist der Reflexionsfaktor r_2

$$r_2 = \frac{\underline{U}_{b2}}{\underline{U}_{a2}} = \frac{\underline{U}_b(l)}{\underline{U}_a(l)} = \frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_w}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_w} \quad (7.10)$$

Am Leitungseingang ist definitionsgemäß

$$r_1 = \frac{\underline{U}_{b1}}{\underline{U}_{a1}} \quad (7.11)$$

Nach (4.23) und (4.25) erfahren die hinlaufenden und die zurücklaufenden Wellen \underline{U}_a und \underline{U}_b auf der Leitung eine Dämpfung und Phasendrehung um $e^{-\gamma l}$. Damit kann r_1 in Funktion von r_2 geschrieben werden:

$$r_1 = \frac{\underline{U}_{b1}}{\underline{U}_{a1}} = \frac{\underline{U}_{b2} e^{-\gamma l}}{\underline{U}_{a2} e^{\gamma l}} = r_2 e^{-2\gamma l} \quad (7.12)$$

$$r_1 = r_2 e^{-2\gamma l} = r_2 e^{-2\alpha l} e^{-2j\beta l} \quad (7.13)$$

Bei einer Transformation des Reflexionsfaktors r_2 über eine Leitung auf den Reflexionsfaktor r_1 erfährt r_2 eine Phasendrehung um $2\beta l$ in negativer Richtung (Uhrzeigersinn) und eine Veränderung des Betrages um den Faktor $e^{-2\alpha l}$.

7.4 Impedanztransformation mit einer verlustfreien Leitung

Für die verlustfreie Leitung mit $\gamma l = j\beta l$ wird (7.7) zu

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_w \frac{\underline{Z}_2 + j \underline{Z}_w \tan \beta l}{\underline{Z}_w + j \underline{Z}_2 \tan \beta l} \quad (7.14)$$

$$\text{mit } \beta = 2\pi/\lambda \quad \underline{Z}_w = Z_w = \text{reell}$$

Diese Beziehung, die Transformation einer Impedanz über eine verlustfreie Leitung, spielt in der Schaltungstechnik eine sehr wichtige Rolle: jede Zuleitung mit einer mit der Wellenlänge λ vergleichbaren Länge wird also eine Lastimpedanz transformieren.

7.4.1 Der $\lambda/4$ -Transformer

Ein wichtiger Spezialfall der Transformation über eine verlustfreie Leitung ist die Transformation über eine Leitung der Länge $l = \lambda/4$. Die transformierte Impedanz \underline{Z}_1 ist für $\beta l = \pi/2$ nach (7.14):

$$Z_1 = \frac{\underline{Z}_w^2}{\underline{Z}_2} \quad (7.15)$$

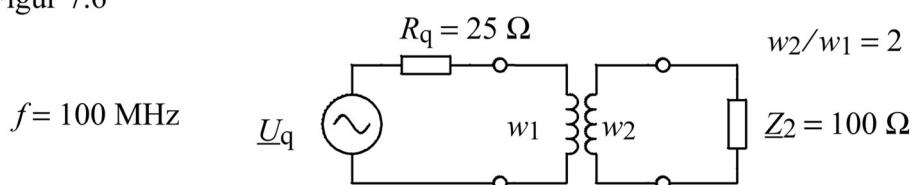
Der Nutzen des Viertelwellenlängen-Transformators ($\lambda/4$ -Transformators) wird am folgenden Beispiel aus der Praxis offensichtlich.

Beispiel:

Gegeben: ein Generator mit Quellenwiderstand $R_q = 25 \Omega$,
ein Lastwiderstand $\underline{Z}_2 = 100 \Omega$
betrachtete Signalfrequenz $f = 100 \text{ MHz}$ ($\lambda = 3 \text{ m}$)

Gesucht: eine Methode, um die Last leistungsmässig an den Generator anzupassen.

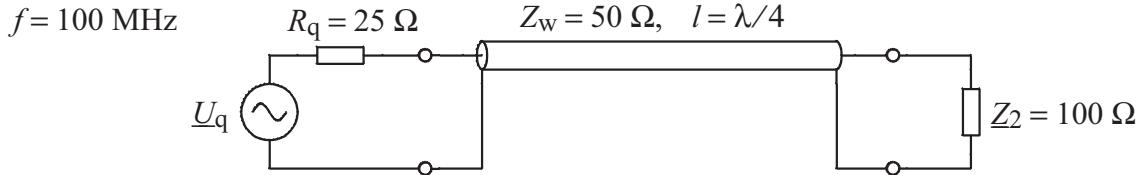
1. Lösung: Verwendung eines Transformators mit einem Windungsverhältnis $w_2/w_1 = 2$ nach Figur 7.6



Figur 7.6 Leistungsanpassung eines Generators an eine Last mittels eines Transformators

Diese Transformatorlösung ist recht aufwendig, zudem zeigen Transformatoren bei der Frequenz von 100 MHz erhebliche Verluste. Eine wesentlich einfachere und kostengünstigere Lösung ist:

2. Lösung: Verwendung eines $\lambda/4$ -Transformators nach Figur 7.7 .



Figur 7.7 Impedanztransformation mit einem $\lambda/4$ -Transformer

Damit der Generator mit einer Impedanz von 25Ω belastet wird, wird die Lastimpedanz Z_2 mit einem $\lambda/4$ -Transformer auf $Z_1 = 25 \Omega$ transformiert. Dies geschieht, wenn nach (7.7) die Wellenimpedanz $Z_w = \sqrt{Z_1 Z_2}$, in unserem Beispiel $Z_w = 50 \Omega$, gewählt wird.

Die elektrische Länge l des $\lambda/4$ -Transformators beträgt dabei $l = \lambda/4 = 75$ cm. Die gleiche Impedanztransformation tritt auch bei einer Leitungslänge auf, die einem ungeraden Vielfachen vom $\lambda/4$ entspricht: $l = \lambda/4, 3\lambda/4, 5\lambda/4 \dots$

7.4.2 Die $\lambda/2$ -Leitung

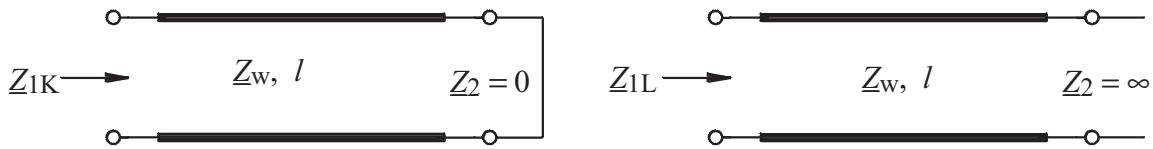
Als weiteren Spezialfall betrachten wir die Transformation über eine Leitung der Länge $\lambda/2$. Mit $\beta l = \pi$ wird Z_1 nach (7.14):

$$Z_1 = Z_2$$

Eine verlustlose Leitung der Länge $l = \lambda/2, \lambda, 3\lambda/2, \dots$ transformiert eine Impedanz Z_2 auf den gleichen Wert $Z_1 = Z_2$, unabhängig von der Wellenimpedanz Z_w .

7.4.3 Transformation von Leerlauf und Kurzschluss

Als weitere Spezialfälle der Transformationen von Impedanzen über verlustfreie Leitungen betrachten wir den transformierten Kurzschluss und den transformierten Leerlauf nach Figur 7.8 :



Figur 7.8 Transformation von Kurzschluss und Leerlauf über eine verlustfreie Leitung.

Beim Kurzschluss mit $Z_2 = 0$ wird nach (7.14) die Eingangsimpedanz:

$$Z_{1K} = j Z_w \tan \beta l \quad (7.16)$$

Beim Leerlauf mit $Z_2 = \infty$ wird die Eingangsimpedanz:

$$Z_{1L} = -j Z_w \cot \beta l \quad (7.17)$$

Dabei sind (zur Erinnerung): $\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v}$ $v = \lambda f = \frac{1}{\sqrt{L' C'}}$

Aus (7.16) und (7.17) folgt

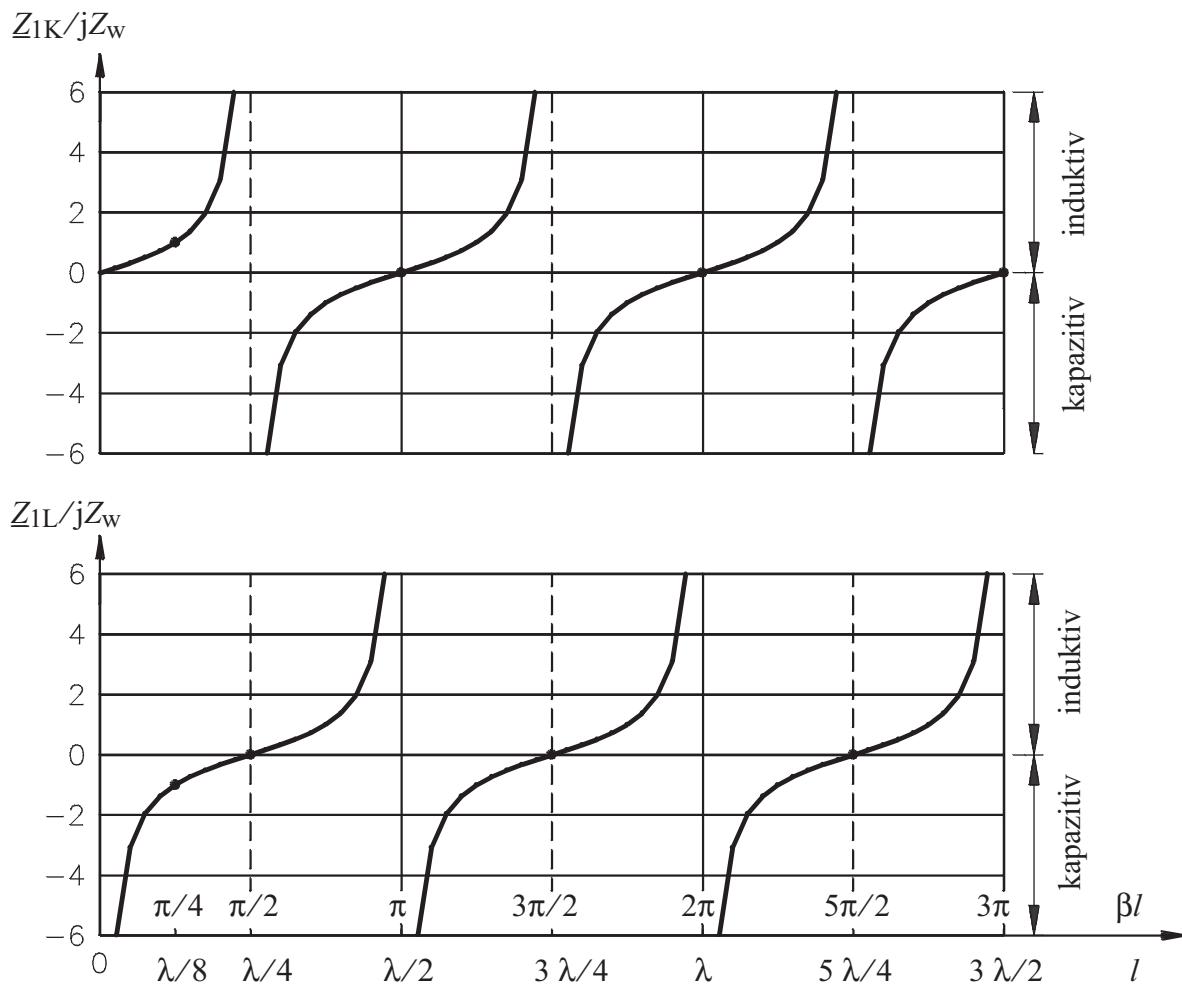
$$\underline{Z}_w = \sqrt{\underline{Z}_{1K} \underline{Z}_{1L}} \quad (7.18)$$

(7.18) gilt auch für verlustbehaftete Leitungen.

Für eine Leitungslänge $l = \lambda/8$ sind die Kurzschluss- und Leerlaufimpedanzen:

$$\underline{Z}_{1K} (l = \lambda/8) = j \underline{Z}_w \quad \underline{Z}_{1L} (l = \lambda/8) = -j \underline{Z}_w$$

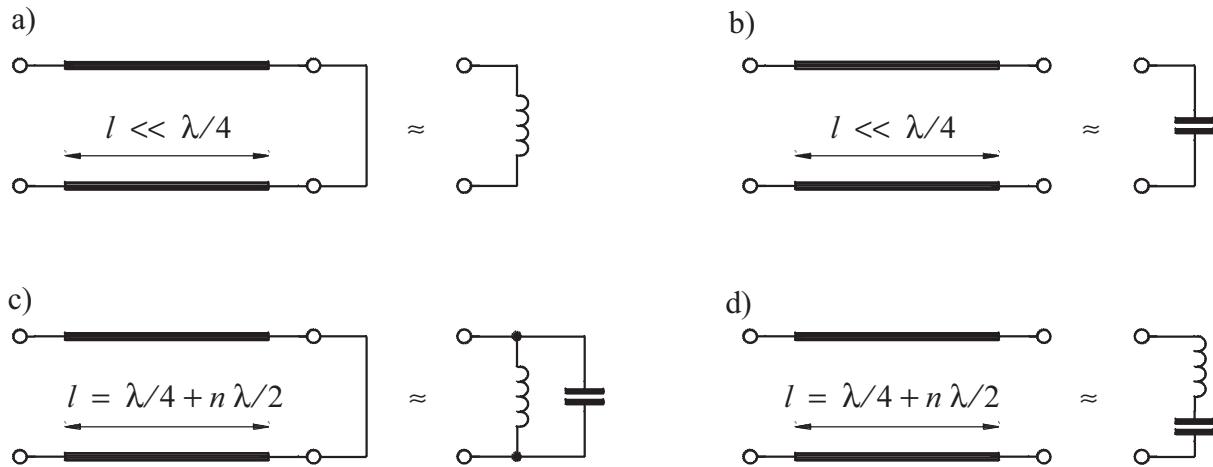
Die behandelten Spezialfälle des transformierten Kurzschlusses und des transformierten Leerlaufs haben gezeigt, dass je nach Leitungslänge \underline{Z}_1 induktiv ($\text{Im} [\underline{Z}_1] > 0$) oder kapazitiv ($\text{Im} [\underline{Z}_1] < 0$) sein kann. In Figur 7.8 sind die Impedanzen \underline{Z}_{1K} und \underline{Z}_{1L} in Funktion von βl bzw. l dargestellt.



Figur 7.9 Normierte transformierte Kurzschlussimpedanz und Leerlaufimpedanz in Funktion von βl bzw. l

Der Verlauf von \underline{Z}_{1K} und \underline{Z}_{1L} ist periodisch mit der Leitungslänge, mit der Periode $\Delta l = \lambda/2$ bzw. $\Delta \beta l = \pi$. Die Pole und Nullstellen von \underline{Z}_{1K} entsprechen Nullstellen und Polen von \underline{Z}_{1L} .

Figur 7.10 zeigt das elektrische Verhalten von kurzgeschlossenen und leerlaufenden Leitungen von verschiedenen Längen:



Figur 7.10 Das elektrische Verhalten von kurzgeschlossenen und leerlaufenden Leitungen der Längen $l \ll \lambda/4$ und $l = \lambda/4 + n \lambda/2$; $n = 0, 1, 2, \dots$

Figur 7.10 a) und b): für kurze Leitungslängen $l \ll \lambda/4$ verhält sich die kurzgeschlossene Leitung induktiv und die leerlaufende Leitung kapazitiv.

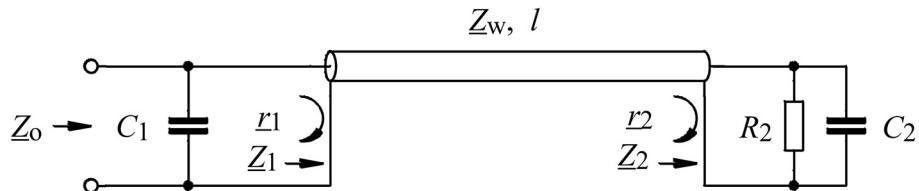
Figur 7.10 c) und d): für Leitungslängen $l = \lambda/4 + n \lambda/2$; $n = 0, 1, 2, \dots$ verhält sich die kurzgeschlossene Leitung wie ein Parallelresonanzkreis und die leerlaufende Leitung wie ein Serieresonanzkreis.

Das umgekehrte Verhalten finden wir für Leitungslängen $l = n \lambda/2$; $n = 1, 2, 3, \dots$

In der Hochfrequenztechnik spielen Leitungselemente dank handlicher Wellenlängen eine besonders wichtige Rolle: sie werden in allen Schaltungen, wie Anpassungen, Filter, Koppler usw. an Stelle von Induktivitäten, Kapazitäten, Serie- und Parallelresonanzkreisen eingesetzt.

8. Das Smith-Diagramm

Die Transformationen der Impedanz (7.7) und des Reflexionsfaktors (7.12) über eine Leitung zeigen, dass es, der einfachen Beziehung wegen, vorteilhaft wäre, mit dem Reflexionsfaktor r zu arbeiten. Wenn andererseits eine Leitung ein Teil eines Netzwerkes ist, das auch konzentrierte Elemente beinhaltet, dann kann nicht auf die Darstellung mit Impedanzen verzichtet werden, wie das folgende Beispiel zeigt:



Figur 8.1 Beispiel der Transformation von konzentrierten Elementen über eine Leitung.

Die Eingangsimpedanz Z_o der Schaltung nach Figur 8.1 kann mit folgendem Vorgehen ermittelt werden:

- Bestimmung der Lastimpedanz: $Z_2 = \frac{1}{1/R_2 + j\omega C_2}$

- Bestimmung des ausgangsseitigen Reflexionsfaktors: $r_2 = \frac{Z_2 - Z_w}{Z_2 + Z_w}$

- Transformation des Reflexionsfaktors auf die Eingangsseite: $r_1 = r_2 e^{-2\gamma l}$

- Bestimmung der Impedanz: $Z_1 = Z_w \frac{1 + r_1}{1 - r_1}$

- Bestimmung der Eingangsimpedanz: $Z_o = \frac{1}{1/Z_1 + j\omega C_1}$

In der Bestimmung der Impedanz Z_o wird also abgewechselt zwischen der Impedanz/Admittanz- sowie der Reflexionsfaktordarstellung. Der Wunsch nach einer schnellen, graphischen Umwandlung zwischen der Impedanz/Admittanz- sowie der Reflexionsfaktordarstellung ist also berechtigt und naheliegend. Das Smith-Diagramm erfüllt diesen Wunsch und es stellt ein einfaches Hilfsmittel dar zur Analyse von Schaltungen mit Leitungselementen.

Das Smith-Diagramm wurde zu einer Zeit erfunden, als von Taschenrechnern mit komplexen Funktionen nicht die Rede war. Heute wird schon die Schaltungsanalyse von einfachen Systemen numerisch vorgenommen. Das Smith-Diagramm bleibt aber weiterhin in Verwendung zur Darstellung und schnellen Umrechnung von Z und Y auf r .

Nach (5.14) ist der Reflexionsfaktor r

$$r = \xi + j\eta = \frac{Z - Z_w}{Z + Z_w} = \frac{z - 1}{z + 1} \quad (8.1)$$

mit z : normierte Impedanz $z = u + jv = \frac{Z}{Z_w} = \frac{\text{Abschlussimpedanz}}{\text{Wellenimpedanz}}$

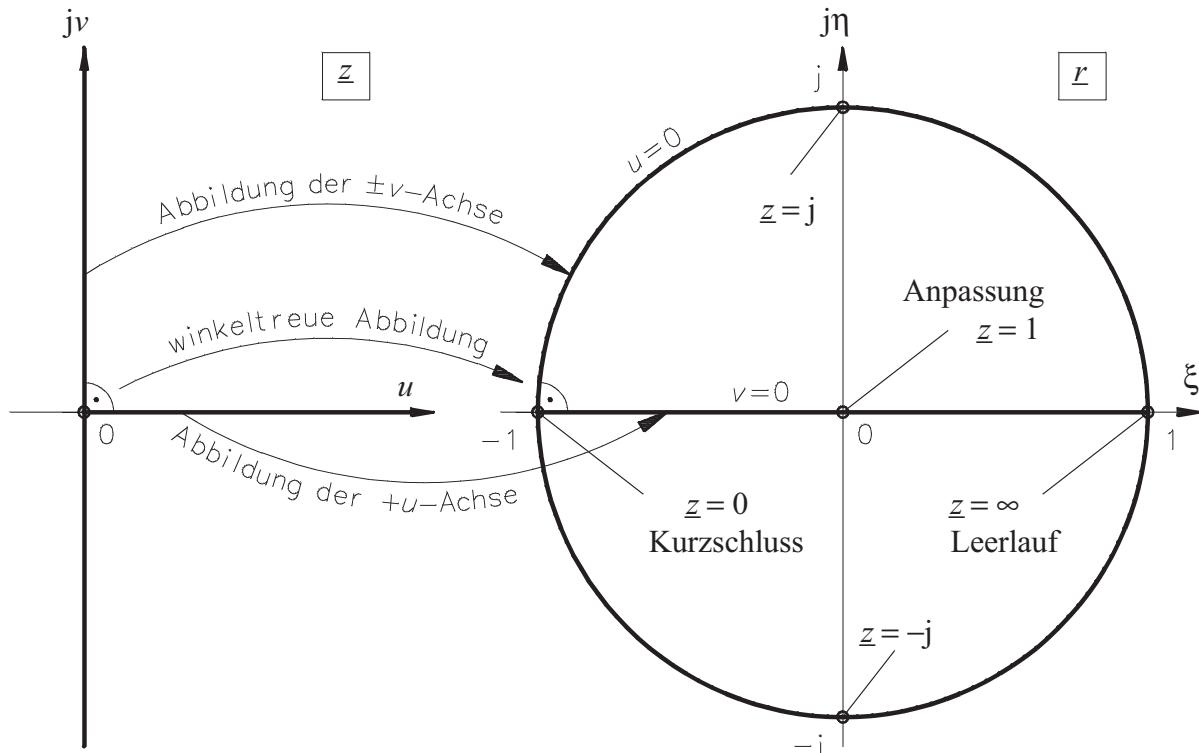
Der Reflexionsfaktor ist also eine bilineare Abbildung (Möbius-Transformation) der normierten Impedanz \underline{z} . Bei allen praktischen Anwendungen ist dabei die Bezugs- oder Wellenimpedanz Z_w rein reell.

Das Smith-Diagramm ist die Abbildung der komplexen \underline{z} -Ebene in die komplexe \underline{r} -Ebene:

$$\underline{r} = \xi + j\eta = \frac{\underline{z} - 1}{\underline{z} + 1} \quad (8.2)$$

8.1 Eigenschaften des Smith-Diagrams

Figur 8.2 zeigt die Abbildung der Koordinatenachsen der komplexen Ebene der normierten Impedanz \underline{z} in der komplexen Ebene des Reflexionsfaktors \underline{r} .



Figur 8.2 Abbildung der positiven reellen Achse u und der imaginären Achse v der normierten Impedanz \underline{z} in der komplexen Ebene des Reflexionsfaktors \underline{r} .

a) Abbildung der positiv reellen Achse $\underline{z} = u + jv$ mit $u = 0 \dots \infty$ und $v = 0$

$$\underline{r} = \xi + j\eta = \frac{u - 1}{u + 1} = -1 \dots +1 \quad (8.3)$$

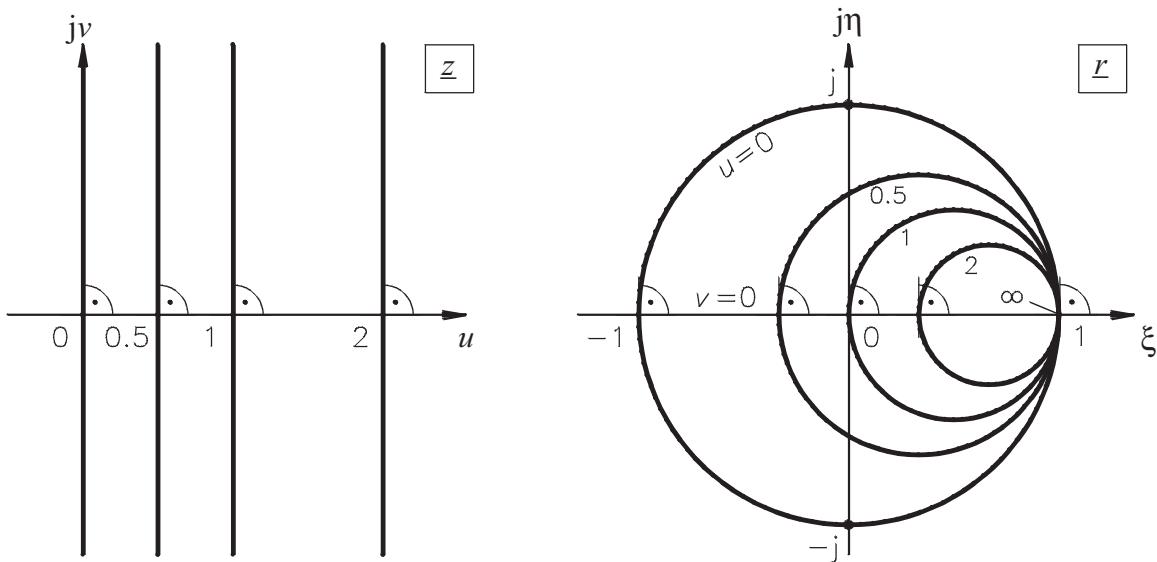
Die positiv reelle Achse von der \underline{z} -Ebene wird also in die Strecke $-1 < \underline{r} < +1$ abgebildet.

b) Abbildung der imaginären Achse $\underline{z} = u + jv$ mit $u = 0$ und $v = -\infty \dots \infty$

$$\underline{r} = \frac{jv - 1}{jv + 1} \quad (8.4)$$

Da nach der obigen Gleichung $|\underline{r}| = 1$, wird die imaginäre Achse der \underline{z} -Ebene in den Einheitskreis der \underline{r} -Ebene abgebildet.

In Abbildung nach Figur 8.2 zeigt sich eine weitere bekannte Eigenschaft von konformen Abbildungen: der rechte Winkel zwischen den Achsen der \underline{z} -Ebene bleibt in der Abbildung erhalten, d.h. der Einheitskreis (Abbildung von $\underline{z} = jv = -j\infty \dots j\infty$) und die Strecke $-1 < \underline{r} < +1$ (Abbildung von $\underline{z} = u = 0 \dots \infty$) schneiden sich unter einem rechten Winkel. Figur 8.3 zeigt die Abbildung der Geradenschar $\underline{z} = u + jv$ mit $u = \text{konstant}$ in der \underline{r} -Ebene.



Figur 8.3 Abbildung der Geradenschar $\underline{z} = u + jv$ der normierten Impedanz \underline{z} mit $u = \text{konstant}$ in der komplexen Ebene des Reflexionsfaktors \underline{r} .

Die Geraden $u = \text{konstant}$ gehen in Kreise mit Mittelpunkten auf der ξ -Achse über.

Punkt $\underline{z} = u + j0$ wird abgebildet in $\underline{r} = \xi = \frac{u - 1}{u + 1}, \eta = 0$

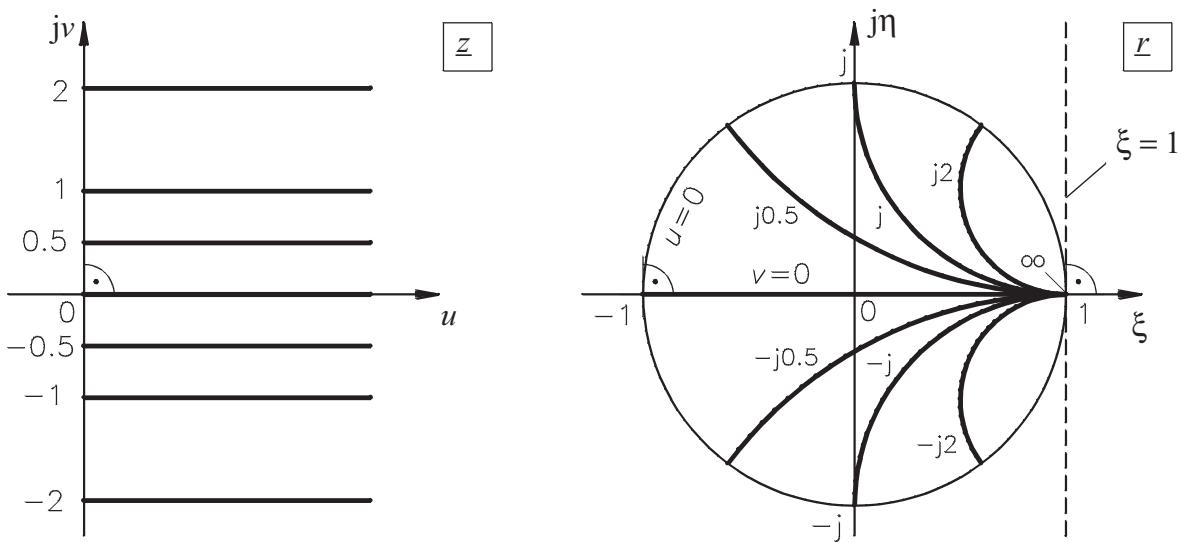
Punkt $\underline{z} = u \pm j\infty$ wird abgebildet in $\underline{r} = \xi = 1, \eta = 0$

Figur 8.4 zeigt die Abbildung der Geradenschar $\underline{z} = u + jv$ mit $v = \text{konstant}$ in der \underline{r} -Ebene. Sie besteht aus Kreisen mit Mittelpunkten auf der Geraden $\xi = 1$. Diese Kreise gehen durch $r = 1$ und schneiden den Einheitskreis rechtwinklig.

Es gilt allgemein:

$$\underline{r} = \xi + j\eta = \frac{\underline{z} - 1}{\underline{z} + 1} = \frac{u + jv - 1}{u + jv + 1} \quad (8.5)$$

$$\underline{z} = u + jv = \frac{1 + \underline{r}}{1 - \underline{r}} = \frac{1 + \xi + j\eta}{1 - \xi - j\eta} \quad (8.6)$$



Figur 8.4 Abbildung der Geradenschar $\underline{z} = u + jv$ der normierten Impedanz \underline{z} mit $v = \text{konstant}$ in der komplexen Ebene des Reflexionsfaktors \underline{r} .

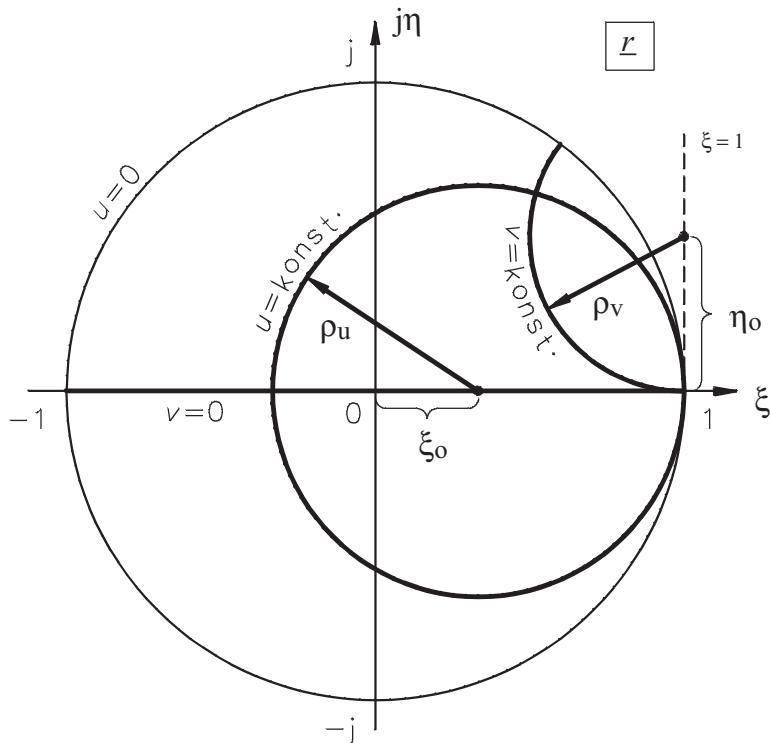
Nach u und v aufgelöst durch Zerlegung in Real- und Imaginärteile :

$$u = \frac{1 - (\xi^2 + \eta^2)}{(1 - \xi)^2 + \eta^2} \quad v = \frac{2\eta}{(1 - \xi)^2 + \eta^2} \quad (8.7)$$

Daraus finden wir die Gleichungen der Kreisscharen für $u = \text{konstant}$ und $v = \text{konstant}$

$$(\xi - \xi_0)^2 + \eta^2 = \rho_u^2 \quad (\xi - 1)^2 + (\eta - \eta_0)^2 = \rho_v^2 \quad (8.8)$$

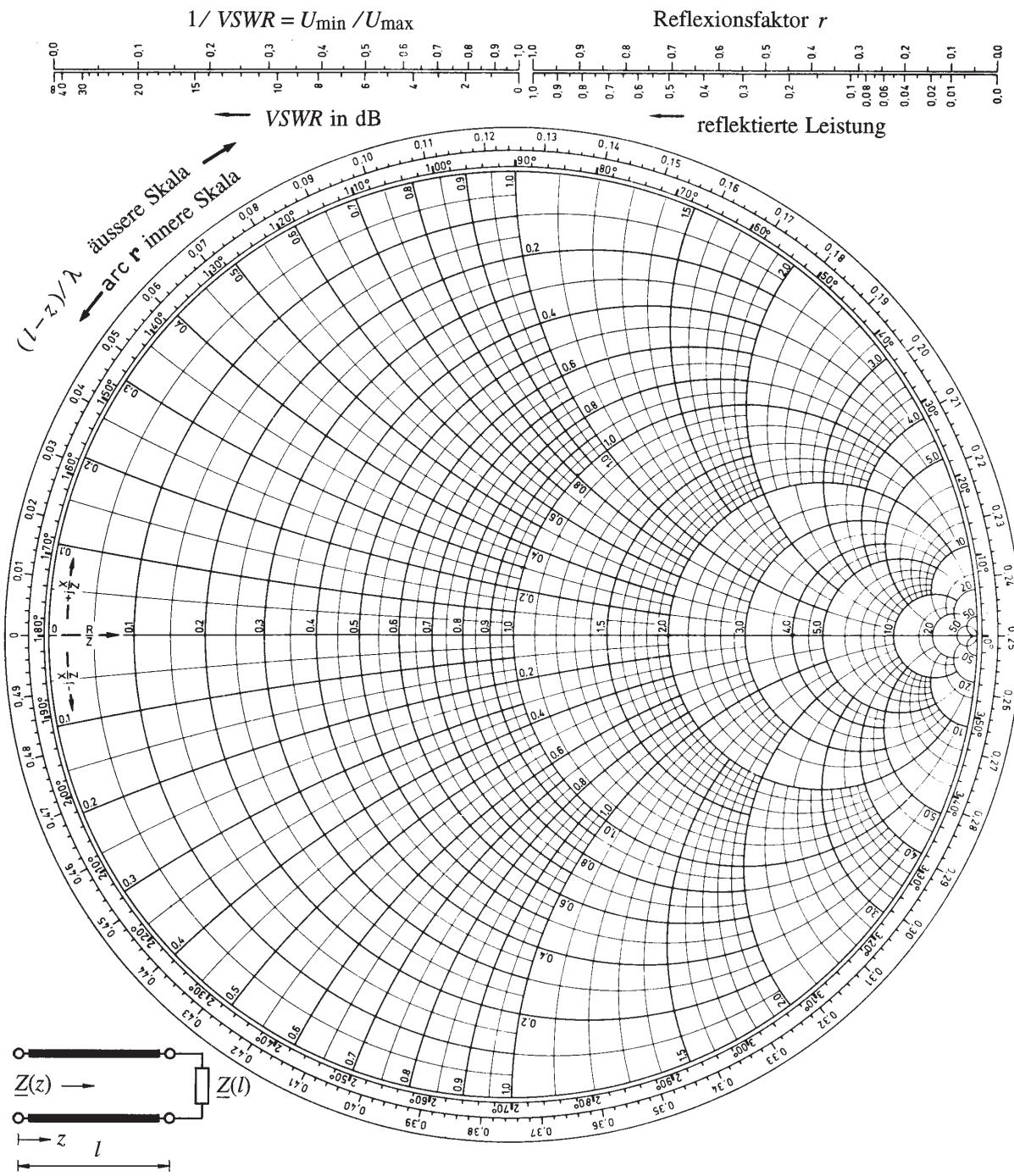
$$\text{mit } \xi_0 = \frac{u}{1+u} \quad \rho_u = \frac{1}{1+u} \text{ und } \eta_0 = \rho_v = \frac{1}{v} \quad (8.9)$$



Figur 8.5 Kreisscharen im Smith-Diagramm für $u = \text{konstant}$ und $v = \text{konstant}$.

Wie Figur 8.5 veranschaulicht, wird durch (8.8) der passive Bereich d. h. die rechte Hälfte der \underline{z} -Ebene ($\operatorname{Re}[\underline{z}] > 0$) in das Innere des Einheitskreises der \underline{r} Ebene abgebildet.

Figur 8.6 zeigt das Smith-Diagramm in der Form, wie es in der Praxis angewendet wird.



Figur 8.6 Smith-Diagramm für den praktischen Gebrauch.

8.2 Anwendungen des Smith-Diagramms

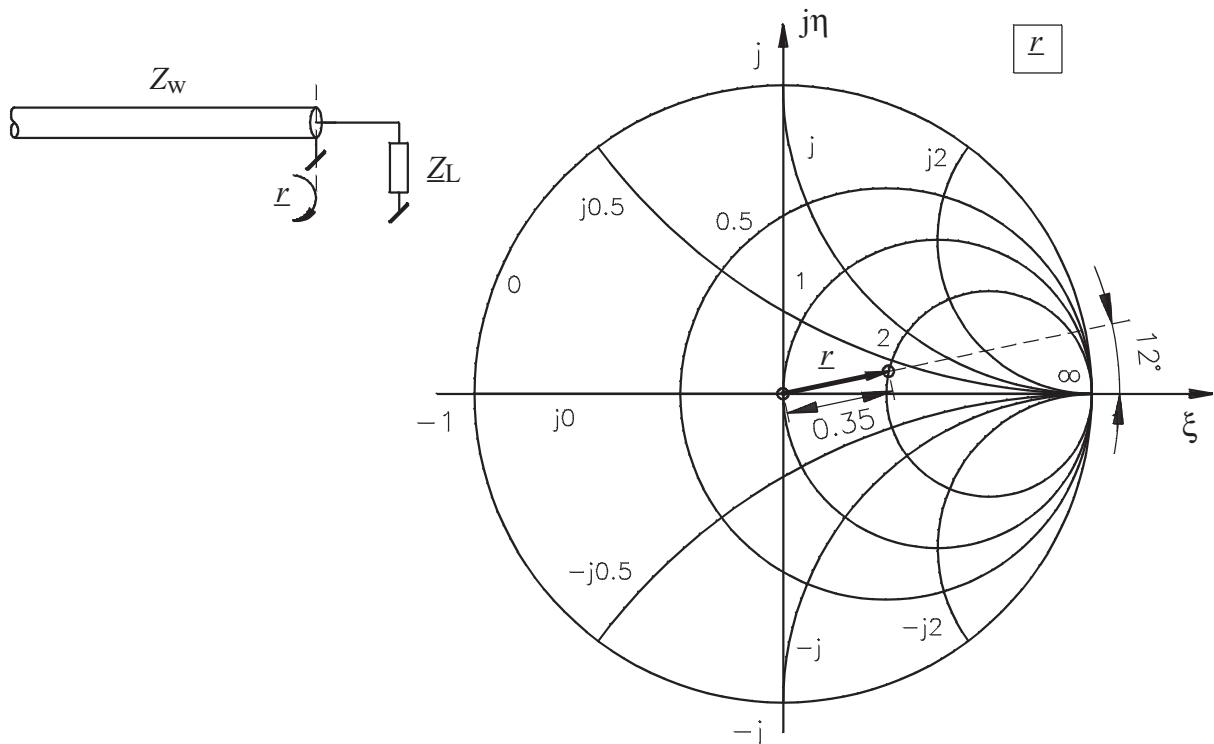
8.2.1 Umwandlung zwischen Impedanz und Reflexionsfaktor

Beispiel 1:

Bestimmung des Reflexionsfaktors \underline{r} einer Impedanz Z_L bezüglich der Wellenimpedanz Z_w

Leitung: Koaxialkabel für Fernsehen mit $Z_w = 75 \Omega$

Abschlussimpedanz der Leitung: $Z_L = 150 \Omega + j 25 \Omega$



Figur 8.7 Bestimmung des Reflexionsfaktors \underline{r} aus dem Smith-Diagramm

Mit Hilfe des Smith-Diagramms nach Figur 8.7 löst man die Aufgabe graphisch wie folgt:

1. Berechnung der auf Z_w normierten Impedanz \underline{z} :

$$\underline{z} = \frac{Z_L}{Z_w} = 2 + j 0.33 \quad (8.10)$$

2. Eintragen des Wertes von \underline{z} in das Koordinatennetz des Smith-Diagramms

3. Bestimmung des Reflexionsfaktors \underline{r} durch Ausmessen der Koordinaten:

$$|\underline{r}| = 0.35 \quad (8.11)$$

$$\angle \underline{r} = 12^\circ \quad (8.12)$$

8.2.2 Bestimmung des Reflexionsfaktors entlang einer Leitung

Nach (7.13) transformiert sich der Reflexionsfaktor \underline{r} in Abhängigkeit der Ortskoordinate z :

$$\underline{r}(z) = \underline{r}(l) e^{-2\gamma(l-z)} = \underline{r}(l) e^{-2\alpha \Delta z} e^{-2j\beta \Delta z} \quad (8.13)$$

mit $\Delta z = l - z$.

Beispiel 2: verlustlose Leitung

Für den Fall der verlustlosen Leitung ($\alpha = 0$) bewirkt (8.13) im Smith-Diagramm nur eine Drehung des Reflexionsfaktors um den Winkel

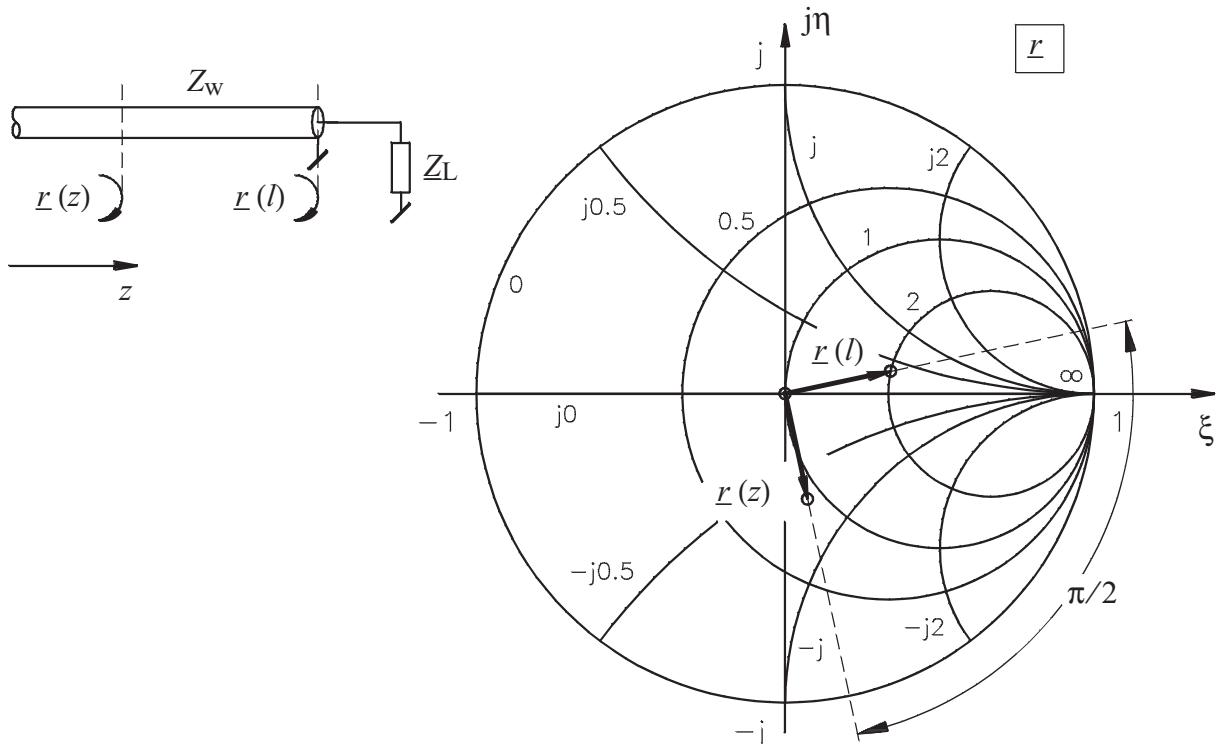
$$-2\beta \Delta z = -4\pi \Delta z / \lambda \quad (8.14)$$

Wenn wir unser Beispiel 1 weiterführen und uns für den Reflexionsfaktor $\underline{r}(z)$ interessieren, den wir in einer Distanz von $\Delta z = l - z = \lambda/8$ von der Abschlussimpedanz messen würden, dann entspricht diese Verschiebung einer Phasendrehung des Reflexionsfaktors um

$$-2 \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{8} = -\frac{\pi}{2} \quad (8.15)$$

Damit wird $\underline{r}(z) = 0.35 \angle 12^\circ - 90^\circ = 0.35 \angle -78^\circ$

Die Phasendrehung des Reflexionsfaktors ist in Figur 8.8 dargestellt.



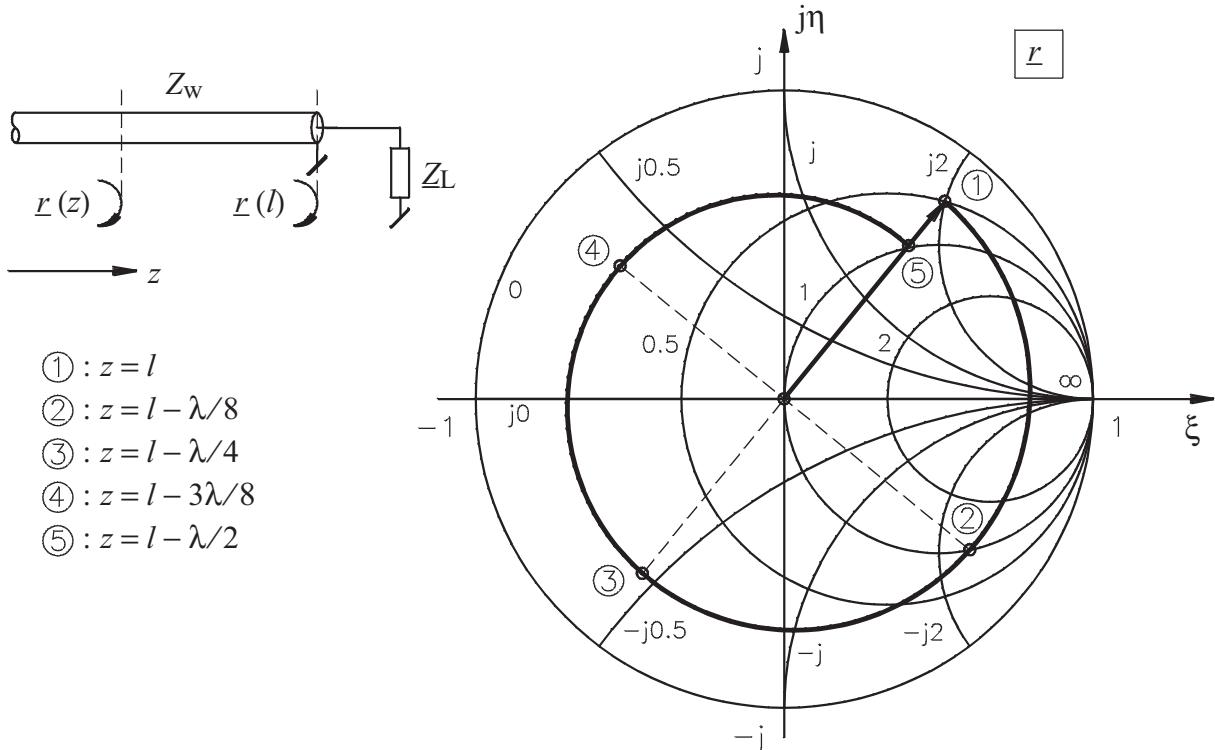
Figur 8.8 Transformation des Reflexionsfaktors \underline{r} entlang einer verlustlosen Leitung für eine Distanz von $\Delta z = \lambda/8$.

Wir entnehmen aus dieser Darstellung auch die transformierte Impedanz $\underline{Z}(z)$

$$\underline{Z}(z) = (0.95 - j 0.75) \cdot 75 \Omega = 71.25 \Omega - j 56.25 \Omega$$

Beispiel 3: verlustbehaftete Leitung

Für den Fall der verlustbehafteten Leitung ($\alpha > 0$) erfährt der Reflexionsfaktor nach (8.13) zusätzlich zur Drehung noch eine Reduktion seines Betrages um den Faktor $e^{2\alpha(l-z)}$. Figur 8.9 zeigt als Beispiel die Transformation der normierten Impedanz $\underline{z}(l) = 0.5 + j2$ über eine Leitung mit einem Dämpfungsbelag $\alpha = 0.25/\lambda$.



Figur 8.9 Transformation des Reflexionsfaktors r entlang einer verlustbehafteten Leitung

Aus dem Smith-Diagramm wird für die normierte Impedanz $\underline{z}(l)$ ein Reflexionsfaktor $r(l) = 0.825 \angle 51^\circ$ abgelesen. Durch Transformation dieses Reflexionsfaktors mit (8.13) für verschiedene Werte von z erhalten wir

z	l	$l - \lambda/8$	$l - \lambda/4$	$l - 3\lambda/8$	$l - \lambda/2$
r	$0.825 \angle 51^\circ$	$0.775 \angle -39^\circ$	$0.728 \angle -129^\circ$	$0.684 \angle 141^\circ$	$0.643 \angle 51^\circ$

8.2.3 Umwandlung zwischen Admittanz und Reflexionsfaktor

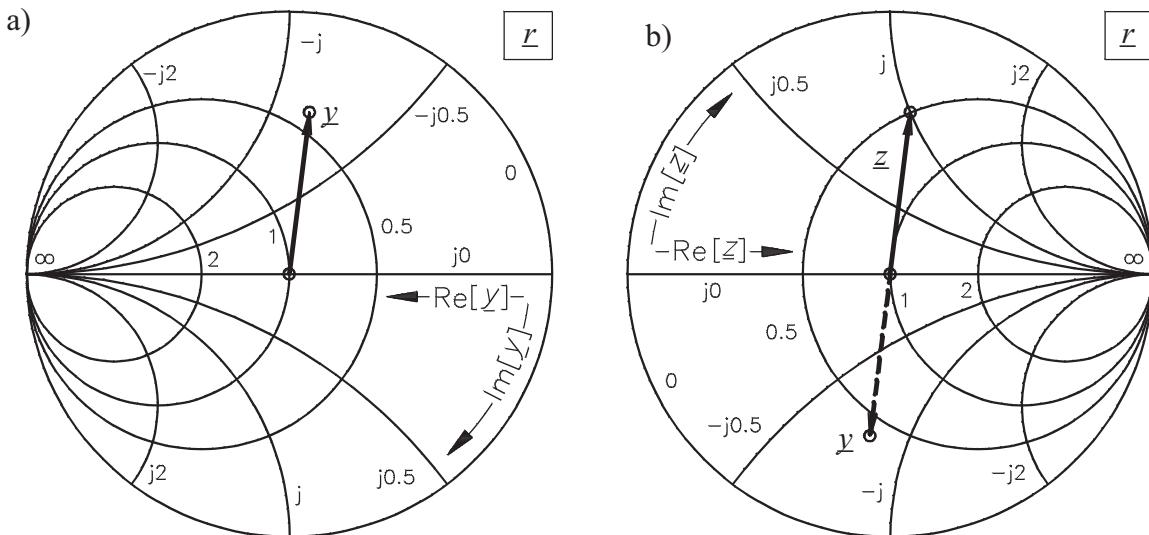
Mit der normierten Impedanz $\underline{z} = \underline{Z}/\underline{Z}_w$ und normierten Admittanz $\underline{y} = \underline{Y}/\underline{Y}_w = 1/\underline{z}$ ist nach (8.2)

$$r = \frac{\underline{z} - 1}{\underline{z} + 1} = -\frac{\underline{y} - 1}{\underline{y} + 1} \quad (8.16)$$

Die Abbildung $r(y)$ entspricht also der Abbildung von $-r(z)$.

Die Abbildung $r(y)$ entspricht der mit -1 multiplizierten Abbildung $r(z)$,
d.h. das um 180° gedrehte Smith-Diagramm liefert die Abbildung $r(y)$.

Figur 8.10 a) zeigt ein Ablesebeispiel eines Reflexionsfaktors als Funktion einer normierten Admittanz mit Hilfe des um 180° gedrehten Smith-Diagramms.

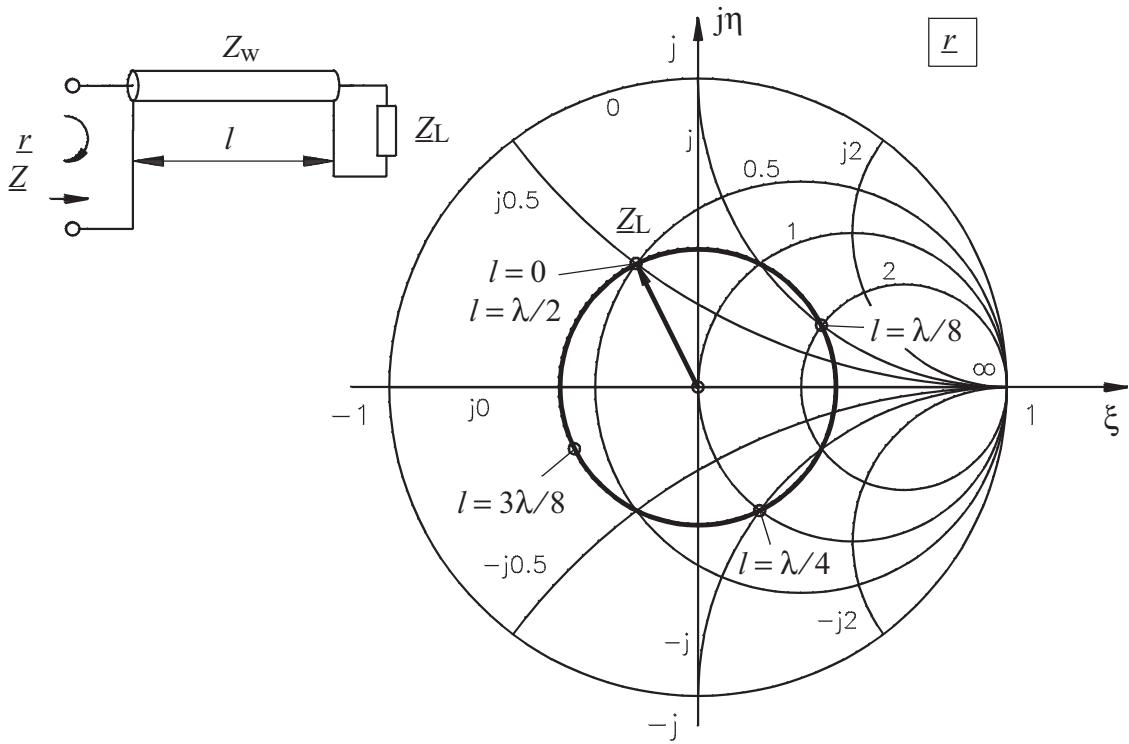


Figur 8.10 Graphische Methoden zur Konversion zwischen normierter Admittanz y , Reflexionsfaktor r und normierter Impedanz z .
 a) Drehung des Smith-Diagramms um 180° gibt die Abbildung der komplexen y -Ebene in die komplexe r -Ebene.
 b) Drehung von r um 180° zur Ablesung von y im Smith-Diagramm.

Da sich die Abbildungen von $r(z)$ und $r(y) = r(1/z)$ nur durch das Vorzeichen unterscheiden, kann das Smith-Diagramm auch zur Bildung des reziproken Wertes einer komplexen Zahl oder zur Umwandlung einer normierten Impedanz in eine Admittanz verwendet werden. Ausgehend von einer normierten Impedanz z wird im Smith-Diagramm der zugehörige Reflexionsfaktor r bestimmt. Der mit -1 multiplizierte Reflexionsfaktor r führt im Smith-Diagramm zur Ablesung des Wertes y , dem zu z reziproken Wert. Figur 8.10 b) veranschaulicht dieses Verfahren.

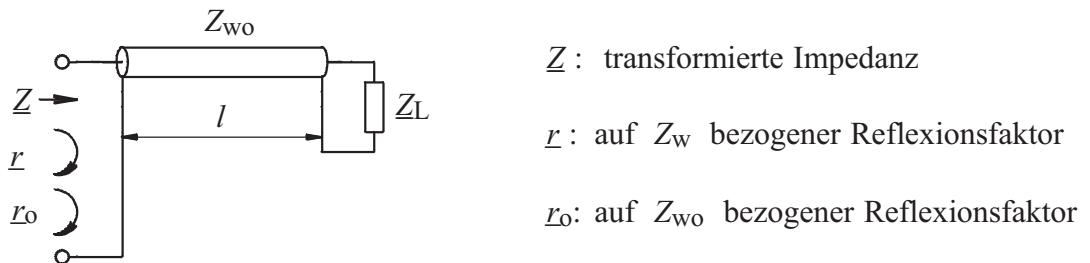
8.2.4 Die Lösung von Anpassungsproblemen mit dem Smith-Diagramm

Nach (8.14) erfährt der Reflexionsfaktor r entlang einer verlustfreien Leitung eine Drehung um den Winkel $-4\pi\Delta z/\lambda$, wobei $\Delta z = l - z$ der Abstand zwischen der Messebene und der Abschlussimpedanz Z_L ist. Wie aus Figur 8.11 ersichtlich ist, kann mittels einer verlustfreien Leitung mit der Wellenimpedanz Z_w jede Impedanz, die einen Reflexionsfaktor des Betrages r bezüglich Z_w in irgend eine andere Impedanz mit unverändertem Betrag des Reflexionsfaktors r überführt werden. Die benötigte Leitungslänge ist $l < \lambda/2$.



Figur 8.11 Transformation einer Impedanz über eine Leitung mit Wellenimpedanz Z_w = Referenzimpedanz des Reflexionsfaktors.

Für eine allgemeine Transformation stellt sich die Frage, wie sich der Reflexionsfaktor r , der auf eine reelle Referenzimpedanz Z_w bezogen ist, verhält, wenn die Transformation über eine Leitung mit einer Wellenimpedanz $Z_{wo} \neq Z_w$ erfolgt, wie dies in Figur 8.12 dargestellt ist.



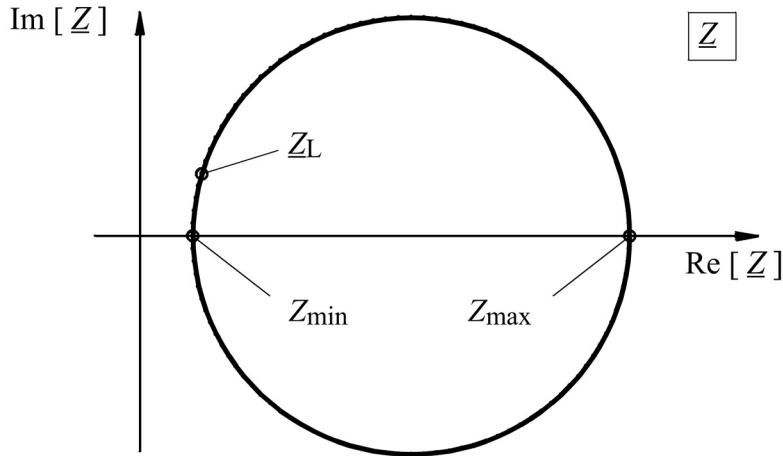
Figur 8.12 Transformation eines auf die reelle Referenzimpedanz Z_w bezogenen Reflexionsfaktors r über eine Leitung mit der Wellenimpedanz $Z_{wo} \neq Z_w$.

Für die Transformation einer Impedanz \underline{Z}_L über eine verlustfreie Leitung der Wellenimpedanz Z_{wo} und der Länge l gilt nach (7.14):

$$\underline{Z} = Z_{wo} \frac{\underline{Z}_L + j Z_{wo} \tan \beta l}{Z_{wo} + j \underline{Z}_L \tan \beta l} \quad (8.17)$$

mit $\beta = 2\pi/\lambda$

Die Funktion $\underline{Z}(l)$ stellt einen Kreis mit Mittelpunkt auf der reellen \underline{Z} -Achse dar, wie in Figur 8.13 dargestellt.



Figur 8.13 Kreisförmige Ortskurve $\underline{Z}(l)$ der über eine Leitung der Wellenimpedanz Z_{wo} und Länge l transformierte Impedanz \underline{Z}_L .

Um die Richtigkeit der Ortskurve nach Figur 8.13 zu beweisen, schreiben wir (8.17) mit Z_{min} als reeller Abschlussimpedanz.

$$(8.18) \quad \underline{Z} = Z_{wo} \frac{\underline{Z}_L + j Z_{wo} \tan \beta l}{Z_{wo} + j \underline{Z}_L \tan \beta l} = Z_{wo} \frac{Z_{min} + j Z_{wo} \tan \beta (l - l_{min})}{Z_{wo} + j Z_{min} \tan \beta (l - l_{min})} = Z_{wo} \frac{Z_{min} + j Z_{wo} \cdot x}{Z_{wo} + j Z_{min} \cdot x}$$

mit $x = \tan \beta (l - l_{min})$

Bekanntlich ist die Inversion einer Gerade ein Kreis. Es ist nur noch zu zeigen, dass der Kreismittelpunkt auf der $\text{Re } [\underline{Z}]$ -Achse liegt, d. h. dass die konjugiert komplexen Werte $\underline{Z}^*(x)$ von $\underline{Z}(x)$ ebenfalls auf dem Kreis liegen. Dies ist der Fall, da nach (8.18) der konjugiert komplexe Wert $\underline{Z}^*(x) = \underline{Z}(-x)$ ist.

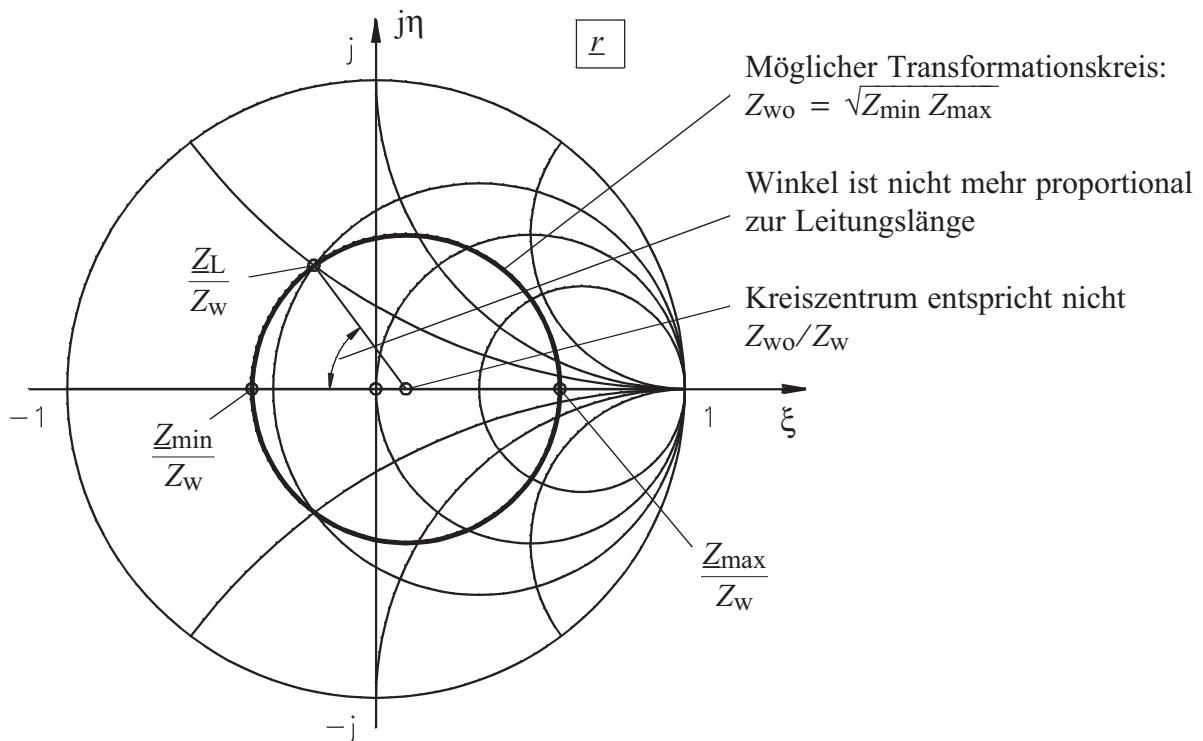
Aus (8.18) gilt ferner:

$$(8.19) \quad Z_{wo} = \sqrt{Z_{min} Z_{max}}$$

Jeder vollständig in der rechten Halbebene liegende Kreis mit dem Mittelpunkt auf der reellen Achse $\text{Re } [\underline{Z}]$ stellt einen möglichen Transformationskreis dar. Diese Transformationskreise schneiden die $\text{Re } [\underline{Z}]$ -Achse bei den Werten Z_{min} und Z_{max} . Mit der gewählten Leitungswellenimpedanz kann also die reelle Impedanz Z_{min} auf Z_{max} transformiert werden. Nach (8.18) wird für eine Leitungslänge $l = l_{min} + n \lambda/4$ ($n = \text{ungerade Zahl}$) eine reelle Impedanz Z_{min} in eine reelle Impedanz Z_{max} transformiert.

Wird nun der Transformationskreis von der \underline{Z} -Ebene in ein Smith-Diagramm mit beliebiger reeller Bezugsimpedanz Z_w abgebildet, dann wird die Kreisform erhalten bleiben und alle möglichen Transformationskreise sind wiederum symmetrisch zur reellen Achse. Dies folgt aus der kreis- und winkeltreuen Abbildung der Möbius-Transformation. Danach muss bei der Transformation der rechte Winkel der Tangenten in den Punkten Z_{min} und Z_{max} zur reellen Achse erhalten bleiben. Dies bedeutet, dass der Kreismittelpunkt auf der reellen Achse liegen muss.

Figur 8.14 zeigt einen Transformationskreis im Smith-Diagramm.



Figur 8.14 Transformation einer Impedanz \underline{Z}_L über eine Leitung mit Wellenimpedanz $Z_{wo} \neq$ Referenzimpedanz Z_w .

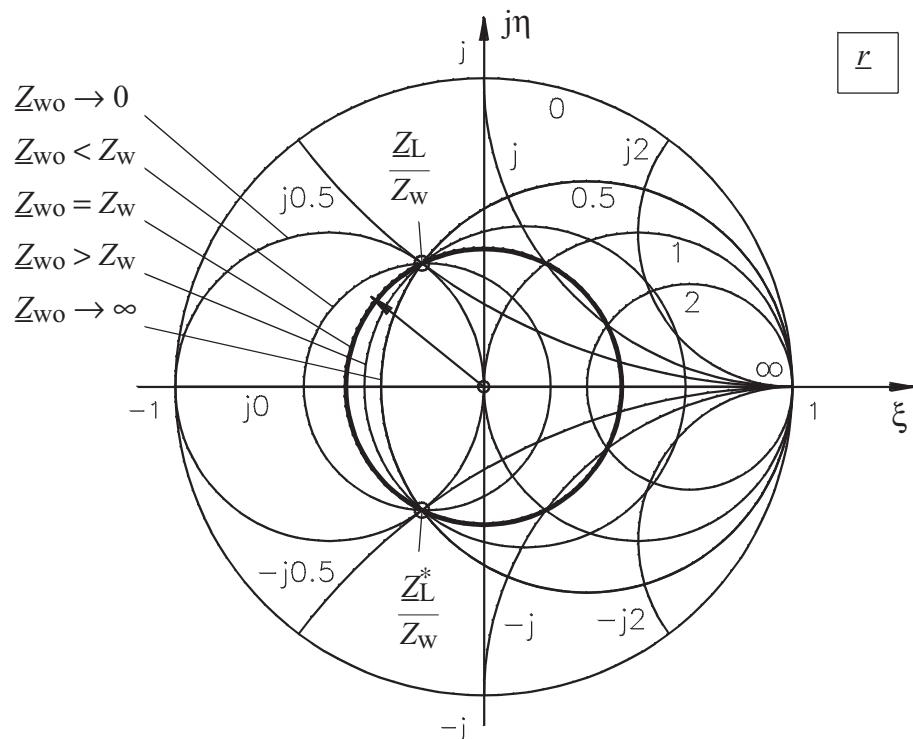
Wenn die Bezugsimpedanz Z_w des Smith-Diagramms nicht gleich der Wellenimpedanz Z_{wo} der Transformationsleitung ist, dann ist der Transformationskreis nicht mehr zentrisch im Smith-Diagramm. Wie in Figur 8.13 kann auch in Figur 8.14, die Wellenimpedanz Z_{wo} der Transformationsleitung aus den Schnittpunkten des Transformationskreises mit der reellen Achse ermittelt werden:

$$Z_{wo} = \sqrt{Z_{min} Z_{max}} = Z_w \sqrt{\frac{Z_{min}}{Z_w} \cdot \frac{Z_{max}}{Z_w}} \quad (8.20)$$

Bei Figur 8.14 ist zu beachten, dass die elektrische Länge auf dem exzentrischen Transformationskreis nicht mehr proportional zur Kreisbogenlänge ist wie in Figur 8.11. Auch entspricht das Kreiszentrum nicht der Wellenimpedanz Z_{wo} der Transformationsleitung.

Die exakte Länge der Transformationsleitung wird bestimmt, indem entsprechend der Darstellung nach Figur 8.8 die ganze Transformation in ein Smith-Diagramm mit der Normierungsimpedanz Z_{wo} gemäss (8.18) gezeichnet wird.

Figur 8.15 zeigt den möglichen Transformationsbereich einer Impedanz \underline{Z}_L über eine Leitung für verschiedene Wellenimpedanzen Z_{wo} .



Figur 8.15 Möglicher Transformationsbereich im Smith-Diagramm einer Impedanz \underline{Z}_L über eine Leitung mit Wellenimpedanz $Z_{wo} \neq$ Referenzimpedanz Z_w .

9. Leitungstypen

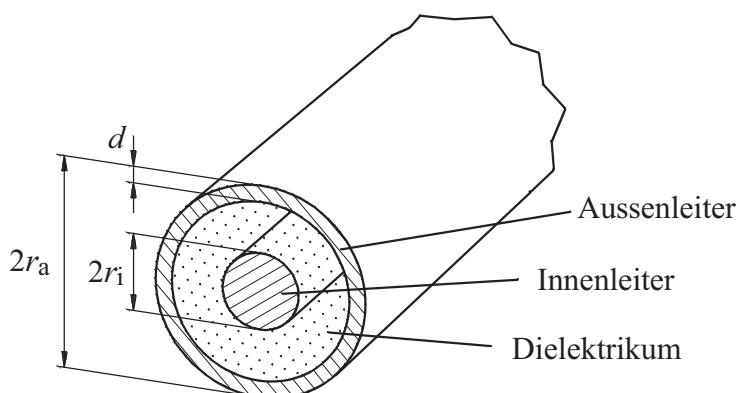
In den bisherigen Betrachtungen von Leitungen wurde nur von den primären Leitungskonstanten L' , C' , R' und G' ausgegangen und darauf aufbauend das elektrischen Verhalten untersucht. Die technische Realisierung von Leitungen und deren Eigenschaften wurden bisher noch nicht behandelt. Von den Leitungen, die den untersuchten TEM-Wellentyp führen, sind hauptsächlich folgende von technischem Interesse:

Koaxialleitung, Zweidrahtleitung und Streifenleitung

Für diese Leitungstypen sollen die primären Leitungsparameter bestimmt werden. Dabei zeigt es sich, dass je nach Frequenzbereich gewisse Vereinfachungen gemacht werden können. Von ganz besonderer Bedeutung ist dabei der Einfluss des Skineffektes (Stromverdrängungseffekt bei hohen Frequenzen), der die Leitungsdämpfung mit zunehmender Frequenz zunehmen lässt. Für die Leitungstypen Koaxialleitung und Zweidrahtleitung können die Leitungsparameter mit kleinem mathematischem Aufwand bestimmt werden. Für Mikrostreifenleitungen, namentlich mit endlicher Metallisierungsdicke, sind numerische Feldberechnungsmethoden erforderlich.

9. 1 Die Koaxialleitung

Die Koaxialleitung spielt technisch eine sehr bedeutende Rolle, sowohl für die Energieübertragung wie auch für die Kommunikationstechnik. Figur 9.1 zeigt den Aufbau eines Koaxialkabels, das mit verschiedenen Techniken gefertigt wird:



Figur 9.1 Aufbau eines Koaxialkabels.

Der Außenleiter besteht aus einem Geflecht, einer gewickelten Folie oder ist ein solides Rohr, meist aus Kupfer (eventuell versilbert) oder Aluminium. Der Innenleiter ist entweder massiv oder besteht aus verdrillten Drähten, meist aus versilbertem Kupfer.

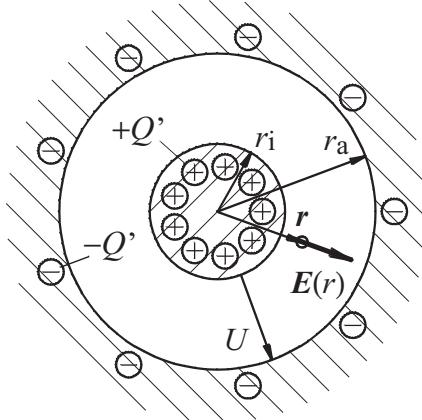
Das Dielektrikum ist entweder Luft (mit Stützscheiben oder Wendel zur Fixierung des Innenleiters) oder ein organischer Polymer (Polyäthylen (PE), Polytetrafluorethylen (PTFE), Polystyrol). Telefonkabel sind teilweise mit ölgetränktem Papier isoliert.

Die relativen Dielektrizitätskonstanten ϵ_r sind:

Polyäthylen:	2.4 ... 2.6
Teflon (PTFE):	2.1
Polystyrol und Polystren:	2.5 ... 2.6
geschäumte Stoffe:	1.02 ... 1.24

9.1.1 Berechnung der Leitungskapazität

Zur Berechnung der Leitungskapazität betrachten wir Figur 9.2



Figur 9.2 Zur Bestimmung des Kapazitätsbelags C'

Definitionsgemäss ist der Kapazitätsbelag C'

$$C' = \frac{Q'}{U} = \text{Ladungsbelag / Spannung zwischen Innen- und Aussenleiter}$$

Mit einem Ladungsbelag Q' ist die elektrische Verschiebung D auf dem Innenleiter

$$D(r_i) = \frac{Q'}{2\pi r_i} \quad (9.1)$$

mit r_i : Innenleiterradius

Die elektrische Verschiebung D im Isolator ist proportional zu $1/r$.

$$D(r) = D(r_i) \frac{r_i}{r} = \frac{Q'}{2\pi r} \quad (9.2)$$

Die zugehörige elektrische Feldstärke $E(r)$ ist

$$E(r) = \frac{D(r)}{\epsilon} = \frac{D(r)}{\epsilon_0 \epsilon_r} \quad (9.3)$$

Die Spannung U zwischen Innen- und Aussenleiter ist

$$U = \int_{r_i}^{r_a} E \, dr = \frac{Q'}{2\pi \epsilon} \int_{r_i}^{r_a} \frac{dr}{r} = \frac{Q'}{2\pi \epsilon} \ln \frac{r_a}{r_i} \quad (9.4)$$

mit r_a : Aussenleiterradius

Wir finden daher für den Kapazitätsbelag C'

$$C' = \frac{Q'}{U} = \frac{2\pi \epsilon}{\ln(r_a/r_i)} = \frac{55.6 \epsilon_r}{\ln(r_a/r_i)} \left[\frac{\text{pF}}{\text{m}} \right] \quad (9.5)$$

9.1.2 Berechnung der Leitungsinduktivität

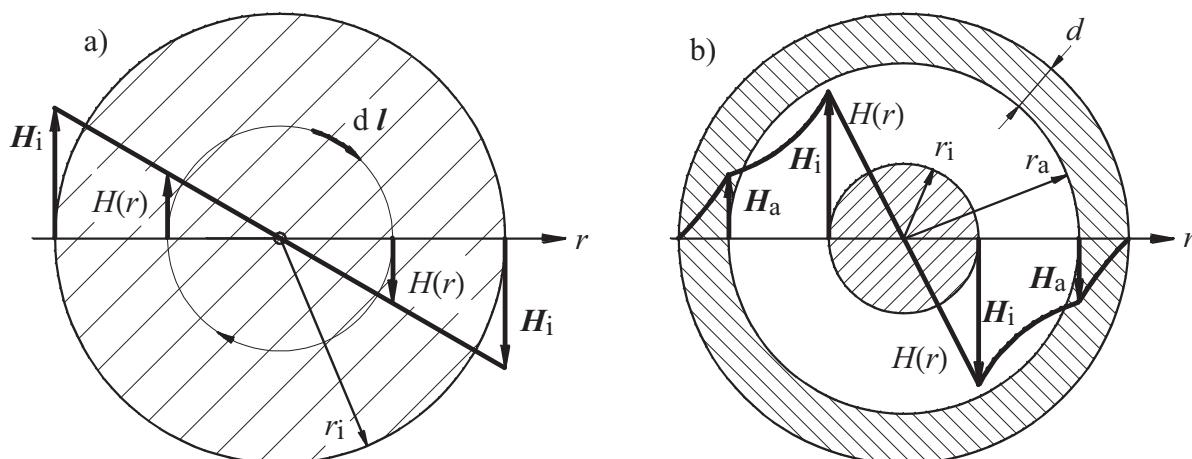
Der Induktivitätsbelag L' setzt sich zusammen aus dem:

- inneren Induktivitätsbelag L'_i , herrührend vom magnetischen Feld im Innen- und Aussenleiter und
- äußeren Induktivitätsbelag L'_a , herrührend vom magnetischen Feld zwischen den Leitern.

Während die Berechnung des äußeren Induktivitätsbelags einfach ist und keine Unsicherheiten birgt, ist die innere Induktivität abhängig von der Stromverteilung in den Leitern. In einem ersten Schritt nehmen wir eine völlig homogene Stromverteilung an und bestimmen die zugehörige Induktivität. Diese Stromverteilung stellt sich bei Gleichstrom und sehr niedriger Signalfrequenz ein. In einem zweiten Schritt betrachten wir die Induktivität bei höherer Signalfrequenz. Der innere Induktivitätsbelag L'_i setzt sich zusammen aus den Induktivitätsbelägen des Innenleiters und des Außenleiters L'_{ii} und L'_{ia} .

Die innere Induktivität

Zur Bestimmung des Induktivitätsbelags des Innenleiters L'_{ii} bei Gleichstrom (homogene Stromverteilung) gehen wir von Figur 9.3a aus



Figur 9.3 Darstellung der Feldverteilung in einem Koaxialkabel zur Bestimmung der inneren Induktivität: a) Innenleiter b) ganzer Kabelquerschnitt.

Bei einem Innenleiterradius r_i betrachten wir den Strom, der innerhalb eines Radius r fließt. Das Umlaufintegral der magnetischen Feldstärke \mathbf{H} über dem Kreis mit Radius r ist:

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = I(r) \quad (9.6)$$

mit $I(r) =$ in der Kreisfläche mit Radius r fließender Strom.

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = 2\pi r \mathbf{H} = I(r) = I_i r^2 / r_i^2 \quad (9.7)$$

mit I_i : Strom im Innenleiter.

Damit finden wir für die magnetische Feldstärke H :

$$H(r) = I_i \frac{r}{2\pi r_i^2} \quad (9.8)$$

Wir bestimmen den Induktivitätsbelag L'_{ii} über die im Innenleiter gespeicherte magnetische Energie pro Längeneinheit W'_{mi} .

$$W'_{mi} = L'_{ii} \frac{I_i^2}{2} = \int_A \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2} dA \quad (9.9)$$

mit A : Querschnitt des Innenleiters

Mit $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ und $dA = 2\pi r dr$ ist

$$W'_{mi} = \pi \mu \int_0^r H^2 r dr \quad (9.10)$$

Mit (9.8), (9.9) und (9.10) :

$$W'_{mi} = L'_{ii} \frac{I_i^2}{2} = \frac{\pi \mu I_i^2}{4\pi^2 r_i^4} \int_0^r r^3 dr = \frac{\mu I_i^2}{16\pi} \quad (9.11)$$

Der innere Induktivitätsbelag des Innenleiters L'_{ii} ist somit:

$$L'_{ii} = \frac{\mu}{8\pi} \quad (9.12)$$

Der innere Induktivitätsbelag L'_{ii} ist bei konstanter Stromdichte *unabhängig vom Radius r_i* des Innenleiters. In gleicher Weise kann der *innere Induktivitätsbelag des Außenleiters L'_{ia}* bestimmt werden. Für $d/r_a \ll 1$ gilt näherungsweise (ohne Herleitung):

$$L'_{ia} = \frac{\mu d}{6\pi r_a} \quad (9.13)$$

mit d : Dicke des Außenleiters.

Damit ist der innere Induktivitätsbelag L'_i :

$$L'_i = L'_{ii} + L'_{ia} = \frac{\mu}{\pi} \left(\frac{1}{8} + \frac{d}{6 r_a} \right) \quad (9.14)$$

Die äussere Induktivität

Die magnetische Feldstärke im Bereich $r_i < r < r_a$ ist:

$$H(r) = \frac{I_i}{2\pi r} \quad (9.15)$$

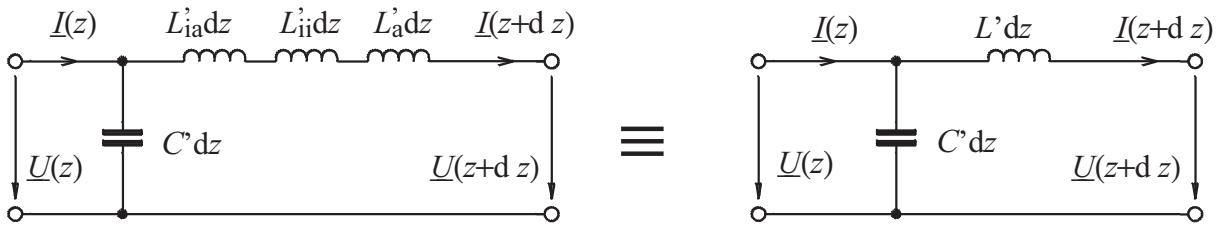
Somit ist die magnetische Energie pro Längeneinheit in diesem Bereich:

$$W'_{ma} = L'_{ia} \frac{I_i^2}{2} = \int_{r_i}^{r_a} \frac{\mu H^2}{2} 2\pi r dr = \frac{\mu I_i^2}{4\pi} \ln \frac{r_a}{r_i} \quad (9.16)$$

Daraus erhalten wir den äusseren Induktivitätsbelag L'_a der Koaxialleitung:

$$L'_a = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{r_a}{r_i} \quad (9.17)$$

Ein Vergleich der inneren und äusseren Induktivitätsbeläge (9.14) und (9.17) zeigt, dass für $r_i \ll r_a$ der äussere Induktivitätsbelag L'_a immer dominiert. Dies gilt noch in verstärktem Mass bei einer Stromverteilung bei hohen Signalfrequenzen. Die Induktivitätsbeläge liegen offensichtlich in der Grössenordnung der Permeabilitätskonstante $\mu = \mu_0 \mu_r$. Bei praktisch allen Leitungen ist die relative Permeabilitätskonstante $\mu_r = 1$. Damit sind die primären Leitungskonstanten der verlustfreien Koaxialleitung bestimmt. Figur 9.4 zeigt das Ersatzschaltbild mit dem Kapazitätsbelag C' und den inneren und äusseren Induktivitätsbelägen.



Figur 9.4 Ersatzschaltbild der verlustfreien Koaxialleitung bei niedrigen Frequenzen.

Unter Vernachlässigung der inneren Induktivitätsbeläge finden wir:

Die Leitungskonstanten der Koaxialleitung:

$$L' \approx L'_a = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{r_a}{r_i} = 200 \ln \frac{r_a}{r_i} \left[\frac{\text{nH}}{\text{m}} \right] \quad (9.18)$$

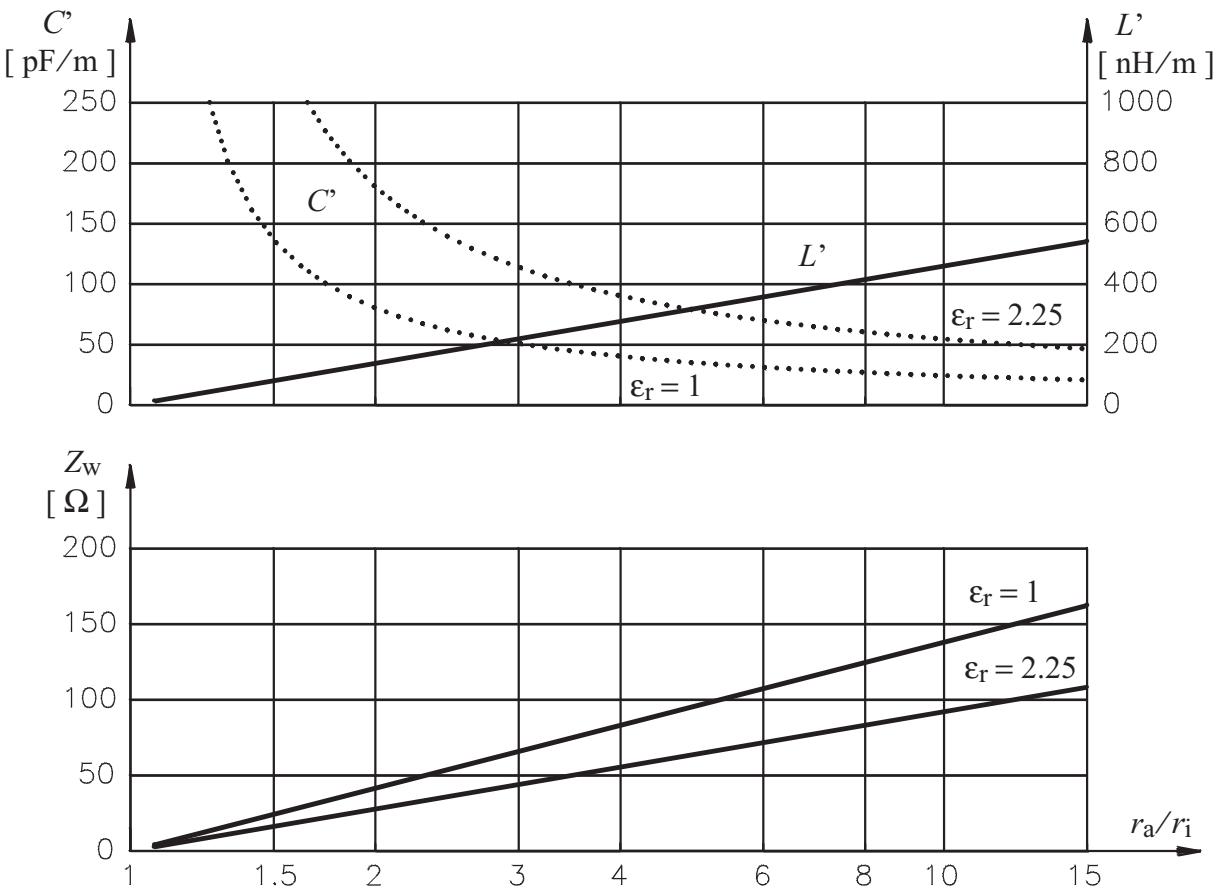
$$C' = \frac{2\pi\epsilon}{\ln r_a/r_i} = 55.6 \frac{\epsilon_r}{\ln r_a/r_i} \left[\frac{\text{pF}}{\text{m}} \right] \quad (9.19)$$

$$Z_w = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = \frac{\ln r_a/r_i}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = 60 [\Omega] \frac{\ln r_a/r_i}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad (9.20)$$

Die Leitungskonstanten L' , C' und Z_w von Koaxialleitungen sind in Figur 9.5 in Funktion von r_a/r_i dargestellt. Mit gut realisierbaren Radienverhältnissen r_a/r_i liegt die Wellenimpedanz Z_w von Koaxialleitungen mit Luft oder einem Kunststoff als Dielektrikum im Bereich 30Ω bis 100Ω . Für die Normwellenimpedanzen 50Ω und 75Ω ist das Radienverhältnis mit PE-Isolation ($\epsilon_r = 2.25$):

$$Z_w = 50 \Omega : \quad r_a/r_i = 3.4$$

$$Z_w = 75 \Omega : \quad r_a/r_i = 6.4$$



Figur 9.5 Leitungskonstanten L' , C' und Z_w von Koaxialleitungen für $\epsilon_r = 1$ (Luft) und $\epsilon_r = 2.25$ (Polyäthylen)

9.1.3 Verluste in Koaxialleitungen

In allen Leitungstypen treten Verluste auf. Da die Koaxialleitung dank der Rotationssymmetrie sehr einfach zu beschreiben ist, werden die Verluste an dieser Stelle eingeführt. Die gleichen Verlustphänomene treten auch in anderen Leitungstypen auf, sind aber mathematisch komplizierter zu beschreiben. Die *dominierenden Verluste* sind die *Ohmschen Verluste* der metallischen Leiter. Weniger bedeutend sind die *dielektrischen Verluste*, auf die zuerst eingegangen werden soll.

Die dielektrischen Verluste

Alle Isolatoren zeigen, mehr oder weniger ausgeprägt, Umpolarisierungsverluste. Diese können, je nach Material, im gesamten Frequenzbereich, vom Audiobereich bis zu optischen Frequenzen, auftreten. Ein einfaches Modell dieser Verluste ist in Figur 9.6 dargestellt.

Mit diesen Verlusten erscheint im Leitungsersatzschaltbild parallel zum Kapazitätsbelag ein Leitwertbelag $G'(\omega)$:

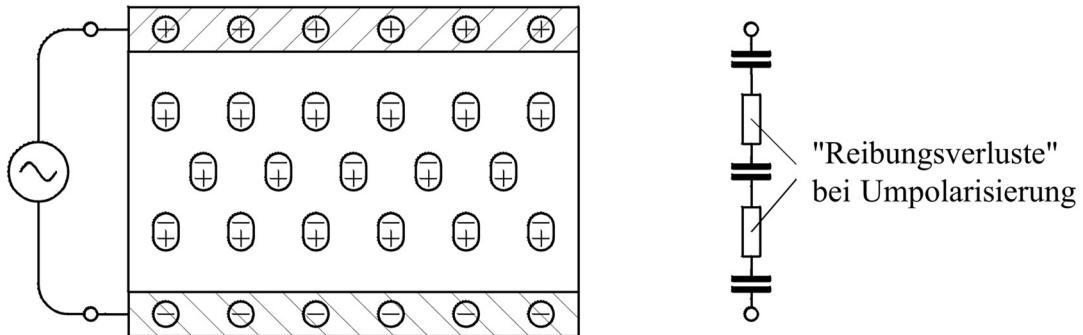
$$\underline{Y} = j\omega C' + G'(\omega) \quad (9.21)$$

G' ist im allgemeinen frequenzabhängig. In beschränkten Frequenzbereichen gilt näherungsweise:

$$\tan \delta = \frac{\text{Re}[\underline{Y}]}{\text{Im}[\underline{Y}]} = \frac{G'(\omega)}{\omega C'} \approx \text{konst.} \quad (9.22)$$

δ ist der sogenannte Verlustwinkel. Für kleine Verlustwinkel gilt mit $\delta \approx \tan \delta$ daher

$$G'(\omega) \approx \omega C' \delta \sim f \quad (9.23)$$



Figur 9.6 Modell der dielektrischen Verluste.

Die Ohmschen Verluste, der Skineffekt

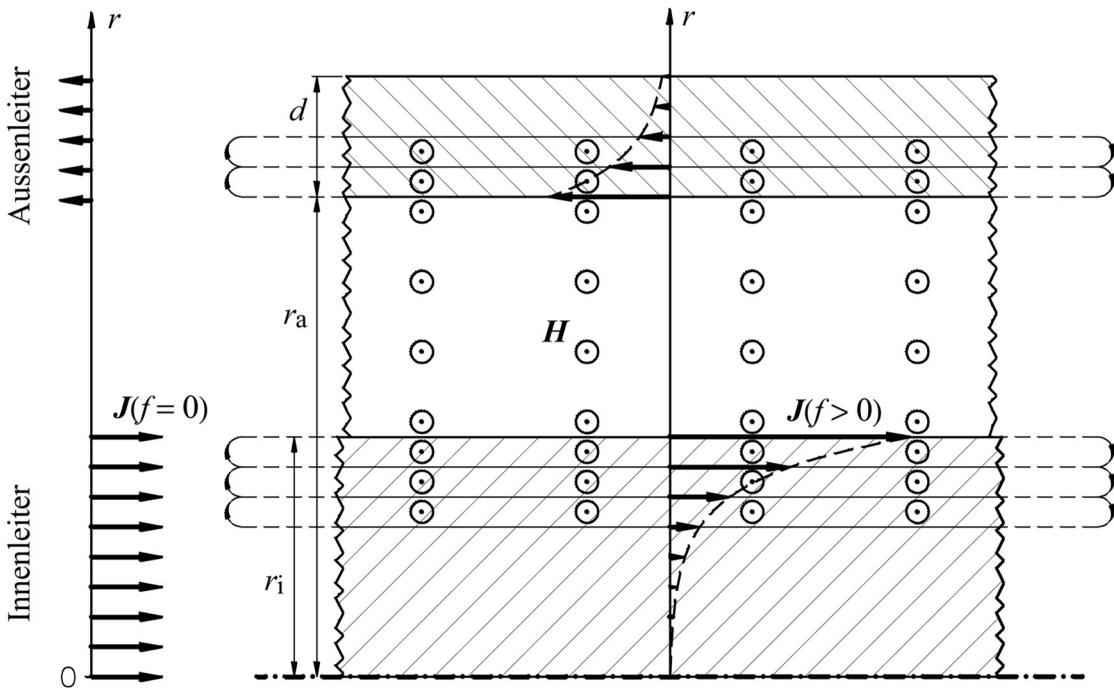
Bei tiefen Frequenzen ist die Stromdichte in den Leitern ortsunabhängig. Der Widerstandsbelag R' ist dann

$$R' = \frac{\rho}{\pi} \left(\frac{1}{r_i^2} + \frac{1}{2(r_a + d/2)d} \right) \quad (9.24)$$

mit ρ : spezifischer Widerstand, Geometrie gemäss Fig 9.3b

Dass bei höheren Frequenzen die Stromdichte in den Leitern nicht mehr ortsunabhängig sein kann, kann mit folgender Überlegung qualitativ erklärt werden.

Wir betrachten dazu eine Koaxialleitung im Längsschnitt nach Figur 9.7.



Figur 9.7 Längsschnitt durch eine Koaxialleitung zur Erklärung des Skineffektes.

Bei der Frequenz $f=0$ ist die Stromdichte $J(r)$ im Leiterinnern

$$J(r) = \text{konstant}$$

Bei einer Frequenz $f>0$ wird das magnetische Feld zu einem Wechselfeld, das, wie im Figur 9.7 gezeigt, Kreisströme anregt. Diese Kreisströme bewirken, dass gegen das Innere des Leiters die Stromdichte kontinuierlich abnimmt.

Bei einer ebenen oder nur wenig gekrümmten Oberfläche stellt sich eine exponentielle Abnahme der Stromdichte mit der Tiefe im Leiter ein. Eine Herleitung für die Stromverdrängung, dem sogenannten Skineffekt, findet sich im Anhang.

Ein Oberflächenstrom mit durch Skineffekt exponentiell abnehmender Stromdichte ist charakterisiert mit der Eindringtiefe δ_s , d.h. der Tiefe, bei der der Betrag der Stromdichte gegenüber der Oberfläche um einen Faktor e abnimmt. Diese Eindringtiefe δ_s ist

$$\delta_s = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}} = \sqrt{\frac{1}{\pi f \mu \sigma}} \quad (9.25)$$

mit σ : elektrische Leitfähigkeit $\sigma = 1/\rho$

Für den Fall mit ausgeprägtem Skineffekt, d.h. wenn der Krümmungsradius der Leiteroberfläche $r_k \gg \delta_s$ ist, kann eine Oberflächenimpedanz Z_\square definiert werden:

$$Z_\square = \frac{\underline{E}(r_a)}{\underline{I}} = \frac{\text{Oberflächenfeldstärke}}{\text{Oberflächenstromdichte}} \quad (9.26)$$

$$\text{mit } \underline{I}: \text{Oberflächenstromdichte} \quad \underline{I} = \int_{r_a}^{\infty} J(r) dr$$

Diese Oberflächenimpedanz Z_\square kann nach Figur 9.8 als die Impedanz eines quadratischen Stücks der Leiteroberfläche betrachtet werden.

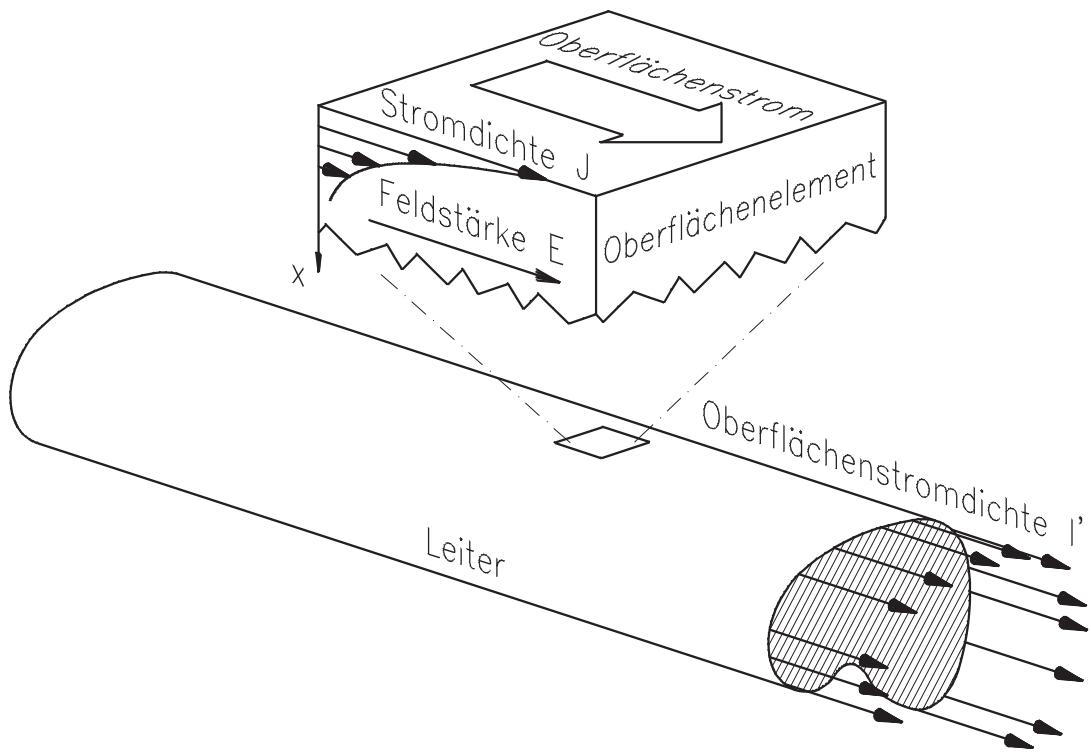
$$Z_\square = \sqrt{j \omega \mu \rho} = (1+j) \sqrt{\frac{\omega \mu \rho}{2}} = (1+j) R_\square \quad (9.27)$$

mit R_\square : Oberflächenwiderstand

$$R_\square = \text{Re}[Z_\square] = \sqrt{\frac{\omega \mu \rho}{2}} = \sqrt{\pi f \mu \rho} \quad (9.28)$$

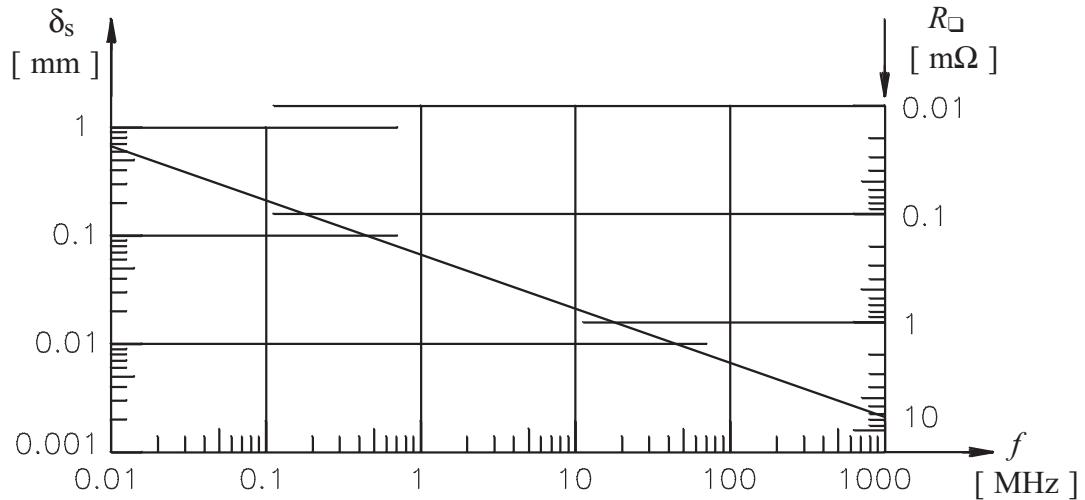
Die Oberflächenimpedanz ist induktiv, wobei Realteil und Imaginärteil von Z_\square gleich gross sind. Die Leitungsverluste sind durch den Oberflächenwiderstand R_\square bestimmt und sind somit proportional mit \sqrt{f} . Für die besten Leiter, Kupfer und Silber ist näherungsweise

$$R_\square \approx 250 \mu\Omega \sqrt{\frac{f}{[\text{MHz}]}} \quad (9.29)$$



Figur 9.8 Darstellung der Stromverteilung an der Leiteroberfläche zur Definition der Oberflächenimpedanz bei ausgeprägtem Skineffekt.

Figur 9.9 zeigt den Oberflächenwiderstand R_{\square} und die Eindringtiefe δ_s für Silber in Funktion der Frequenz.



Figur 9.9 Eindringtiefe δ_s und Oberflächenwiderstand R_{\square} für Silber in Abhängigkeit der Frequenz f .

Ausgeprägter Skineffekt tritt in vielen Leitungen der Kommunikationstechnik auf: z.B. auf Datenleitungen (Ethernet, Token Ring) und Kabelfernsehnetzen ($50 \text{ MHz} < f < 500 \text{ MHz}$). Merklicher Skineffekt erscheint schon in einer 50 Hz Energieversorgung bei grossen Sammelschienen aus Kupfer mit $\delta_s \approx 1 \text{ cm}$.

Koaxialleitungen mit ausgeprägtem Skineffekt

Nach Figur 9.9 tritt schon bei Frequenzen $f > 100 \text{ kHz}$ bei Leiterdicken $> 0.4 \text{ mm}$ ein ausgeprägter Skineffekt auf. Die Skin-Verluste dominieren eindeutig das Dämpfungsverhalten von Leitungen. Bei allen Leitern kann mit einer Vergrößerung des Leiterquerschnittes eine mit der Leiterdimension proportionale Reduktion des Widerstandsbelages erreicht werden. Es stellt sich aber noch die Frage, ob mit einer geeigneten Wahl des Verhältnisses von r_a/r_i bei konstantem Radius r_a eine Optimierung der Verluste möglich ist. Im Folgenden wird diese Optimierung untersucht. Der Widerstandsbelag R' bei ausgeprägtem Skineffekt ist

$$R' = \underbrace{\frac{R_{\square}}{2\pi r_a}}_{\text{Aussenleiter}} + \underbrace{\frac{R_{\square}}{2\pi r_i}}_{\text{Innenleiter}} \quad (9.30)$$

Die dielektrischen Verluste werden vernachlässigt. Wellenimpedanz und Ausbreitungskonstante bestimmen sich mit (4.17) und (4.20), wobei $G' = 0$:

$$Z_w = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{j\omega C'}} \quad (9.31)$$

$$\gamma = \sqrt{(R' + j\omega L') j\omega C'} \quad (9.32)$$

Wie erwähnt, ist der resistive Anteil der Oberflächenimpedanz gleich dem induktiven Anteil. Der Induktivitätsbelag L' ist hauptsächlich durch den äusseren Induktivitätsbelag L'_a bestimmt, und es gilt:

$$R' \ll \omega L'$$

Die Wellenimpedanz kann damit als reelle Wellenimpedanz Z_w genähert werden:

$$Z_w \approx \sqrt{\frac{L'}{C'}} \quad (9.33)$$

Die Ausbreitungskonstante γ wird mit $R' \ll \omega L'$ zu

$$\gamma = \alpha + j\beta = j\omega \sqrt{L' C'} \sqrt{1 + \frac{R'}{j\omega L'}} \approx j\omega \sqrt{L' C'} \left(1 + \frac{R'}{2j\omega L'} \right) \quad (9.34)$$

Daraus

$$\alpha \approx \frac{R'}{2\sqrt{L' C'}} = \frac{R'}{2Z_w} \quad (9.35)$$

$$\beta \approx \omega \sqrt{L' C'} \quad (9.36)$$

Mit diesen Näherungen entsprechen Z_w und β den entsprechenden Beziehungen der verlustlosen Leitung. Das Dämpfungsmass α ist dagegen proportional zum Widerstandsbelag R' . Der Widerstandsbelag ist andererseits für die Koaxialleitung und alle andern Leitungstypen bei ausgeprägtem Skineffekt proportional mit dem Oberflächenwiderstand R_{\square} .

Damit gilt für das Dämpfungsmass α :

$$\alpha \sim \sqrt{\omega \rho}$$

Auf der Suche nach dem optimalen Radienverhältnis r_a/r_i setzen wir (9.20) und (9.30) in (9.35) ein:

$$\alpha = \frac{R_\square}{2r_a \sqrt{\mu/\epsilon}} \frac{1 + r_a/r_i}{\ln r_a/r_i} \quad (9.37)$$

Wir bestimmen das Extremum für $\alpha(r_a/r_i)$, indem wir den zweiten Faktor von (9.35) differenzieren und gleich null setzen:

$$\frac{d \alpha}{d(r_a/r_i)} = \frac{R_\square}{2r_a \sqrt{\mu/\epsilon}} \left(\frac{1}{\ln r_a/r_i} - \frac{1 + r_a/r_i}{(\ln r_a/r_i)^2 r_a/r_i} \right) = 0 \quad (9.38)$$

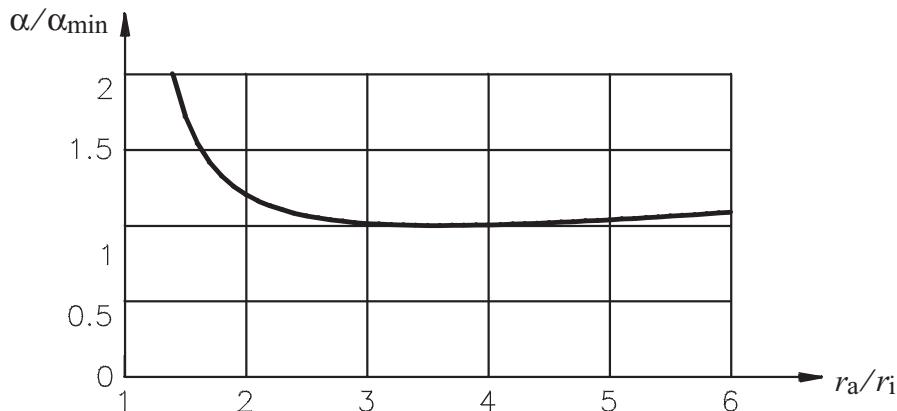
Für das optimale Verhältnis r_a/r_i gilt: $\ln r_a/r_i = 1 + r_i/r_a$

Daraus ermittelt sich das optimale Verhältnis: $r_a/r_i = 3.59$.

Die Wellenimpedanz für minimale Dämpfung einer Koaxialleitung ist nach (9.20):

$$Z_{w\text{opt}} = \frac{\ln r_a/r_i}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = 76.6 \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} [\Omega] \quad (9.39)$$

D.h. eine luftisierte Leitung hat die optimale Wellenimpedanz $Z_{w\text{opt}} = 76.6 \Omega$; für eine PE-isolierte Leitung mit $\epsilon_r = 2.25$ ist $Z_{w\text{opt}} = 51 \Omega$. Die Funktion $\alpha(r_a/r_i)$ hat allerdings ein sehr flaches Optimum. Nach der Darstellung in Figur 9.10 variiert der Dämpfungsbelag um 10 % in einem Bereich $2.3 \leq r_a/r_i \leq 6$.



Figur 9.10 Normierter Dämpfungsbelag α/α_{\min} in Funktion des Verhältnisses r_a/r_i der Radien von Außen- und Innenleiter der Koaxialleitung.

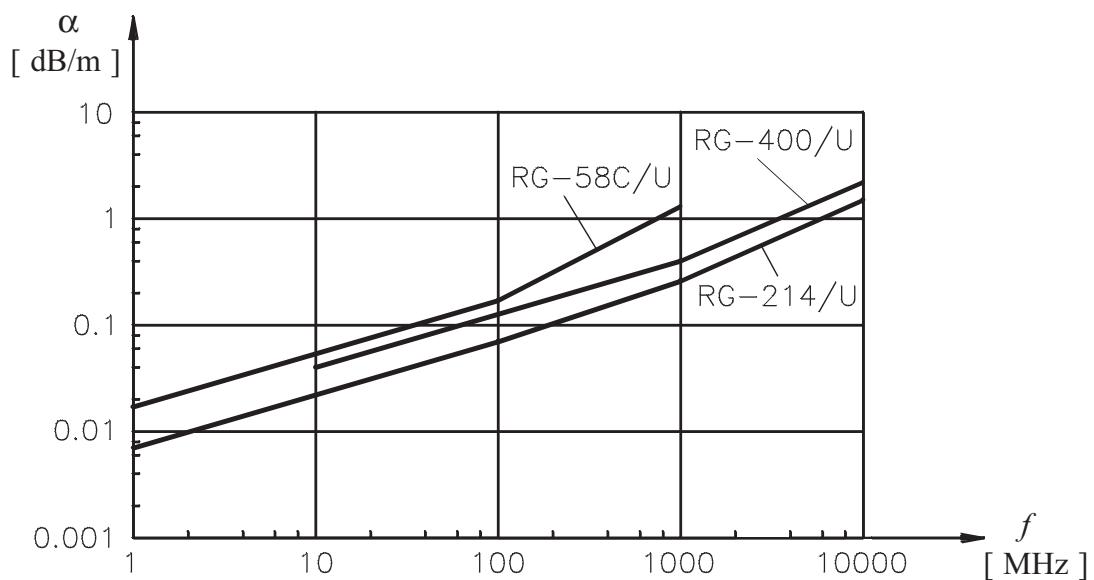
Nach dieser Betrachtung der Verluste in der Koaxialleitung scheint also die Wahl der Standardwellenimpedanzen der Kabel in der Nachrichtentechnik von $Z_w = 50 \Omega$ und in der Fernsehtechnik $Z_w = 75 \Omega$ kein Zufall zu sein.

Die nachfolgende Tabelle zeigt den Aufbau und typische Parameter von gebräuchlichen Koaxialkabeln. In Figur 9.11 ist die Kabeldämpfung in Funktion der Frequenz dargestellt.

Aufbau von gebräuchlichen Koaxialkabeln:

Bezeichnung Innenleiter, Dielektrikum, Aussenleiter	Z_w [Ω]	D_i/D_a [mm/mm]	v/c_0 [%]
RG-58C/U verzinnte Cu-Litze, Polyäthylen, Geflecht aus verzinnten Cu-Drähten	50 ± 2	0.9/2.95	66
RG-400/U versilbernde Cu-Litze, Teflon, doppeltes Geflecht versilberter Cu-Drähte	50 ± 2	1.0/2.95	69
RG-214U versilbernde Cu-Litze, Teflon, doppeltes Geflecht versilberter Cu-Drähte	50 ± 2	2.25/7.25	69

Figur 9.11 zeigt die Dämpfung der Kabeltypen RG-58C/U, RG-400/U und RG 214/U in Funktion der Frequenz



Figur 9.11 Dämpfungsbelag α der Kabeltypen RG-58C/U, RG-400/U und RG 214/U in Abhängigkeit der Frequenz f

Bei reiner Skineffekt-Dämpfung nimmt die Dämpfung mit \sqrt{f} zu. Bei den hohen Frequenzen ist der Einfluss der dielektrischen Verluste erkennbar.

9.2 Die Zweidrahtleitung

Parallel drahtleitungen werden in der Kommunikationstechnik als

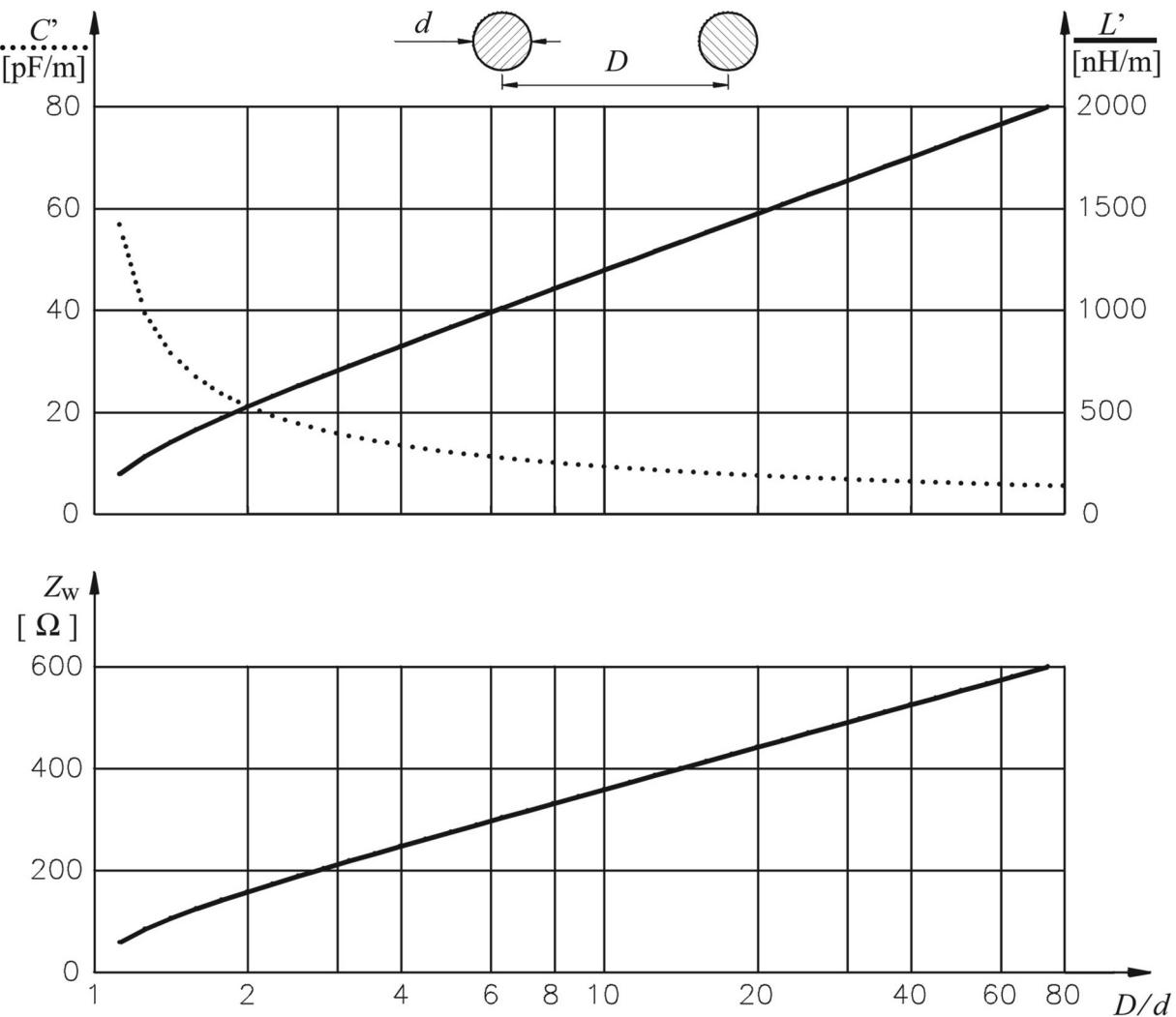
- Teilnehmerleitungen in der Telefonie
- Datenleitungen (geschirmte und ungeschirmte) eingesetzt.

Namentlich in der zweiten Anwendung erlebt die Zweidrahtleitung eine wahre Renaissance. Mit modernen Codierungs- und Modulationsverfahren wurde der nutzbare Frequenzbereich wesentlich erweitert und der Nachteil der hohen Dämpfung gemildert. Vorteile der verdrillten Zweidrahtleitung sind die niedrigen Herstellungskosten und die leichte platzsparende Verlegbarkeit. Mit Drahtdurchmesser d und Drahtabstand D gilt für Z_w (ohne Herleitung):

$$Z_w = \frac{120}{\sqrt{\epsilon_r}} \operatorname{arcosh} \frac{D}{d} [\Omega] \quad (9.40)$$

Für $D \gg d$ $Z_w = \frac{120}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln \frac{2D}{d} [\Omega]$ (9.41)

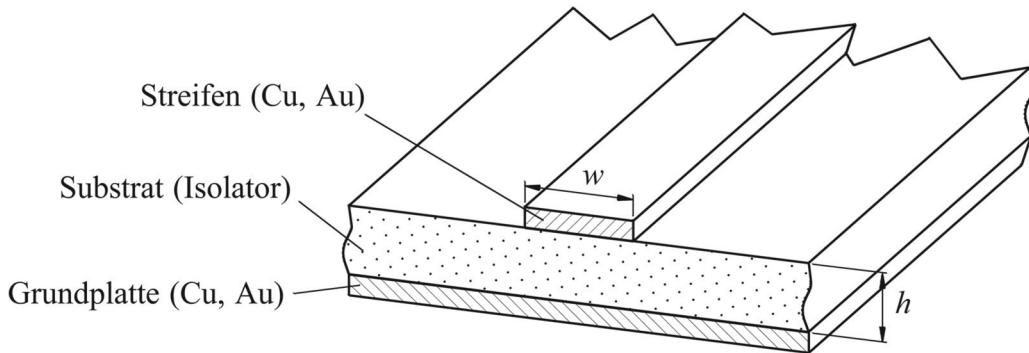
Figur 9.12 zeigt die Leitungskonstanten L' , C' und Z_w in Abhängigkeit von D/d .



Figur 9.12 Kapazitätsbelag C' , Induktivitätsbelag L' und Wellenimpedanz Z_w der Zweidrahtleitung in Funktion des Verhältnisses von Drahtabstand D zu Drahtdurchmesser d für $\epsilon_r = 1$.

9.3 Die Mikrostreifenleitung

Die Mikrostreifenleitung ist die gebräuchlichste planare Leitung. Figur 9.13 zeigt deren Aufbau.



Figur 9.13 Aufbau einer Mikrostreifenleitung.

Sie findet breite Anwendung in der Elektronik und Hochfrequenztechnik in

- Leiterplatten für analoge und digitale Schaltungen,
- hybride Hochfrequenzschaltungen und
- monolithisch integrierte Schaltungen der Hochfrequenztechnik.

Das Dielektrikum der Mikrostreifenleitung besteht aus zwei Teilen: zwischen Streifenleiter und Grundplatte ein organischer oder anorganischer Träger, über dem Streifenleiter Luft. Die Mikrostreifenleitung ist somit eine querinhomogene Leitung und zeigt sehr komplexe Eigenschaften der Wellenleitung. Allerdings erlaubt die quasistatische Näherung mit aus der Elektrostatik ermittelten primären Leitungskonstanten L' und C' eine in den meisten Fällen hinreichend genaue Beschreibung der Leitungseigenschaften. L' und C' können analytisch über konforme Abbildungen oder mit numerischen Feldberechnungsmethoden ermittelt werden.

Während das Dielektrikum den Induktivitätsbelag nicht beeinflusst, ist der Kapazitätsbelag davon abhängig. Das elektrische Feld verläuft teilweise in der Luft und teilweise im Trägermaterial. Der Kapazitätsbelag ist daher grösser als im querhomogenen Fall mit einer einzigen Dielektrizitätskonstante $\epsilon_r = 1$, aber kleiner als im querhomogenen Fall mit der Dielektrizitätskonstanten ϵ_r (Substrat) des Trägermaterials. In der querinhomogenen Leitung wird eine effektive Dielektrizitätskonstante ϵ_{re} wie folgt definiert:

1. Im querhomogenen Fall mit $\epsilon_r = 1$ ist der Kapazitätsbelag C'_o
2. In der querinhomogenen Leitung ist der Kapazitätsbelag C' .

Die effektive Dielektrizitätskonstante ϵ_{re} ist

$$\epsilon_{re} = C'/C'_o \quad \text{mit } 1 < \epsilon_{re} < \epsilon_r \text{ (Substrat)} \quad (9.42)$$

Da im querhomogenen Fall mit $\epsilon_r = 1$ die Phasengeschwindigkeit v_p gleich der Lichtgeschwindigkeit c_o ist, gilt für die querinhomogene Leitung

$$v_p \approx \frac{1}{\sqrt{L'C'}} = \frac{c_o}{\sqrt{\epsilon_{re}}} \quad (9.43)$$

Da die analytische oder numerische Ermittlung der Leitungskonstanten L' und C' aufwendig ist, sind verschiedene für praktische Bedürfnisse hinreichend genaue Näherungen für die effektive Dielektrizitätskonstante ϵ_{re} und Wellenimpedanz Z_w entwickelt worden.

Näherungsformeln für ϵ_{re} und Z_w

$$\epsilon_{re} = \frac{\epsilon_r + 1}{2} + \frac{\epsilon_r - 1}{2\sqrt{1 + 12h/w}} \quad \epsilon_r = \epsilon_r (\text{Substrat}) \quad (9.44)$$

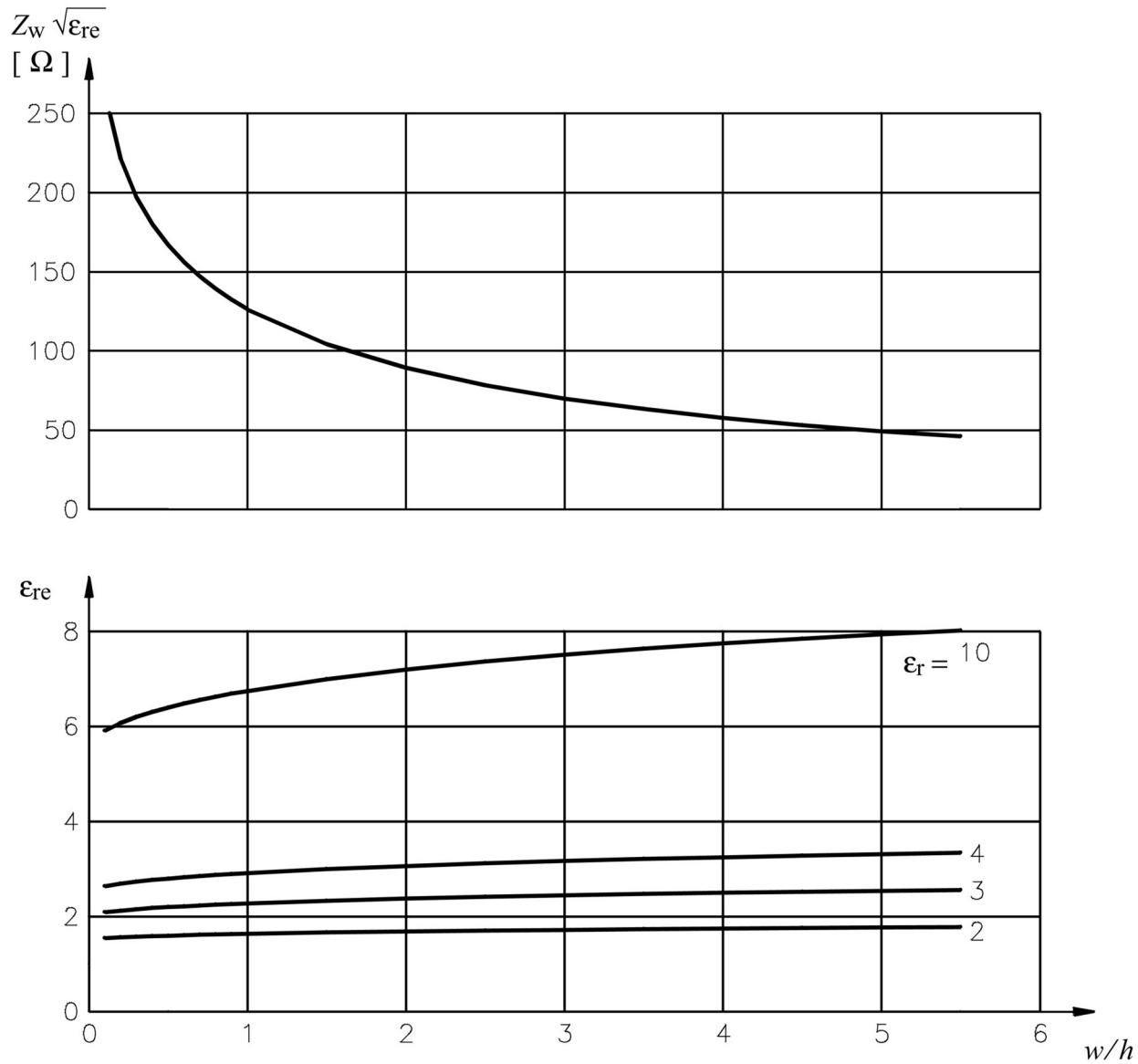
für $w/h \leq 1$

$$Z_w = \frac{60}{\sqrt{\epsilon_{re}}} \ln \left(8 \frac{h}{w} + 0.25 \frac{w}{h} \right) \quad [\Omega] \quad (9.45)$$

für $w/h \geq 1$

$$Z_w = \frac{120\pi/\sqrt{\epsilon_{re}}}{w/h + 1.393 + 0.667 \ln(w/h + 1.444)} \quad [\Omega] \quad (9.46)$$

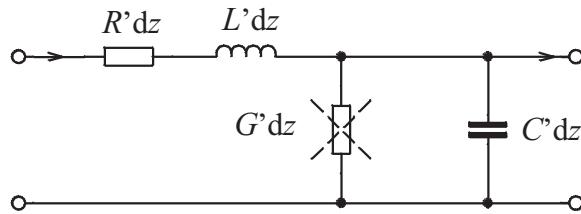
In Figur 9.14 sind $Z_w \sqrt{\epsilon_{re}}$ und ϵ_{re} in Funktion des Verhältnisses w/h der Mikrostreifenleitung dargestellt.



Figur 9.14 $Z_w \sqrt{\epsilon_{re}}$ und ϵ_{re} in Funktion des Verhältnisses w/h der Mikrostreifenleitung.

10. Betriebsbereiche von Leitungen mit Ohmschen Verlusten

Bei den meisten Leitungen mit metallischen Leitern sind die Ohmschen Verluste dominierend. Das Leitungsersatzschaltbild vereinfacht sich dann gemäss Figur 10.1.



Figur 10.1 Leitungsersatzschaltbild bei vernachlässigbaren dielektrischen Verlusten.

Grundsätzlich sind für dieses Ersatzschaltbild drei verschiedene Betriebsfrequenzbereiche definierbar:

1. Niederfrequenter Betrieb

Bei niedrigen Frequenzen mit $R' > \omega L'$ kann im Ersatzschaltbild Figur 10.1 der Induktivitätsbelag L' vernachlässigt werden. Diese Betriebsart wird in älteren Lehrbüchern auch als "Kabeltyp" bezeichnet.

2. Hochfrequenter Betrieb

In diesem Frequenzbereich ist $R' < \omega L'$. Dabei entspricht R' dem Widerstandsbelag mit konstanter Stromdichte (ohne Skin-Effekt). Das gültige Leitungsersatzschaltbild entspricht dem von Figur 10.1, mit R' konstant.

3. Hochfrequenter Betrieb mit ausgeprägtem Skineffekt

In dieser 3. Betriebsart ist $R' \ll \omega L'$. Der Widerstandsbelag R' bestimmt die Leitungsverluste und wird deshalb nicht vernachlässigt. R' wird durch den ausgeprägten Skineffekt bestimmt, d.h. $R' = R'_0 \sqrt{\omega/\omega_0}$.

In den meisten technisch verwendeten Leitungen tritt der hochfrequente Betrieb mit frequenzunabhängigem Widerstandsbelag R' nicht deutlich in Erscheinung, d.h. das Leitungsverhalten geht vom niederfrequenten Betrieb direkt über in den hochfrequenten Betrieb mit ausgeprägtem Skineffekt. Vollständigkeitshalber werden alle drei Betriebsarten dargestellt.

10.1 Niederfrequenter Betrieb

Mit $R' \gg \omega L'$ finden wir die Wellenimpedanz Z_w aus (4.17) und (4.20):

$$Z_w = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}} \approx \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{j\omega C'}} \approx \sqrt{\frac{R'}{j\omega C'}} = (1-j) \sqrt{\frac{R'}{2\omega C'}} \quad (10.1)$$

und die Ausbreitungskonstante

$$\gamma = \sqrt{(R' + j\omega L') (G' + j\omega C')} \approx \sqrt{j\omega R' C'} = (1+j) \sqrt{\frac{\omega R' C'}{2}} \quad (10.2)$$

Im niederfrequenten Betrieb ist der Dämpfungsbelag gleich dem Phasenbelag :

$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{\omega R' C'}{2}} \quad (10.3)$$

Mit der vorliegenden Frequenzabhängigkeit von α und β ist die Leitung dispersiv und eine Signalübertragung ist mit einer Verzerrung verbunden. Leitungen im niederfrequenten Betrieb sind meist elektrisch kurz, d.h. Leitungslänge $l \ll$ Wellenlänge λ .

10.1.1 Beispiel einer Leitung im niederfrequenten Betrieb: dünnes Koaxialkabel

Dimensionen: $r_i = 0.25 \text{ mm}$ $r_a = 0.75 \text{ mm}$

Leitungskonstanten: $L' = 250 \text{ nH/m}$ $C' = 100 \text{ pF/m}$ $Z_{wn} = \sqrt{L'/C'} = 50 \Omega$
 $R' = 100 \text{ m}\Omega/\text{m}$ (für Kupferleiter $\sigma = 60 \cdot 10^6 \text{ S/m}$)

Als Grenzfrequenz f_g für den niederfrequenten Betrieb wird definiert:

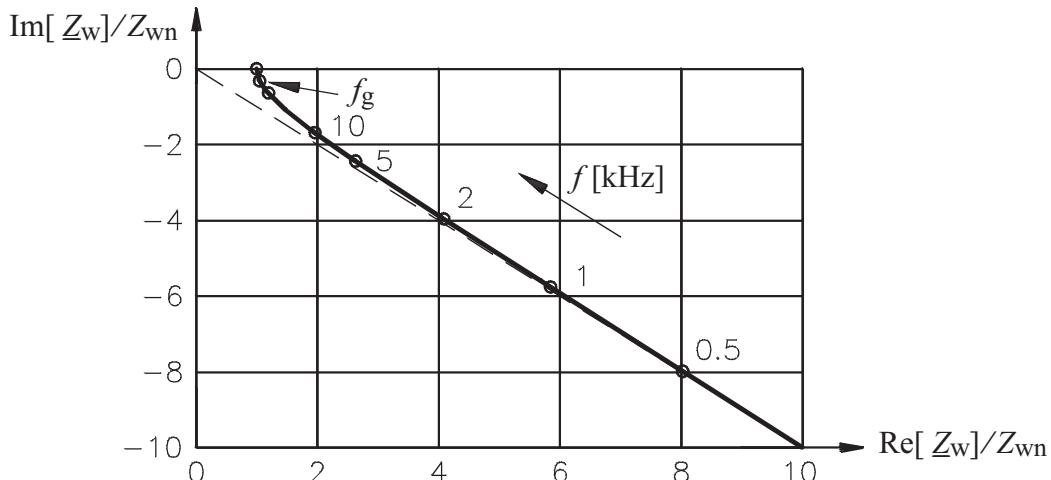
$$\omega_g L' = R' \quad (10.4)$$

Daraus $f_g = \frac{\omega_g}{2\pi} = \frac{R'}{2\pi L'}$ (10.5)

Mit den obigen Leitungsparametern eingesetzt:

$$f_g \approx 64 \text{ kHz} \quad \alpha = 0.0486 \left[\frac{\text{dB}}{\text{m}} \right] \sqrt{\frac{f}{[\text{MHz}]}}$$

Figur 10.2 zeigt die Ortskurve für die normierte Wellenimpedanz $Z_w(f)/Z_{wn}$ mit Normierung: $Z_{wn} = \sqrt{L'/C'} = 50 \Omega$



Figur 10.2 Ortskurve der normierten Wellenimpedanz $Z_w(f)/Z_{wn}$ einer Koaxialleitung mit $R' = 100 \text{ m}\Omega/\text{m}$ $C' = 100 \text{ pF/m}$ $L' = 250 \text{ nH/m}$ und $Z_{wn} = \sqrt{L'/C'} = 50 \Omega$ im niederfrequenten Betrieb.

10.1.2 Beispiel einer Leitung im niederfrequenten Betrieb: Mikrostreifenleitung einer integrierten Schaltung

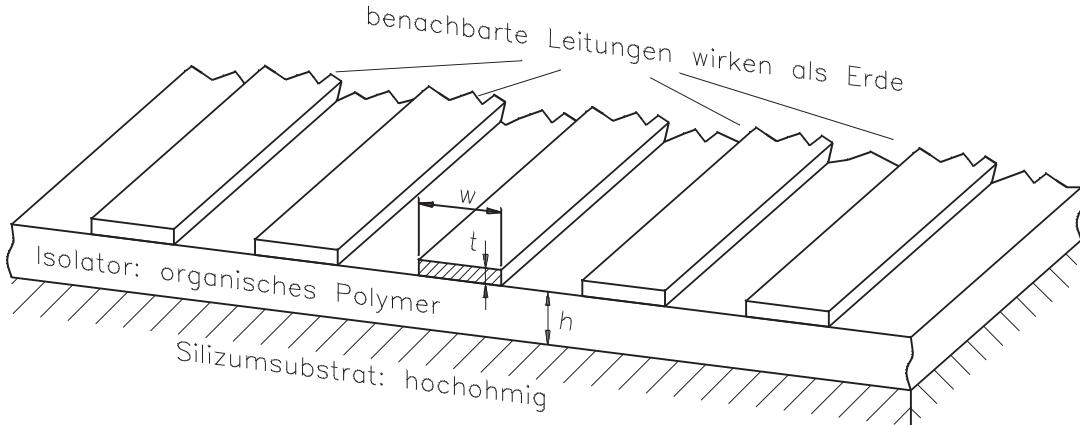
Figur 10.3 zeigt den Aufbau einer Mikrostreifenleitung auf einem Siliziumsubstrat einer integrierten Schaltung. Typische Parameter einer solchen Leitung sind:

Material = Al, $w = 5 \mu\text{m}$, $t = 1 \mu\text{m}$, $h = 1 \mu\text{m}$ Isolator: $\epsilon_r = 2.3$

$v/c_0 \approx 0.7$ $R' \approx 10 \text{ k}\Omega/\text{m}$ $L' \approx 380 \text{ nH/m}$ $C' \approx 60 \text{ pF/m}$ $Z_{wn} \approx \sqrt{L'/C'} = 80 \Omega$

Daraus ermittelt sich die Grenzfrequenz f_g für niederfrequentes Verhalten zu

$$f_g = \frac{R'}{2\pi L} \approx 4 \text{ GHz}$$



Figur 10.3 Mikrostreifenleitung einer integrierten Schaltung

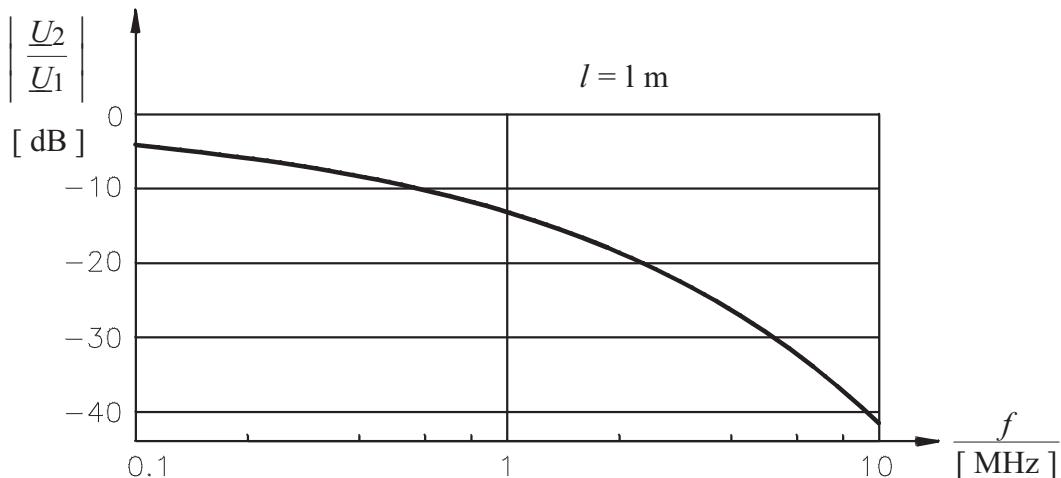
Im allgemeinen ist das Substrat wesentlich hochohmiger als die Metalleitungen, die exakte Berechnung der Leitungssparameter einer Einzelleitung kann daher recht aufwendig werden. Befinden sich dagegen andere geerdete Metalleitungen in der Nähe, dann bewegen sich die Leitungssparameter in relativ engen Grenzen. Für den Frequenzbereich, der in integrierten Schaltungen verarbeitet werden kann, verhalten sich die On-Chip-Leitungen wie niederfrequent betriebene Leitungen. Für dieses Beispiel sind Phasen- und Dämpfungsbelag

$$\alpha = \beta \approx 1.5 \sqrt{\frac{f}{[\text{MHz}]}} \left[\frac{\text{Np}}{\text{m}} \right] \stackrel{\wedge}{=} 12.9 \sqrt{\frac{f}{[\text{MHz}]}} \left[\frac{\text{dB}}{\text{m}} \right] \quad (10.6)$$

Diese Dämpfung tritt dann auf, wenn die Leitung mit der komplexen Wellenimpedanz Z_w abgeschlossen würde. In diesem Fall erhalten wir für das Spannungsverhältnis U_2/U_1 :

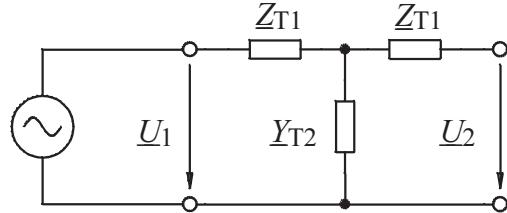
$$\frac{U_2}{U_1} = e^{-\alpha l(1+j)} \quad (10.7)$$

Figur 10.4 zeigt den Verlauf dieser Funktion für das vorhin angegebene Zahlenbeispiel.



Figur 10.4 Dämpfung einer mit der Wellenimpedanz abgeschlossenen Onchip-Leitung

Diese Betriebsart mit Wellenanpassung wird in der Praxis kaum angewandt, da sie schwierig zu realisieren ist. In integrierten Schaltungen ist der Abschluss meist hochohmig und kapazitiv. Zur Bestimmung des Dämpfungsverhaltens der leerlaufenden On-Chip-Mikrostreifenleitung benutzen wir das Leitungseratzschaltbild nach Abschnitt 7.1. Das Ersatzbild der mit einer idealen Spannungsquelle gespeisten und leerlaufenden Leitung ist in Figur 10.5 dargestellt.



Figur 10.5 Ersatzschaltung der leerlaufenden On-Chip-Leitung.

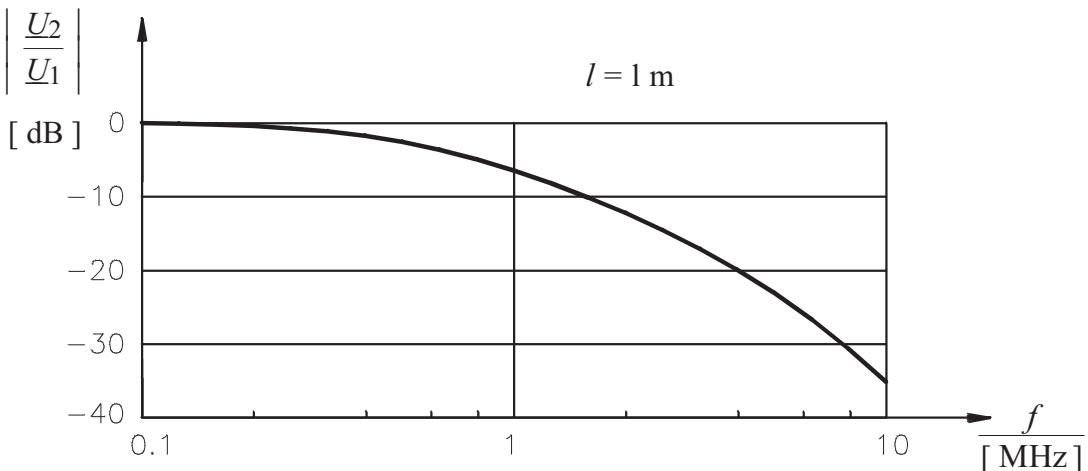
Die Elementwerte sind: $Z_{T1} = Z_w \tanh \frac{\gamma l}{2}$ (10.8)

$$Y_{T2} = \frac{1}{Z_w} \sinh \gamma l \quad (10.9)$$

Das Spannungsverhältnis ist: $\frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{Y_{T2} (Z_{T1} + 1/Y_{T2})} = \frac{1}{1 + \tanh \frac{\gamma l}{2} \sinh \gamma l}$ (10.10)

Mit der Beziehung $\tanh \frac{x}{2} = \frac{\cosh x - 1}{\sinh x}$ ist: $\frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{\cosh \gamma l}$ (10.11)

Figur 10.6 zeigt das Dämpfungsverhalten der leerlaufenden On-Chip-Leitung für das betrachtete Zahlenbeispiel.



Figur 10.6 Dämpfung einer leerlaufenden Onchip-Leitung

Wie verhält sich nun eine typische "lange" On-Chip-Leitung der Länge $l = 1 \text{ cm}$ bei Frequenzen $f < 100 \text{ MHz}$?

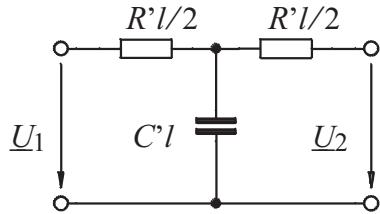
Aus (10.6) ist mit $f < 100 \text{ MHz}$ $\alpha l \leq 0.15 \ll 1$

Mit $|\gamma l| \ll 1$ kann $\cosh \gamma l$ entwickelt werden: $\cosh \gamma l \approx 1 + \frac{1}{2} (\gamma l)^2 + \dots$

Damit wird für $l = 1 \text{ cm}$ und $f = 100 \text{ MHz}$

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} (\gamma l)^2} = \frac{1}{1 + j \omega R' C' l^2 / 2} = \frac{1}{1 + j 0.019} \quad (10.12)$$

Dieses Resultat ist einfach und naheliegend, es kann auch direkt aus dem Ersatzschaltbild der elektrisch kurzen Leitung ermittelt werden, das in Figur 10.7 dargestellt ist.



Figur 10.7 Ersatzschaltbild der elektrisch kurzen Leitung im niedrfrequenten Betrieb.

10.2 Hochfrequenter Betrieb mit $R'(f) = \text{konstant}$

Bei diesem Betrieb ist die Frequenz so hoch, dass $R' < \omega L'$, dabei wird aber der Widerstandsbelag R' noch als frequenzunabhängig angenommen.

Mit $G' \approx 0$ und $R' << \omega L'$ ist die Wellenimpedanz (fast) reell und frequenzunabhängig:

$$Z_w = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}} \approx \sqrt{\frac{L'}{C'}} \left(1 - \frac{jR'}{2\omega L'}\right) = Z_{wn} \left(1 - \frac{jR'}{2\omega L'}\right) \quad (10.13)$$

$$\text{mit } Z_{wn} = \sqrt{\frac{L'}{C'}} \quad (10.14)$$

Für die Ausbreitungskonstante finden wir für die gleichen Annahmen:

$$\gamma = \sqrt{(R' + j\omega L') (G' + j\omega C')} \approx j\omega \sqrt{L' C'} \left(1 - \frac{jR'}{2\omega L'}\right) \quad (10.15)$$

Die Dämpfungskonstante α und die Phasenkonstante β sind:

$$\alpha = \frac{R'}{2} \sqrt{\frac{C'}{L'}} = \frac{R'}{2Z_{wn}} \quad (10.16)$$

$$\beta = \omega \sqrt{L' C'} \quad (10.17)$$

Mit einer frequenzunabhängigen Dämpfung und einer frequenzproportionalen Phasenkonstante ist dieser Betrieb dispersionsfrei.

10.3 Hochfrequenter Betrieb mit ausgeprägtem Skineffekt

Im hochfrequenten Betrieb bei Frequenzen, die eine Eindringtiefe δ_s bewirken, die kleiner ist als die Dicke der Leiter, wird von einem Betrieb mit ausgeprägtem Skineffekt gesprochen. Die Grenzfrequenz f_{sk} für ausgeprägten Skineffekt beim runden Leiter mit Radius r_i ist:

$$f_{sk} = \frac{1}{\pi \mu \sigma r_i^2} \quad (10.18)$$

Nach (9.27) und (9.28) ist die Oberflächenimpedanz Z_{\square}

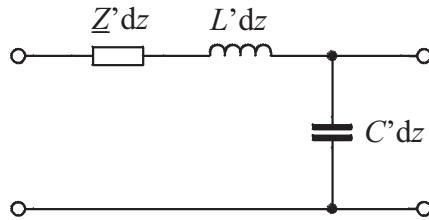
$$Z_{\square} = \sqrt{j \omega \mu \rho} = (1+j) \sqrt{\frac{\omega \mu \rho}{2}} = (1+j) R_{\square} \quad (10.19)$$

Der induktive Anteil von Z_{\square} kann gegenüber dem Induktivitätsbelag L' , d.h. gegenüber der äusseren Induktivität vernachlässigt werden. Der resistive Anteil $\text{Re}[Z_{\square}]$ ist, wie schon früher festgestellt, proportional mit $\sqrt{\omega}$. Wie im Fall der Koaxialleitung (9.30) und (9.31) gilt auch für Leitungen mit nicht homogener Oberflächenstromdichte:

$$R' \sim \sqrt{\omega} \quad \text{oder} \quad R' = R'_o \sqrt{\frac{\omega}{\omega_0}} \quad (10.20)$$

$$\text{und} \quad Z_w = \sqrt{\frac{L'}{C'}} \left(1 - \frac{j R'_o}{2 L' \sqrt{\omega \omega_0}} \right) = Z_{wn} \left(1 - \frac{j R'_o}{2 L' \sqrt{\omega \omega_0}} \right) \quad (10.21)$$

Das Leitungseratzschaltbild für die allgemeine Skineffekt-behaftete Leitung ist in Figur 10.8 dargestellt.



Figur 10.8 Ersatzschaltbild der Leitung im hochfrequenten Betrieb mit ausgeprägtem Skineffekt.

$$Z': \text{komplexer Skineffektmittelwert} \quad Z' = R'_o \sqrt{j \frac{2\omega}{\omega_0}} \quad (10.22)$$

Bei ausgeprägtem Skineffekt ist $\omega L' \gg |Z'|$.

Damit finden wir für die Ausbreitungskonstante

$$\begin{aligned} \gamma &= \sqrt{(Z' + j\omega L') j\omega C'} \approx j\omega \sqrt{L'C'} \left(1 + \frac{Z'}{2j\omega L'} \right) = j\omega \sqrt{L'C'} + \frac{Z'}{2Z_{wn}} \\ &= j\omega \sqrt{L'C'} + \frac{R'_o}{2Z_{wn}} \sqrt{j \frac{2\omega}{\omega_0}} \end{aligned} \quad (10.23)$$

Mit der normierten Darstellung für Z' , mit Widerstandsbelag R'_o bei der Frequenz ω_0 , ist die Ausbreitungskonstante γ :

$$\gamma = j\omega \sqrt{L'C'} + \frac{R'_o}{2Z_{wn}} \sqrt{j \frac{2\omega}{\omega_0}} \quad (10.24)$$

$$\alpha = \frac{R'_o}{2Z_{wn}} \sqrt{\frac{\omega}{\omega_0}} \left[\frac{\text{Np}}{\text{m}} \right] = 8.686 \frac{R'_o}{2Z_{wn}} \sqrt{\frac{\omega}{\omega_0}} \left[\frac{\text{dB}}{\text{m}} \right] \quad (10.25)$$

$$\beta = \omega \sqrt{L'C'} + \alpha \quad (10.26)$$

Bei Leitungen mit ortsabhängigen Oberflächenstromdichten ist die analytische Ermittlung von R'_0 aufwendig, da dazu die Kenntnis der Oberflächenstromverteilung oder der Feldverteilung an den Leiteroberflächen erforderlich ist. Experimentell kann R'_0 aber sehr einfach mit einer Dämpfungsmessung bestimmt werden.

10.3.1 Fortsetzung des Beispiels nach Abschnitt 10.1.1: dünnes Koaxialkabel

Wir untersuchen das Verhalten des dünnen Koaxialkabels nach Abschnitt 10.1.1 bei hochfrequentem Betrieb mit ausgeprägtem Skineffekt.

Dimensionen: $r_i = 0.25 \text{ mm}$ $r_a = 0.75 \text{ mm}$
 Leitungskonstanten: $L' = 250 \text{ nH/m}$ $C' = 100 \text{ pF/m}$ $Z_{wn} = \sqrt{L'/C'} = 50 \Omega$
 $\sigma = 60 \cdot 10^6 \text{ S/m}$)

Grenzfrequenz für den Bereich mit ausgeprägtem Skineffekt: $f_{sk} = \frac{1}{\pi \mu \sigma r_i^2} = 67 \text{ kHz}$

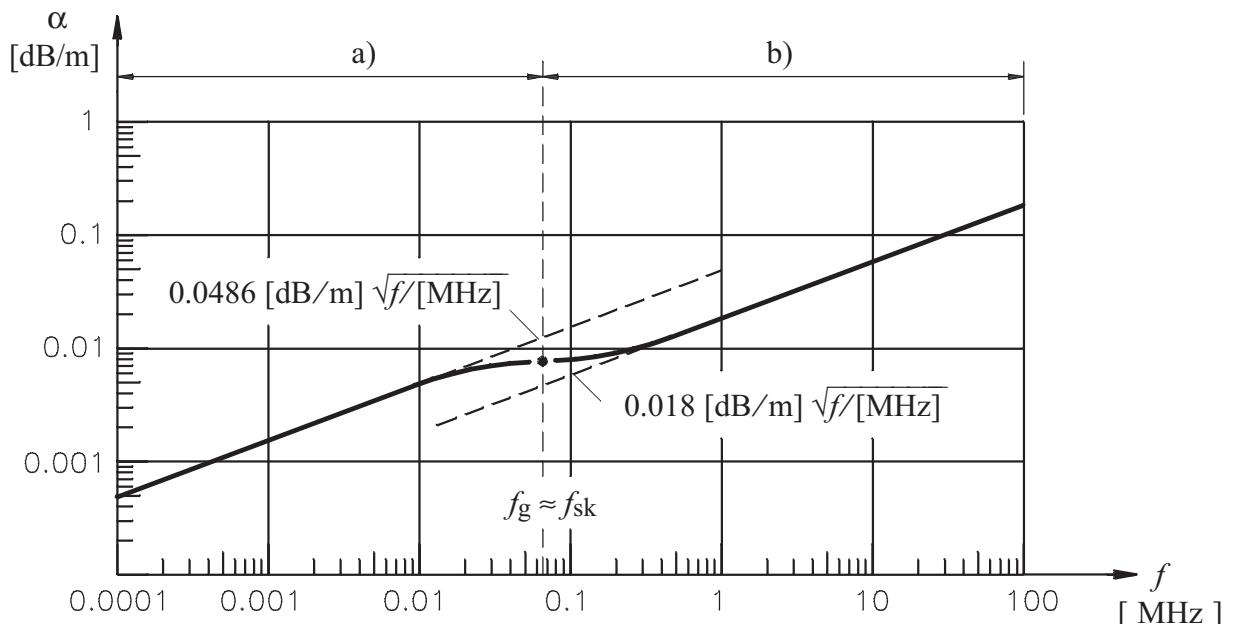
Mit (9.28) und (9.30) ist der Skineffektwiderstandsbelag $R' = \operatorname{Re} [Z']$:

$$R' = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{r_i} + \frac{1}{r_a} \right) R_\square (\omega_0) \sqrt{\frac{\omega}{\omega_0}} = 0.21 \left[\frac{\Omega}{\text{m}} \right] \sqrt{\frac{f}{[\text{MHz}]}} \quad (10.27)$$

Mit (10.25) ist der Dämpfungsbelag α

$$\alpha = \frac{R'}{2Z_{wn}} = 0.018 \left[\frac{\text{dB}}{\text{m}} \right] \sqrt{\frac{f}{[\text{MHz}]}} \quad (10.28)$$

Figur 10.8 zeigt den Frequenzgang der Dämpfung α des Koaxialkabels für den nieder- und hochfrequenten Betrieb. Bei diesem Kabel tritt der hochfrequenter Betrieb $R'(f) = \text{konstant}$ kaum in Erscheinung, da $f_g \approx f_{sk}$.



Figur 10.9 Frequenzgang der Dämpfung α eines Koaxialkabels.
 a) Niederfrequenter Betrieb, b) Hochfrequenter Betrieb mit ausgeprägtem Skineffekt.

11. Signale auf Leitungen im Zeitbereich

In den bisherigen Betrachtungen wurde das elektrische Verhalten von Leitungen bei stationären harmonischen Anregungen untersucht. Dabei konnte der mathematische Aufwand auf ein Minimum reduziert werden. Naheliegenderweise besteht der Wunsch, andere Signale, namentliche transiente Signale im Zeitbereich auf Leitungen analytisch darzustellen. Dabei ist in erster Linie die Schrittantwort von Interesse. Da sich Leitungen vollkommen linear verhalten, kann diesem Wunsch mittels der Laplace-Transformation entsprochen werden. Allerdings sind dann nur für einfachste Leitungen mathematisch geschlossene Ausdrücke zu erwarten.

Die folgende Tabelle zeigt die in der Praxis wichtigsten Fälle des Betriebes von Leitungen im Zeitbereich.

Leitung	Abschlüsse	Lösungsmethode
* verlustfrei, dispersionsfrei	Widerstände (linear, nichtlinear)	graphisch, numerisch (einfach)
* verlustfrei, dispersionsfrei	Eingang: angepasst, Ausgang: lineares RLC-Netzwerk	analytisch, numerische Simulation
* verlustbehaftet, dispersionbehaftet	beidseitig angepasst	analytisch für einfache Fälle, numerische Simulation
verlustbehaftet, dispersionbehaftet	Eingang und Ausgang: lineare, nichtlineare Netzwerke	nur numerische Simulation z.B. SPICE

Einzelne Fälle aus den mit * bezeichneten Klassen werden in diesem Kapitel behandelt.

Unter der Voraussetzung, dass das Zeitbereichssignal schmalbandig ist, z.B. ein amplituden- oder phasenmoduliertes harmonisches Signal, können viele lineare Leitungsprobleme analytisch gelöst werden.

11.1 Signale auf der verlust- und dispersionsfreien Leitung mit resistiven Abschlüssen

11.1.1. Spannung und Strom auf der verlustfreien Leitung im Zeitbereich

Die Telegraphengleichung (3.8) bzw. (3.9) hat im verlustfreien Fall eine sehr einfache Lösung: auf der Leitung existieren vorwärts- und rückwärtslaufende Wellen, deren Kurvenformen mit der Ausbreitung nicht verändert werden:

$$\text{Spannung: } u(t, z) = u(t \pm z/v) \quad (11.1)$$

$$\text{Strom: } i(t, z) = i(t \pm z/v) \quad (11.2)$$

Das negative Vorzeichen gehört zu einer in positiver z -Richtung laufenden Welle, das positive Vorzeichen zur in negativer z -Richtung laufenden Welle.

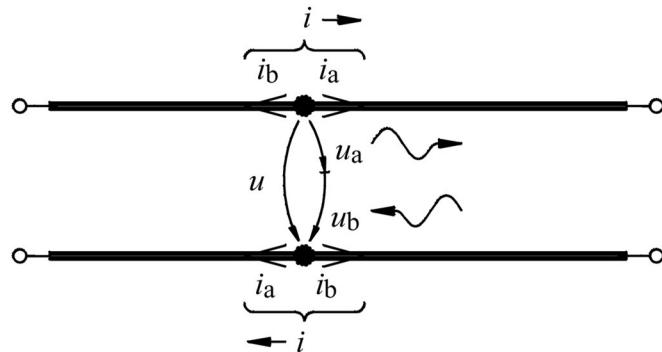
Dabei ist v die Signalgeschwindigkeit

$$v = \frac{1}{\sqrt{L' C}} \quad (11.3)$$

Für die in beiden Richtungen laufenden Teilwellen gilt:

$$\frac{u_a(t, z)}{i_a(t, z)} = \frac{u_b(t, z)}{i_b(t, z)} = \sqrt{\frac{L'}{C}} = Z_w \quad (11.4)$$

Der Index a steht für die in positiver z -Richtung laufende, der Index b für die in negativer z -Richtung laufende Welle. Dabei entspricht die Richtung von i_a der positiven z -Richtung, die Richtung von i_b der negativen z -Richtung. Diese Konvention mit unterschiedlichen Richtungen für i_a und i_b erscheint etwas verwirrend. Sie hat sich aber allgemein so eingebürgert und hat den Vorteil, dass eine Reflexion den gleichen Reflexionsfaktor für Strom und Spannung zeigt, wie dies Figur 11.1 illustriert.



Figur 11.1 Definition der Richtungen der Spannungen und Ströme u_a , u_b , u , i_a , i_b und i . Die Richtungen der Ströme i_a und i_b sind mit den Laufrichtungen der entsprechenden Wellen identisch.

Die Leitungsspannung u und der Leistungsstrom i sind

$$u = u_a + u_b \quad (11.5)$$

$$i = i_a - i_b \quad (11.6)$$

Aus (11.4) und (11.6) folgt

$$i Z_w = u_a - u_b \quad (11.7)$$

Aufgelöst nach u_a , u_b , i_a und i_b

$$u_a = (u + i Z_w)/2 \quad (11.8)$$

$$u_b = (u - i Z_w)/2 \quad (11.9)$$

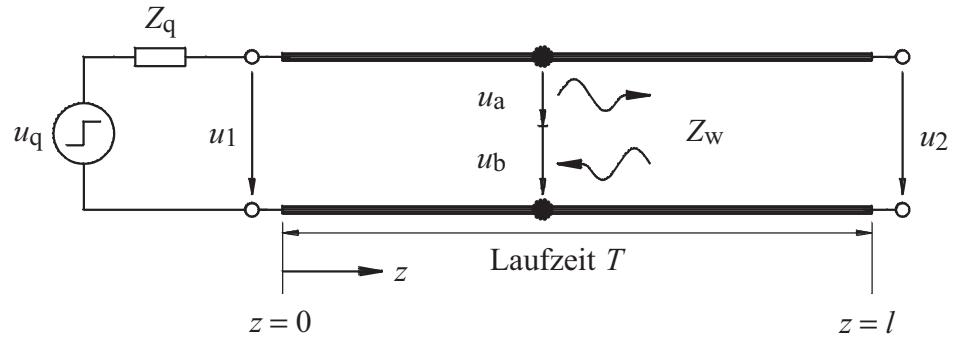
$$i_a = (\frac{u}{Z_w} + i)/2 \quad (11.10)$$

$$i_b = (\frac{u}{Z_w} - i)/2 \quad (11.11)$$

Mit (11.11) kann der Verlauf von Spannung und Strom im folgenden Beispiel für beliebig viele Reflexionen an beiden Enden der Leitung analysiert werden.

11.1.2. Schrittantwort einer einseitig leerlaufenden verlustfreien Leitung mit resistiver Quelle

Figur 11.2 zeigt eine einseitig leerlaufende verlustfreie Leitung, gespeist durch eine Quelle u_q mit endlicher reeller Quellenimpedanz Z_q . Die Quelle erzeugt zur Zeit $t = 0$ eine Schrittspannung der Höhe U_{q0} .



Figur 11.2 Einseitig leerlaufende verlustfreie Leitung, gespeist durch eine Quelle mit endlichem Quellenwiderstand.

Zur Zeit $t < 0$ ist das ganze System in Ruhe, sämtliche Ströme und Spannungen sind gleich null. Zur Zeit $t = 0$ schaltet die Spannungsquelle vom Wert $u_q = 0$ auf $u_q = U_{q0}$.

Im Zeitbereich $0 < t < T$ ($T = \text{Signallaufzeit der Leitung}$) läuft nur eine Welle u_a, i_a nach rechts:

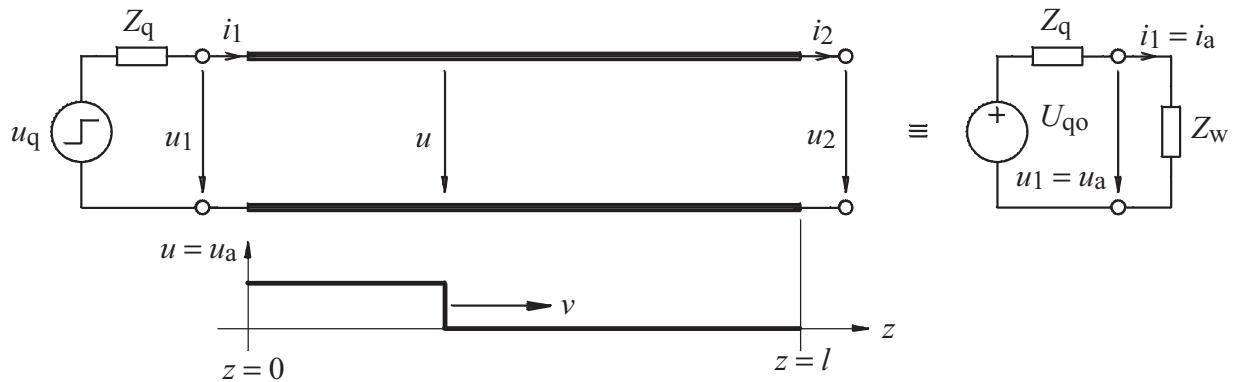
$$u = u_a = \frac{U_{q0} Z_w}{Z_q + Z_w} \quad (11.12)$$

$$i = i_a = \frac{u_a}{Z_w} \quad (11.13)$$

$$u_b = 0 \quad (11.14)$$

$$i_b = 0 \quad (11.15)$$

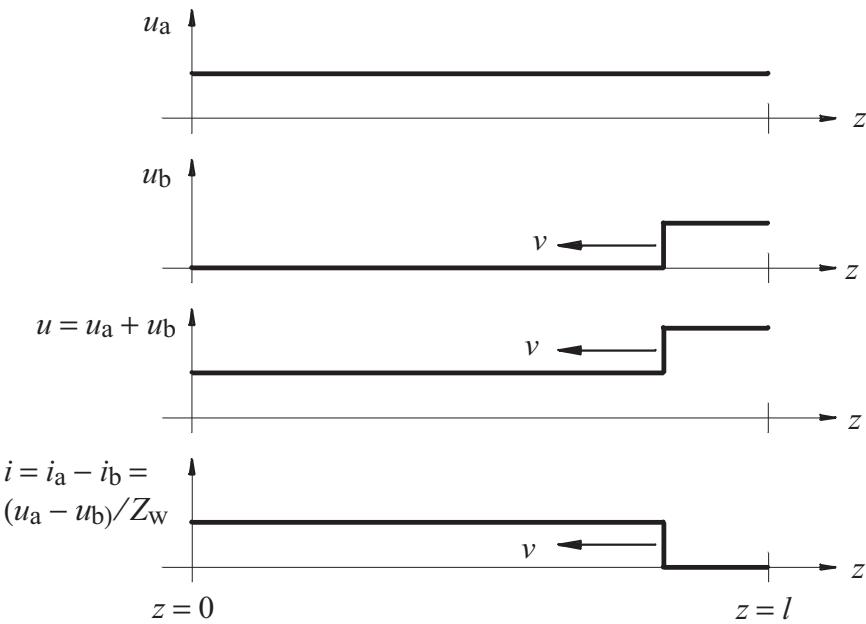
Figur 11.3 illustriert diesen Vorgang:



Figur 11.3 Nach rechts laufende Welle zur Zeit $0 < t < T$.

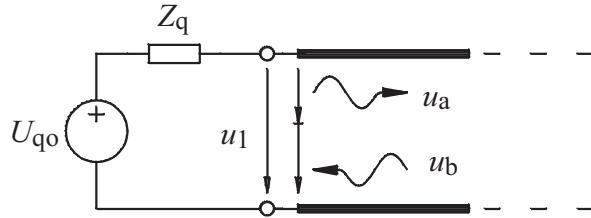
Zur Zeit $t = T$ erreicht die Welle u_a, i_a das leerlaufende Ende der Leitung und erfährt eine Reflexion mit dem Reflexionsfaktor $r_2 = 1$. Dies folgt aus der Randbedingung $i_2 = 0 = i_a - i_b$ die am Leitungsende eine rücklaufende Welle von $i_b = i_a$ und $u_b = u_a$ erzeugt.

Figur 11.4 zeigt Ströme und Spannungen im Zeitbereich $T < t < 2T$



Figur 11.4 Ströme und Spannungen zur Zeit $T < t < 2T$.

Figur 11.5 zeigt Ströme und Spannungen auf der Quellenseite



Figur 11.5 Ströme und Spannungen auf der Quellenseite.

Zur Zeit $t = 2T$ erreicht die Vorderflanke der rücklaufenden Welle u_b , i_b die Quellenseite der Leitung und erfährt wiederum eine Reflexion. Die Randbedingung auf der Quellenseite ist:

$$U_{qo} = u_a + u_b + \left(\frac{u_a}{Z_w} - \frac{u_b}{Z_w} \right) Z_q \quad (11.16)$$

Daraus gilt für den Zeitbereich $2T < t < 3T$

$$u_a = \frac{U_{qo} Z_w}{Z_q + Z_w} + u_b \frac{Z_q - Z_w}{Z_q + Z_w} = u_a(2T) + u_b r_1 \quad (11.17)$$

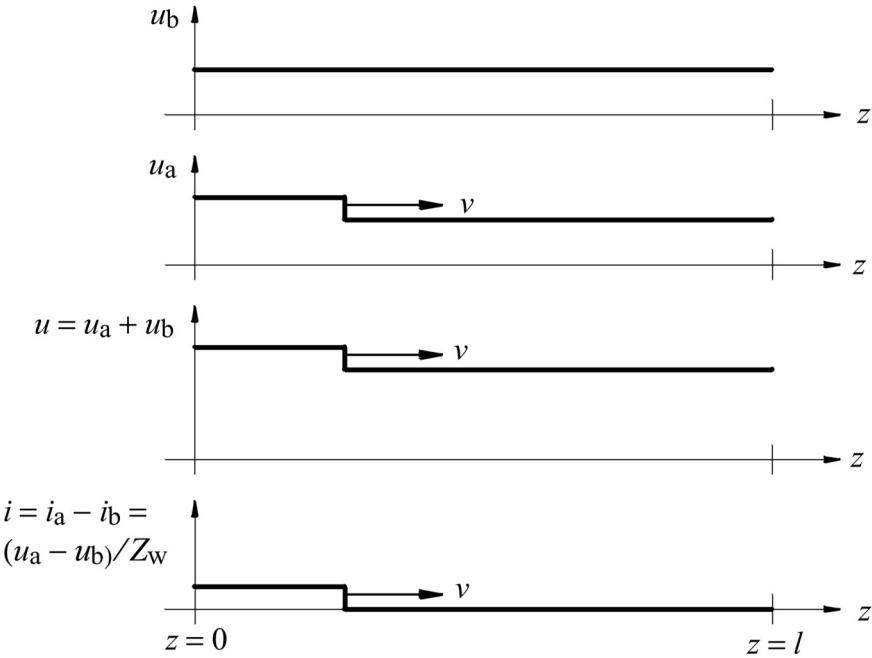
Zur Zeit $t = 2T$ wird also u_a durch die Reflexion der rücklaufenden Welle u_b erhöht um

$$u_b \frac{Z_q - Z_w}{Z_q + Z_w} = u_b r_1$$

Daher ist r_1 der Reflexionsfaktor am linken Leitungsende

$$r_1 = \frac{Z_q - Z_w}{Z_q + Z_w} \quad (11.18)$$

Figur 11.6 zeigt Ströme und Spannungen im Zeitbereich $2T < t < 3T$.



Figur 11.6 Ströme und Spannungen zur Zeit $2T < t < 3T$.

Nach jedem Zeitinkrement $2T$: erhöht sich u_a am linken Leitungsende:

$$t = 0 \quad u_a = \frac{U_{q0} Z_w}{Z_q + Z_w} = u_{ao} \quad (11.19)$$

$$t = 2T \quad u_{a1} = u_{ao} + u_{ao} r_1 = u_{ao}(1 + r_1) \quad (11.20)$$

$$t = 4T \quad u_{a2} = u_{ao} + u_{a1} r_1 = u_{ao}(1 + r_1 + r_1^2) \quad (11.21)$$

$$t = 2nT \quad u_{an} = u_{ao} + u_{a,n-1} r_1 = u_{ao}(1 + r_1 + r_1^2 + \dots + r_1^{n-1} + r_1^n) \quad (11.22)$$

Die Spannung u_1 am linken Ende nimmt also folgenden zeitlichen Verlauf an:

$$u_{1,n} = u_{an} + u_{bn} = u_{an} + u_{an-1} \quad (11.23)$$

Der Index n gibt das zeitliche Inkrement $\Delta t = 2nT$ an. Die Eingangsspannung $u_{1,n}$ ist also:

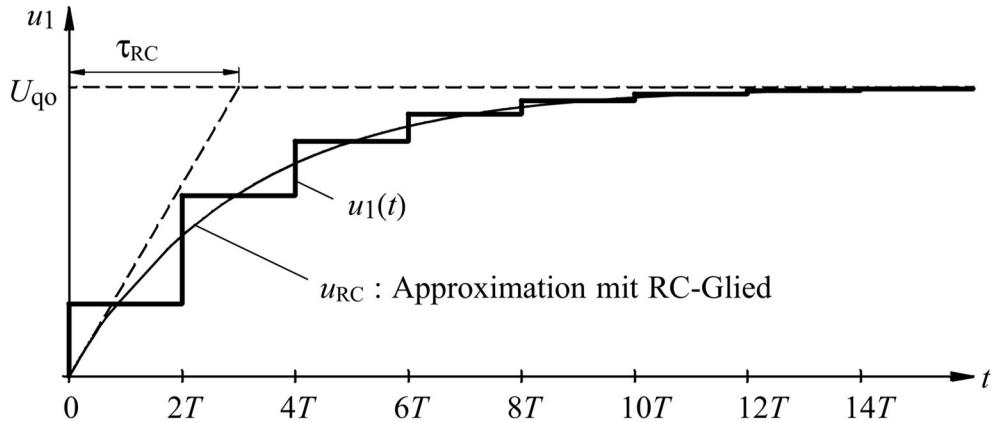
$$t = 0 \quad u_{1,0} = u_{ao} \quad (11.24)$$

$$t = 2T \quad u_{1,1} = 2u_{ao}(1 + \frac{r_1}{2}) \quad (11.25)$$

$$t = 4T \quad u_{1,2} = 2u_{ao}(1 + r_1 + \frac{r_1^2}{2}) \quad (11.26)$$

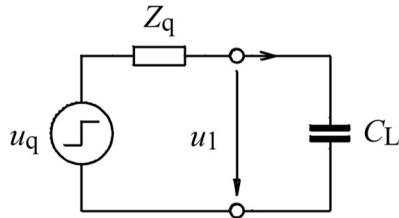
$$t = 2nT \quad u_{1,n} = 2u_{ao}(1 + r_1 + r_1^2 + \dots + r_1^{n-1} + \frac{r_1^n}{2}) \quad (11.27)$$

Figur 11.7 zeigt den zeitlichen Verlauf $u_1(t)$ für $Z_q = 3Z_w \triangleq r_1 = 0.5$



Figur 11.7 Zeitlicher Verlauf der Eingangsspannung $u_1(t)$ der leerlaufenden Leitung für $Z_q = 3Z_w \triangleq r_1 = 0.5$

Mit jedem Durchgang einer Welle wird die Leitung weiter aufgeladen. In erster Näherung kann die leerlaufende Leitung mit der Leitungskapazität C_L dargestellt werden. Sie bildet mit der reellen Quellenimpedanz Z_q ein RC-Glied, wie es Figur 11.8 veranschaulicht:



Figur 11.8 Ersatzschaltung der leerlaufenden Leitung mit einer Kapazität C_L .

Dabei ist die Leitungskapazität

$$C_L = C'l = \frac{T}{Z_w} \quad T: \text{Laufzeit der Leitung} \quad (11.28)$$

und die Zeitkonstante τ_{RC} der Ersatzschaltung

$$\tau_{RC} = Z_q C_L = \frac{Z_q}{Z_w} T \quad (11.29)$$

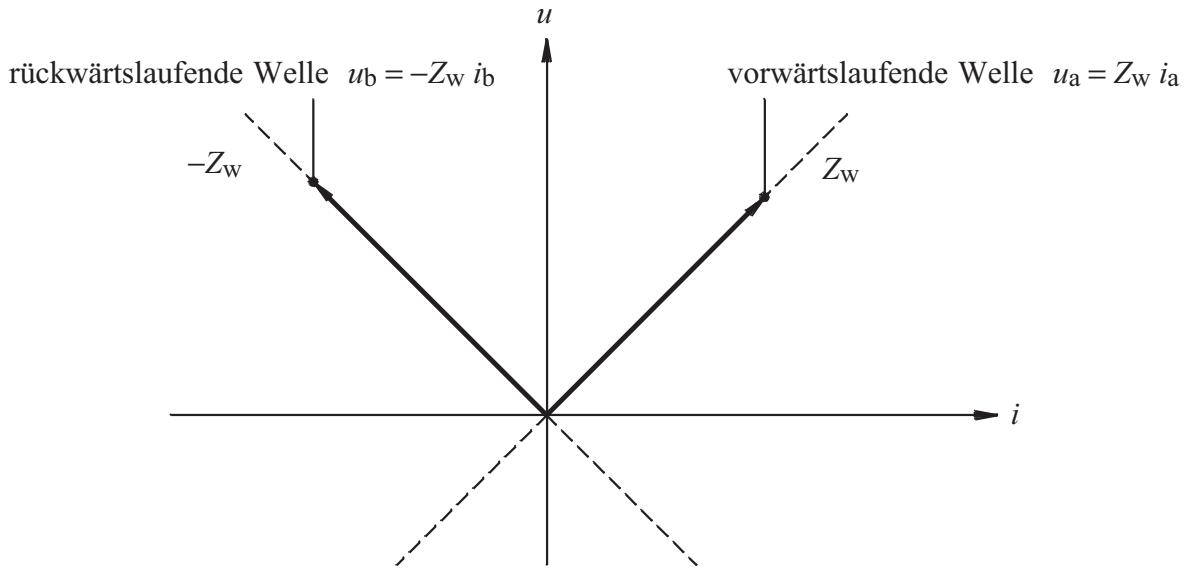
Figur 11.7 zeigt die mit der Zeitkonstante τ_{RC} exponentiell zunehmende Kondensatorspannung u_{RC} , die eine Näherung an den exakten stufenförmigen Spannungsverlauf darstellt.

Im obigen Beispiel, das mit dem Reflexionsfaktor $r_2 = 1$ noch einen Spezialfall darstellt, konnte die Schrittantwort der Schaltung ohne grossen Aufwand ermittelt werden.

Für den allgemeinen Fall mit linearen oder nichtlinearen Abschlüssen einer verlustfreien Leitung besteht ein graphischer Algorithmus, das Bergeron-Verfahren, mit dessen Hilfe Mehrfachreflexionen sehr einfach und anschaulich dargestellt werden können.

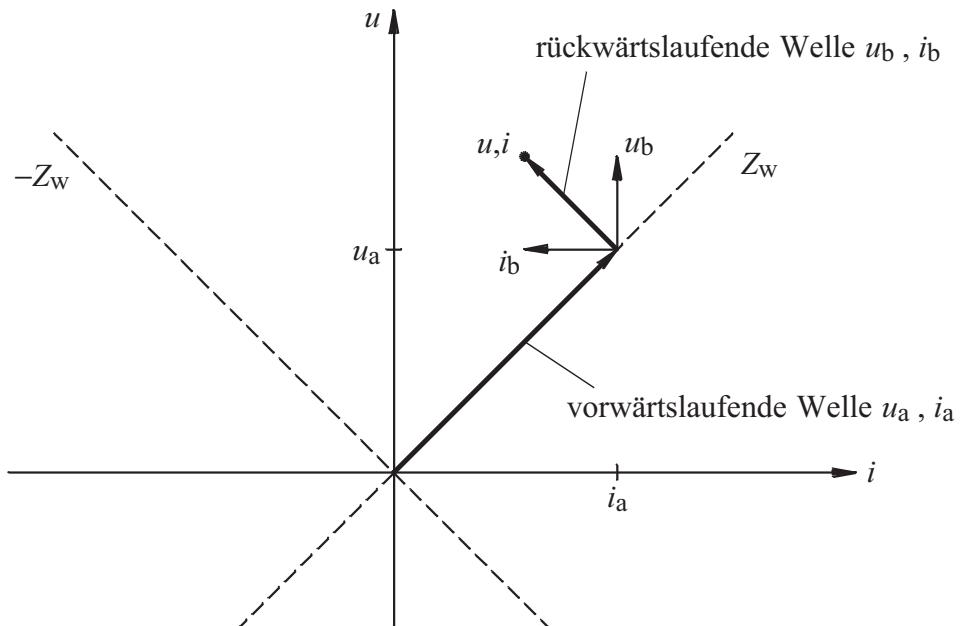
11.1.3 Das Bergeron-Verfahren

Mit dem Bergeron-Verfahren werden Ströme und Spannungen auf einer Leitung in kartesischen Koordinaten dargestellt, wobei wir uns darauf einigen, den Strom auf der horizontalen Achse und die Spannung auf der vertikalen Achse nach Figur 11.9 aufzuzeichnen.

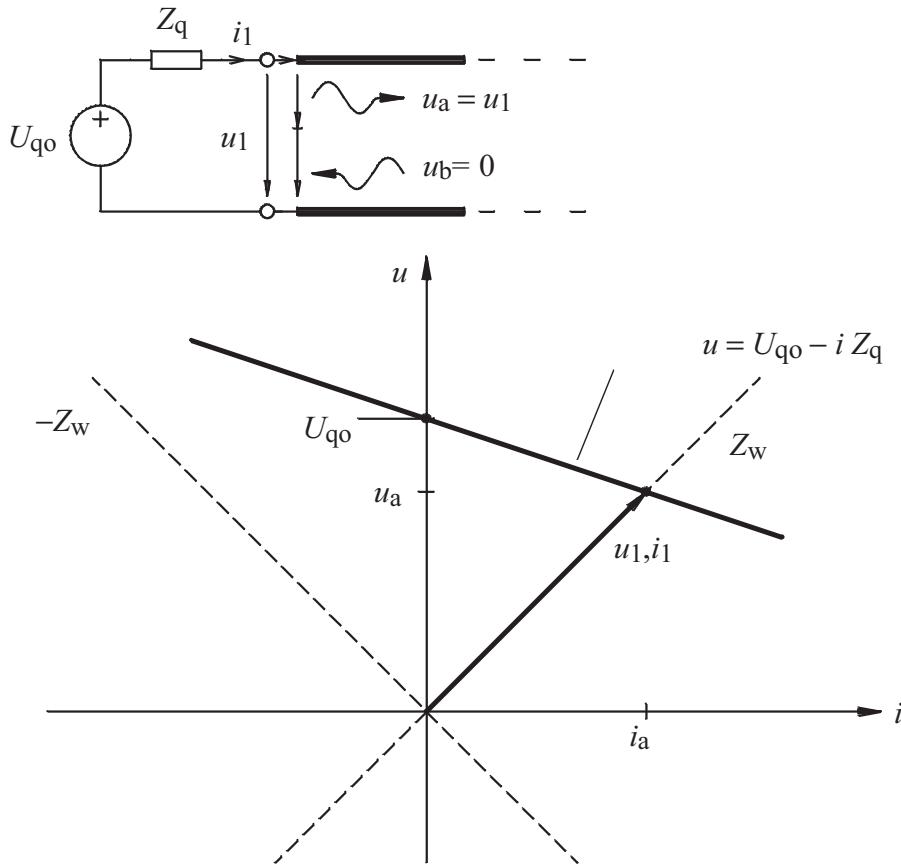


Figur 11.9 Darstellung von Strom und Spannung auf einer Leitung.

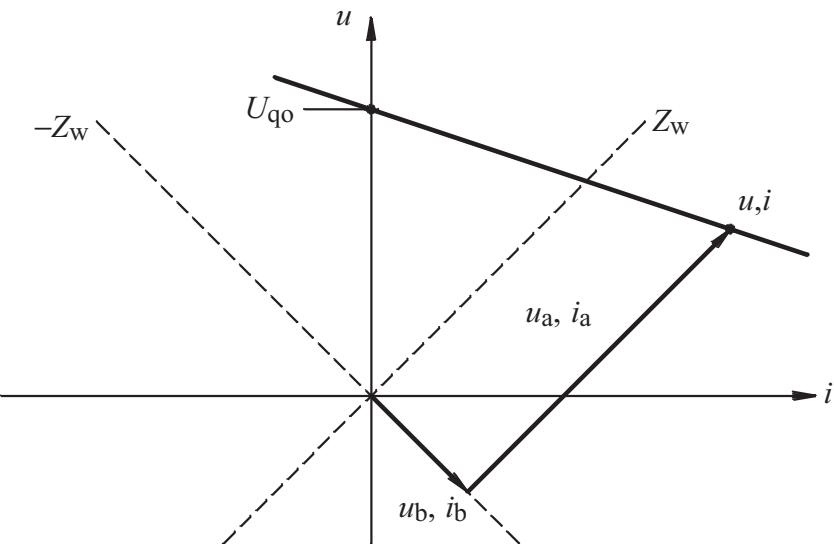
Die Massstäbe werden dabei zweckmässigerweise so gewählt, dass die Steigung von 45° gerade dem Wert der reellen Wellenimpedanz Z_w entspricht. Die Ströme und Spannungen einer Leitung können, mit geeigneten vorwärts- und rückwärtslaufenden Wellen, jeden Punkt in diesem Diagramm einnehmen. Liegt aber beispielsweise ein solcher Strom/Spannungspunkt exakt auf der Z_w -Geraden (45° -Geraden) im 1. oder 3. Quadranten, dann führt die Leitung eine reine vorwärtslaufende Welle.



Figur 11.10 Aufteilung eines beliebigen u - i -Zustandes in eine vorwärts- und eine rückwärtslaufende Welle.



Figur 11.11 Darstellung des u - i -Zustandes ohne rückwärtslaufende Welle u_b , i_b auf einer Leitung.

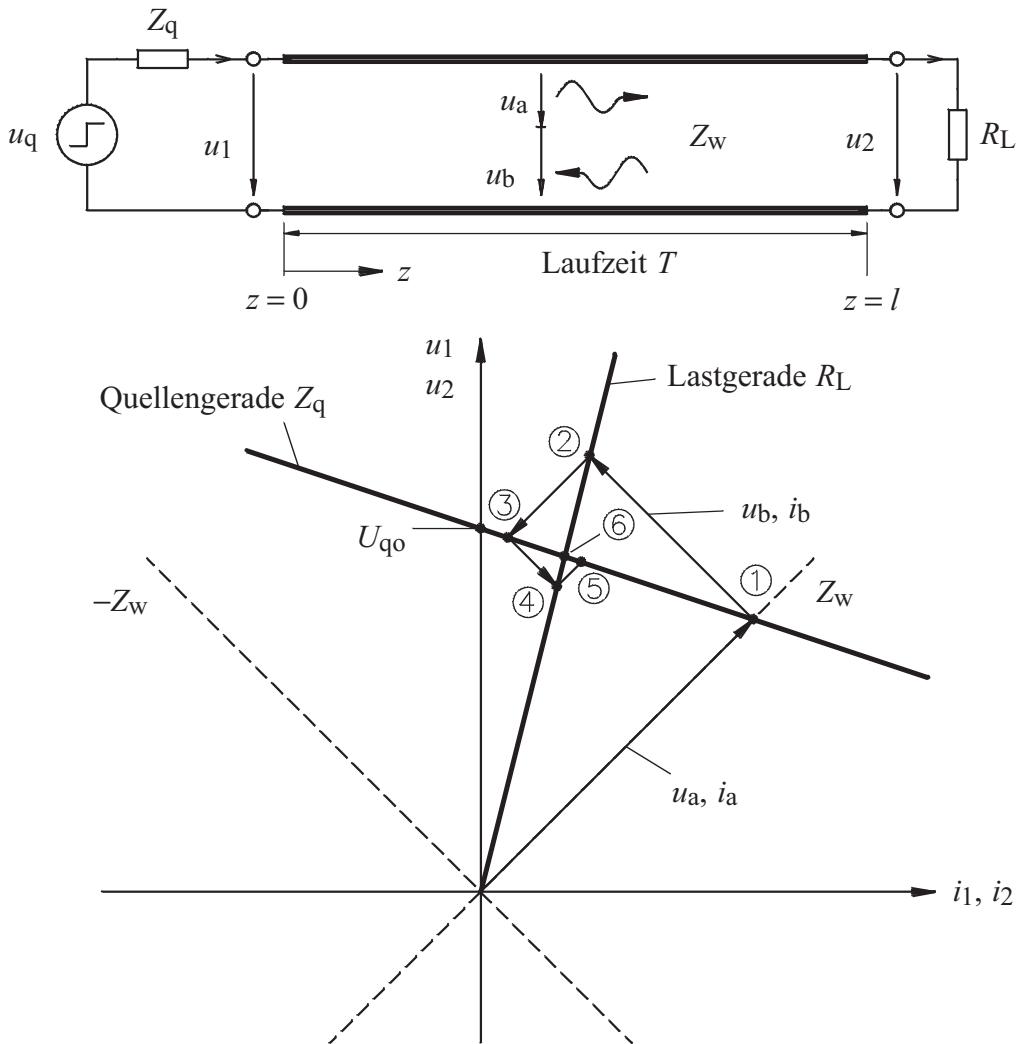


Figur 11.12 Darstellung des u - i -Zustandes mit rückwärtslaufender Welle u_b , i_b auf einer Leitung.

Bei einer reinen rückwärtslaufenden Welle liegt der zugehörige Strom/Spannungspunkt auf der Z_w -Geraden im 2. oder 4. Quadranten. Nach Figur 11.10 kann jeder beliebige u - i -Zustand in zwei Teilwellen, entsprechend einer vorwärtslaufenden und einer rückwärtslaufenden Welle aufgeteilt werden, indem das Lot auf eine der Z_w -Geraden gefällt wird.

Mit dem eingeführten Leitungs-Strom-Spannungsdiagramm, dem sogenannten *Bergeron-Diagramm*, stellen wir in einem ersten Schritt die Verhältnisse auf einer Leitung dar, die mit einer Quelle mit reeller Innenimpedanz Z_q gespeist wird. Figur 11.11 zeigt das Bergeron-Diagramm für eine an eine Spannungsquelle angeschlossene Leitung. Unter der Annahme, dass keine rückwärtslaufende Welle existiert ($u_b, i_b = 0$) kann als Schnittpunkt der Quellencharakteristik mit der Z_w -Geraden im 1. Quadranten die vorwärtslaufende Welle u_a, i_a bestimmt werden. Im nächsten Schritt lassen wir in Figur 11.12 für die gleiche Schaltung eine schon vorhandene rückwärtslaufende Welle u_b, i_b zu. Nun verschiebt sich der Strom-Spannungszustand $u-i$ am Leitungseingang auf einen Schnittpunkt zwischen der Quellengeraden und einer Z_w -Geraden durch den Punkt u_b, i_b .

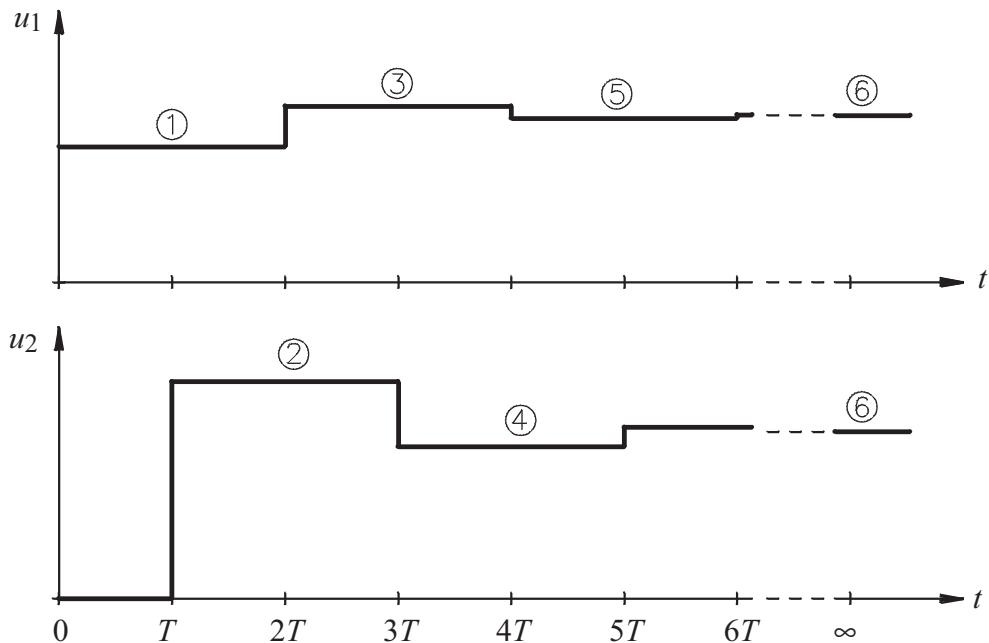
Damit sind alle Elemente der Bergeron-Methode eingeführt und, anhand des in Figur 11.13 abgebildeten Beispiels soll das vollständige Diagramm aufgebaut werden.



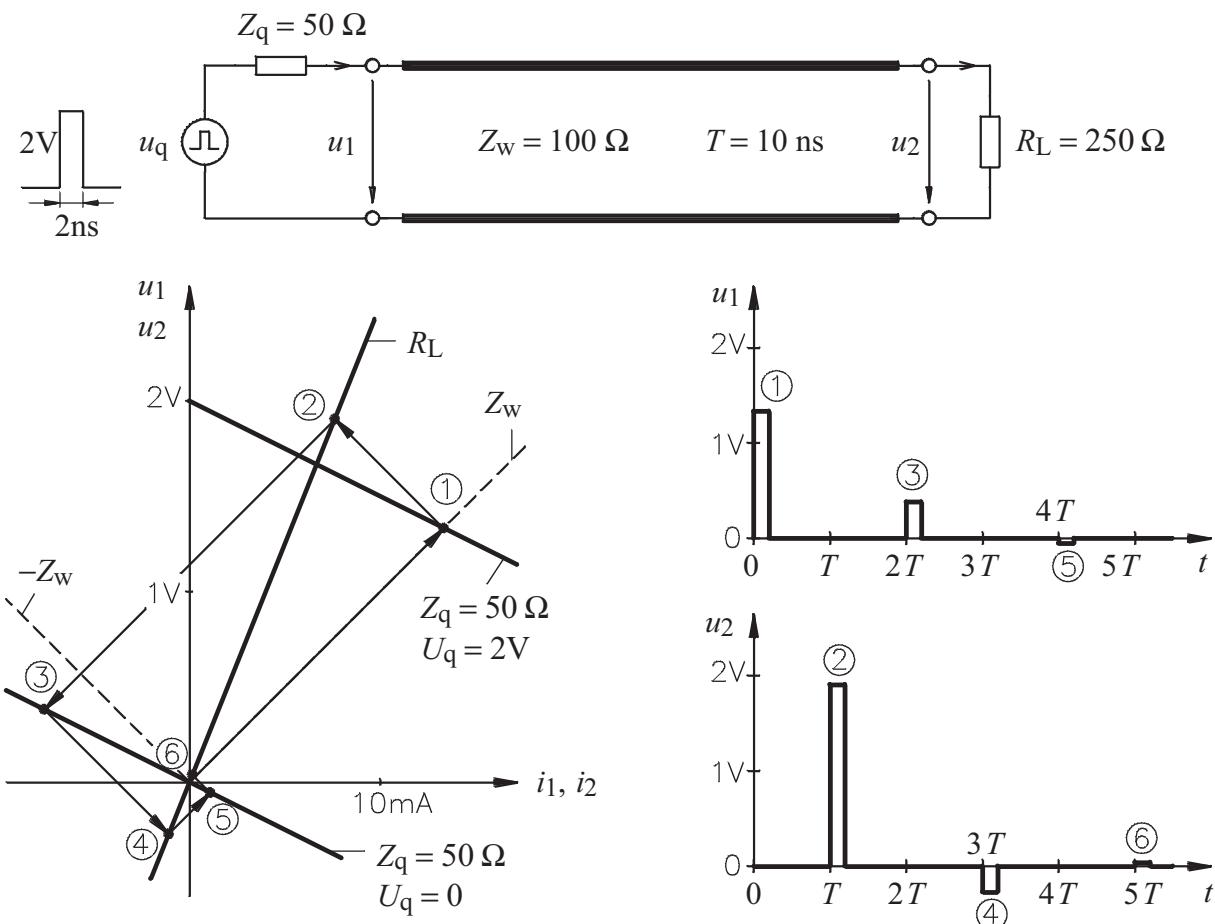
Figur 11.13 Bergeron-Diagramm für schrittweise Anregung für $Z_q = Z_w/3$ und $R_L = 4 Z_w$

Die Spannungsquelle erzeugt zur Zeit $t = 0$ einen Spannungsschritt von $u_q = 0$ auf $u_q = U_{q0}$. Die Quellengerade mit der Steigung Z_q schneidet die Z_w -Gerade im 1. Quaranten im Punkt ① und bestimmt die vorwärtslaufende Welle u_a, i_a .

Im Moment, wo diese Welle die Lastseite erreicht, muss am Leitungsausgang ein Strom-Spannungszustand erzeugt werden, der dem Lastwiderstand entspricht.



Figur 11.14 Die Spannung u_1 am Leitungseingang und u_2 am Leitungsausgang.



Figur 11.15 Speisung einer Leitung mit einem kurzen Rechteckimpuls als Übungsbeispiel für das Bergeron-Verfahren.

Dabei wird eine rückwärtslaufende Welle angeregt; die bestehende vorwärtslaufende Welle wird aber nicht verändert. Diesen neuen Strom-Spannungszustand finden wir als Punkt ② auf der Lastgeraden R_L , ausgehend vom Punkt ①, wobei ①-② die Steigung $-Z_W$ zeigt.

Damit ist die Welle u_b , i_b erzeugt worden. Zum Zeitpunkt $t = 2T$ trifft die Welle u_b , i_b auf der Quellenseite ein. Hier muss sich ein Strom/Spannungszustand entsprechend der Quellengeraden einstellen. Ausgehend vom Punkt ② finden wird den neuen Punkt ③ als Schnittpunkt der Geraden mit der Steigung Z_W mit der Quellengeraden.

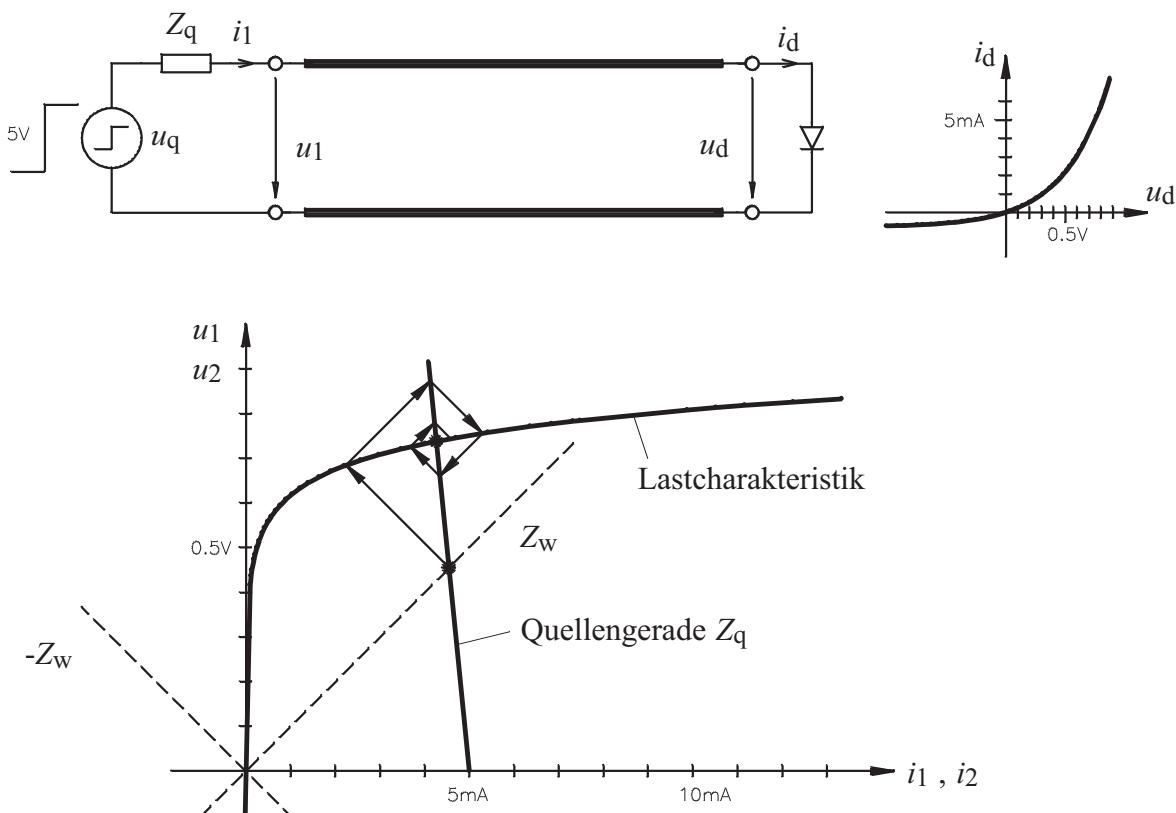
Der Verlauf der Ströme und Spannungen am Leitungseingang und -ausgang kann nun aus dem Diagramm entnommen werden:

Auf der Quellenseite entsprechen der Leistungsstrom und die Leitungsspannung zur Zeit $t = 0$ dem Punkt ① und zur Zeit $t = 2T$ dem Punkt ③. Auf der Lastseite entsprechen u_2 und i_2 zur Zeit $t = T$ dem Punkt ② und zur Zeit $t = 3T$ dem Punkt ④. Die Spannung u_1 am Leitungseingang und u_2 am Leitungsausgang sind in Figur 11.14 dargestellt.

In Figur 11.15 findet sich das gleiche Schaltungsbeispiel, wobei hier die Anregung aus einem kurzen Rechteckimpuls besteht. Auch diese Aufgabe lässt sich mit dem Bergeronverfahren lösen. Es ist einzige zu beachten, dass zum Zeitpunkt $t = 2T$, wenn die reflektierte Welle auf der Quellenseite eintrifft, die Quellengerade mit der Steigung Z_q durch den Nullpunkt geht und nicht mehr durch $u = U_{q0}$.

Das Bergeron-Verfahren lässt sich auch für nichtlineare Quellen- bzw. Lastcharakteristiken anwenden, was namentlich in der Digitaltechnik von Bedeutung ist, zeigen doch verschiedene logische Schaltungen in den spezifizierten Betriebsbereichen nichtlineares Verhalten.

Figur 11.16 zeigt als Beispiel eine Leitung mit einer Diode als nichtlineare Last.



Figur 11.16 Das Bergeron-Verfahren angewandt auf eine Leitung mit nichtlinearem Abschluss.

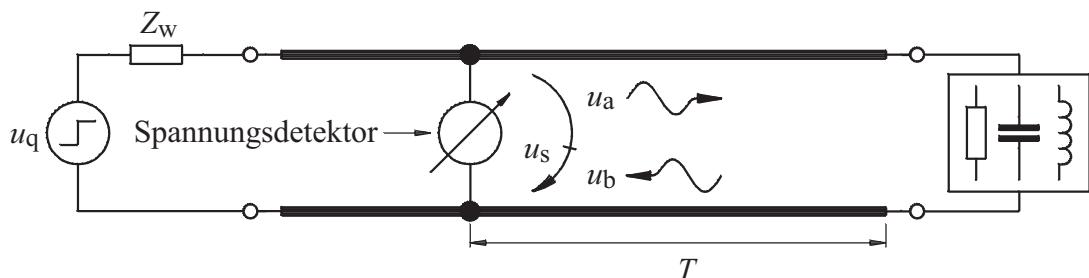
11.2 Die verlustfreie Leitung mit eingangsseitiger Anpassung und reaktiv-resistiver Last

Die in Figur 11.17 gezeigte Leitung, die eingangsseitig angepasst ist und ausgangsseitig mit einem reaktiven Netzwerk belastet ist, scheint im ersten Moment ein etwas konstruiert Spezialfall zu sein.



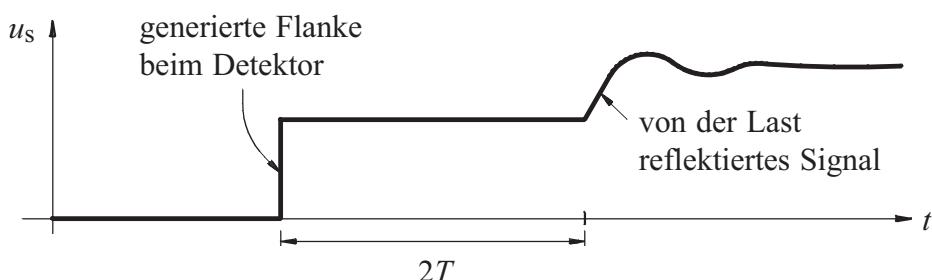
Figur 11.17 Verlustfreie Leitung mit eingangsseitiger Anpassung und reaktiv-resistiver Last

Tatsächlich handelt es sich dabei um eine Messmethode der Schrittantwort von Leitungen und Netzwerken, die in der Elektronik sehr häufig eingesetzt wird: die Reflektometrie (TDR = Time Domain Reflectometer). Im Reflektometer wird mit der angepassten Quelle ein Spannungsschritt generiert, der von der reaktiven Last reflektiert wird und mittels einer Spannungssonde, die die Leitung nur unwesentlich belastet, detektiert wird. Figur 11.18 zeigt schematisch diese TDR-Messeinrichtung.



Figur 11.18 Schematische Darstellung eines Reflektometers (TDR).

In Figur 11.19 ist ein typischer Spannungsverlauf, wie er vom Detektor eines Reflektometers erfasst wird.



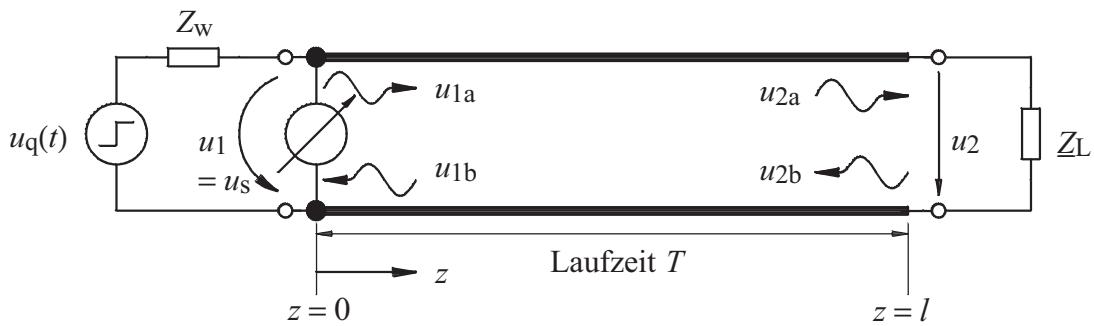
Figur 11.19 Ein typisches vom Spannungsdetektor gezeigtes Signal $u_s(t)$ eines Reflektometers.

Der Spannungsdetektor sollte dabei eine möglichst hohe zeitliche Auflösung aufweisen. Bei den meisten TDRs ist der Spannungsdetektor ein Abtastoszilloskop (Sampling Oscilloscope). Die zeitliche Auflösung liegt bei den schnellsten Geräten bei 6 ps.

Der Detektor des Reflektometers misst die Leitungsspannung, d.h. die Summe der vorwärts- und rückwärtslaufenden Spannungswellen. Wie dargestellt, wird die Detektorspannung zuerst den Spannungsschritt der Quelle anzeigen und erst nach der doppelten Laufzeit vom Detektor zur Last das überlagerte reflektierte Signal. Das TDR ist somit auch geeignet zur Bestimmung einer Distanz zwischen einem Leitungseingang und einer Stelle wo eine Leitung einen Fehler, wie Kurzschluss, Unterbruch oder eine beliebige Diskontinuität aufweist.

11.2.1 Analyse der verlustfreien Leitung mit reaktiv-resistiver Last

Die Schrittanwort des TDR-Systems soll nun mit Hilfe der Laplace-Transformation analysiert werden. Figur 11.20 zeigt die verwendeten Parameter u_{1a} und u_{1b} am Leitungseingang und u_{2a} und u_{2b} am Leitungsausgang.



Figur 11.20 Definitionen der in der Analyse verwendeten vorwärts- und rückwärtslaufen- den Spannungswellen u_a und u_b .

Zur Zeit $t = 0$ zeigt die Spannungsquelle den Übergang von der Spannung $u_q = 0$ zu $u_q = U_{q0}$. Die Laplace-Transformierte von $u_q(t)$ ist

$$U_q(s) = \frac{U_{q0}}{s} \quad (11.30)$$

und die vorwärtslaufende Welle am Ort $z = 0$ ist

$$U_{1a}(s) = \frac{U_q(s)}{2} = \frac{U_{q0}}{2s} \quad (11.31)$$

Am Ort $z = l$ gilt für die vorwärtslaufende und reflektierte Welle:

$$U_{2a}(s) = U_{1a}(s) e^{-sT} = \frac{U_{q0}}{2s} e^{-sT} \quad (11.32)$$

$$U_{2b}(s) = U_{2a}(s) r(s) = \frac{U_{q0}}{2s} e^{-sT} \frac{Z_L(s) - Z_w}{Z_L(s) + Z_w} \quad (11.33)$$

Die Spannung an der Lastimpedanz Z_L ist somit

$$U_2(s) = U_{2a}(s) + U_{2b}(s) = \frac{U_{q0}}{s} e^{-sT} \frac{Z_L(s)}{Z_L(s) + Z_W} \quad (11.34)$$

Am Ort $z=0$ ist die Detektorspannung U_s :

$$U_s(s) = U_1(s) = U_{1a}(s) + U_{1b}(s) = U_{1a}(s) + U_{2b}(s) e^{-sT} \quad (11.35)$$

daraus

Detektorspannung:

$$U_s(s) = \frac{U_{q0}}{2s} + \frac{U_{q0}}{2s} e^{-2sT} \frac{Z_L(s) - Z_W}{Z_L(s) + Z_W} \quad (11.36)$$

Die Schrittantworten $u_2(t)$ und $u_s(t)$ können wie folgt sehr plausibel dargestellt werden:

1. Die Schrittantwort $u_2(t)$

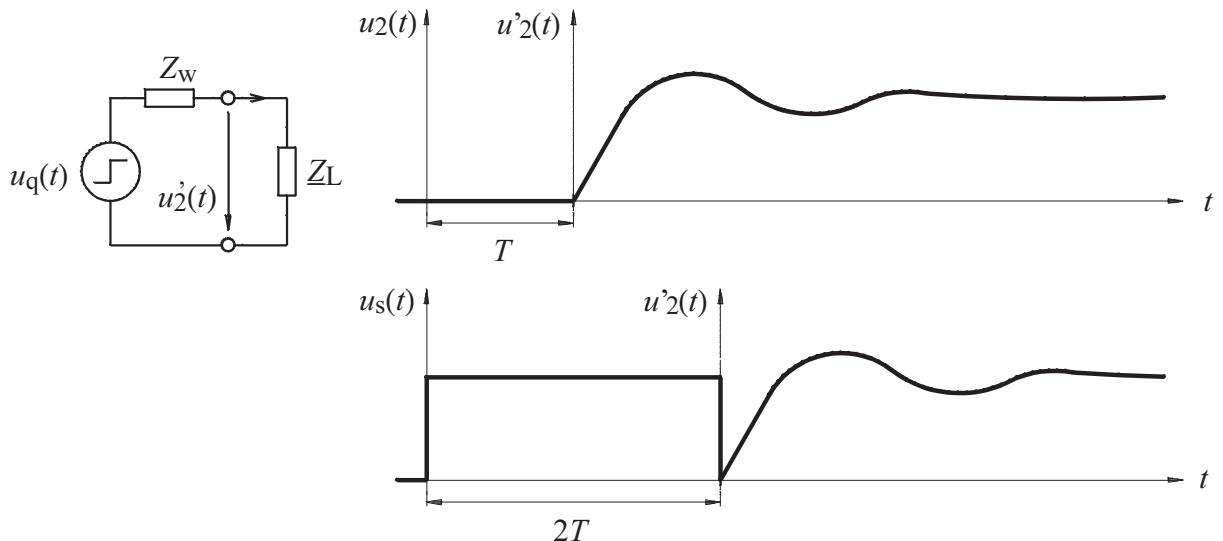
Für die Zeit $t > T$ entspricht $u_2(t)$ der um die Laufzeit T verzögerten Schrittantwort $u'2(t)$ der in Figur 11.21 dargestellten Ersatzschaltung.

$$u_2(t) = u'2(t - T)$$

2. Schrittantwort $u_s(t)$:

Für die Zeit $0 < t < 2T$ erscheint in $u_s(t)$ nur die vorwärtslaufende Welle u_{1a} . Für $t \geq 2T$ entspricht $u_s(t)$ der um $2T$ verzögerten Schrittantwort $u'2(t)$.

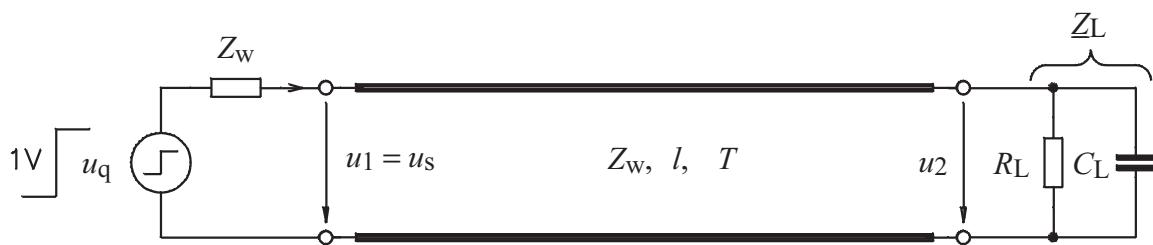
$$u_s(t) = u'2(t - 2T)$$



Figur 11.21 Ersatzschaltung zur Erzeugung $u'2(t)$ und typische Schrittantworten der Spannungen $u_2(t)$, $u_s(t)$ und $u'2(t)$.

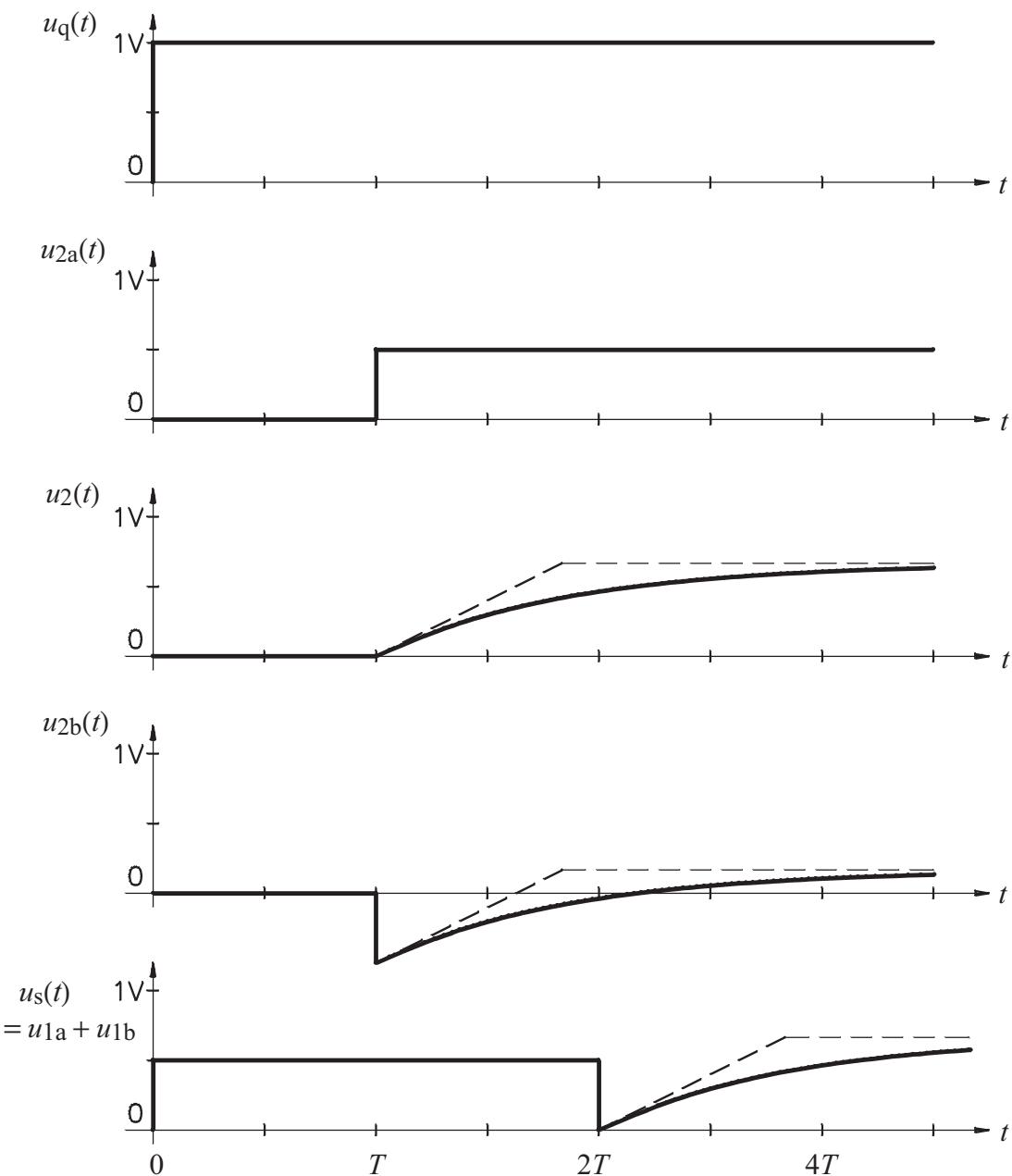
Beispiel:

Figur 11.22 zeigt eine mit einem einfachen reaktiven Netzwerk belastete Leitung.



Figur 11.22 Leitung mit reaktiver Last

$$Z_W = 50 \Omega, \quad l = 4 \text{ m}, \quad T = 20 \text{ ns}, \quad R_L = 100 \Omega, \quad C_L = 500 \text{ pF} \quad U_{q0} = 1 \text{ V}$$



Figur 11.23 Spannungen $u_q(t)$, $u_2a(t)$, $u_2(t)$, $u_2b(t)$ und $u_s(t) = u_1a + u_1b$.

Nach (11.34) ist

$$U_2(s) = \frac{U_{q0}}{s} e^{-sT} \frac{1}{1 + Z_w/Z_L} = \frac{\frac{U_{q0}}{s} e^{-sT}}{1 + Z_w \left(\frac{1}{R_L} + s C_L \right)} = \frac{\frac{U_{q0}}{Z_w C_L} e^{-sT}}{s \left(s + \frac{1}{C_L} \left(\frac{1}{R_L} + \frac{1}{Z_w} \right) \right)} \quad (11.37)$$

Im Zeitbereich:

$$\text{für } t < T \quad u_2(t) = 0$$

$$\text{für } t \geq T$$

$$u_2(t) = \frac{U_{q0}}{1 + Z_w/R_L} \left(1 - e^{-\frac{t-T}{\tau}} \right) \quad (11.38)$$

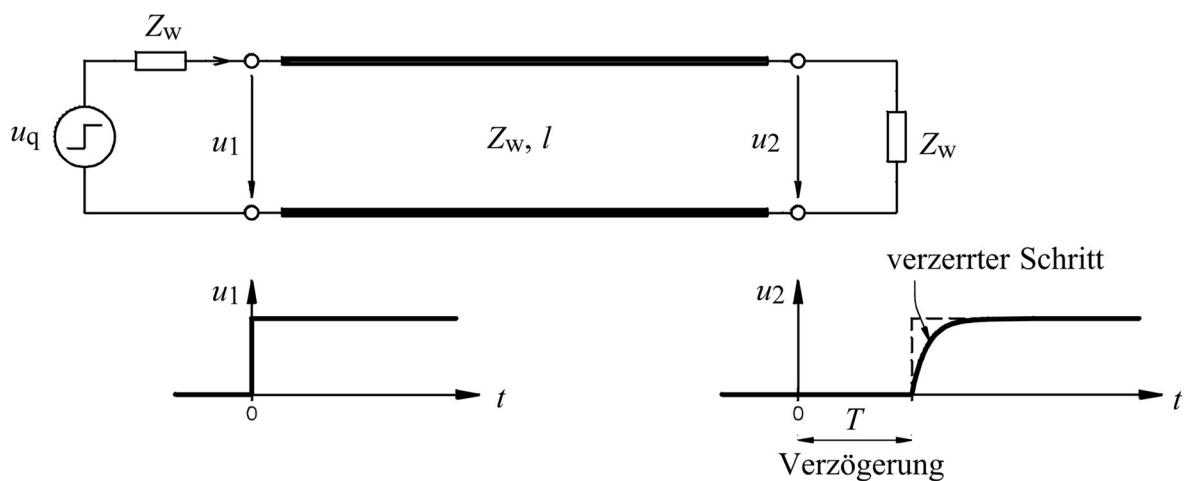
$$\tau: \text{Zeitkonstante} \quad \tau = \frac{C_L}{\frac{1}{R_L} + \frac{1}{Z_w}} \quad (11.39)$$

Danach ist in unserem Beispiel die Zeitkonstante $\tau = 16.7 \text{ ns}$

Figur 11.23 zeigt die entsprechenden Spannungen $u_q(t)$, $u_{2a}(t)$, $u_2(t)$, $u_{2b}(t)$ und $u_s(t)$.

11.3 Impulsverzerrung auf der Skineffekt-behafteten Leitung

Bei längeren Leitungen mit Signalfrequenzen $> 10 \dots 100 \text{ kHz}$ (Elektronik, Datenübertragung, Trägerfrequenztelefonie, Kabelfernsehen usw.) tritt der ausgeprägte Skineffekt meist als dominanter Anteil der Leitungsverluste auf. In diesem Abschnitt wird die Schrittantwort einer Skineffekt-behafteten Leitung analysiert. In Abschnitt 10.25 wurde gezeigt, dass die Dämpfung durch Skineffekt proportional zu $\sqrt{\omega}$ ist, d.h. die Leitung zeigt Tiefpass-Eigenschaften und wir erwarten daher eine Schrittantwort wie sie qualitativ in Figur 11.24 dargestellt ist.

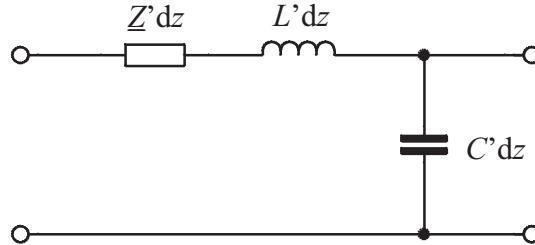


Figur 11.24 Qualitatives Verhalten der Schrittantwort einer Skineffekt-bedämpften Leitung.

Für die Analyse machen wir folgende Annahmen bezüglich des betrachteten Frequenzbereichs $f_{\min} \dots f_{\max}$:

1. f_{\min} ist so hoch, dass ausgeprägter Skineffekt auftritt: Eindringtiefe $\delta(f_{\min}) \ll$ Leiterdicke
2. Im betrachteten Frequenzbereich soll nur der bisher immer angenommene TEM-Wellentyp ausbreitungsfähig sein (keine höheren Wellentypen).

Das für ausgeprägten Skineffekt gültige Leitungsersatzschaltbild wurde in Abschnitt 10.3 hergeleitet und ist nochmals in Figur 11.25 dargestellt.



Figur 11.25 Leitungsersatzschaltung der Skineffekt-behafteten Leitung

Für die Koaxialleitung gilt (9.27) und (9.30):

$$\underline{Z}' = \frac{\underline{Z}_\square}{2\pi r_a} + \frac{\underline{Z}_\square}{2\pi r_b} = R_o'(1+j) \sqrt{\frac{\omega}{\omega_0}} \quad (11.40)$$

mit \underline{Z}_\square : Oberflächenimpedanz $\underline{Z}_\square = (1+j) \sqrt{\frac{\omega \mu \rho}{2}}$

ω_0 : Referenzkreisfrequenz bei der $\underline{Z}' = R_o'(1+j)$

Die Ausbreitungskonstante γ ist (10.24):

$$\gamma \approx j\omega \sqrt{L'C'} + \frac{R_o'}{2 Z_w} \sqrt{\frac{j2\omega}{\omega_0}} \quad (11.41)$$

und die Wellenimpedanz Z_w :

$$Z_w = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}} \approx \sqrt{\frac{L'}{C'}}$$

Die Betriebsübertragung $\underline{U}_2/\underline{U}_1$ über eine Leitung der Länge l ist:

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{2\underline{U}_2}{\underline{U}_q} = e^{-\gamma l} = e^{-j\omega l \sqrt{L'C'}} e^{-\frac{R_o' l}{2 Z_w} \sqrt{\frac{j2\omega}{\omega_0}}} = e^{-j\omega l \sqrt{L'C'}} e^{-\alpha_o l \sqrt{2} \sqrt{\frac{j\omega}{\omega_0}}} \quad (11.42)$$

mit $\alpha_o l = \frac{l R_o'}{2 Z_w} =$ Leitungsdämpfung bei der Kreisfrequenz $\omega = \omega_0$

Zur Bestimmung der Schrittantwort im Zeitbereich suchen wir vorerst die Laplace-Transformierte.

Die Laplace-Transformierte der Impulsantwort lässt sich mit $\underline{U}_2/\underline{U}_1(\omega)$ darstellen, wenn $j\omega$ durch s ersetzt wird. Dies ist zulässig, da $\underline{U}_2/\underline{U}_1$ die Antwort eines passiven Systems ist und im Zeitbereich für $t \leq 0$ gilt $\underline{U}_2/\underline{U}_1 = 0$.

Die Laplace-Transformierte der Impulsantwort ist somit:

$$\frac{\underline{U}_2(s)}{\underline{U}_1(s)} = e^{-s l \sqrt{L'C}} e^{-\alpha_0 l \sqrt{2} \sqrt{\frac{s}{\omega_0}}} \quad (11.43)$$

Die Laplace-Transformierte der Schrittantwort mit Schritthöhe U_{10} ist:

$$\frac{\underline{U}_2(s)}{U_{10}} = \frac{1}{s} e^{-s l \sqrt{L'C}} e^{-\alpha_0 l \sqrt{2} \sqrt{\frac{s}{\omega_0}}} \quad (11.44)$$

Verzögerung um die Zeit $T = l \sqrt{L'C}$

Wir interessieren uns in erster Linie für die Verzerrung der Schrittform und lassen den reinen Verzögerungsterm $e^{-s l \sqrt{L'C}}$ für die weitere Betrachtung beiseite:

$$\frac{\underline{U}_2(s)}{U_{10}} = \frac{1}{s} e^{-\alpha_0 l \sqrt{2} \sqrt{\frac{s}{\omega_0}}} \quad (11.45)$$

Ein (gutes) Laplace-Lexikon liefert die entsprechende Zeitfunktion:

$$\frac{e^{-a \sqrt{s}}}{s} \leftrightarrow 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right) \quad (11.46)$$

Die Errorfunktion $\operatorname{erf}(x)$, ist wie folgt definiert:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du \quad (11.47)$$

Die Errorfunktion $\operatorname{erf}(x)$ ist dem in Tabellen häufiger zu findenden Gaussintegral $G(x)$ ähnlich:

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-u^2/2} du \quad (11.48)$$

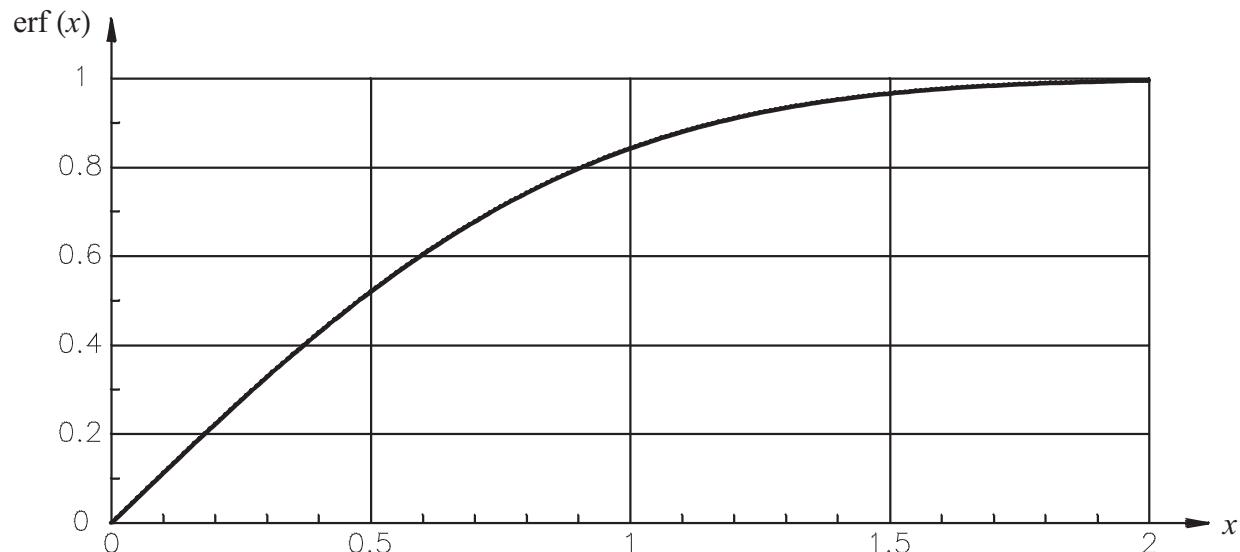
$$\operatorname{erf}(x) = 2G(\sqrt{2}x) \quad (11.49)$$

Damit wird die Schrittantwort im Zeitbereich:

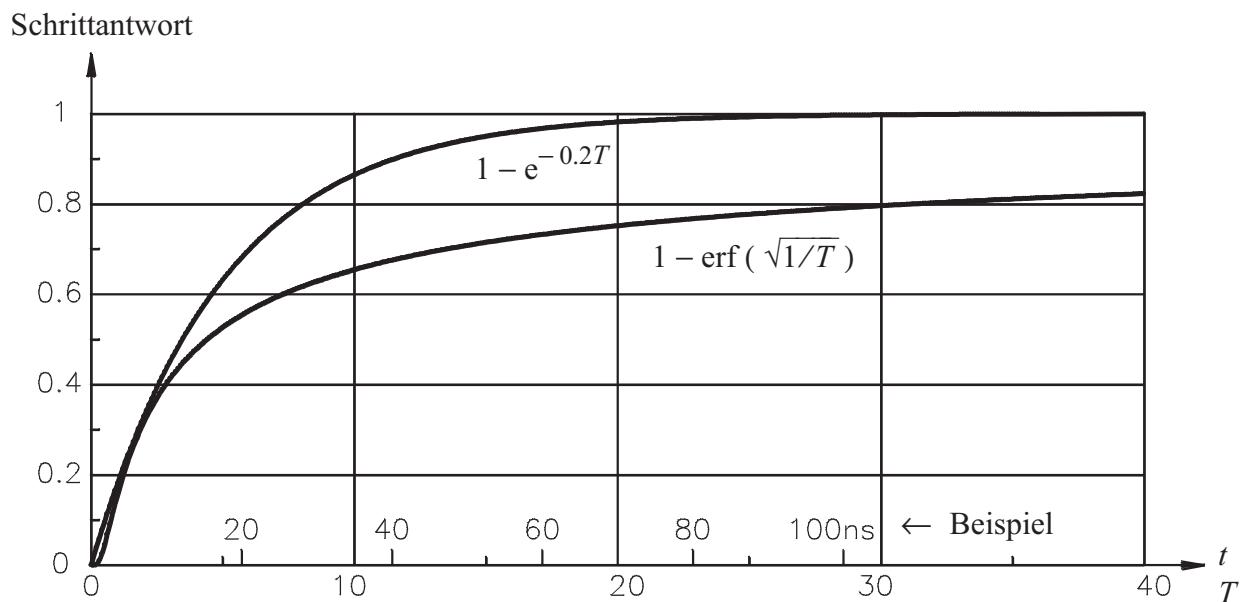
$$\frac{u_2(t)}{U_{10}} = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\alpha_0 l}{\sqrt{2\omega_0 t}}\right) = 1 - \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{\tau}{t}}\right) = 1 - 2G\left(\sqrt{\frac{2\tau}{t}}\right) \quad (11.50)$$

$$\text{mit der Zeitkonstante: } \tau = \frac{\alpha_0^2 l^2}{2\omega_0} = \frac{l^2 R_o'^2}{8 Z_w^2 \omega_0} \quad (11.51)$$

Figur 11.26 zeigt die Errorfunktion $\text{erf}(x)$. In Figur 11.27 ist die normierte Schrittantwort $u_2/u_1 = 1 - \text{erf}(\sqrt{1/T})$ mit $T = t/\tau$ dargestellt. Der Vergleich mit der Schrittantwort eines Tiefpasses 1. Ordnung zeigt, dass die Schrittantwort einer Skineffekt-bedämpften Leitung bei anfänglich starker Zunahme von u_2/u_1 im Bereich von $u_2/u_1 > 0.5$ ein höchst "lahmes" Verhalten zeigt. Eine digitale Datenübertragung im Basisband und NRZ-Format müsste beispielsweise eine Bitdauer von mindestens 20τ aufweisen, damit der Diskriminierung noch eine gewisse Toleranz zugeordnet werden könnte. Die charakteristische Zeitkonstante ist proportional zum *Quadrat der Leitungslänge*.



Figur 11.26 Errorfunktion $\text{erf}(x)$.



Figur 11.27 Normierte Schrittantwort einer durch Skineffekt-bedämpften Leitung:
 $u_2/u_1 = 1 - \text{erf}(\sqrt{1/T})$ mit $T = t/\tau$.

Beispiel: Dünnes Koaxialkabel (gleiches Koaxialkabel wie im Beispiel von Abschnitt 10.1.1 und 10.3.1)

Dimensionen: $r_i = 0.25 \text{ mm}$ $r_a = 0.75 \text{ mm}$

Leitungskonstanten: $L' = 250 \text{ nH/m}$ $C' = 100 \text{ pF/m}$ $Z_{wn} = \sqrt{L'/C'} = 50 \Omega$

Kabellänge: $l = 100 \text{ m}$ $R_o' = 0.21 [\Omega/\text{m}]$ bei $f_0 = 1 \text{ MHz}$

In Abschnitt 10.3.1 wurde der Skineffektmittelwert \bar{Z}' und der Dämpfungsbelag α bestimmt:

$$\operatorname{Re}(\bar{Z}') = R' = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{d} + \frac{1}{D} \right) R_o (\omega_0) \sqrt{\frac{\omega}{\omega_0}} = 0.21 \left[\frac{\Omega}{\text{m}} \right] \sqrt{\frac{f}{[\text{MHz}]}}$$

$$\alpha = \frac{R'}{2Z_{wn}} = 0.018 \left[\frac{\text{dB}}{\text{m}} \right] \sqrt{\frac{f}{[\text{MHz}]}}$$

Damit wird die Zeitkonstante τ nach (11.51): $\tau = 3.5 \text{ ns}$

11.4 Phasen- und Gruppenlaufzeit, Dispersion

In den bisherigen Betrachtungen von Signalen auf Leitungen haben wir nur ein Beispiel einer Signalverzerrung, die die Schrittantwort einer Skineffekt-behafteten Leitung behandelt. Ganz allgemein bewirken frequenzabhängige Dämpfungen und Laufzeiten lineare Verzerrungen. Solche Verzerrungen können zu einem gewissen Grad mit einem phasenkorrigierenden Netzwerk und einer frequenzabhängigen Verstärkung rückgängig gemacht werden.

Die Schrittantwort eines Systems, wie wir sie im vorhergehenden Abschnitt untersucht haben, umfasst, theoretisch, eine unendlich grosse Bandbreite im Basisband. Zu einer hinreichenden Charakterisierung einer Schrittantwort muss also der Frequenzgang einer Übertragungsstrecke über einen sehr grossen Frequenzbereich bekannt sein. In vielen technischen Anwendungen werden Signale (analoge und digitale) nicht im Basisband, sondern mittels eines Trägerfrequenzsignals in einem nach unten und oben begrenzten Frequenzband übertragen.

Es stellt sich also die Frage, ob bei in einem engen Frequenzbereich bekannten Frequenzgang von Phase und Amplitude einfache Aussagen zur Dispersion von schmalbandigen Signalen im Zeitbereich gemacht werden können.

Dieser Abschnitt enthält eine Zusammenstellung

- der Bedingung für Dispersionsfreiheit
- der Beziehungen für die Phasen- und Gruppenlaufzeit
- des Dispersionsverhaltens einer einfachen Signalform, des Gaußschen Impulses

11.4.1 Phasengeschwindigkeit und Gruppengeschwindigkeit

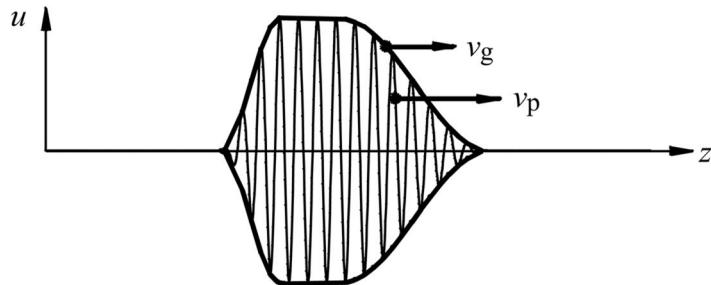
Unter der *Phasengeschwindigkeit* v_p versteht man die Geschwindigkeit mit der sich ein Punkt konstanter Phase auf einer Welle $u(t, z)$ in z -Richtung bewegt:

$$u(t, z) = \operatorname{Re} \left[\underline{U}_0 e^{j(\omega t - \beta z)} \right] \quad (11.52)$$

Die Bedingung, dass die Phase $(\omega t - \beta z)$ mit $z = v_p t$ konstant bleibt, ist

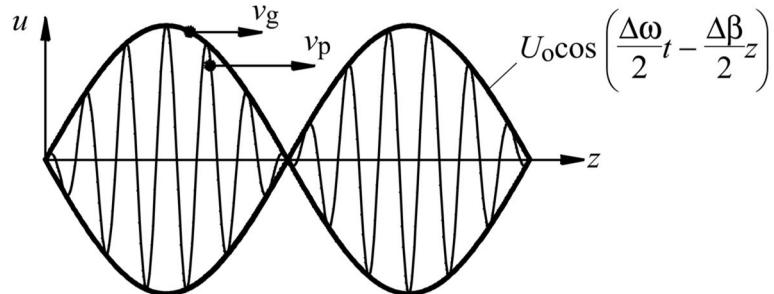
$$\text{Phasengeschwindigkeit: } v_p = \frac{\omega}{\beta} \quad (11.53)$$

Die *Gruppengeschwindigkeit* v_g ist die Geschwindigkeit, mit der sich die Enveloppe einer Wellengruppe bewegt, wie in Figur 11.28 dargestellt.



Figur 11.28 Phasengeschwindigkeit v_p und Gruppengeschwindigkeit v_g .

Zur Bestimmung der Gruppengeschwindigkeit v_g betrachten wir eine möglichst einfache Wellengruppe: eine Schwebung $u(t, z)$, d.h. die Überlagerung von zwei sinusförmigen Signalen mit gleicher Amplitude und mit einem sehr kleinen Kreisfrequenzunterschied $\Delta\omega$, wie in Figur 11.29 dargestellt:



Figur 11.29 Schwebung: Überlagerung von zwei sin-förmigen Signalen mit gleicher Amplitude und mit einem sehr kleinen Kreisfrequenzunterschied $\Delta\omega$.

$$u(t, z) = U_0[\cos(\omega_0 t - \beta_0 z) + \cos((\omega_0 + \Delta\omega) t - (\beta_0 + \Delta\beta) z)] \quad (11.54)$$

Mit dem Additionstheorem $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ wird (11.54) zu

$$u(t, z) = 2 U_0 \underbrace{\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta\beta}{2}z\right)}_{\text{Enveloppe}} \underbrace{\cos\left(\left(\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t - \left(\beta_0 + \frac{\Delta\beta}{2}\right)z\right)}_{\text{Träger}} \quad (11.55)$$

Der erste Term von (11.55) stellt die langsam oszillierende Enveloppe, der zweite Term das Trägersignal dar. Die Geschwindigkeit v_g der Enveloppe, die sogenannte Gruppengeschwindigkeit, kann wie im vorher betrachteten Fall der Phasengeschwindigkeit v_p bestimmt werden.

Damit die Phase $\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta\beta}{2}z\right)$ mit $z = v_g t$ konstant bleibt, muss gelten:

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta\beta} \quad (11.56)$$

Für beliebig kleine Kreisfrequenzunterschiede $\Delta\omega$ machen wir den Übergang vom Differenzenquotienten zum Differentialquotienten:

$$\text{Gruppengeschwindigkeit} \quad v_g = \frac{d\omega}{d\beta} \quad (11.57)$$

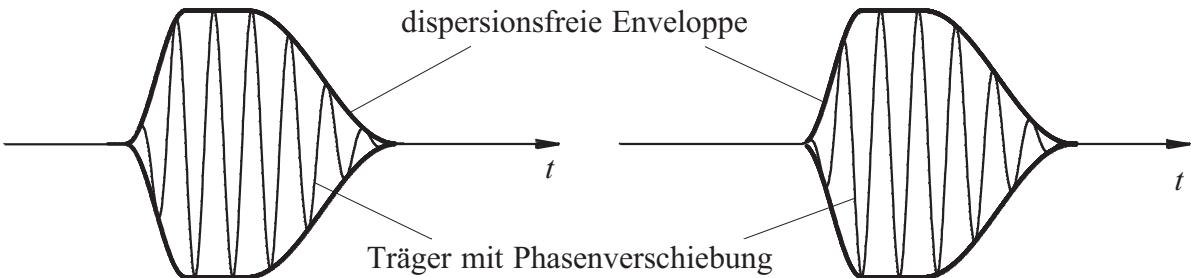
Ein beliebiges amplitudenmoduliertes Signal (nicht nur eine Schwebung) wird unverzerrt übertragen, wenn im Frequenzbereich des Signals die Gruppengeschwindigkeit v_g konstant bleibt, d.h. eine Ausbreitungskonstante γ die linear von der Frequenz abhängig ist, überträgt die Enveloppe eines Signals mit der Trägerkreisfrequenz ω_0 dispersionsfrei.

$$\gamma = j\beta = j(\beta_0 + \beta'(\omega - \omega_0)) \quad (11.58)$$

Die Gruppengeschwindigkeit ist dabei

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = \frac{1}{\beta'} \quad (11.59)$$

Figur 11.30 illustriert die Übertragung einer Wellengruppe mit einem linearen Frequenzgang des Phasenbelags β .



Figur 11.30 Übertragung einer Wellengruppe mit einem linearen Frequenzgang des Phasenbelags β . Die Enveloppe bleibt unverändert, während sich die Phase des Trägers relativ zur Enveloppe verändern kann.

Allgemein kann die Gruppengeschwindigkeit v_g mit (11.53) und (11.57) als Funktion der Phasengeschwindigkeit v_p und des Phasenbelags β wie folgt ausgedrückt werden:

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = \frac{d(v_p\beta)}{d\beta} = v_p + \beta \frac{dv_p}{d\beta} \quad (11.60)$$

Die Gruppengeschwindigkeit v_g entspricht der Energietransportgeschwindigkeit der elektromagnetischen Welle und kann die Lichtgeschwindigkeit c nicht überschreiten.

Beispiel: Gruppenlaufzeit der Skineffekt-behafteten Leitung:

Nach (10.24) gilt für

$$\beta = \text{Im}[\gamma] = \omega \sqrt{L'C'} + \frac{R_o}{2 Z_w} \sqrt{\frac{\omega}{\omega_0}} \quad (11.61)$$

Die spezifische Gruppenlaufzeit τ_g

$$\tau_g = \frac{1}{v_g} = \frac{d \beta}{d \omega} = \sqrt{L'C'} + \frac{R_o}{4 Z_w \sqrt{\omega \omega_0}} \quad (11.62)$$

Mit den Leitungsdaten des Beispiels 10.3.1 finden wir für eine Trägerfrequenz $f_0 = 1 \text{ MHz}$ ($\omega_0 = 2\pi \cdot 1 \text{ MHz}$) eine spezifische Gruppenlaufzeit $\tau_g = 4.881 \text{ ns/m}$.

Davon sind: Anteil der idealen Leitung $\sqrt{L'C'} = 4.714 \text{ ns/m}$

$$\text{Anteil durch Skin-Verluste } \frac{R_o}{4 Z_w \sqrt{\omega \omega_0}} = 0.167 \text{ ns/m}$$

Die Gruppenlaufzeit erfährt durch den Skineffekt nur eine sehr kleine Erhöhung gegenüber dem Wert der idealen Leitung.

11.4.2 Dispersion von schmalbandigen Signalen: Dispersion des Gaußschen Impulses

Im vorangehenden Abschnitt wurde gezeigt, dass in einem Bereich konstanter Gruppengeschwindigkeit eine Signaleveloppe unverzerrt übertragen wird, d.h. eine Phasenkonstante $\beta = \beta_0 + \beta'(\omega - \omega_0)$ bewirkt keine Dispersion eines schmalbandigen Signals mit einer Mittentreisfrequenz ω_0 .

Es stellt sich nun die Frage, ob eine einfache Aussage gemacht werden kann für eine Phasenkonstante, die neben dem linearen Term $\beta'(\omega - \omega_0)$ noch, als bessere Näherung zu einer beliebigen Funktion $\beta(\omega)$, einen quadratischen Term $\frac{\beta''}{2}(\omega - \omega_0)^2$ aufweist:

$$\beta = \beta_0 + \beta'(\omega - \omega_0) + \frac{\beta''}{2}(\omega - \omega_0)^2 \quad (11.63)$$

Es wird im folgenden gezeigt, dass für die spezielle Signalform eines gaussförmigen Impulses eine sehr einfache Dispersionsbeziehung besteht.

Ein gaussförmiger Impuls im Zeitbereich ist von der Form

$$G_0(t) = U_0 e^{-t^2/(2\sigma_t^2)} = \frac{A}{\sigma_t \sqrt{2\pi}} e^{-t^2/(2\sigma_t^2)} \quad (11.64)$$

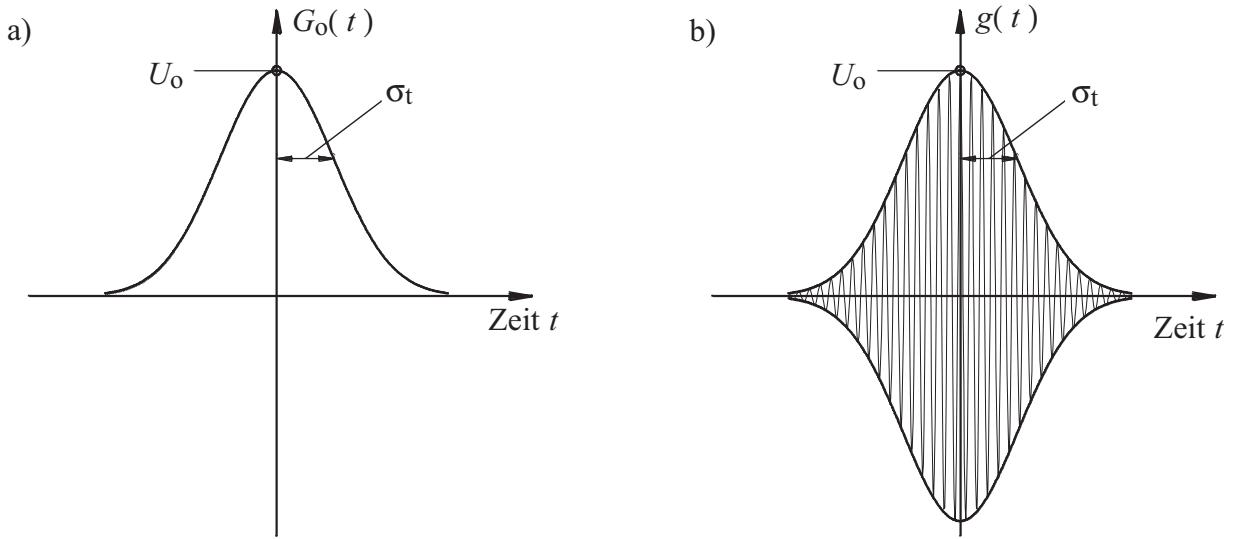
mit σ_t : zeitliche Standardabweichung und

A : Impulsfläche

Ein gaussförmig amplitudenmodulierter Impuls ist von der Form:

$$g(t) = \operatorname{Re} \left[G_0(t) e^{j\omega_0 t} \right] = \operatorname{Re} \left[U_0 e^{-t^2/(2\sigma_t^2)} e^{j\omega_0 t} \right] \quad (11.65)$$

In Figur 11.31a ist ein Gaussscher Impuls und in Figur 11.31b ist ein gaussförmig amplitudenmodulierter Impuls im Zeitbereich dargestellt:



Figur 11.31 a) Gaussscher Impuls im Basisband und b) gaussförmig amplitudenmodulierter Impuls.

Wir beschränken uns auf den schmalbandigen amplitudenmodulierten Gaussschen Impuls:

$$\sigma_t \gg \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad (11.66)$$

Die Herleitung des Dispersionsverhaltens des gaussförmig amplitudenmodulierten Impulses (11.65) mit dem Phasenbelag (11.63) ist etwas langwierig; das Resultat aber sehr einfach.

Wir beschränken uns auf die Interpretation des Resultates. Unter dem Einfluss des Phasenbelags als quadratische Funktion der Frequenz (11.63) wird die ursprünglich reelle Enveloppenfunktion $G_0(t)$ des Gaussschen Impulses

$$g(t) = \operatorname{Re} \left[G_0(t) e^{j\omega_0 t} \right] = \operatorname{Re} \left[\frac{A}{\sigma_t \sqrt{2\pi}} e^{-t^2/(2\sigma_t^2)} e^{j\omega_0 t} \right] \quad (11.67)$$

komplex und es resultiert ein verzerrter Gaussscher Impuls von der Form:

$$g_1(t) = \operatorname{Re} \left[G_0(t) e^{j\omega_0 t} \right] = \operatorname{Re} \left[\frac{A}{\sigma_{tc} \sqrt{2\pi}} e^{-t^2/(2\sigma_{tc}^2)} e^{j\omega_0 t} \right] \quad (11.68)$$

Dabei ist die komplexe Enveloppenfunktion $G_0(t)$

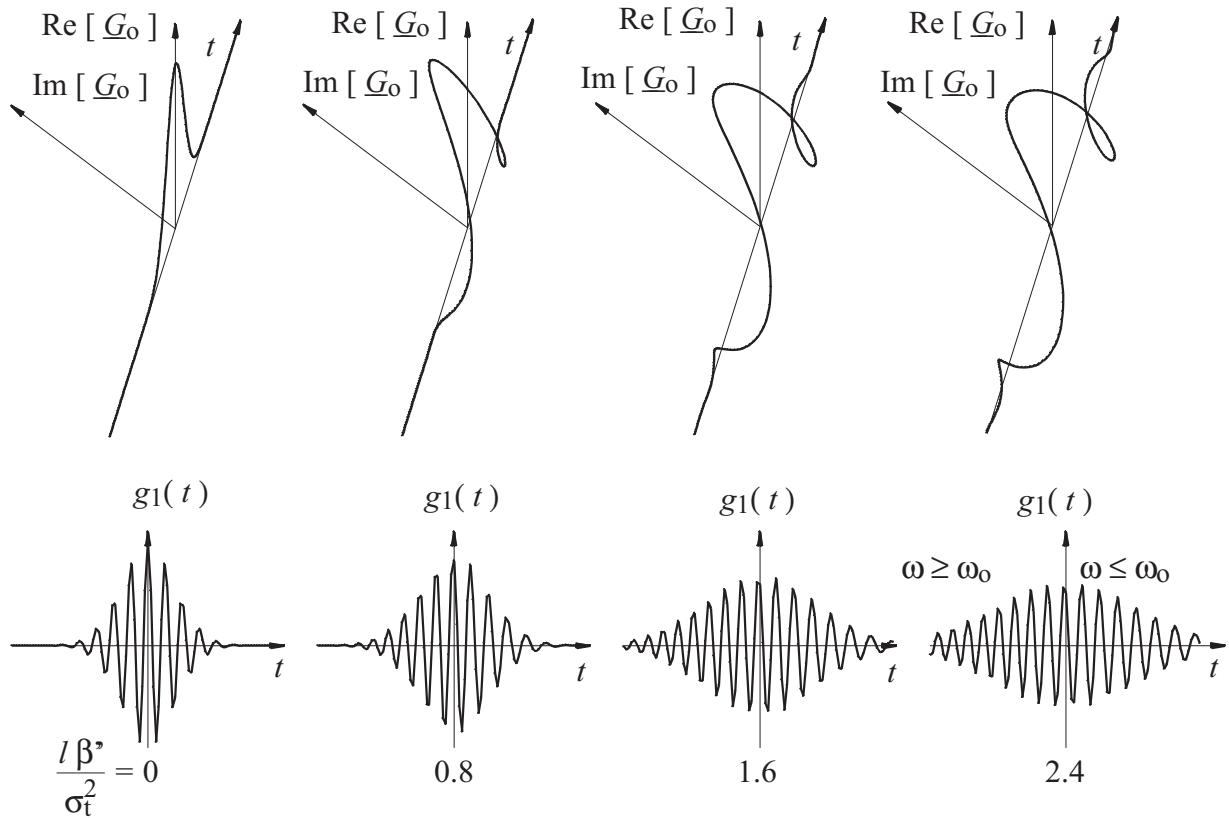
$$G_0(t) = \frac{A}{\sigma_{tc} \sqrt{2\pi}} e^{-t^2/(2\sigma_{tc}^2)} \quad (11.69)$$

und die komplexe zeitliche Standardabweichung $\underline{\sigma}_{tc}$

$$\underline{\sigma}_{tc}^2 = \sigma_t^2 - j l \beta'' \quad (11.70)$$

mit l : Leitungslänge

In Figur 11.32 ist die komplexe Enveloppenfunktion $\underline{G}_o(t)$ und die zugehörige Funktion $g_1(t)$ für verschiedene Werte von $l \beta'' / \sigma_t^2$ dargestellt.



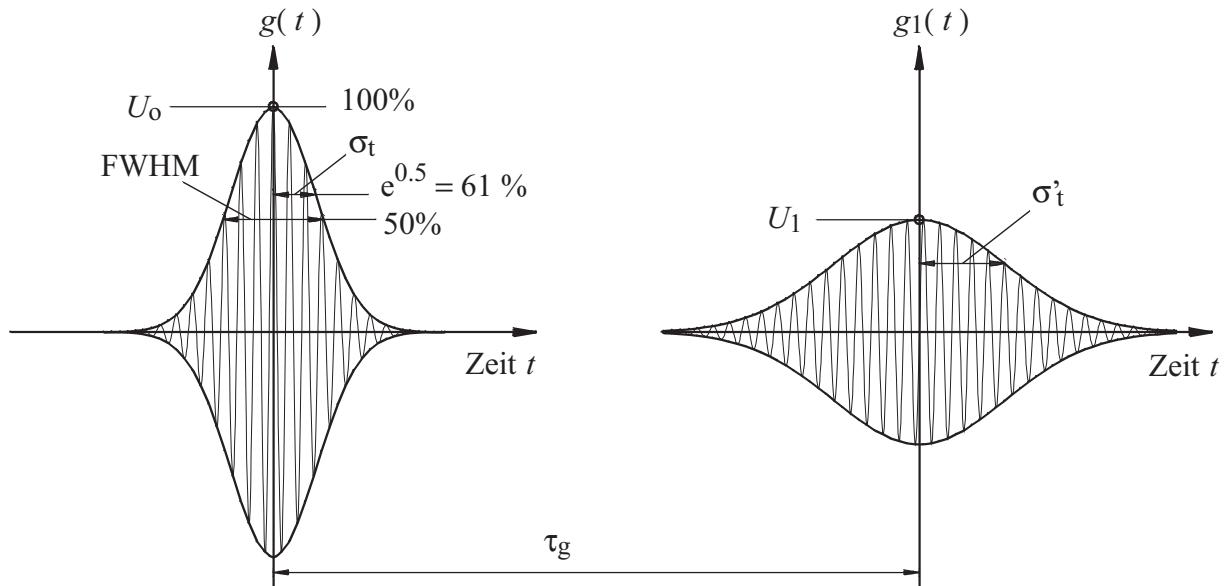
Figur 11.32 Verhalten der komplexen Enveloppe $\underline{G}_o(t)$ und des verzerrten gaussförmigen Impulses $g_1(t)$ für verschiedene Werte von $l \beta'' / \sigma_t^2$

Ein gaussförmiger Impuls $g_1(t)$ mit komplexer Standardabweichung hat wiederum eine gaussförmige Enveloppe. Daher kann er auch als ein gaussförmiger Impuls mit einer reellen gaussförmigen Enveloppe mit reeller zeitlicher Standardabweichung σ_t und Impulshöhe U_1 dargestellt werden.

Die Verzerrung eines gaussförmig amplitudenmodulierten Impulses durch eine Ausbreitungs konstante γ unter Einbezug eines konstanten Dämpfungbelags α :

$$\gamma = \alpha + j \left(\beta_0 + \beta' (\omega - \omega_0) + \frac{\beta''}{2} (\omega - \omega_0)^2 \right) \quad (11.71)$$

kann wie folgt zusammengefasst werden (Figur 11.31):



Figur 11.33 Verhalten des gaussförmig amplitudenmodulierten Impulses unter Einfluss einer Ausbreitungskonstante: $\gamma = \alpha + j \left(\beta_0 + \beta' (\omega - \omega_0) + \frac{\beta''}{2} (\omega - \omega_0)^2 \right)$
 50 % Impulsbreite = FWHM (Full Width Half Maximum) $\text{FWHM} \approx 2.36 \sigma_t$

1. Die gaussförmige Enveloppe bleibt erhalten:

$$g_1(t) = \operatorname{Re} \left[U_1 e^{-t^2/(2\sigma_t'^2)} e^{j\omega_0 t} \right] \quad (11.72)$$

2. Die zeitliche Standardabweichung σ_t wird auf den Wert σ'_t vergrößert:

$$\sigma'_t = \sigma_t \sqrt{1 + \frac{l^2 \beta''^2}{\sigma_t^4}} \quad (11.73)$$

3. Die Impulshöhe U_0 wird auf den Wert U_1 reduziert:

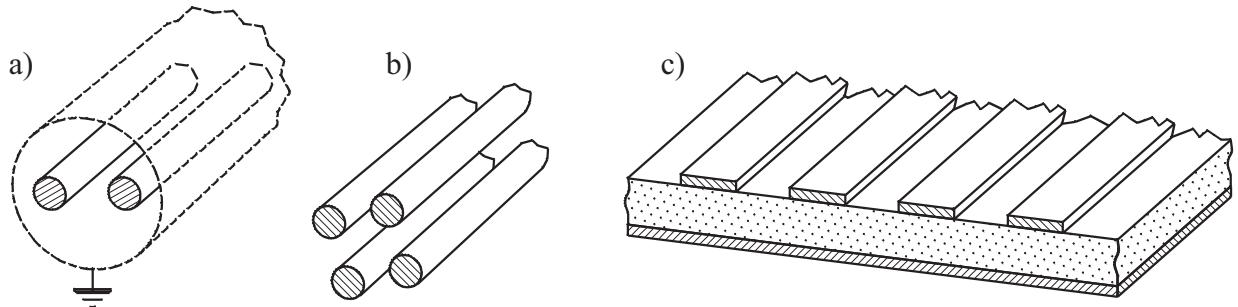
$$U_1 = U_0 e^{-\alpha l} \sqrt{\frac{\sigma_t}{\sigma'_t}} \quad (11.74)$$

Bei schmalbandigen Signalen ist im Allgemeinen die Auswirkung der Dispersion bei den hier behandelten Leitungen (TEM-Wellentyp) von untergeordneter Bedeutung. Bei einer Skineffekt-bedämpften Leitung wird die maximal einsetzbare Leitungslänge in erster Linie durch die reine Dämpfung begrenzt. Laufzeitverzerrungen schmalbandiger Signale sind dagegen wichtig bei

- Filtern
- optischen Fasern (Lichtwellenleitern)
- metallischen Hohlleitern

12. Mehrfachleitungen

Unter einer Mehrfachleitung verstehen wir eine zylindrische Leitungsstruktur mit mehr als zwei metallischen Leitern, die induktiv und kapazitiv gekoppelt sind. Figur 12.1 zeigt drei technisch wichtige Mehrfachleiterstrukturen: die geschirmte Zweidrahtleitung, den Sternvierer und einen Mehrfach-Streifenleiter.

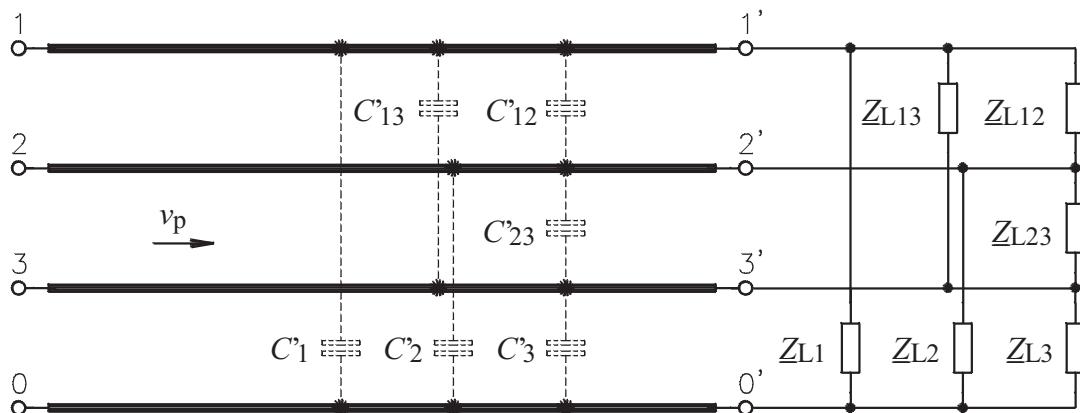


Figur 12.1 Mehrfachleiterstrukturen: a) geschirmte Zweidrahtleitung, b) Sternvierer
c) Mehrfach-Streifenleiter.

In diesem Kapitel werden wir das elektrische Verhalten der gekoppelten Leitungen untersuchen. In den meisten Fällen ist die Kopplung, das sogenannte Übersprechen (cross talk) zwischen den Leitern eine unerwünschte Erscheinung. In der Hochfrequenztechnik wird aber die Kopplung zwischen Leitern nutzbringend in verschiedenen Typen von Kopplern und in Filtern eingesetzt.

Als kurzer Ausblick und Vorgeschmack werden drei interessante Resultate vorweggenommen:

1. Wie im Fall der einfachen Leitung ist die querhomogene, verlustfreie Mehrfachleitung am einfachsten zu analysieren. In der Praxis ist sie die nullte Näherung für beliebige gekoppelte Leitungen.
2. Auch Mehrfachleitungen können mit einem geeigneten Abschlussnetzwerk (Wellenimpedanzmatrix) reflexionsfrei abgeschlossen werden. Als Beispiel ist in Figur 12.2 ein reflexionsfreies Abschlussnetzwerk für eine Vierfachleitung dargestellt.



Figur 12.2 Reflexionsfreies Abschlussnetzwerk einer querhomogenen verlustfreien Vierfachleitung.

Das Abschlussnetzwerk hat dabei folgende Eigenschaften:

Es ist topologisch identisch mit dem Netzwerk der Leitungskapazitäten, d.h. es besteht eine Impedanz zwischen jedem Leiterpaar mit dem Wert

$$Z_{Li} = \frac{1}{C_i v_p} \quad (12.1)$$

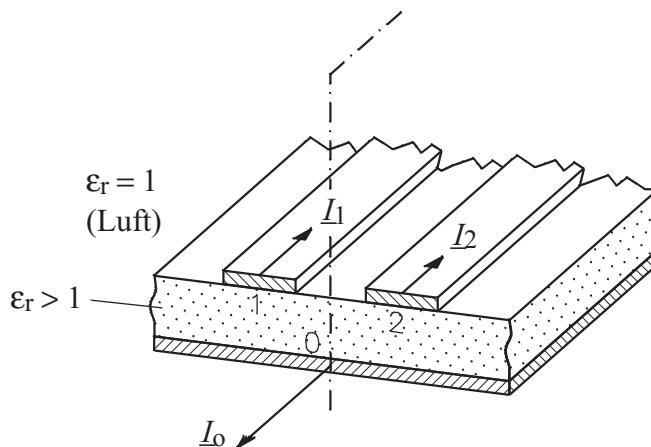
$$Z_{lik} = \frac{1}{C_{ik} v_p} \quad (12.2)$$

C'_i : Kapazitätsbelag zwischen dem Leiter i und Bezugsleiter 0 (Erdleiter)

C'_{ik} : Kapazitätsbelag zwischen den Leitern i, k

v_p : Phasengeschwindigkeit der querhomogenen Leitung

3. Bei querinhomogenen Mehrfachleitungen existieren Anregungsarten, die frei von Kopplungen sind, d.h. eine solche Welle breitet sich mit einer bestimmten Phasengeschwindigkeit, einem sogenannten Eigenwert des Systems aus. Entlang der Leitung bleiben die Verhältnisse von Leiterspannungen unverändert. Figur 12.3 zeigt als einfaches Beispiel dieser speziellen Anregungsarten die Gleichtakt- und die Gegentaktanregung auf einer symmetrischen Dreifachleitung. Im Gleichtaktfall führen die beiden Streifenleiter den gleichen Strom, und der Rückstrom läuft über die Grundplatte. Im Gegentaktfall sind die Stöme in den Streifenleitern nach Betrag gleich, unterscheiden sich aber im Vorzeichen. In der Grundplatte fließt dabei kein Strom. Aus Symmetriegründen kann zwischen den beiden Fällen keine Kopplung stattfinden. Die beiden Wellen werden aber eine unterschiedliche Phasengeschwindigkeit aufweisen.

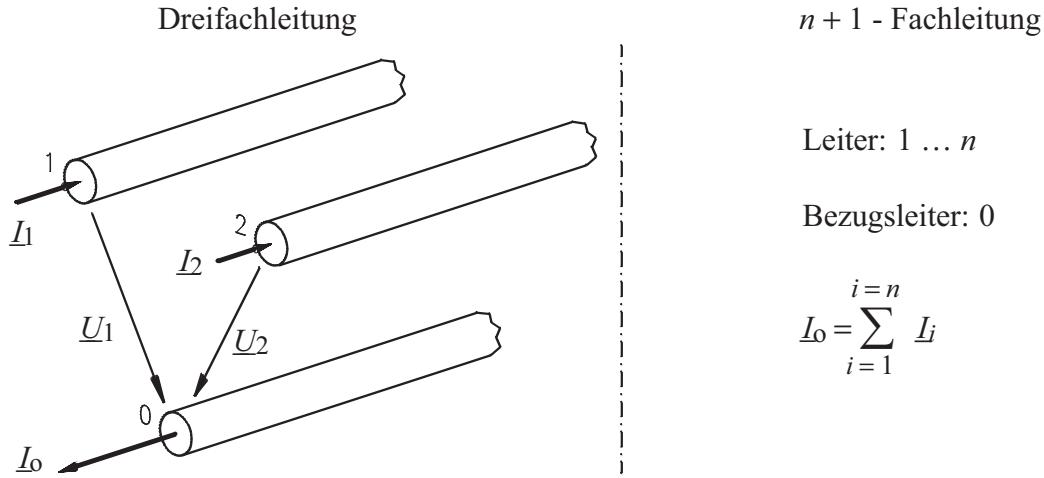


Figur 12.3 Querinhomogene symmetrische Dreifachleitung.

In diesem Kapitel werden wir zuerst eine allgemeine Betrachtung der nichthomogenen, verlustbehafteten Mehrfachleitung anstellen und dabei einige wichtige grundsätzliche Resultate gewinnen. Im weiteren werden wir technisch interessante Spezialfälle behandeln, deren Analyse wesentlich einfacher ist als beim allgemeinen Fall.

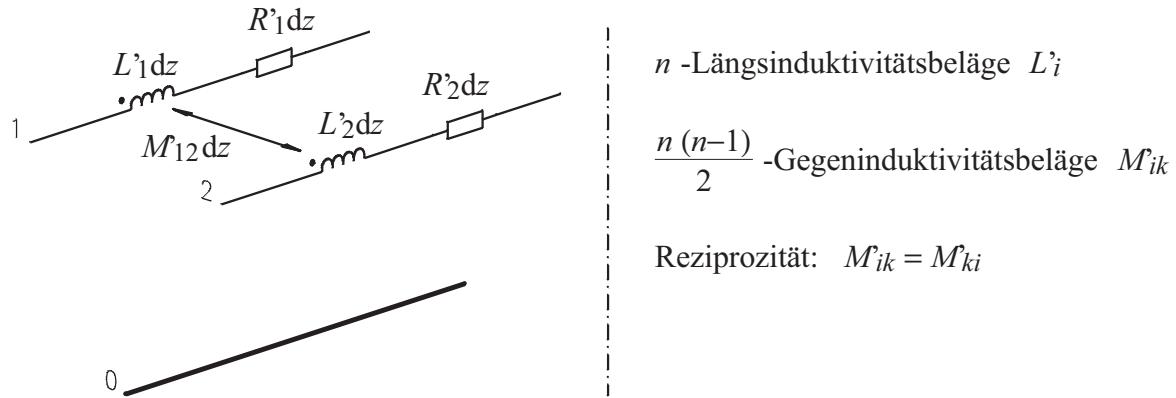
12.1 Die Analyse der allgemeinen Mehrfachleitung

Für die Herleitung der Leitungsgleichungen der Mehrfachleitung werden wir gleichzeitig die Dreifachleitung und die allgemeine Mehrfachleitung mit $n + 1$ Leitern nach Figur 12.4 betrachten:



Figur 12.4 Definition der Dreifachleitung und der Mehrfachleitung.

Figur 12.5 illustriert die Definition der Längsinduktivitätsbeläge und der Gegeninduktivitätsbeläge



Figur 12.5 Definition der Längsinduktivitätsbeläge und der Gegeninduktivitätsbeläge.

Längsimpedanzbeläge:

$$\underline{Z}'_{11} = R'_1 + j\omega L'_1 \quad \underline{Z}_{ii} = R'_i + j\omega L'_i \quad (12.3)$$

$$\underline{Z}'_{22} = R'_2 + j\omega L'_2 \quad (12.4)$$

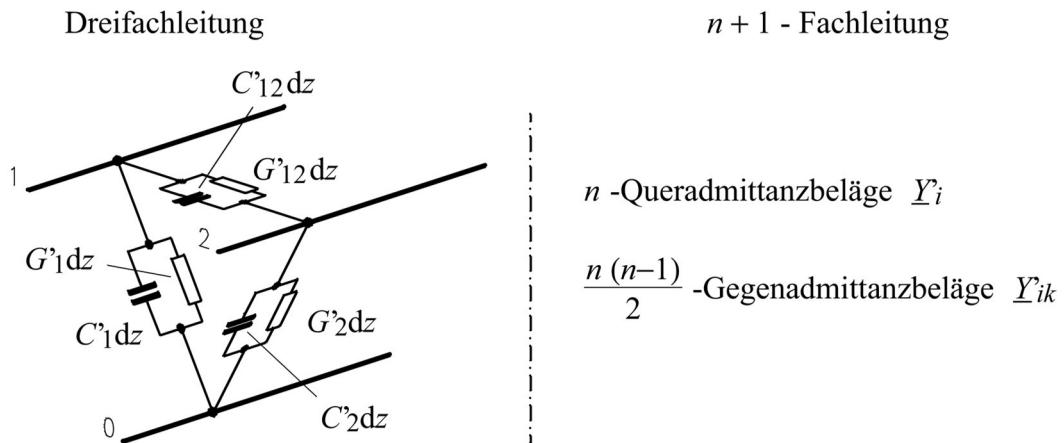
Gegenimpedanzbeläge:

$$\underline{Z}'_{12} = j\omega M'_{12} \quad \underline{Z}_{ik} = \underline{Z}_{ki} = j\omega M'_{ik} \quad (12.5)$$

$$\underline{Z}'_{21} = \underline{Z}'_{12} = j\omega M'_{12} \quad \text{für alle } ik\text{-Kombinationen mit } i \neq k \quad (12.6)$$

Mit den gewählten Stromrichtungen ist $M'_{12} > 0$.

Analog zu den Längs- und Gegeninduktivitätsbelägen lassen sich Quer- und Gegenadmittanzbeläge nach Figur 12.6 definieren:



Figur 12.6 Definition der Queradmittanz- und Gegenadmittanzbeläge.

Queradmittanzbeläge

$$\underline{Y}_1 = G'_1 + j\omega C'_1 \quad \underline{Y}_i = G'_i + j\omega C'_i \quad (12.7)$$

$$\underline{Y}_2 = G'_2 + j\omega C'_2 \quad (12.8)$$

Gegenadmittanzbeläge

$$\underline{Y}_{12} = -G'_{12} - j\omega C'_{12} \quad \underline{Y}_{ik} = -G'_{ik} - j\omega C'_{ik} \quad (12.9)$$

für alle ik -Kombinationen mit $i \neq k$

Mit den so definierten Impedanz- und Admittanzbelägen werden nun die Leitungsgleichungen in gleicher Weise wie für die einfache Leitung in Kapitel 2 aufgestellt.

Spannungsabfälle an den Längsimpedanzen

$$-\frac{d \underline{U}_1}{d z} = \underline{Z}'_{11} \underline{I}_1 + \underline{Z}'_{12} \underline{I}_2 \quad -\frac{d [\underline{U}]}{d z} = [\underline{Z}'] [\underline{I}] \quad (12.10)$$

$$-\frac{d \underline{U}_2}{d z} = \underline{Z}'_{21} \underline{I}_1 + \underline{Z}'_{22} \underline{I}_2$$

mit

$$\underline{Z}'_{12} = \underline{Z}'_{21} \quad \underline{Z}'_{ik} = \underline{Z}'_{ki}$$

Querströme:

$$-\frac{d \underline{I}_1}{d z} = \underline{Y}_1 \underline{U}_1 + \underline{Y}_{12} (\underline{U}_2 - \underline{U}_1) \quad (12.11)$$

$$-\frac{d \underline{I}_2}{d z} = \underline{Y}_{21} (\underline{U}_1 - \underline{U}_2) + \underline{Y}_2 \underline{U}_2$$

Dreifachleitung	$n + 1$ - Fachleitung
$-\frac{d \underline{I}_1}{d z} = \underline{Y}'_{11} \underline{U}_1 + \underline{Y}'_{12} \underline{U}_2$	$-\frac{d [\underline{I}]}{d z} = [\underline{Y}'] [\underline{U}]$

(12.12)

$$-\frac{d \underline{I}_2}{d z} = \underline{Y}'_{21} \underline{U}_1 + \underline{Y}'_{22} \underline{U}_2$$
(12.13)

mit

$$\underline{Y}_{11} = \underline{Y}_1 - \underline{Y}_{12} \quad \underline{Y}_{ii} = \underline{Y}_i - \sum_{\text{alle } k \neq i} \underline{Y}_{ik} = G'_i + j\omega C'_i + \sum_{\text{alle } k \neq i} (G'_{ik} + j\omega C'_{ik})$$

für alle $i(1...n)$

(12.13)

$$\underline{Y}_{22} = \underline{Y}_2 - \underline{Y}_{21} \quad \underline{Y}_{ki} = \underline{Y}_{ik} = -G'_{ik} - j\omega C'_{ik}$$

für alle ik

(12.13)

Wie im Fall der Zweidrahtleitung kann aus den Matrizengleichungen (12.10) und (12.12) entweder $[\underline{U}]$ oder $[\underline{I}]$ eliminiert werden. Wir eliminieren $[\underline{I}]$ durch Ableiten von (12.10) nach z und Einsetzen in (12.12) :

$$\frac{d^2 [\underline{U}]}{d z^2} = -[\underline{Z}'] \left[\frac{d [\underline{I}]}{d z} \right] = [\underline{Z}'] [\underline{Y}] [\underline{U}]$$
(12.14)

oder

$$\frac{d^2 [\underline{U}]}{d z^2} = [\underline{K}] [\underline{U}]$$
(12.15)

mit $[\underline{K}]$: Leitungsmatrix $[\underline{K}] = [\underline{Z}'] [\underline{Y}]$

(12.16)

Für die Dreifachleitung erhalten wir mit (12.16) :

$$[\underline{K}] = \begin{bmatrix} \underline{Z}'_{11} \underline{Y}_{11} + \underline{Z}'_{12} \underline{Y}_{21} & \underline{Z}'_{12} \underline{Y}_{22} + \underline{Z}'_{11} \underline{Y}_{12} \\ \underline{Z}'_{21} \underline{Y}_{11} + \underline{Z}'_{22} \underline{Y}_{21} & \underline{Z}'_{22} \underline{Y}_{22} + \underline{Z}'_{21} \underline{Y}_{12} \end{bmatrix}$$
(12.17)

$[\underline{Z}']$ und $[\underline{Y}]$ sind symmetrische Matrizen, aber $[\underline{K}]$ ist im allgemeinen nicht symmetrisch. (12.14) ist die Wellengleichung der Mehrfachleitung. Dabei ist jede Teilspannung von $[\underline{U}]$ mit allen anderen Leitern verkoppelt. Durch eine geeignete Linearkombination der Teilspannungen ist es möglich, ein System von unverkoppelten Wellengleichungen zu erhalten. Die Teilspannungen von $[\underline{U}]$ sind dann als Funktion der unverkoppelten Spannungen $[\underline{U}_u]$:

Dreifachleitung	$n + 1$ - Fachleitung
$\underline{U}_1 = \underline{Y}_{11} \underline{U}_{u1} + \underline{Y}_{12} \underline{U}_{u2}$	$[\underline{U}] = [\underline{V}] [\underline{U}_u]$
$\underline{U}_2 = \underline{Y}_{21} \underline{U}_{u1} + \underline{Y}_{22} \underline{U}_{u2}$	

(12.18)

Die Transformationsmatrix $[\underline{V}]$ transformiert (12.14) so, dass ein System von unverkoppelten Gleichungen entsteht.

(12.18) in (12.15) eingesetzt und mit $[\underline{V}]^{-1}$ multipliziert:

$$\frac{d^2 [\underline{U}_u]}{dz^2} = [\underline{V}]^{-1} [\underline{K}] [\underline{V}] [\underline{U}_u] \quad (12.19)$$

Für ein unverkoppeltes System nimmt die Matrix $[\underline{V}]^{-1} [\underline{K}] [\underline{V}]$ die Form

$$[\underline{V}]^{-1} [\underline{K}] [\underline{V}] = [\gamma^2] \quad (12.20)$$

an, wobei $[\gamma^2]$ eine Diagonalmatrix ist:

$$[\gamma^2] = \begin{bmatrix} \gamma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \gamma_n^2 \end{bmatrix} \quad (12.21)$$

(12.20), mit $[\underline{V}]$ vormultipliziert, lautet:

$$[\underline{K}] [\underline{V}] - [\underline{V}] [\gamma^2] = [0] \quad (12.22)$$

und ausgeschrieben für die Dreifachleitung

$$\begin{bmatrix} (\underline{K}_{11} - \gamma_1^2) \underline{V}_{11} + \underline{K}_{12} \underline{V}_{21} & (\underline{K}_{11} - \gamma_2^2) \underline{V}_{12} + \underline{K}_{12} \underline{V}_{22} \\ \underline{K}_{21} \underline{V}_{11} + (\underline{K}_{22} - \gamma_1^2) \underline{V}_{21} & \underline{K}_{21} \underline{V}_{12} + (\underline{K}_{22} - \gamma_2^2) \underline{V}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (12.23)$$

Jede Spalte von (12.23) stellt ein Gleichungssystem dar zur Bestimmung von γ^2 und einem zugehörigen V -Vektor, d.h. einer Spalte der $[\underline{V}]$ - Matrix.

$$\sum_k (\underline{K}_{ik} - \gamma_i^2 \delta_{ik}) \underline{V}_{ki} = 0 \quad (12.24)$$

mit δ_{ik} : Kronecker-Delta: $\delta_{ik} = 1$ für $i = k$, $\delta_{ik} = 0$ für $i \neq k$

Da jede Spalte von (12.20) ein homogenes lineares Gleichungssystem ist, existieren nicht-triviale Lösungen nur, wenn die entsprechende Determinante verschwindet:

Dreifachleitung n + 1 - Fachleitung

$$\det \begin{bmatrix} \underline{K}_{11} - \gamma_1^2 & \underline{K}_{12} \\ \underline{K}_{21} & \underline{K}_{22} - \gamma_2^2 \end{bmatrix} = 0 \quad \det([\underline{K}] - \gamma^2 \delta_{ik}) = 0 \quad (12.25)$$

identische Beziehung für beide Spalten von (12.23)

Polynom n-ten Grades in γ^2 mit n - Lösungen

$$(\underline{K}_{11} - \gamma^2)(\underline{K}_{22} - \gamma^2) - \underline{K}_{12} \underline{K}_{21} = 0 \quad (12.26)$$

$$\gamma_{1,2}^2 = \frac{\underline{K}_{11} + \underline{K}_{22}}{2} \pm \sqrt{\frac{(\underline{K}_{11} - \underline{K}_{22})^2}{4} + \underline{K}_{12} \underline{K}_{21}} \quad (12.27)$$

Die Lösungen γ^2 (Lösungen von (12.25)) sind die Eigenwerte der $[K]$ -Matrix. Mit den Lösungen von γ^2 kann die Transformationsmatrix $[V]$ ermittelt werden.

$$\frac{V_{11}}{V_{21}} = \frac{\gamma_1^2 - K_{22}}{K_{21}} \quad \frac{V_{11}}{V_{n1}} = , \quad \frac{V_{21}}{V_{n1}} = , \quad \dots \quad (12.28)$$

$$\frac{V_{12}}{V_{22}} = \frac{\varphi^2 - K_{22}}{K_{21}} \quad \frac{V_{12}}{V_{n2}} = , \quad \frac{V_{22}}{V_{n2}} = , \quad \dots \quad (12.29)$$

Lösung des Gleichungssystems (12.25),
mit $\underline{\gamma}_i^2$ eingesetzt

Jede Kolonne der $[V]$ -Matrix ist bis auf einen konstanten Faktor bestimmt. Im Fall der Dreifachleitung heisst dies, dass für den Eigenwert γ_1 das Verhältnis U_1/U_2 mit (12.18) wie folgt bestimmt wird:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{V_{11}}{V_{21}} = \frac{\gamma_1^2 - K_{22}}{K_{21}} \quad (12.30)$$

und für den Eigenwert φ finden wir

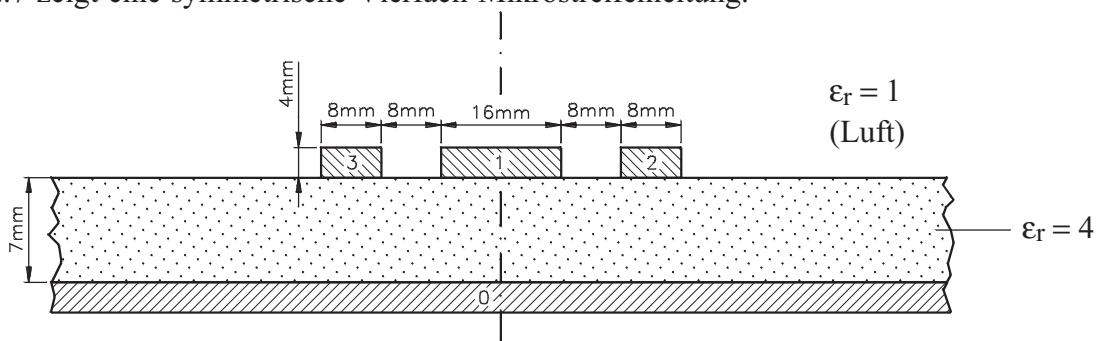
$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{V_{12}}{V_{22}} = \frac{\gamma^2 - K_{22}}{K_{21}} \quad (12.31)$$

Mit (12.27):

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{\underline{K}_{11} - \underline{K}_{22}}{2 \underline{K}_{21}} \pm \sqrt{\left(\frac{\underline{K}_{11} - \underline{K}_{22}}{2 \underline{K}_{21}} \right)^2 + \frac{\underline{K}_{12}}{\underline{K}_{21}}} \quad (12.32)$$

Beispiel für eine querinhomogene verlustfreie Mehrfachleitung:

Figur 12.7 zeigt eine symmetrische Vierfach-Mikrostreifenleitung.



Figur 12.7 Eine symmetrische Vierfach-Mikrostreifenleitung.

$$[K] = [Z'] [Y] = (j\omega)^2 [L_M] [C_M]$$

Mit einem numerischen Verfahren wurden die $[L_M]$ und $[C_M]$ - Matrizen berechnet:

$$[L_M] = \mu_0 \begin{bmatrix} 0.165 & 0.0404 & 0.0404 \\ 0.0404 & 0.232 & 0.0152 \\ 0.0404 & 0.0152 & 0.232 \end{bmatrix}$$

$$[C_M] = \epsilon_0 \begin{bmatrix} 16.3 & -1.43 & -1.43 \\ -1.43 & 11.1 & -0.0904 \\ -1.43 & -0.0904 & 11.1 \end{bmatrix} \quad (12.33)$$

Bestimmung der Eigenwerte von $[K]$:

Eigenwerte: $\beta^2 / (\omega^2 \mu_0 \epsilon_0) = 2.24 \quad 2.96 \quad 2.43$

Phasengeschwindigkeit: $\frac{v_p}{c} = \frac{\omega}{\beta c} = 0.67 \quad 0.58 \quad 0.64$

Spannungseigenvektoren: $V_1 = -0.657 \quad 0.630 \quad 0.0$
 $V_2 = 0.533 \quad 0.565 \quad -0.707$
 $V_3 = 0.533 \quad 0.565 \quad 0.707$

Die Spannungsverteilungen für die drei Eigenwerte zeigt Figur 12.8 :



Figur 12.8 Spannungsverteilung der Eigenwerte für die gekoppelte Mikrostreifenleitung.

Nach diesem Beispiel machen wir eine Zusammenfassung und ziehen eine Zwischenbilanz zu den Betrachtungen der allgemeinen Mehrfachleitung:

Zusammenfassung:

- Die Leitungsgleichungen der Mehrfachleitung sind untereinander völlig verkoppelt:

$$\frac{d^2[\underline{U}]}{dz^2} = [Z'][Y][\underline{U}] = [K][\underline{U}]$$

$$\underline{Z}_{ii} = R'_i + j\omega L'_i$$

$$\underline{Z}_{ik} = \underline{Z}_{ki} = j\omega M_{ik}$$

$$\underline{Y}_{ii} = G'_i + j\omega C'_i + \sum_{\text{alle } k < i} G'_{ik} + j\omega C'_{ik}$$

$$\underline{Y}_{ki} = \underline{Y}_{ik} = -G'_{ik} - j\omega C'_{ik}$$

- Mit einer geeigneten Transformation kann die Leitungsgleichung der Mehrfachleitung in ein System von unverkoppelten Gleichungen überführt werden:

$$[\underline{U}] = [\underline{L}][\underline{U}_u]$$

$$\frac{d^2[\underline{U}_u]}{dz^2} = [\underline{V}]^{-1} [\underline{K}] [\underline{V}] [\underline{U}_u] = [\gamma^2] [\underline{U}_u]$$

$[\gamma^2] = [\underline{V}]^{-1} [\underline{K}] [\underline{V}]$, ist eine Diagonalmatrix und die Matrixelemente sind die Eigenwerte der $[\underline{K}]$ - Matrix, d.h. sie sind die Lösung von

$$\det([\underline{K}] - \gamma^2 \delta_{ik}) = 0$$

γ , die Wurzeln der Eigenwerte, sind die Ausbreitungskonstanten der Spannungsvektoren, die untereinander unverkoppelt sind. Diese Spannungsvektoren $[\underline{V}_{ei}]$, die Eigenvektoren, lassen sich für jeden Eigenwert γ_i^2 gewinnen, indem das Gleichungssystem

$$([\underline{K}] - \gamma^2 \delta_{ik}) [\underline{V}_{ei}] = 0$$

gelöst wird.

Behandlung von Mehrfachleitungen in der Netzwerkanalyse: konzeptionelles Vorgehen

Gegeben: Mehrfachleitung mit Beschaltung an beiden Enden

- ① Bestimmung der Eigenwerte (Wellenausbreitungskonstanten): $\gamma_1, \gamma_2, \dots$

$$\text{Bestimmung der Eigenvektoren: } [\underline{V}] = \begin{bmatrix} \underline{V}_{11} & \underline{V}_{12} & \dots \\ \underline{V}_{21} & \underline{V}_{22} & \dots \\ \vdots & \ddots & \dots \end{bmatrix}$$

- ② Bestimmung der Wellenimpedanzmatrix $[\underline{Z}_w]$

$$[\underline{U}_a] = [\underline{Z}_w] [\underline{I}_a]$$

$[\underline{U}_a]$: vorwärtslaufende Leitungsspannungswelle

$[\underline{I}_a]$: vorwärtslaufende Leitungsstromwelle

Die Wellenimpedanzmatrix $[\underline{Z}_w]$ ist (ohne Herleitung):

$$[\underline{Z}_w] = [\underline{V}] [\gamma]^{-1} [\underline{V}]^{-1} [\underline{Z}']$$

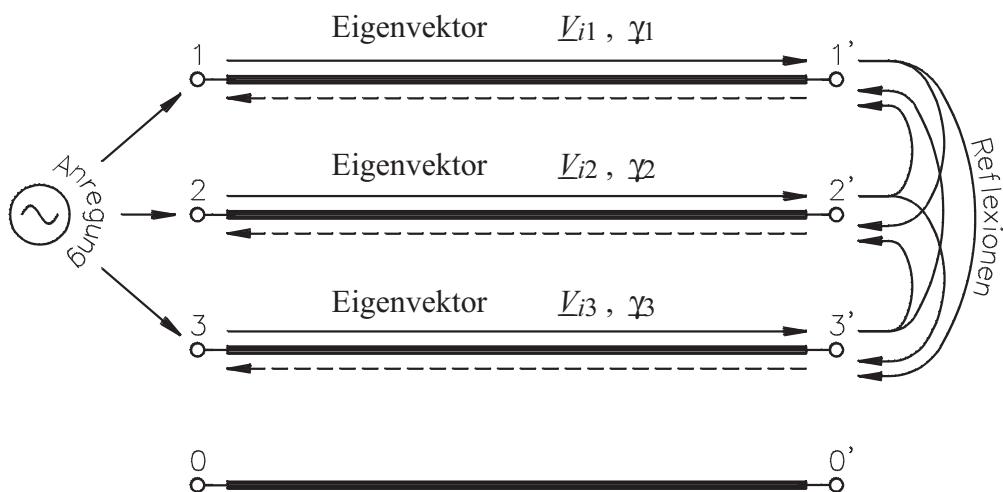
- ③ Mit der quellenseitigen Beschaltung werden die Eingangsspannungen $\underline{U}_1, \underline{U}_2, \underline{U}_3, \dots$ bestimmt.
- ④ Diese Spannungen werden aus Spannungseigenvektoren aufgebaut:

$$\underline{U}_1 = a \underline{V}_{11} + b \underline{V}_{12} + c \underline{V}_{13} + \dots$$

$$\underline{U}_2 = a \underline{V}_{21} + b \underline{V}_{22} + c \underline{V}_{23} + \dots$$

$$\underline{U}_3 = a \underline{V}_{31} + b \underline{V}_{32} + c \underline{V}_{33} + \dots$$

- ⑤ Jeder dieser Spannungseigenvektoren propagiert mit der entsprechenden Ausbreitungskonstante auf der Leitung und wird am Leitungsende vom Abschlussnetzwerk teilweise reflektiert. usw. usw. (Figur 12.9):



Figur 12.9 Schematische Darstellung der Übertragung von Eigenvektorwellen V_{ik} mit den Ausbreitungskonstanten γ_i und deren Reflexionen und Kopplungen am Leitungsende.

In technisch einsetzbaren Systemen muss die unkontrollierte Anregung von verschiedenen Eigenvektoren und deren Kopplung über Reflexionen vermieden werden.

Quintessenz: der allgemeine Fall, die unsymmetrische querinhomogene Mehrfachleitung mit beliebiger Beschaltung ist masslos kompliziert. Er kann nur mit numerischen Methoden gelöst werden und ist technisch meist nicht interessant.

Es existieren aber einfache Fälle, die technisch besonders wichtig sind:

1. *Querhomogene* Mehrfachleitung
2. *Querhomogene / querinhomogene symmetrische* Dreifachleitung

Wir wenden uns im folgenden diesen Fällen zu.

12.2 Die querhomogene Mehrfachleitung mit idealen Leitern

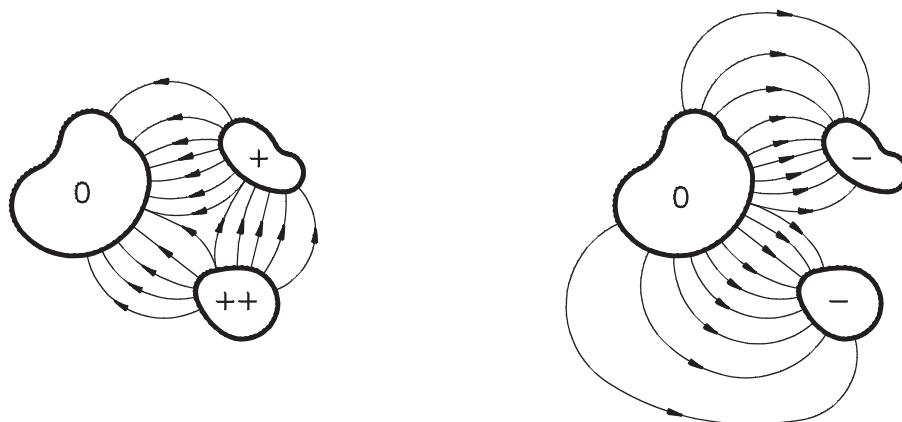
Mit den Annahmen

- querhomogene Leitung, d.h. zwischen den Leitern ist das Dielektrikum mit ϵ_r und $\mu_r = \text{konstant}$,
- ideal leitende Leiter vereinfachen sich die Leitungseigenschaften entscheidend. ϵ_r und μ_r müssen dabei nicht notwendigerweise rein reell sein.

Unter diesen Bedingungen treten reine TEM-Wellen (transversal-elektromagnetische Wellen) auf, d.h. die elektrischen und magnetischen Felder zeigen keine Komponenten in der Ausbreitungsrichtung. Bei guten, aber nicht idealen Leitern ist die Annahme von TEM-Wellen eine gute Approximation. Die TEM-Wellen breiten sich immer mit der Ausbreitungskonstante

$$\gamma = j\omega \sqrt{\mu \epsilon} \quad (12.34)$$

aus. Die Phasengeschwindigkeit ist $v_p = \omega / \text{Im}[\gamma]$ und die Dämpfung $\alpha = \text{Re}[\gamma]$. Die Gleichung (12.34) kann ausgehend von den Maxwellschen Gleichungen hergeleitet werden. Die Feldverteilungen von TEM-Wellen entsprechen den elektrostatischen bzw. magnetostatischen Feldern der zylindrischen Mehrfachleitungen und jede beliebige statische Spannungsverteilung liefert ein korrektes TEM-Feldlinienbild, wie Figur 12.10 veranschaulicht. Jede dieser TEM-Wellen propagiert mit der gleichen Ausbreitungskonstante γ .



Figur 12.10 Jede beliebige statische Feldverteilung ist eine mögliche TEM-Feldverteilung.

Die Eigenschaft, dass alle möglichen Feldverteilungen zulässige TEM-Wellen mit gleichen Ausbreitungskonstanten darstellen, macht sich auch in der Wellengleichung (12.14) bemerkbar. Während $[K] = [Z][Y]$ für eine allgemeine Mehrfachleitung eine "gefüllte" Matrix ist, ist sie für die TEM-Mehrfachleitung eine Diagonalmatrix mit identischen Diagonalelementen:

$$[K] = \begin{bmatrix} \gamma^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \gamma^2 \end{bmatrix} = \gamma^2 [1] \quad (12.35)$$

mit $[1]$: Einheitsmatrix

$$\text{Die Wellengleichung } \frac{d^2[U]}{dz^2} = [K][U]$$

zeigt damit keine direkte Kopplung zwischen den Leitungsspannungen, aber es besteht trotzdem eine Verkopplung zwischen den Leitern, indem die Leiterspannungen über Gleichung (12.12) mit allen Leiterströmen gekoppelt sind. In Fall der reinen TEM-Mehrfachleitung stellt sich also das Problem der Aufspaltung einer beliebigen Spannungsverteilung in Eigenvektoren nicht. Andererseits wäre aber wichtig zu wissen, wie die Leitungsspannungen und -ströme verknüpft sind und wie ein reflexionsfreies Abschlussnetzwerk beschaffen sein muss.

Nach (12.10) ist $[\underline{U}]$ mit $[\underline{I}]$ auf der TEM-Mehrfachleitung wie folgt verknüpft:

$$-\frac{d[\underline{U}]}{dz} = [\underline{Z}'][\underline{I}]$$

Für alle vorwärts laufenden Wellen gilt: $[\underline{U}] = [\underline{U}_0] e^{-\gamma z + j\omega t}$

Eingesetzt in (12.10)

$$[\underline{U}] = \frac{1}{\gamma} [\underline{Z}'] [\underline{I}] = [\underline{Z}_w] [\underline{I}] \quad (12.36)$$

Die Matrix $\frac{1}{\gamma} [\underline{Z}']$ stellt die Wellenimpedanzmatrix $[\underline{Z}_w]$ der TEM-Mehrfachleitung dar:

$$[\underline{Z}_w] = \frac{1}{\gamma} [\underline{Z}'] \quad (12.37)$$

In gleicher Weise kann, ausgehend von (12.12) die Wellenadmittanzmatrix $[\underline{Y}_w]$ gefunden werden:

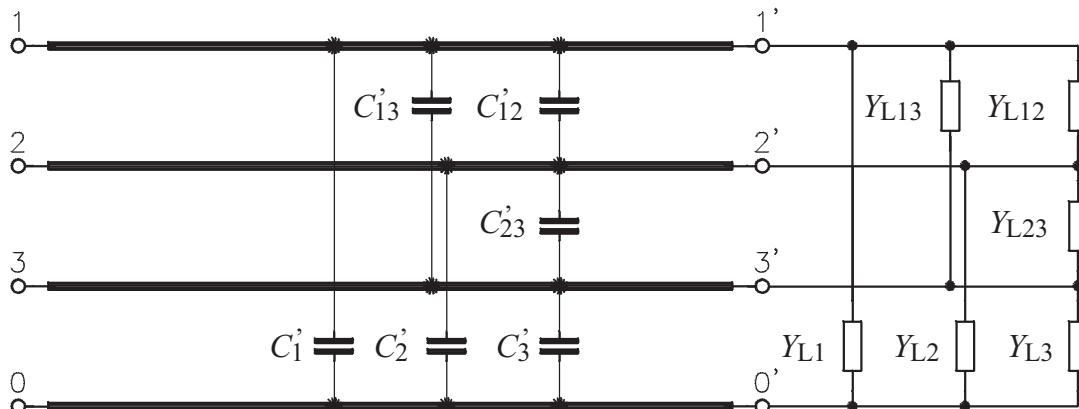
$$[\underline{Y}_w] = \frac{1}{\gamma} [\underline{Y}] = \left(\frac{1}{\gamma} [\underline{Z}'] \right)^{-1} = [\underline{Z}_w]^{-1} \quad (12.38)$$

Eine TEM-Mehrfachleitung wird mit einem Abschlussnetzwerk mit der Admittanzmatrix $[\underline{Y}_w]$ reflexionsfrei abgeschlossen. Bei einer verlustfreien TEM-Mehrfachleitung ist $[\underline{Y}]$ nur durch die Kapazitätsbeläge bestimmt:

$$[\underline{Y}_w] = \frac{1}{j\beta} [\underline{Y}'] = v_p [\underline{C}_M'] \quad (12.39)$$

$$\text{mit } \beta = \frac{\omega}{v_p}$$

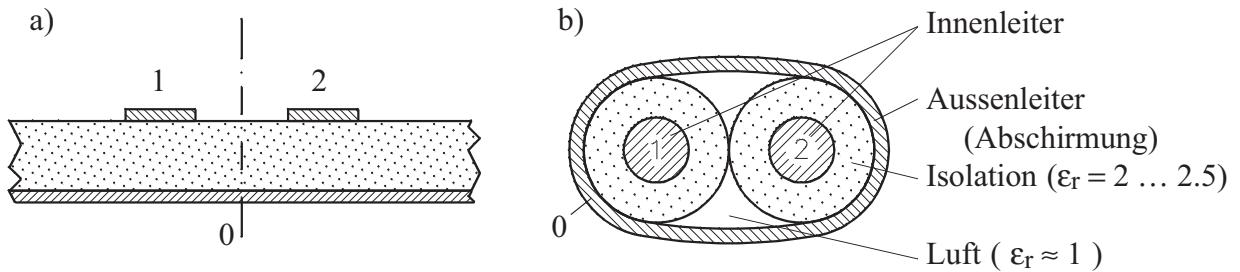
Das Abschlussnetzwerk kann somit aus Admittanzen $Y_{Li} = v_p C_i'$ und $Y_{Lik} = v_p C_{ik}'$ aufgebaut werden. Es weist die gleiche Topologie auf wie das Netzwerk der Leitungskapazitätsbeläge (Figur 12.11).



Figur 12.11 Reflexionsfreies Abschlussnetzwerk einer verlustfreien TEM-Mehrfachleitung.

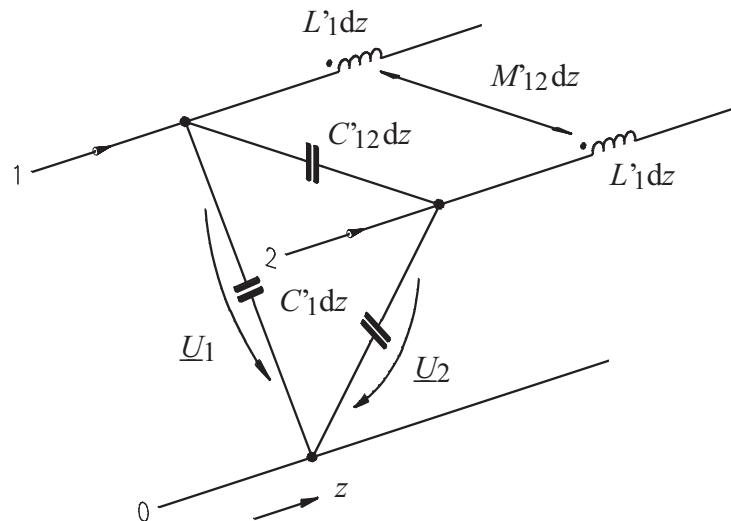
12.3 Die einfachste querinhomogene Mehrfachleitung: die symmetrische Dreifachleitung

Figur 12.12 zeigt zwei Beispiele von symmetrischen querinhomogenen Dreifachleitungen: zwei Mikrostreifenleitungen über einer Grundplatte und eine geschirmte Zweidrahtleitung.



Figur 12.12 Symmetrische querinhomogene Dreifachleitungen:
a) gekoppelte Mikrostreifenleitungen, b) geschirmte Zweidrahtleitung.

Figur 12.13 zeigt das Leitungssatzschaltbild der symmetrischen Dreifachleitung.



Figur 12.13 Das Leitungssatzschaltbild der symmetrischen Dreifachleitung.

Die Impedanzmatrix $[Z']$ und die Admittanzmatrix $[Y]$ sind

$$[Z'] = \begin{bmatrix} Z'_{11} & Z'_{12} \\ Z'_{12} & Z'_{11} \end{bmatrix} \quad [Y] = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{12} & Y_{11} \end{bmatrix} \quad (12.40)$$

Die $[K]$ - Matrix, d.h. die Matrix der Wellengleichung, ist für diesen Spezialfall symmetrisch:

$$[K] = [Z'][Y] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{12} & K_{11} \end{bmatrix} \quad (12.41)$$

$$K_{11} = Z'_{11}Y_{11} + Z'_{12}Y_{12} \quad (12.42)$$

$$K_{12} = Z'_{12}Y_{11} + Z'_{11}Y_{12} \quad (12.43)$$

Die Eigenwerte γ_1^2 und γ_2^2 sind nach (12.27):

$$\gamma_1^2 = \underline{K}_{11} + \underline{K}_{12} = (\underline{Z}'_{11} + \underline{Z}'_{12})(\underline{Y}'_{11} + \underline{Y}'_{12}) \quad (12.44)$$

$$\gamma_2^2 = \underline{K}_{11} - \underline{K}_{12} = (\underline{Z}'_{11} - \underline{Z}'_{12})(\underline{Y}'_{11} - \underline{Y}'_{12}) \quad (12.45)$$

Das Verhältnis der Leitungsspannungen für die beiden Eigenwerte sind nach (12.32):

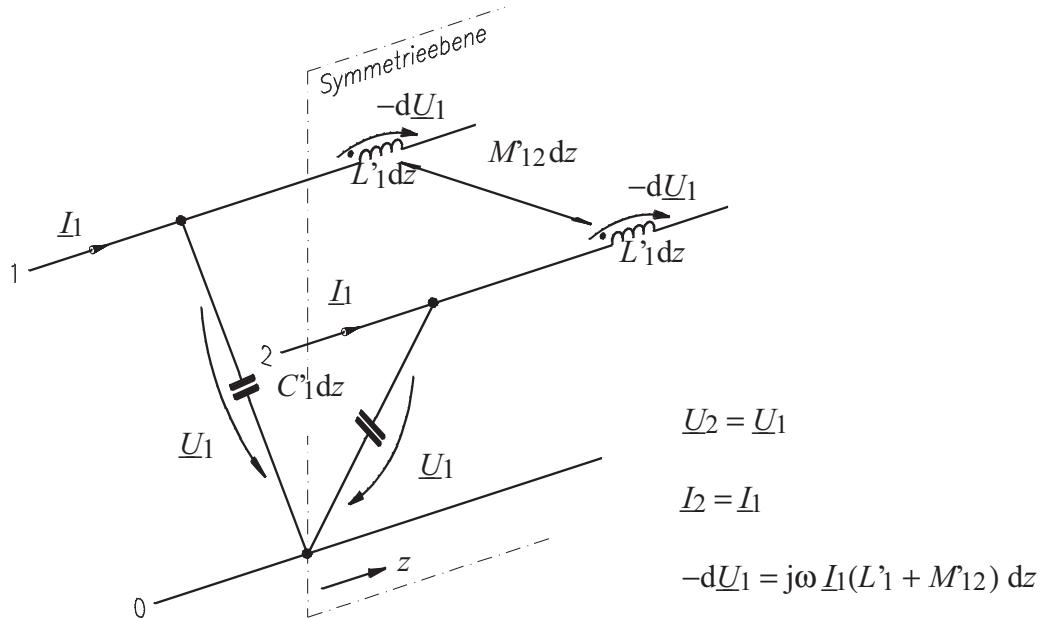
$$\text{für } \gamma_1^2 = \underline{K}_{11} + \underline{K}_{12} \rightarrow \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{\underline{V}_{11}}{\underline{V}_{21}} = 1 \quad (12.46)$$

$$\text{für } \gamma_2^2 = \underline{K}_{11} - \underline{K}_{12} \rightarrow \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{\underline{V}_{12}}{\underline{V}_{22}} = -1 \quad (12.47)$$

Die beiden Eigenvektoren $(\underline{V}_{11}, \underline{V}_{21}) = (1, 1)$ und $(\underline{V}_{12}, \underline{V}_{22}) = (1, -1)$ sind übrigens orthogonal, wie dies für alle symmetrischen Matrizen zutrifft.

12. 3.1 Interpretation der Eigenvektoren der symmetrischen Dreifachleitung: Gleichtakt- und Gegentaktwelle

Nach (12.46) stellt sich für $\gamma^2 = \gamma_1^2$ eine symmetrische Spannungsverteilung $\underline{U}_1 = \underline{U}_2$ ein. Zwischen den beiden symmetrischen Leitern besteht kein Potentialunterschied. Dieser Eigenwert wird als *Gleichtaktanregung* oder *Gleichtaktmode* bezeichnet. Figur 12.14 zeigt das Leitungsersatzschaltbild mit den zugehörigen Spannungen und Strömen für die verlustfreie symmetrische Dreifachleitung.



Figur 12.14 Leitungsersatzschaltbild der symmetrischen verlustfreien Dreifachleitung mit Gleichtaktanregung.

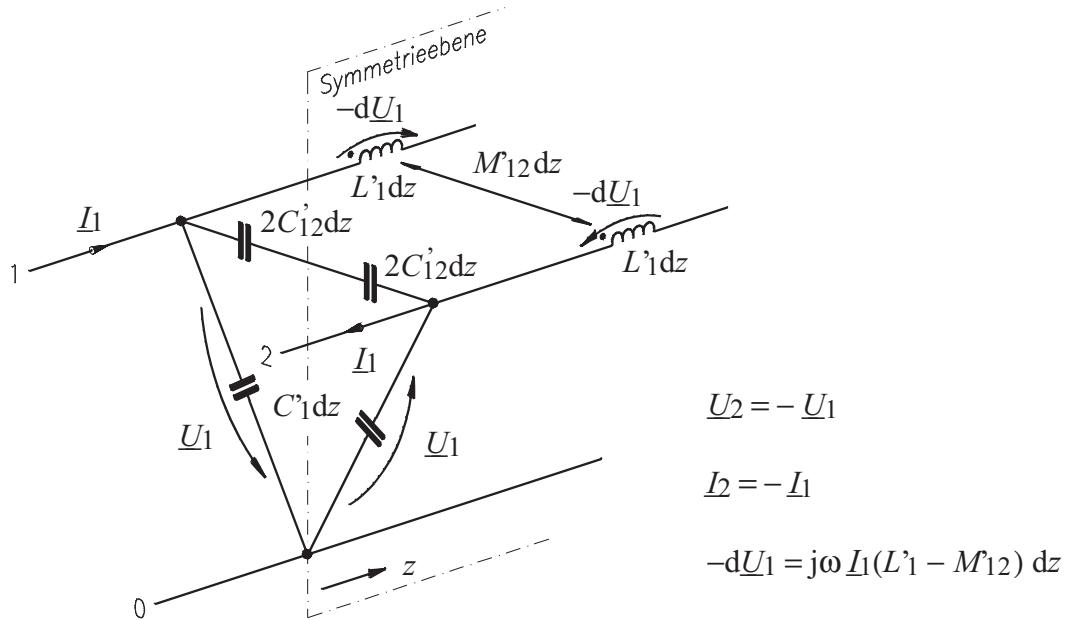
Diesem Ersatzschaltbild entnimmt man in Übereinstimmung mit (12.44) sofort die Gleichtaktwellenausbreitungskonstante γ_e und die Gleichtaktwellenimpedanz Z_{we} :

$$\gamma_e = \gamma_1 = j \omega \sqrt{(L'_1 + M_{12}) C'_1} \quad (12.48)$$

$$Z_{we} = \sqrt{\frac{L'_1 + M_{12}}{C'_1}} \quad (12.49)$$

Der Index e steht für "even mode" = Gleichtaktmode.

Für die *Gegentaktanregung* mit $\gamma^2 = \gamma_2^2$ ist die Spannungsverteilung antimetrisch: $\underline{U}_1 = -\underline{U}_2$. Aus Symmetriegründen ist das Potential der Symmetriearchse gleich dem Potential der Grundplatte.



Figur 12.15 Ersatzschaltbild der symmetrischen verlustfreien Dreifachleitung mit Gegentaktanregung.

Figur 12.15 zeigt das zugehörige Leitungsersatzschaltbild, woraus wiederum die Gegentaktwellenausbreitungskonstante γ_o und die Gegentaktwellenimpedanz Z_{wo} ermittelt werden kann:

$$\gamma_o = \gamma_2 = j \omega \sqrt{(L'_1 - M_{12})(C'_1 + 2C'_{12})} \quad (12.50)$$

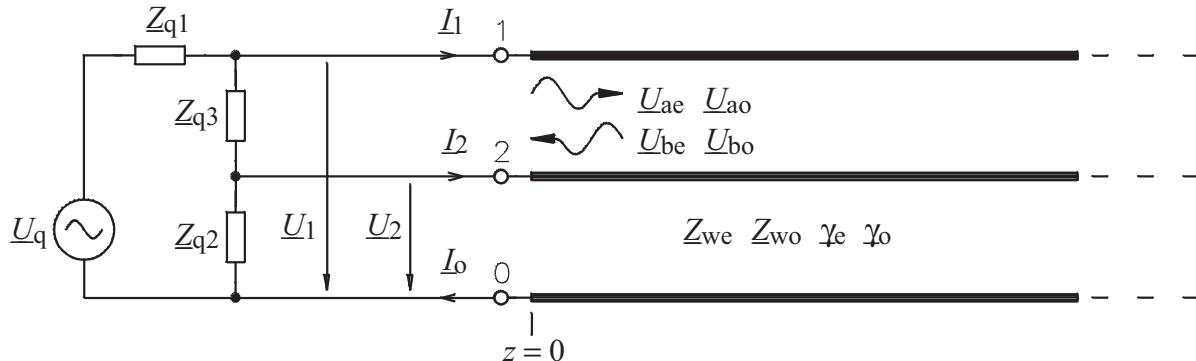
$$Z_{wo} = \sqrt{\frac{L'_1 - M_{12}}{C'_1 + 2C'_{12}}} \quad (12.51)$$

Der Index o steht für "odd mode" = Gegentaktmode.

Mit der Überlagerung einer Gleichtakt- mit einer Gegentaktwelle kann eine beliebige Anregung beschrieben werden. Es bleibt nun noch die Frage zu klären, wie sich beliebige Quellen- und Lastbeschaltungen auf Anregung und Reflexion von Gleich- und Gegentaktwellen auswirken. Im Abschnitt 12.3.2 wird der allgemeine Fall, d.h. die beliebig abgeschlossene symmetrische Dreifachleitung behandelt. Der technisch wichtige Spezialfall der symmetrisch abgeschlossenen Dreifachleitung wird im Abschnitt 12.3.3 dargestellt.

12. 3.2 Die symmetrische Dreifachleitung mit Beschaltung

Figur 12.16 zeigt die Quellenseite einer beschalteten Dreifachleitung.



Figur 12.16 Quellenseite einer beschalteten symmetrischen Dreifachleitung.

Die vorwärts laufende Wellen \underline{U}_{ae} und \underline{U}_{ao} werden aufgespalten in die von der Quelle \underline{U}_q verursachten Anteile \underline{U}_{aeq} und \underline{U}_{aoq} und in die am quellenseitigen Netzwerk reflektierten Anteile \underline{U}_{aer} und \underline{U}_{aor} der rückwärts laufenden Wellen \underline{U}_{be} und \underline{U}_{bo} :

$$\underline{U}_{ae} = \underline{U}_{aeq} + \underline{U}_{aer} \quad \underline{U}_{ao} = \underline{U}_{aoq} + \underline{U}_{aor} \quad (12.52)$$

Wir setzen vorerst die nach rückwärts laufenden Wellen $\underline{U}_{be} = \underline{U}_{bo} = 0$ und betrachten nur die von \underline{U}_q angeregten Wellen \underline{U}_{aeq} und \underline{U}_{aoq} .

Die entsprechende Netzwerkgleichungen lauten:

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_{aeq} + \underline{U}_{aoq} \quad \underline{U}_2 = \underline{U}_{aeq} - \underline{U}_{aoq} \quad (12.53)$$

$$I_1 = \frac{\underline{U}_{aeq}}{Z_{we}} + \frac{\underline{U}_{aoq}}{Z_{wo}} \quad I_2 = \frac{\underline{U}_{aeq}}{Z_{we}} - \frac{\underline{U}_{aoq}}{Z_{wo}} \quad (12.54)$$

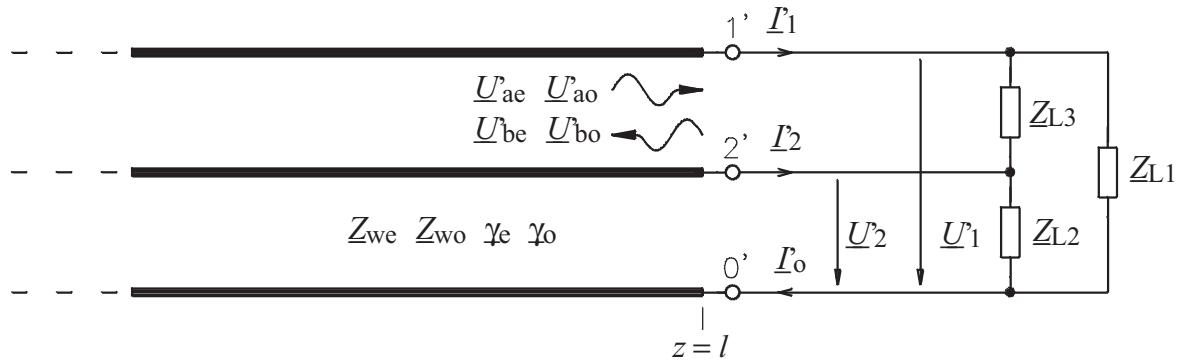
$$\underline{U}_q = \underline{U}_1 + \left(\frac{\underline{U}_2}{Z_{q2}} + I_1 + I_2 \right) Z_{q1} \quad \underline{U}_1 - \underline{U}_2 = \left(\frac{\underline{U}_2}{Z_{q2}} + I_2 \right) Z_{q3} \quad (12.55)$$

Aus diesen Gleichungen können \underline{U}_{aeq} und \underline{U}_{aoq} ermittelt werden, was in etwas algebraische Arbeit ausartet.

$$\underline{U}_{aeq} = \frac{\underline{U}_q \left(\frac{Z_{q2}}{Z_{wo}} + \frac{2 Z_{q2}}{Z_{q3}} + 1 \right)}{2 + (Z_{q1} + Z_{q2}) \left(\frac{2}{Z_{q3}} + \frac{1}{Z_{we}} + \frac{1}{Z_{wo}} \right) + \frac{2 Z_{q1} Z_{q2}}{Z_{we}} \left(\frac{2}{Z_{q3}} + \frac{1}{Z_{wo}} \right)} \quad (12.56)$$

$$\underline{U}_{aoq} = \underline{U}_{aeq} \frac{\frac{Z_{q2}}{Z_{we}} + 1}{\frac{2 Z_{q2}}{Z_{q3}} + \frac{Z_{q2}}{Z_{wo}} + 1} \quad (12.57)$$

Figur 12.17 zeigt die Lastseite einer beschalteten Dreifachleitung.



Figur 12.17 Lastseite einer beschalteten symmetrischen Dreifachleitung

Zur Unterscheidung zu Quellenseite bezeichnen wir hier die Ströme und Spannungen mit ' (Apostroph). Die entsprechenden Netzwerkgleichungen für die Lastseite lauten:

Abschlussnetzwerk:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}'_1 \\ \underline{U}'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{L11} & \underline{Z}_{L12} \\ \underline{Z}_{L12} & \underline{Z}_{L22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}'_1 \\ \underline{I}'_2 \end{bmatrix} = [\underline{Z}_L] [\underline{I}] \quad (12.58)$$

mit $\underline{Z}_{L11} = \underline{Z}_{L1} \parallel (\underline{Z}_{L3} + \underline{Z}_{L2}) = \frac{\underline{Z}_{L1}(\underline{Z}_{L3} + \underline{Z}_{L2})}{\underline{Z}_{L1} + \underline{Z}_{L3} + \underline{Z}_{L2}} \quad (12.59)$

$$\underline{Z}_{L22} = \underline{Z}_{L2} \parallel (\underline{Z}_{L3} + \underline{Z}_{L1}) = \frac{\underline{Z}_{L2}(\underline{Z}_{L3} + \underline{Z}_{L1})}{\underline{Z}_{L1} + \underline{Z}_{L3} + \underline{Z}_{L2}} \quad (12.60)$$

$$\underline{Z}_{L12} = \underline{Z}_{L21} = \underline{Z}_{L11} \frac{\underline{Z}_{L2}}{\underline{Z}_{L3} + \underline{Z}_{L2}} = \frac{\underline{Z}_{L1} \underline{Z}_{L2}}{\underline{Z}_{L1} + \underline{Z}_{L3} + \underline{Z}_{L2}} \quad (12.61)$$

Mit der Impedanzmatrix des Abschlussnetzwerkes $[\underline{Z}_L]$ kann die Matrix der Reflexionsfaktoren $[\underline{r}_L]$ für die Gleich- und Gegentaktwellen bestimmt werden:

$$\underline{U}'_{be} = \underline{r}_{Lee} \underline{U}'_{ae} + \underline{r}_{Leo} \underline{U}'_{ao} \quad (12.62)$$

$$\underline{U}'_{bo} = \underline{r}_{Loe} \underline{U}'_{ae} + \underline{r}_{Lo} \underline{U}'_{ao} \quad (12.63)$$

in Matrixform $\begin{bmatrix} \underline{U}'_{be} \\ \underline{U}'_{bo} \end{bmatrix} = [\underline{r}_L] \begin{bmatrix} \underline{U}'_{ae} \\ \underline{U}'_{ao} \end{bmatrix} \quad (12.64)$

Dabei sind:

\underline{r}_{Lee} : Reflexionsfaktor von der vorwärtslaufenden Gleichtaktwelle in die rückwärtslaufende Gleichtaktwelle

\underline{r}_{Leo} : Reflexionsfaktor von der vorwärtslaufenden Gegentaktwelle in die rückwärtslaufende Gleichtaktwelle

\underline{r}_{Loe} : Reflexionsfaktor von der vorwärtslaufenden Gleichtaktwelle in die rückwärtslaufende Gegentaktwelle

r_{Loo} : Reflexionsfaktor von der vorwärtslaufenden Gegentaktwelle in die rückwärtslaufende Gegentaktwelle

Die Reflexionsmatrix [r_L] wird wie folgt bestimmt.

Am Leitungsende $z = l$ gilt nach Figur 12.17 :

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_{\text{ae}} + \underline{U}_{\text{ao}} + \underline{U}_{\text{be}} + \underline{U}_{\text{bo}} = \underline{Z}_{L11} \underline{I}_1 + \underline{Z}_{L12} \underline{I}_2 \quad (12.65)$$

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_{\text{ae}} - \underline{U}_{\text{ao}} + \underline{U}_{\text{be}} - \underline{U}_{\text{bo}} = \underline{Z}_{L21} \underline{I}_1 + \underline{Z}_{L22} \underline{I}_2 \quad (12.66)$$

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{\text{ae}} - \underline{U}_{\text{be}}}{\underline{Z}_{\text{we}}} + \frac{\underline{U}_{\text{ao}} - \underline{U}_{\text{bo}}}{\underline{Z}_{\text{wo}}} \quad (12.67)$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{\text{ae}} - \underline{U}_{\text{be}}}{\underline{Z}_{\text{we}}} - \frac{\underline{U}_{\text{ao}} - \underline{U}_{\text{bo}}}{\underline{Z}_{\text{wo}}} \quad (12.68)$$

Alle Ströme und Spannungen beziehen sich auf das Leitungsende. Es folgt nun etwas Routine-Algebra. Aus dem linearen Gleichungssystem (12.65) bis (12.68) erhält man die Gleichungen

$$a_{L1} \underline{U}_{\text{ae}} + a_{L2} \underline{U}_{\text{ao}} + a_{L3} \underline{U}_{\text{be}} + a_{L4} \underline{U}_{\text{bo}} = 0 \quad (12.69)$$

$$b_{L1} \underline{U}_{\text{ae}} + b_{L2} \underline{U}_{\text{ao}} + b_{L3} \underline{U}_{\text{be}} + b_{L4} \underline{U}_{\text{bo}} = 0 \quad (12.70)$$

mit $a_{L1} = \frac{\underline{Z}_{L11} + \underline{Z}_{L12}}{\underline{Z}_{\text{we}}} - 1; \quad a_{L2} = \frac{\underline{Z}_{L11} - \underline{Z}_{L12}}{\underline{Z}_{\text{wo}}} - 1 \quad (12.71)$

$$a_{L3} = -\frac{\underline{Z}_{L11} + \underline{Z}_{L12}}{\underline{Z}_{\text{we}}} - 1; \quad a_{L4} = \frac{-\underline{Z}_{L11} + \underline{Z}_{L12}}{\underline{Z}_{\text{wo}}} - 1 \quad (12.72)$$

$$b_{L1} = \frac{\underline{Z}_{L21} + \underline{Z}_{L22}}{\underline{Z}_{\text{we}}} - 1; \quad b_{L2} = \frac{\underline{Z}_{L21} - \underline{Z}_{L22}}{\underline{Z}_{\text{wo}}} + 1 \quad (12.73)$$

$$b_{L3} = -\frac{\underline{Z}_{L21} + \underline{Z}_{L22}}{\underline{Z}_{\text{we}}} - 1; \quad b_{L4} = \frac{-\underline{Z}_{L21} + \underline{Z}_{L22}}{\underline{Z}_{\text{wo}}} - 1 \quad (12.74)$$

Aus (12.69) und (12.70) folgt für die Reflexionsfaktoren

$$r_{\text{Lee}} = \left. \frac{\underline{U}_{\text{be}}}{\underline{U}_{\text{ae}}} \right|_{\underline{U}_{\text{ao}}=0} = \frac{a_{L4} b_{L1} - a_{L1} b_{L4}}{a_{L3} b_{L4} - a_{L4} b_{L3}} \quad (12.75)$$

$$r_{\text{Loe}} = \left. \frac{\underline{U}_{\text{bo}}}{\underline{U}_{\text{ae}}} \right|_{\underline{U}_{\text{ao}}=0} = \frac{a_{L1} b_{L3} - a_{L3} b_{L1}}{a_{L3} b_{L4} - a_{L4} b_{L3}} \quad (12.76)$$

$$r_{\text{Leo}} = \left. \frac{\underline{U}_{\text{be}}}{\underline{U}_{\text{ao}}} \right|_{\underline{U}_{\text{ae}}=0} = \frac{a_{L4} b_{L2} - a_{L2} b_{L4}}{a_{L3} b_{L4} - a_{L4} b_{L3}} \quad (12.77)$$

$$r_{\text{Loo}} = \left. \frac{\underline{U}_{\text{bo}}}{\underline{U}_{\text{ao}}} \right|_{\underline{U}_{\text{ae}}=0} = \frac{a_{L2} b_{L3} - a_{L3} b_{L2}}{a_{L3} b_{L4} - a_{L4} b_{L3}} \quad (12.78)$$

Die Gleichungen (12.64) und (12.69) bis (12.78) beschreiben das Verhalten der Leitung auf der Lastseite vollständig. Es bleibt nun noch die Reflexion auf der Quellenseite zu berücksichtigen. Abgesehen von der Spannungsquelle ist das quellenseitige Netzwerk topologisch mit dem lastseitigen identisch. Die von der Reflexion am quellenseitigen Ende verursachten Anteile \underline{U}_{aer} bzw. \underline{U}_{aor} der Wellen \underline{U}_{be} und \underline{U}_{bo} sind:

$$\underline{U}_{aer} = r_{qee} \underline{U}_{be} + r_{qeo} \underline{U}_{bo} \quad (12.79)$$

$$\underline{U}_{aor} = r_{qoe} \underline{U}_{be} + r_{qoo} \underline{U}_{bo} \quad (12.80)$$

$$\text{in Matrixform } \begin{bmatrix} \underline{U}_{aer} \\ \underline{U}_{aor} \end{bmatrix} = [r_q] \begin{bmatrix} \underline{U}_{be} \\ \underline{U}_{bo} \end{bmatrix} \quad (12.81)$$

Die Reflexionsfaktoren sind entsprechend (12.69) bis (12.78)

$$r_{qee} = \frac{a_{q4} b_{q1} - a_{q1} b_{q4}}{a_{q3} b_{q4} - a_{q4} b_{q3}} \quad \text{usw.} \quad (12.82)$$

$$\text{mit } a_{q1} = \frac{Z_{q11} + Z_{q12}}{Z_{we}} - 1; \quad a_{q2} = \frac{Z_{q11} - Z_{q12}}{Z_{wo}} - 1; \quad \text{usw.} \quad (12.83)$$

Mit den Gleichungen

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_{ae} \\ \underline{U}_{ao} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{U}_{aeq} \\ \underline{U}_{aoq} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{U}_{aer} \\ \underline{U}_{aor} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{U}_{aeq} \\ \underline{U}_{aoq} \end{bmatrix} + [r_q] \begin{bmatrix} \underline{U}_{be} \\ \underline{U}_{bo} \end{bmatrix} \quad (12.84)$$

$$\underline{U}_{ae} = \underline{U}_{ae} e^{-\gamma_e l}; \quad \underline{U}_{ao} = \underline{U}_{ao} e^{-\gamma_o l} \quad (12.85)$$

$$\underline{U}_{be} = \underline{U}_{be} e^{-\gamma_e l}; \quad \underline{U}_{bo} = \underline{U}_{bo} e^{-\gamma_o l} \quad (12.86)$$

und mit (12.64)

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_{be} \\ \underline{U}_{bo} \end{bmatrix} = [r_L] \begin{bmatrix} \underline{U}_{ae} \\ \underline{U}_{ao} \end{bmatrix}$$

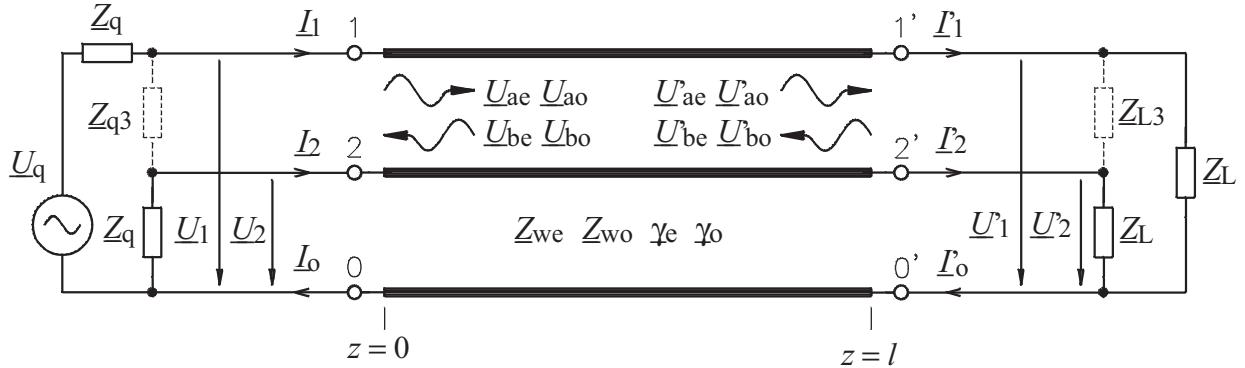
ist die beschaltete symmetrische Dreifachleitung vollständig beschrieben. Es könnte damit jede der Teilwellen \underline{U}_{ae} , \underline{U}_{ao} , \underline{U}_{be} , \underline{U}_{bo} , \underline{U}_{ae} , \underline{U}_{ao} , \underline{U}_{be} , \underline{U}_{bo} in Funktion der Anregung \underline{U}_q ausgedrückt werden.

12. 3.3 Die symmetrische Dreifachleitung mit symmetrischer Beschaltung

In der Elektronik und Kommunikationstechnik werden symmetrische Dreifachleitungen auf zwei Arten betrieben:

- in einer geschirmten Zweidrahtleitung wird möglichst nur der Gegentaktmode angeregt und der Gleichtaktmode unterdrückt. Die Leitung überträgt nur ein Signal.
- in symmetrischen Zwei- und Mehrfachleitungen vom Typ wie in Figur 12.1c wird nach Möglichkeit jeder Streifenleiter für einen Informationskanal eingesetzt.

Im zweiten Fall wird die Mehrfachleitung an den Enden so beschaltet, dass nur identische Impedanzen gegenüber der Masse (0) auftreten und die Impedanzen zwischen den Leitern i, k ($i, k \neq 0$) unendlich sind, wie dies für die symmetrische Dreifachleitung in Figur 12.18 gezeigt ist.



Figur 12.18 Symmetrische Dreifachleitung mit quellen- und lastsseitig symmetrischer Belastung. $Z_{q3} = Z_{L3} = \infty$.

Auf der Quellenseite gelten, wenn die nach links laufenden Wellen $U_{be} = U_{bo} = 0$ gesetzt werden, die Gleichungen (12.53) bis (12.55). Mit $Z_{q3} = \infty$ wird das Gleichungspaar (12.55) zu

$$U_q = U_1 + I_1 Z_q \quad U_2 = -I_2 Z_q \quad (12.87)$$

Daraus folgt

$$U_q = U_{ae} + U_{ao} + Z_q \left(\frac{U_{ae}}{Z_{we}} + \frac{U_{ao}}{Z_{wo}} \right) \quad (12.88)$$

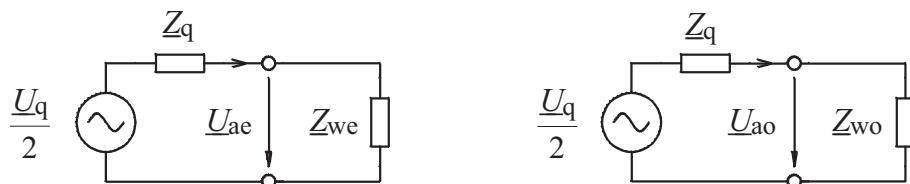
$$0 = U_{ae} - U_{ao} + Z_q \left(\frac{U_{ae}}{Z_{we}} - \frac{U_{ao}}{Z_{wo}} \right) \quad (12.89)$$

Die vorwärtslaufenden Spannungswellen sind:

$$U_{ae} = \frac{U_q}{2 \left(1 + Z_q / Z_{we} \right)} \quad (12.90)$$

$$U_{ao} = \frac{U_q}{2 \left(1 + Z_q / Z_{wo} \right)} \quad (12.91)$$

Mit der gewählten quellenseitigen Beschaltung mit Impedanzen Z_q kann die Gleich- und Gegentaktanregung mit den Ersatzschaltungen nach Figur 12.19 dargestellt werden.



Figur 12.19 Ungekoppelte Ersatzschaltungen für die Gleich- und Gegentaktanregung der nach Figur 12.18 beschalteten Dreifachleitung.

Von besonderem Interesse ist der Betriebszustand der Anpassung auf der Quellen- und Lastseite mit der Bedingung

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \underline{Z}_q \quad (12.92)$$

$$\text{mit } \underline{U}_1 = \underline{U}_{ae} + \underline{U}_{ao} \quad \text{und} \quad \underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{ae}}{\underline{Z}_{we}} + \frac{\underline{U}_{ao}}{\underline{Z}_{wo}} \quad (12.93)$$

Dabei wird der in der Praxis wichtige Fall mit reellen Wellenimpedanzen Z_{we} und Z_{wo} betrachtet. Mit der obigen Bedingung und mit (12.90) und (12.91) finden wir als Bedingung für Anpassung:

$$\underline{Z}_q = \sqrt{\underline{Z}_{we} \underline{Z}_{wo}} \quad (12.94)$$

Dabei ist das Verhältnis:

$$\frac{\underline{U}_{ae}}{\underline{U}_{ao}} = \frac{1 + \sqrt{\frac{\underline{Z}_{we}}{\underline{Z}_{wo}}}}{1 + \sqrt{\frac{\underline{Z}_{wo}}{\underline{Z}_{we}}}} \quad (12.95)$$

Reflexion am fernen Ende:

Die von der Quelle angeregten Teilwellen wandern mit den Ausbreitungskonstanten γ_e und γ_o (Gleichungen (12.44) und (12.45)) die im allgemeinen unterschiedlich sind. Die Gleich- und Gegentaktwellen werden mit $\gamma_e \neq \gamma_o$ unterschiedlich gedämpft und verzögert. Mit symmetrischer Belastung durch die Lastimpedanzen \underline{Z}_L gilt:

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_{ae} + \underline{U}_{ao} + \underline{U}_{be} + \underline{U}_{bo} = \underline{Z}_L \underline{I}_1 \quad (12.96)$$

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_{ae} - \underline{U}_{ao} + \underline{U}_{be} - \underline{U}_{bo} = \underline{Z}_L \underline{I}_2 \quad (12.97)$$

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{ae} - \underline{U}_{be}}{\underline{Z}_{we}} + \frac{\underline{U}_{ao} - \underline{U}_{bo}}{\underline{Z}_{wo}} \quad (12.98)$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{ae} - \underline{U}_{be}}{\underline{Z}_{we}} - \frac{\underline{U}_{ao} - \underline{U}_{bo}}{\underline{Z}_{wo}} \quad (12.99)$$

Alle Ströme und Spannungen beziehen sich auf das Leitungsende $z = l$. Aus (12.96) und (12.99) kann die Reflexionsmatrix ermittelt werden:

$$\underline{U}_{be} = \underline{r}_{Lee} \underline{U}_{ae} + \underline{r}_{Leo} \underline{U}_{ao} \quad (12.100)$$

$$\underline{U}_{bo} = \underline{r}_{Loe} \underline{U}_{ae} + \underline{r}_{Loo} \underline{U}_{ao} \quad (12.101)$$

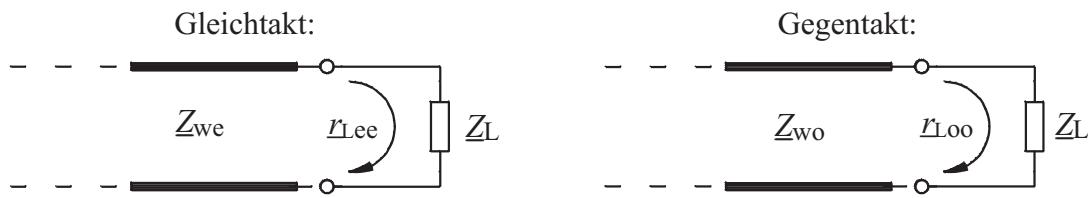
$$\underline{r}_{Lee} = \frac{\underline{Z}_L - \underline{Z}_{we}}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_{we}} \quad (12.102)$$

$$\underline{r}_{Loo} = \frac{\underline{Z}_L - \underline{Z}_{wo}}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_{wo}} \quad (12.103)$$

$$\underline{r}_{Leo} = \underline{r}_{Loe} = 0 \quad (12.104)$$

Danach gilt also:

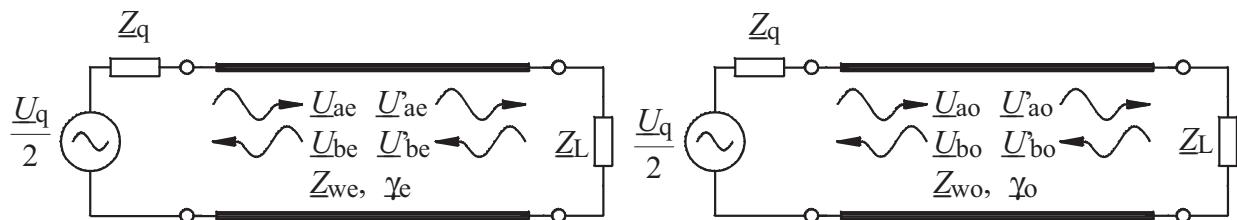
- Gleich- und Gegentaktwellen sind völlig entkoppelt: $\underline{r}_{Leo} = \underline{r}_{Loe} = 0$
- Die Reflexionsfaktoren \underline{r}_{Lee} und \underline{r}_{Loo} der Gleich- und Gegentaktwellen verhalten sich wie die Reflexionsfaktoren auf ungekoppelten Leitungen (Figur 12.20)



Figur 12.20 Reflexionsfaktoren \underline{r}_{Lee} und \underline{r}_{Loo} der symmetrisch belasteten symmetrischen Dreifachleitung.

$$\underline{r}_{Lee} = \frac{\underline{Z}_L - \underline{Z}_{we}}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_{we}} \quad \underline{r}_{Loo} = \frac{\underline{Z}_L - \underline{Z}_{wo}}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_{wo}} \quad (12.105)$$

Aus den (12.102) bis (12.104) konnte das Ersatzschaltbild nach Figur 12.20 gewonnen werden. In der Herleitung der Gleichungen (12.90) und (12.91), die die Wellen \underline{U}_{ae} und \underline{U}_{ao} in Funktion der anregenden Spannung \underline{U}_q bestimmen, wurde die Voraussetzung gemacht, dass keine nach links laufenden Wellen \underline{U}_{be} und \underline{U}_{bo} existieren. Das Reflexionsverhalten der symmetrischen Quellenimpedanzen ist das gleiche wie auf der Lastseite und das Ersatzschaltbild nach Figur 12.20 mit dem Gleichungspaar (12.105) kann auch auf der Quellenseite angewandt werden. Das ganze symmetrische Dreileiterystem kann daher mit der Ersatzschaltung nach Figur 12.21 mit je einer Ersatzschaltung für die Gleich- und die Gegentaktwelle dargestellt werden.



Figur 12.21 Ersatzschaltung für symmetrische Dreileiterystem.

Symmetrischer Abschluss mit $\underline{Z}_L = \sqrt{\underline{Z}_{we} \underline{Z}_{wo}}$

Bei einer Parallelübertragung von Signalen über Mehrfachleitungen wird man versuchen, die Kopplung zwischen den Leitungen möglichst klein zu halten und gleichzeitig Anpassung anzustreben. Für die ideale TEM-Dreifachleitung mit $\gamma_e = \gamma_0$ kann mit $\underline{Z}_q = \underline{Z}_L = \sqrt{\underline{Z}_{we} \underline{Z}_{wo}}$ eine völlige Unterdrückung der Kopplung auf der Lastseite erreicht werden: $\underline{U}_2(z = l) = 0$.

Beweis:

Mit $\gamma_e = \gamma_0$ gilt nach (12.95):

$$\left. \frac{\underline{U}_{ae}}{\underline{U}_{ao}} \right|_{z=l} = \left. \frac{\underline{U}_{ae}}{\underline{U}_{ao}} \right|_{z=0} = \frac{1 + \sqrt{\frac{\underline{Z}_{we}}{\underline{Z}_{wo}}}}{1 + \sqrt{\frac{\underline{Z}_{wo}}{\underline{Z}_{we}}}} \quad (12.106)$$

Nach (12.97), (12.100) und (12.101) gilt am Leitungsende

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_{ae} - \underline{U}_{ao} + \underline{U}_{be} - \underline{U}_{bo} = \underline{U}_{ae}(1 + r_{Lee}) - \underline{U}_{ao}(1 + r_{Lo}) \quad (12.107)$$

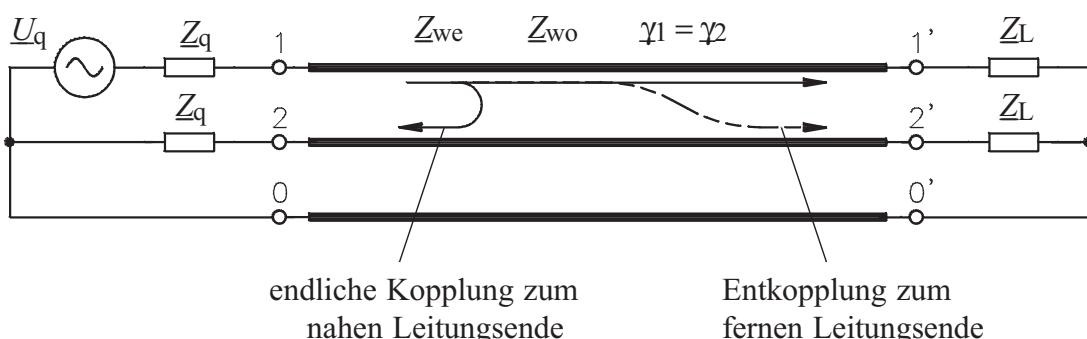
Die Bedingung für $\underline{U}_2(z = l) = 0$ lautet:

$$\left. \frac{\underline{U}_{ae}}{\underline{U}_{ao}} \right|_{z=l} = \frac{1 + r_{Lo}}{1 + r_{Lee}} = \frac{1 + \sqrt{\frac{\underline{Z}_{we}}{\underline{Z}_{wo}}}}{1 + \sqrt{\frac{\underline{Z}_{wo}}{\underline{Z}_{we}}}} \quad (12.108)$$

Diese Bedingung ist erfüllt für

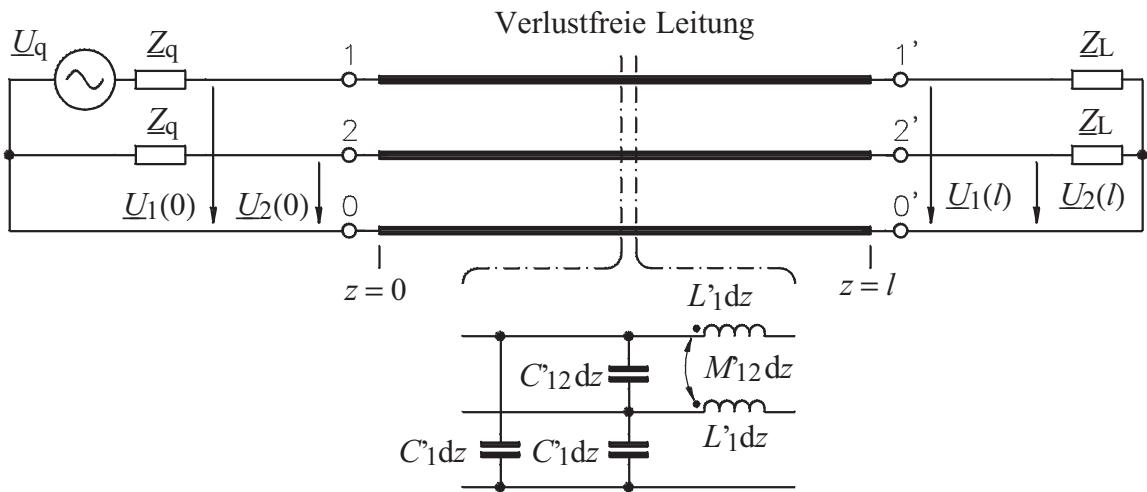
$$\underline{Z}_L = \underline{Z}_q = \sqrt{\underline{Z}_{we} \underline{Z}_{wo}} \quad (12.109)$$

Mit den Abschlussimpedanzen $\underline{Z}_L = \underline{Z}_q = \sqrt{\underline{Z}_{we} \underline{Z}_{wo}}$ besteht bei einer symmetrischen TEM-Dreifachleitung eine ideale Entkopplung zum fernen Ende der gekoppelten Leitung (Figur 12.22). Dagegen kann die Kopplung zum nahen Ende nicht für alle Frequenzen unterdrückt werden.



Figur 12.22 Kopplungseigenschaften der symmetrischen TEM-Dreifachleitung.

Zusammenfassung: symmetrische verlustfreie Dreifachleitung mit symmetrischen Abschlusswiderständen und unsymmetrischer Anregung



Figur 12.23 Symmetrische verlustfreie Dreifachleitung mit symmetrischen Abschlusswiderständen und unsymmetrischer Anregung.

Gleichtaktwelle (Even Mode)

Wellenausbreitungskonstante:

$$\gamma_e = j\beta_e = j\omega \sqrt{(L'_1 + M'_{12}) C'_1}$$

Wellenimpedanz:

$$Z_{we} = \sqrt{\frac{L'_1 + M'_{12}}{C'_1}}$$

Gegentaktwelle (Odd Mode)

Wellenausbreitungskonstante:

$$\gamma_o = j\beta_o = j\omega \sqrt{(L'_1 - M'_{12}) (C'_1 + 2C'_{12})}$$

Wellenimpedanz:

$$Z_{wo} = \sqrt{\frac{L'_1 - M'_{12}}{C'_1 + 2C'_{12}}}$$

Von der Quelle angeregte Wellen:

Gleichtakt

$$U_{ae} = \frac{U_q}{2(1 + Z_q/Z_{we})}$$

Gegentakt

$$U_{ao} = \frac{U_q}{2(1 + Z_q/Z_{wo})}$$

Auf der Lastseite reflektierte Wellen:

$$U_{be} = r_{Lee} U_{ae}$$

$$U_{bo} = r_{Loo} U_{ao}$$

$$\text{mit } r_{Lee} = \frac{Z_L - Z_{we}}{Z_L + Z_{we}}$$

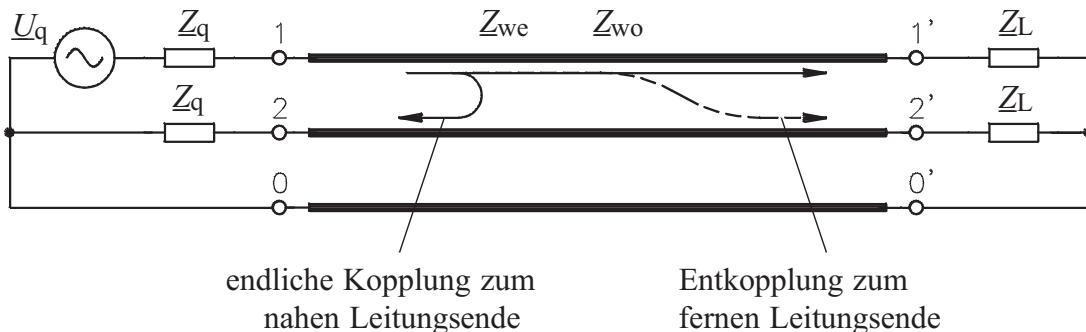
$$r_{Loo} = \frac{Z_L - Z_{wo}}{Z_L + Z_{wo}}$$

$$U_{ae}(z=l) = U_{ae}(z=0) e^{-j\beta_e l}$$

$$U_{ao}(z=l) = U_{ao}(z=0) e^{-j\beta_o l}$$

Zusammenfassung: Angepasste symmetrische verlustfreie TEM-Dreifachleitung

Querhomogene Leitung: $\beta_e = \beta_0 = \beta$



Figur 12.24 Angepasste symmetrische verlustfreie TEM-Dreifachleitung.

$$\text{Anpassungsbedingung: } Z_L = Z_q = \sqrt{Z_{we} Z_{wo}}$$

- Kopplungsfrei zum fernen Ende
- Kopplung zum nahen Ende (Resultat ohne Herleitung):

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{j k \tan \beta l}{\sqrt{1 - k^2 + j \tan \beta l}} \quad (12.110)$$

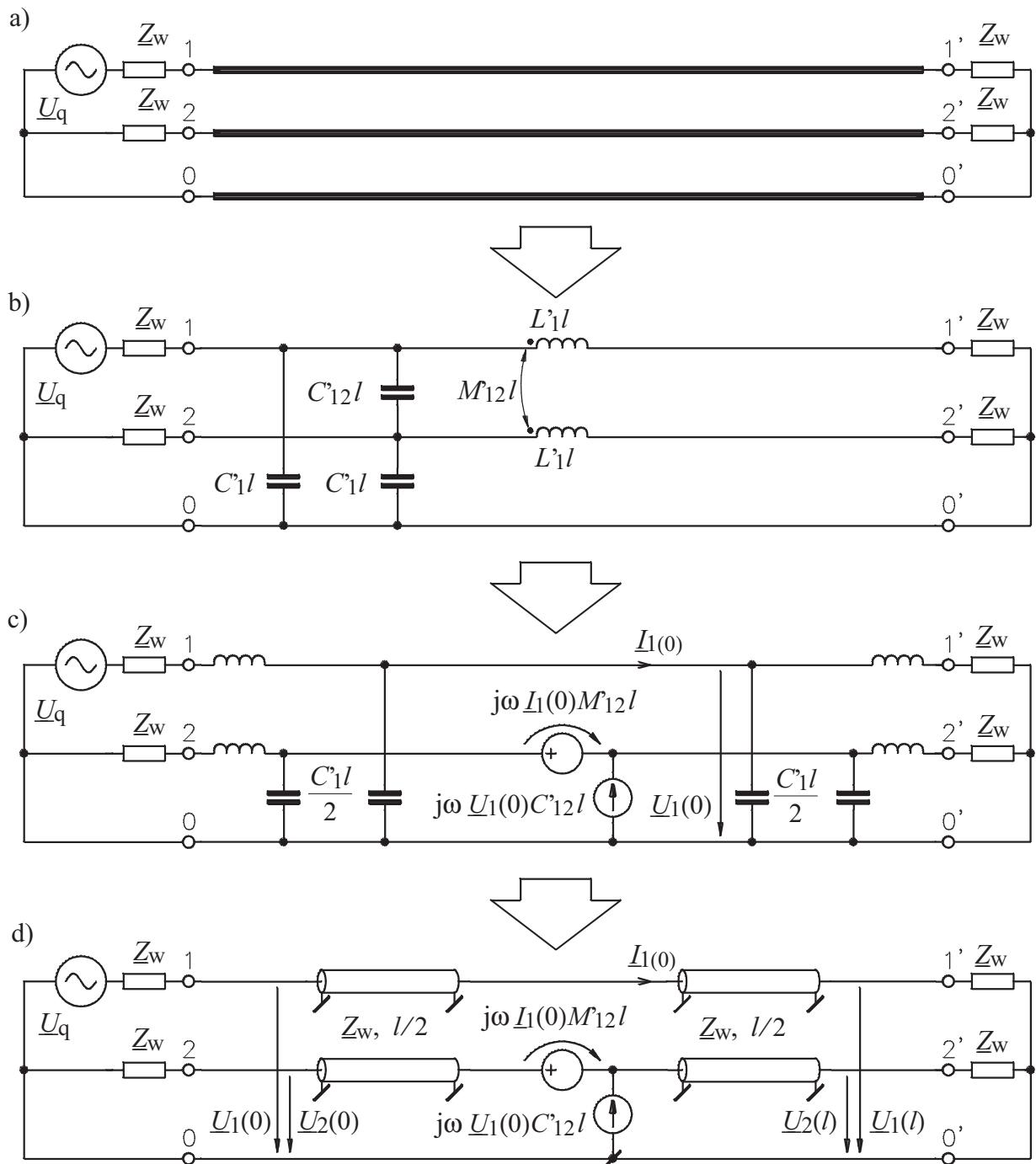
$$\text{Kopplungsfaktor: } k = \frac{C'_{12}}{C'_{12} + C'_1} = \frac{M_{12}}{L'_1} \quad (12.111)$$

12. 3.4 Ein Fall aus der Praxis der Elektronik: Kopplung in einer kurzen symmetrischen TEM-Dreifachleitung mit schwacher Kopplung

Bei diesem in der Praxis wichtigen Fall werden folgende Vereinfachungen gemacht:

1. Mit einer *elektrisch kurzen Leitung* kann ein Ersatzschaltbild mit wenigen konzentrierten Elementen verwendet werden.
2. Mit einer *schwachen Kopplung* kann eine unilaterale Kopplung von der gespeisten Leitung in die passive Leitung angenommen werden, d.h. statt einer induktiven Kopplung wird eine stromgesteuerte Spannungsquelle und statt einer kapazitiven Kopplung wird eine spannungssteuerte Stromquelle eingesetzt.

Die Vereinfachungen des Ersatzschaltbildes sind in Figur 12.25 dargestellt.



Figur 12.25 a) Kurze symmetrische TEM-Dreifachleitung mit schwacher Kopplung,
 b) Ersatzschaltung für kleine Leitungslänge l ,
 c) Ersatzschaltung für schwache Kopplung: $k \ll 1$,
 d) Umwandlung der ungekoppelten Elemente in Leitungselemente.

Für die umgewandelte Ersatzschaltung in Figur 12.25d gilt:

$$\underline{U}_2(0) = \frac{j\omega \underline{I}_1(0)M_{12}l}{2} + \frac{j\omega \underline{U}_1(0)C'_{12}l}{2} \underline{Z}_w \quad (12.112)$$

$$\underline{U}_1(0) = \underline{Z}_w \underline{I}_1(0) = \underline{U}_q/2 \quad (12.113)$$

$$\underline{U}_2(0) = \frac{j\omega L_1(0)l}{2} \left(M'_{12} + C'_{12} \underline{Z}_w^2 \right) \quad (12.114)$$

Bei der TEM-Mehrfachleitung ist der Kopplungsfaktor k für schwache Kopplung

$$k = \frac{M'_{12}}{L'_1} = \frac{C'_{12}}{C'_{12} + C'_1} \approx \frac{C'_{12}}{C'_1} \quad (12.115)$$

Aus (12.114) und (12.115) folgt

$$\underline{U}_2(0) = \frac{j\omega L_1(0)L'_1 l}{2} \left(\frac{M'_{12}}{L'_1} + \frac{C'_{12}}{C'_1} \right) = j\omega \underline{U}_q \frac{M'_{12} l}{2\underline{Z}_w} \quad (12.116)$$

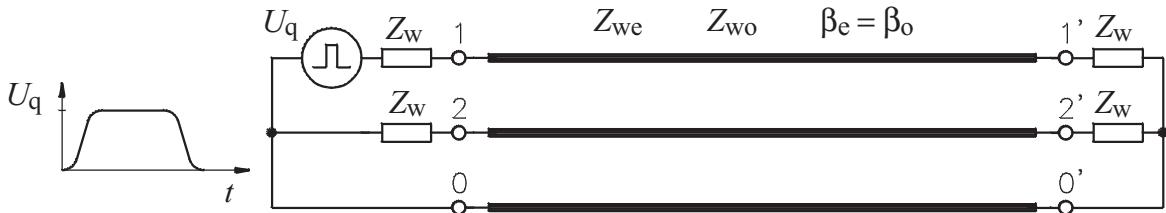
$$\underline{U}_2(l) = \frac{j\omega \underline{U}_q L'_1 l}{4\underline{Z}_w} \left(-\frac{M'_{12}}{L'_1} + \frac{C'_{12}}{C'_1} \right) = 0 \quad (12.117)$$

Dieses Resultat stimmt, wie zu erwarten ist, mit der Beziehung (12.110) für $l/\lambda \ll 1$ und $C'_{12}/C'_1 \ll 1$ überein.

Wir vergleichen das Resultat (12.116) und (12.117) mit der exakten Simulation einer gekoppelten Leitung, wobei wir die vereinfachenden Annahmen $l/\lambda \ll 1$ und $C'_{12}/C'_1 \ll 1$ etwas strapazieren:

Beispiel:

Kurze symmetrische verlustfreie gekoppelte TEM-Dreifachleitung mit schwacher Kopplung nach Figur 12.26



Figur 12.26 Impuls als Anregung für die gekoppelte Dreifachleitung

Kopplungsfaktor $k = 0.17$

Wellenimpedanz $Z_w = 50 \Omega$

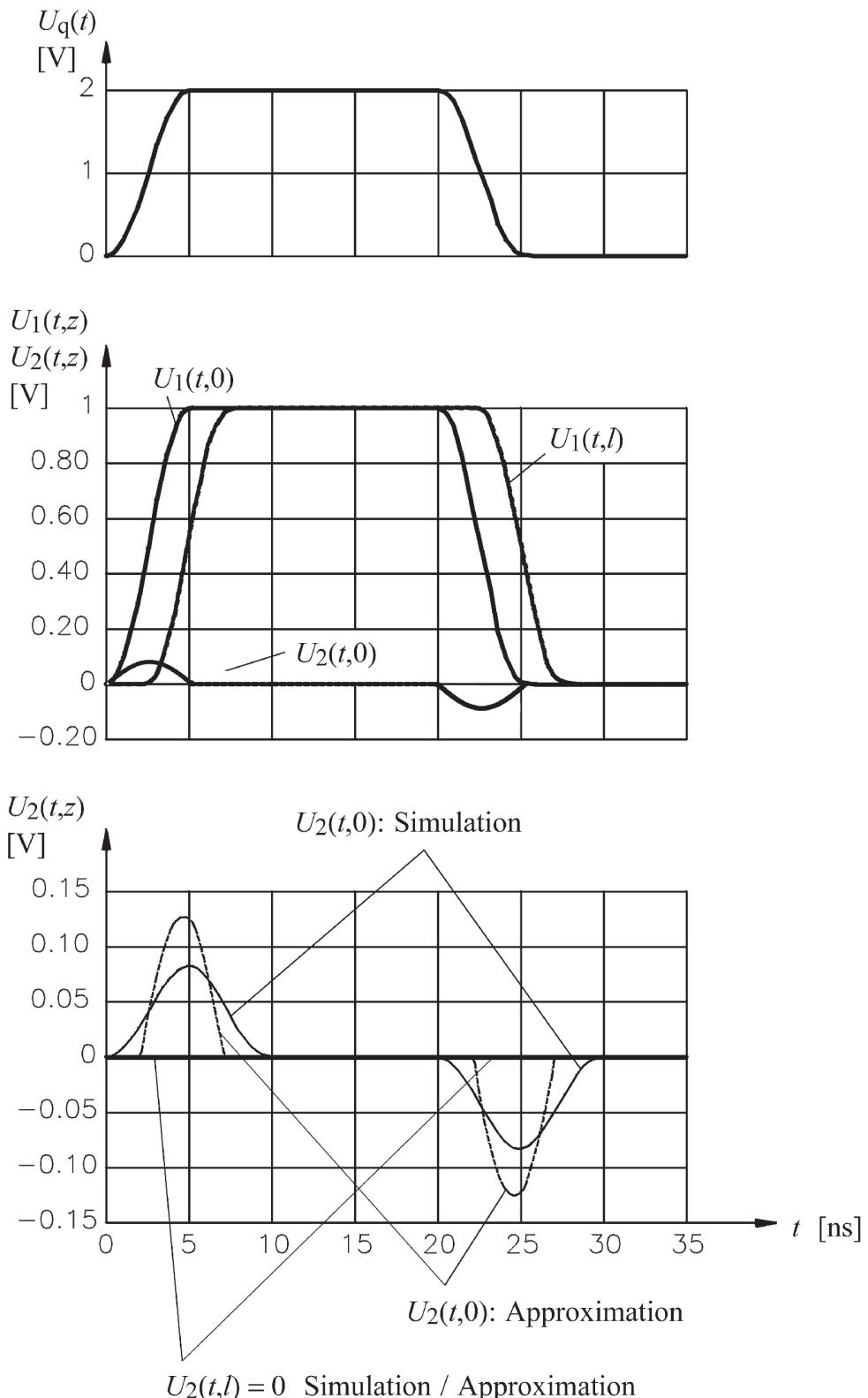
elektrische Länge $l = 70\text{cm}$

Signalform $U_q(t)$: \cos^2 -Impuls

Im Zeitbereich wird (12.116) zu

$$u_2(t,0) = \frac{d i_1(t,0)}{d t} \frac{L'_1 l}{2} \left(\frac{M'_{12}}{L'_1} + \frac{C'_{12}}{C'_1} \right) = \frac{d u_q(t)}{d t} \frac{M'_{12} l}{2Z_w} \quad (12.118)$$

Figur 12.27 zeigt die Resultate der exakten Simulation für die Spannung $U_1(t,0)$ und $U_2(t,0)$ am Leitungseingang und $U_1(t,l)$ am Leitungsausgang. In Figur 12.27 ist noch ein Vergleich von $U_2(t,0)$ gemäss der Approximation (12.118) und der exakten Simulation dargestellt. Obwohl die Bedingungen für die Gültigkeit der Approximation bezüglich der Kopplungskonstante k_1 und der Leitungslänge l nur schlecht eingehalten werden, ergibt (12.118) immer noch eine brauchbare Abschätzung.



Figur 12.27 Simulation des Übersprechens eines \cos^2 -Impulses.
 Quellenspannung $U_q(t)$, Spannungen am Leitungseingang: $U_1(t,0)$, $U_2(t,0)$,
 Spannung am Leitungsausgang: $U_1(t,l)$
 Vergleich von Simulation und Approximation (12.118) von $U_2(t,0)$.

Literatur für Leitungen

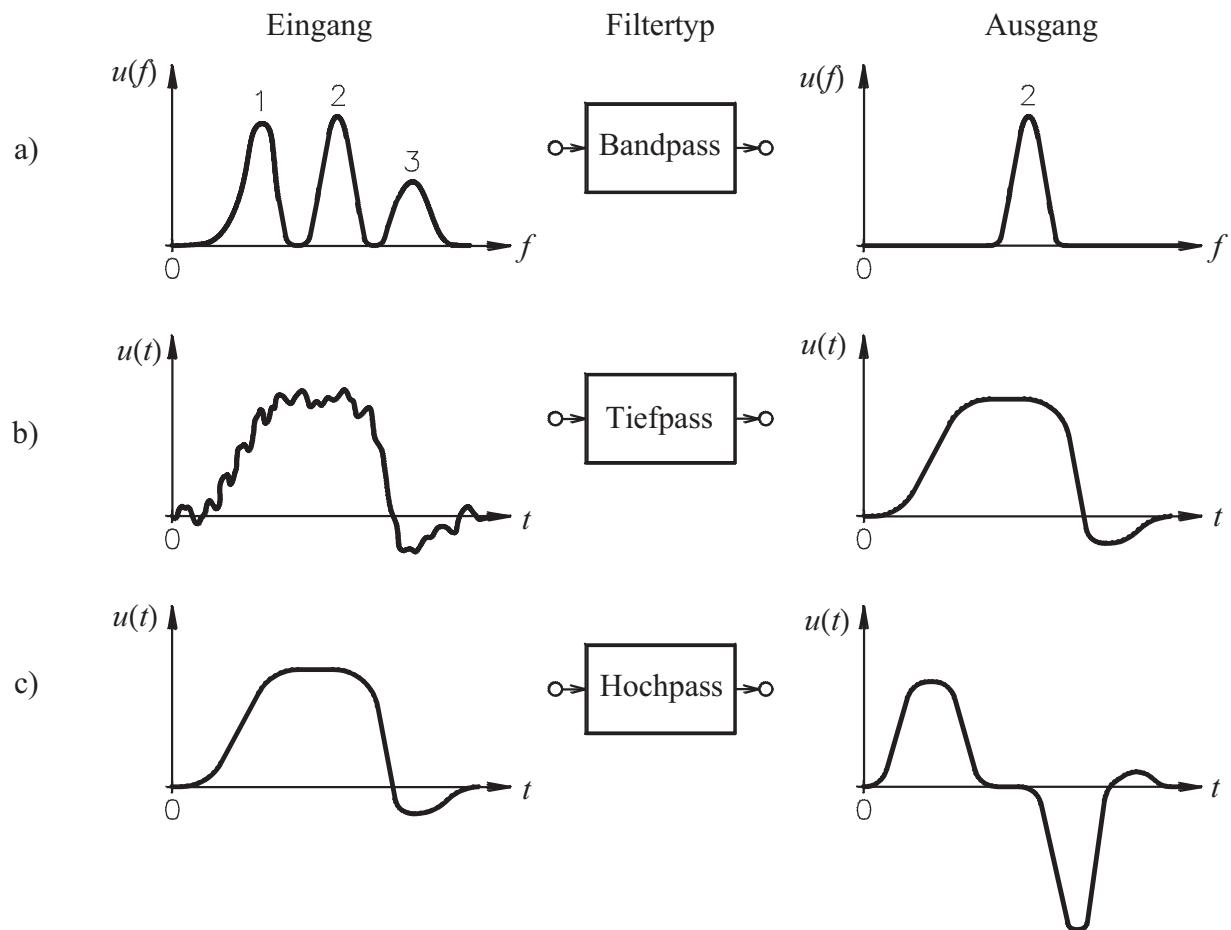
- [1] S. Ramo, J. Whinnery, T. Van Duzer: *Fields and waves in communication electronics*. New York: John Wiley & Sons, 1994.
Eine umfassende Einführung, hauptsächlich in die Theorie des elektromagnetischen Feldes, mit einigen Abschnitten zu Leitungen.
- [2] F.E. Gardiol: *Lossy transmission lines*. Dedham: Artech House, Inc., 1987.
- [3] J.A. Brandão Faria: *Multiconductor transmission-line structures, modal analysis techniques*. New York: John Wiley & Sons, 1993.
Ein weitergehende Betrachtung von Mehrfachleitersystemen.
- [4] H.G. Unger: *Elektromagnetische Wellen auf Leitungen*. Heidelberg: Hüthig, 1986.
Ein sehr schönes Lehrbuch, enthält die meisten in diesem Skript behandelten Kapitel.

Filter

13. Einführung zur Filtersynthese

Unter einem elektrischen Filter verstehen wir ein lineares Zweitor, das ein Signal im Zeit- und Frequenzbereich gezielt verändert. Elektrische Filter sind in allen Bereichen der Kommunikationstechnik und Elektronik zu finden. Auch bei nichtelektrischen Filtern, wie Filtern von akustischen Wellen in Gasen und Festkörpern oder Festkörperoberflächen, werden die gleichen Entwurfsmethoden eingesetzt wie bei elektrischen Filtern.

Figur 13.1 zeigt Beispiele des Einsatzes von elektrischen Filtern als Element für die Selektion eines bestimmten Frequenzbandes, als Element zur Unterdrückung von hochfrequentem Rauschen und als Element zur Differentiation eines Signals im Zeitbereich.



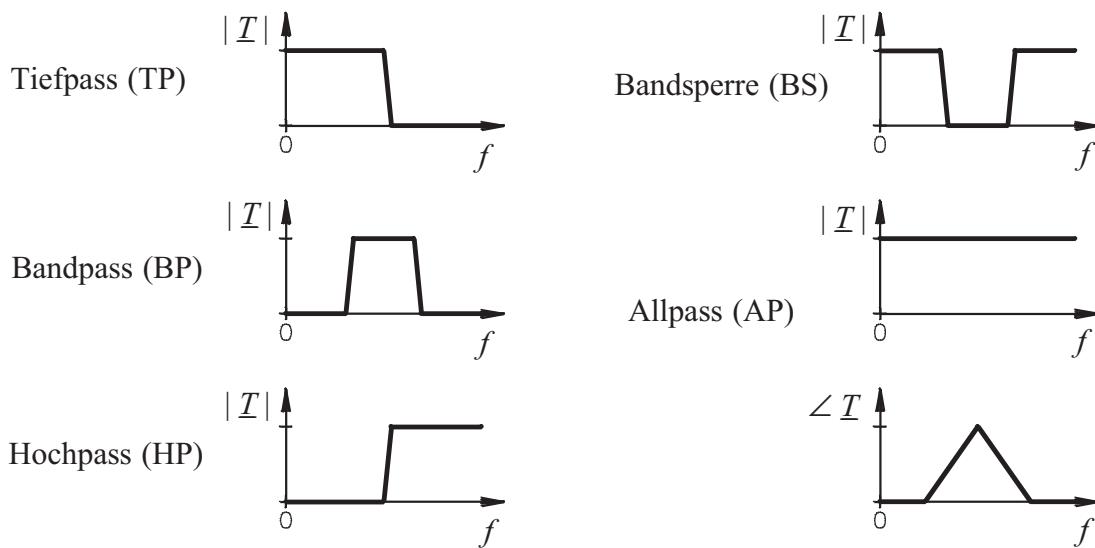
Figur 13.1 Einsatz von elektrischen Filtern: a) Bandpass für die Selektion eines Frequenzbandes, b) Tiefpass zur Unterdrückung von hochfrequenten Störsignalen, c) Hochpass zur Differentiation eines Signals im Zeitbereich.

Die ersten Ansätze für den Entwurf von Filtern, die Filtersynthese, sind schon in der frühen Geschichte der Elektrotechnik zu finden: um 1915 haben unabhängig voneinander G.A. Campbell in USA und K.W. Wagner in Deutschland das *Wellenfilter* vorgeschlagen. Die Filtertheorie war in den vergangenen achtzig Jahren immer in Entwicklung und kann auch heute nicht als abgeschlossen betrachtet werden. Der Grund für das anhaltende Interesse ist, dass sich die Filtertechnik laufend an technologische Entwicklungen anpasst.

Beispiele dieses Vorgangs sind:

Technologie	zugehörige Filtertechnik	Grundelemente
diskrete R, L und C	klassische Filter	R, L und C
Operationsverstärker	aktive Filter	Verstärker, R und C
Signalprozessoren	digitale Filter	Verzögerung, Rechenwerk
CMOS-Technologie	SC (<u>S</u> witched <u>C</u> apacitor) Filter	Schalter, analoge Addition, C
Akustische Oberflächenwellen	SAW (<u>S</u> urface <u>A</u> coustic <u>W</u> ave) -Filter	Leitungselemente, analoge Addition

Filter werden meist im Frequenzbereich spezifiziert. Die einfachsten Grundtypen von Filtern sind in Figur 13.2 dargestellt.

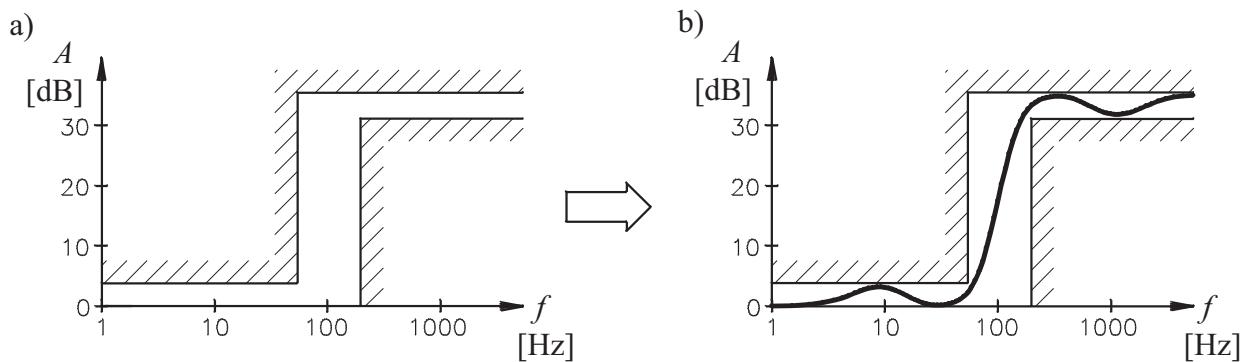


Figur 13.2 Übertragungsfunktionen \underline{T} von Filtergrundtypen

Die Bauelemente der klassischen elektrischen Filter sind: Widerstände R , Kapazitäten C , Induktivitäten L und eventuell Gegeninduktivitäten M . Mit den oben erwähnten verschiedenen Filtertechnologien werden einzelne dieser Grundelemente durch andere, in der speziellen Technologie kostengünstig herstellbare Elemente ersetzt. In unserer Einführung in die klassische Filtertechnik behandeln wir die bekannten Filtertypen nach

- Butterworth
- Tschebyscheff
- Bessel

Als Filtertechnologie steht die klassische Realisierung mit diskreten Widerständen, Kapazitäten und Induktivitäten im Vordergrund, die auch als Basis für alle andern Filtertechnologien verstanden wird. In einem letzten Abschnitt werden einfache aktive Filter mit Operationsverstärkern eingeführt. Unser Ziel, die Filtersynthese und -realisierung, ist in Figur 13.3 dargestellt: ausgehend von einer gegebenen Filterspezifikation soll ein aus den Elementen R , L und C aufgebautes Filter entworfen werden, dessen Übertragungsfunktion die Spezifikation befriedigt.



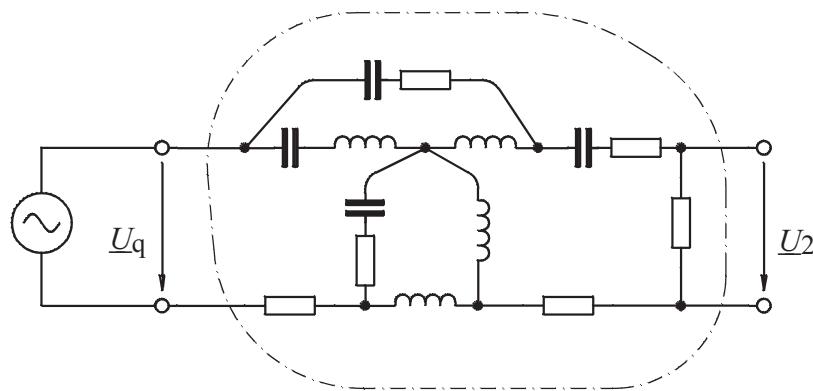
Figur 13.3 Ziel der Filtersynthese: ausgehend von einer Filterspezifikation
a) (Filterdämpfung in Funktion der Frequenz) soll ein mit einem passiven Netzwerk realisierbarer Frequenzgang b) synthetisiert werden.

Unser Vorgehen ist folgendes:

1. Zusammenstellung der für unsere Zwecke wichtigen Gesetze der linearen Netzwerktheorie.
2. Diskussion der Eigenschaften der Übertragungsfunktion linearer Netzwerke.
3. Approximation von spezifizierten durch realisierbare Tiefpass-Übertragungsfunktionen.
Einführung der normierten Tiefpässe nach Butterworth, Tschebyscheff und Bessel.
4. Rückführen von Hochpässen, Bandpässen und Bandsperren durch geeignete Transformationen auf normierte Tiefpässe.
5. Betrachtung des Impulsverhaltens.
6. Realisierung als RLC- Filter und als aktive Filter.

13.1 Die wichtigsten Resultate der Theorie linearer Netzwerke mit diskreten Elementen

13.1.1 Die Übertragungsfunktion (UTF)



Figur 13.4 Allgemeines lineares Netzwerk, als Zweitor betrieben.

Wird ein allgemeines lineares Netzwerk mit einer endlichen Anzahl diskreter Elemente als Zweitor nach Figur 13.4 betrieben, dann gilt für die Übertragungsfunktion UTF (Transferfunktion $\underline{T}(\underline{s})$)

$$\underline{T}(\underline{s}) = \frac{\underline{U}_2(\underline{s})}{\underline{U}_q(\underline{s})} = \frac{\underline{P}_m(\underline{s})}{\underline{Q}_n(\underline{s})} \quad (13.1)$$

$\underline{T}(\underline{s})$ ist dabei die Laplace-Transformierte der Impulsantwort. Die Laplacevariable $\underline{s} = \sigma + j\omega$ hat daher hier die Dimension einer Frequenz. Der Zähler $\underline{P}_m(\underline{s})$ und der Nenner $\underline{Q}_n(\underline{s})$ sind Polynome vom Grad m bzw. n mit reellen Koeffizienten:

$$\underline{T}(\underline{s}) = \frac{\underline{P}_m(\underline{s})}{\underline{Q}_n(\underline{s})} = \frac{b_m \underline{s}^m + b_{m-1} \underline{s}^{m-1} + \dots + b_1 \underline{s} + b_0}{a_n \underline{s}^n + a_{n-1} \underline{s}^{n-1} + \dots + a_1 \underline{s} + a_0} \quad (13.2)$$

Die Lösungen der Gleichung $\underline{P}_m(\underline{s}) = 0$ sind die Nullstellen \underline{z}_i von $\underline{T}(\underline{s})$

$$\underline{s} = \underline{z}_i = \sigma_{zi} + j\omega_{zi}$$

Die Lösungen der Gleichung $\underline{Q}_n(\underline{s}) = 0$ sind die Pole p_i von $\underline{T}(\underline{s})$

$$\underline{s} = p_i = \sigma_{pi} + j\omega_{pi}$$

Die Übertragungsfunktion kann mit den Nullstellen und Polen dargestellt werden:

$$\underline{T}(\underline{s}) = K \frac{(\underline{s} - \underline{z}_1)(\underline{s} - \underline{z}_2) \dots (\underline{s} - \underline{z}_m)}{(\underline{s} - p_1)(\underline{s} - p_2) \dots (\underline{s} - p_n)} \quad (13.3)$$

Die Nullstellen und Pole bestimmen die Übertragungsfunktion $\underline{T}(\underline{s})$ bis auf einen konstanten Faktor K vollständig. Da die Koeffizienten a_i und b_i der Übertragungsfunktion reell sind, treten nur reelle und paarweise konjugiert-komplexe Pole und Nullstellen auf.

Die Lage der Pole bestimmt die Stabilität der Übertragung. Die Impulsantwort ist von der Form:

$$\begin{aligned} \underline{T}(t) &= 0 \quad \text{für } t < 0 \\ \underline{T}(t) &= \sum_{i=1}^n \left(e^{p_i t} \sum_{v=1}^{r_i} \frac{A_{iv} t^{v-1}}{(v-1)!} \right) \quad \text{für } t \geq 0 \end{aligned} \quad (13.4)$$

r_i : Vielfachheit des i -ten Poles

Für Übertragungsfunktionen mit nur einfachen Polen gilt

$$\underline{T}(t) = A_i \sum_{i=1}^n e^{p_i t}$$

Wenn nur Pole mit negativen Realteilen ($\sigma_{pi} < 0$) auftreten, dann fällt $\underline{T}(t)$ asymptotisch auf null ab: *das System ist stabil*.

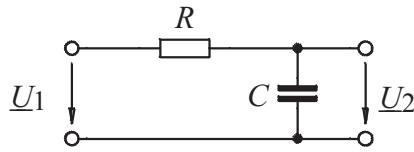
Wenn Pole mit verschwindendem Realteil ($(\sigma_{pi})_{\max} = 0$) auftreten, dann ist das System *marginal stabil*. Die Impulsantwort endet in ein konstantes oder periodisches Signal.

Pole mit positivem Realteil $\sigma_{pi} > 0$ führen zu einer Übertragung von Signalen mit exponentiell anwachsender Enveloppe: *das System ist instabil*.

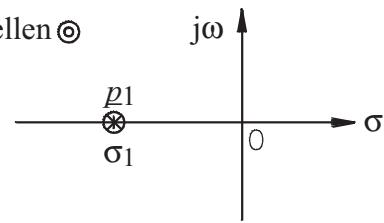
Für die Filtertheorie sind passive Netze mit diskreten Komponenten (R, L und C) von Bedeutung. Diese sind immer stabil und weisen daher nur Pole mit Realteilen $\sigma_{pi} \leq 0$ auf.

Die entsprechenden Polynome $\underline{Q}_n(\underline{s}) = a_n \underline{s}^n + a_{n-1} \underline{s}^{n-1} + \dots + a_1 \underline{s} + a_0$ mit $\sigma_{pi} < 0$ heißen *Hurwitz-Polynome*. Für passive Netze gilt zudem, dass der Grad von $\underline{P}_m(\underline{s}) \leq$ Grad von $\underline{Q}_n(\underline{s})$ ist oder $m \leq n$. Figur 13.5 zeigt einige Pol-Nullstellen-Diagramme mit den zugehörigen Übertragungsfunktionen und einer entsprechenden Schaltung.

Tiefpass 1. Ordnung



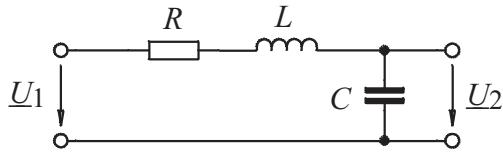
Pole \otimes Nullstellen \odot



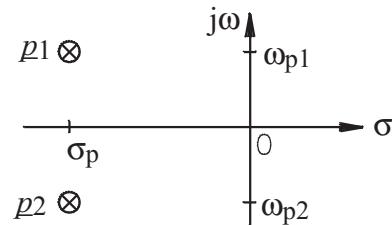
$$T(\underline{s}) = \frac{1}{\underline{s} + \frac{1}{R C}} = \frac{K}{\underline{s} - \sigma_1}$$

$$p_1 = \sigma_1 = -\frac{1}{R C}$$

Tiefpass 2. Ordnung



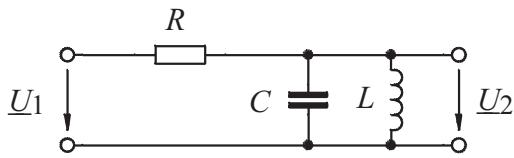
$$T(\underline{s}) = \frac{\frac{1}{L C}}{\underline{s}^2 + \frac{R}{L} \underline{s} + \frac{1}{L C}} = \frac{K \omega_p^2}{\underline{s}^2 - 2\sigma_p \underline{s} + \omega_p^2}$$



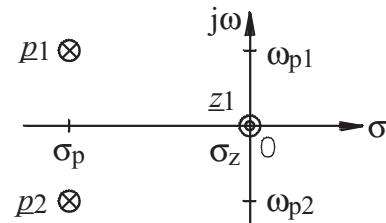
$$p_{1,2} = \sigma_p \pm j\sqrt{\omega_p^2 - \sigma_p^2}$$

$$\sigma_p = -\frac{R}{2L} \quad \omega_p^2 = \frac{1}{LC}$$

Bandpass 2. Ordnung

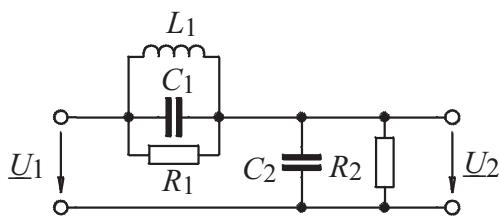


$$T(\underline{s}) = \frac{\frac{\underline{s}}{R C}}{\underline{s}^2 + \frac{\underline{s}}{RC} + \frac{1}{L C}} = \frac{K \omega_p \underline{s}}{\underline{s}^2 - 2\sigma_p \underline{s} + \omega_p^2}$$

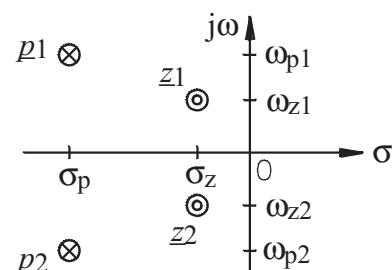


$$p_{1,2} = \sigma_p \pm j\sqrt{\omega_p^2 - \sigma_p^2} \quad z_1 = 0$$

allgemeine UTF 2. Ordnung



$$T(\underline{s}) = \frac{C_1}{C_1+C_2} \cdot \frac{\frac{\underline{s}^2}{R_1 C_1} + \frac{1}{L_1 C_1}}{\frac{\underline{s}^2}{R_1 R_2 (C_1+C_2)} + \frac{1}{L_1 (C_1+C_2)}} = K \cdot \frac{\frac{\underline{s}^2}{R_1 R_2} - 2\sigma_z \underline{s} + \omega_z^2}{\frac{\underline{s}^2}{R_1 R_2} - 2\sigma_p \underline{s} + \omega_p^2}$$



$$p_{1,2} = \sigma_p \pm j\sqrt{\omega_p^2 - \sigma_p^2} \quad z_{1,2} = \sigma_z \pm j\sqrt{\omega_z^2 - \sigma_z^2}$$

Figur 13.5 Beispiele von Pol-Nullstellendiagrammen.

13.1.2 Der Frequenzgang der Übertragungsfunktion

Der Frequenzgang der Übertragungsfunktion ist

$$\left. \underline{T}(\underline{s}) \right|_{\underline{s}=j\omega} = \underline{T}(j\omega) = |\underline{T}(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)} \quad (13.5)$$

$|\underline{T}(j\omega)|$: Amplitudengang

$\varphi(\omega) = \angle \underline{T}(j\omega)$: Phasengang

Die Übertragungsfunktion in logarithmischer Darstellung zur Basis e:

$$\underline{G}(j\omega) = \ln \underline{T}(j\omega) = \ln |\underline{T}(j\omega)| + j \angle \underline{T}(j\omega) = \Gamma(\omega) + j\varphi(\omega) \quad (13.6)$$

mit $\underline{G}(j\omega)$: logarithmische Übertragungsfunktion

$\Gamma(\omega)$: logarithmischer Amplitudengang, in Neper Np

$\varphi(\omega)$: Phasengang, in Radian rad

Darstellung in Dezibel (dB) und Grad:

$$G_{\text{dB}}(j\omega) = 20 \log |\underline{T}(j\omega)| + j \frac{180^\circ}{\pi} \angle \underline{T}(j\omega) = \Gamma_{\text{dB}}(\omega) + j\varphi_{\text{Grad}}(\omega) \quad (13.7)$$

Umrechnung:

$$1 \text{ Np} = \frac{20}{\ln 10} = 8.686 \text{ dB}; \quad 1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} = 57.296^\circ$$

Im Bodediagramm werden $\Gamma(\omega)$ und $\varphi(\omega)$ in Funktion von $\log \omega$ dargestellt.

Für die Betrachtung von Signalen im Zeitbereich ist die Gruppenlaufzeit τ_g , die in Abschnitt 11.4.1 eingeführt wurde, von Bedeutung:

$$\tau_g = - \frac{d\varphi}{d\omega} \quad (13.8)$$

Der Frequenzgang wird in sehr einfacher und durchschaubarer Weise von den Polen und Nullstellen der Übertragungsfunktion UTF bestimmt.

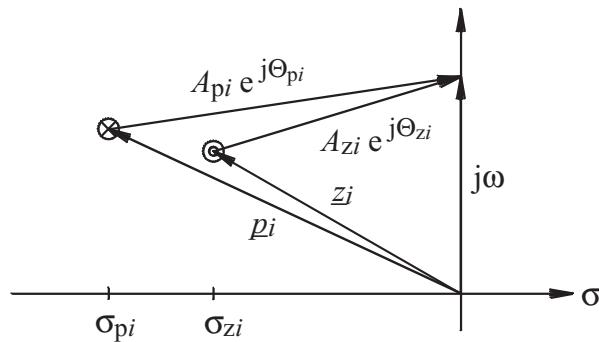
Die UTF in Funktion der Nullstellen \underline{z}_i und Pole \underline{p}_i :

$$\underline{T}(\underline{s}) = K \frac{(\underline{s} - \underline{z}_1)(\underline{s} - \underline{z}_2) \dots (\underline{s} - \underline{z}_m)}{(\underline{s} - \underline{p}_1)(\underline{s} - \underline{p}_2) \dots (\underline{s} - \underline{p}_n)} \quad (13.9)$$

Die Nullstellen \underline{z}_i und Pole \underline{p}_i sind reel oder paarweise konjugiert-komplex. Der Frequenzgang von $\underline{T}(\underline{s}) = \underline{T}(j\omega)$ ist:

$$\underline{T}(j\omega) = K \frac{(j\omega - \underline{z}_1)(j\omega - \underline{z}_2) \dots (j\omega - \underline{z}_m)}{(j\omega - \underline{p}_1)(j\omega - \underline{p}_2) \dots (j\omega - \underline{p}_n)} = |\underline{T}(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)} \quad (13.10)$$

Der Amplitudengang $|\underline{T}(j\omega)|$ ist bis auf den Faktor K aus den Abständen der Pole und Nullstellen vom Frequenzpunkt $j\omega$ auf der vertikalen Achse bestimmbar, wie in Figur 13.6 dargestellt.



Figur 13.6 Bestimmung des Amplitudengangs und des Phasengangs von $\underline{T}(j\omega)$ aus den Abständen der Nullstellen \underline{z}_i (bzw. Pole \underline{p}_i) von Ort $\underline{s} = j\omega$.

$$|\underline{T}(j\omega)| = K \frac{\prod_{i=1}^m A_{zi}}{\prod_{i=1}^n A_{pi}} \quad (13.11)$$

Der Phasengang $\varphi(\omega)$ setzt sich zusammen aus den Phasen Θ_{zi} und Θ_{pi} der Differenzen $(j\omega - \underline{z}_i)$ und $(j\omega - \underline{p}_i)$.

Θ_{zi} nimmt mit der Frequenz

- für Nullstellen in der linken Halbebene monoton zu;
- für Nullstellen in der rechten Halbebene monoton ab.

Θ_{pi} nimmt für zunehmende Frequenz ω monoton zu.

Der Phasengang $\varphi(\omega)$ ist

$$\varphi(\omega) = \sum_{i=1}^m \Theta_{zi} - \sum_{i=1}^n \Theta_{pi} \quad (13.12)$$

Bei allgemeinen RLC-Zweitoren, die in der Übertragungsfunktion als Nennerpolynom nach Abschnitt 13.1.1 ein Hurwitzpolynom aufweisen, gilt für den Phasengang $\varphi(\omega)$ beim Durchlaufen der Frequenz von $\omega = -\infty \dots +\infty$:

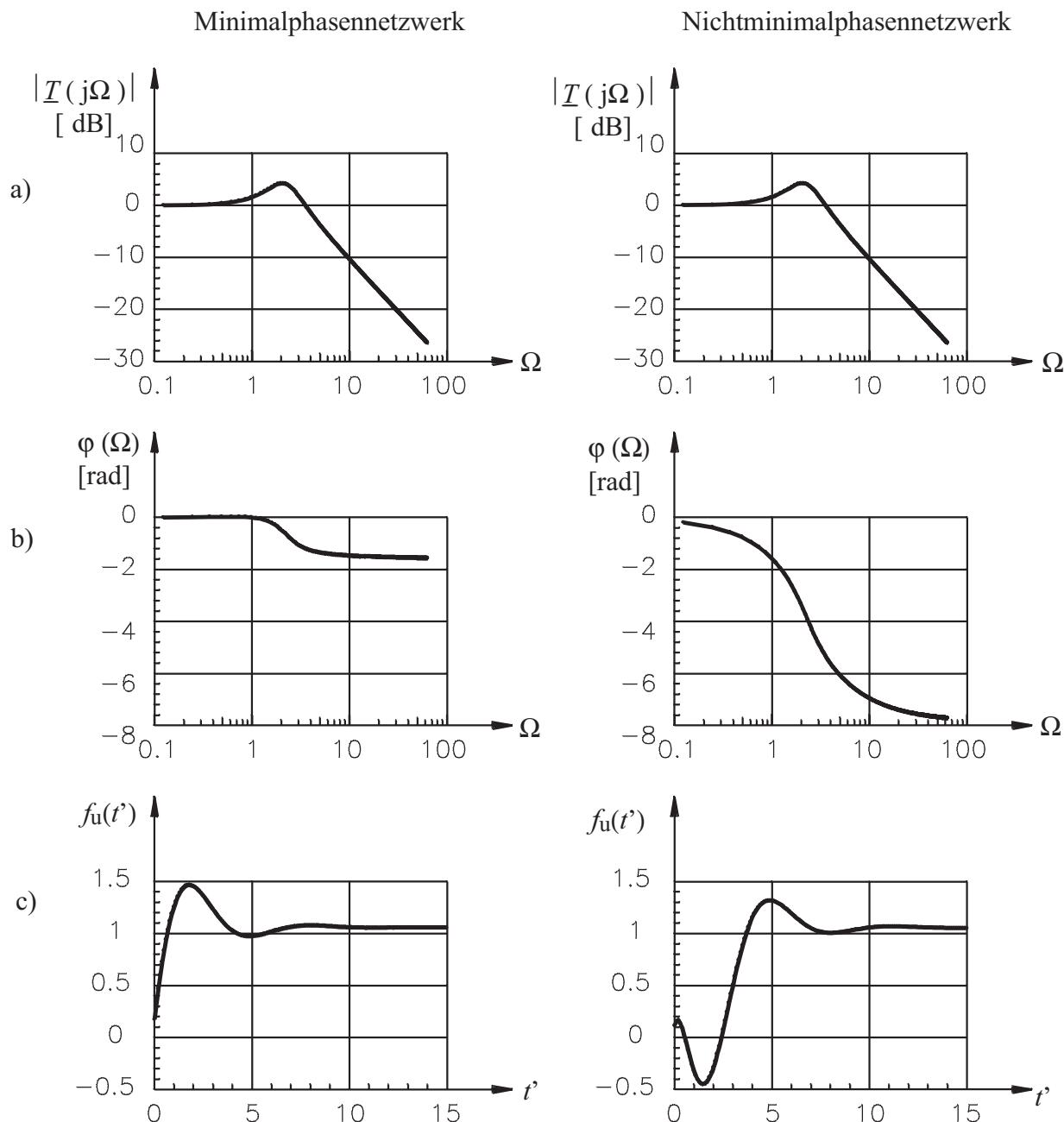
- Pole in der linken Halbebene bewirken eine Phasendrehung $\varphi(\omega)$ von $-\pi$ pro Pol.
- Nullstellen in der linken Halbebene bewirken eine Phasendrehung von $+\pi$ pro Nullstelle.

Wenn nur Nullstellen in der linken Halbebene auftreten, dann ist die totale Phasendrehung $\varphi(\omega = -\infty \dots +\infty)$ für eine bestimmte Anzahl von m Nullstellen und n Pole ($m \leq n$) minimal. Ein solches Netzwerk nennen wir ein *Minimalphasenzweitor*.

Das *Minimalphasenzweitor* hat alle Nullstellen in der linken Halbebene.

Das Zählerpolynom $P_m(\underline{s})$ ist, wie das Nennerpolynom $Q_n(\underline{s})$, ein *Hurwitzpolynom*.

Figur 13.7 zeigt als Beispiel den Vergleich des Frequenzgangs einer minimalphasigen und einer nichtminimalphasigen Übertragungsfunktion mit identischem Amplitudengang der Übertragungsfunktionen



Figur 13.7 Vergleich des Frequenzgangs einer minimalphasigen und einer nichtminimalphasigen Übertragungsfunktion. Bei identischem Amplitudengang a) unterscheiden sich die Phasengänge b) und damit auch die Schrittantworten c).

$$T(\underline{S}) = 3 \frac{(\underline{S} + (2 + j)) (\underline{S} + (2 - j))}{(\underline{S} + 3)(\underline{S} + 1 + j2)(\underline{S} + 1 - j2)} \quad (\text{minimalphasig})$$

$$T(\underline{S}) = 3 \frac{(\underline{S} - (2 + j)) (\underline{S} - (2 - j))}{(\underline{S} + 3)(\underline{S} + 1 + j2)(\underline{S} + 1 - j2)} \quad (\text{nichtminimalphasig})$$

Die normierte Laplacevariable \underline{S} und die normierte Frequenz Ω werden wie folgt definiert:

$$\underline{S} = \frac{\underline{s}}{\omega_r} \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_r}$$

Dabei ist ω_r eine frei wählbare Normierungskreisfrequenz.

Für Minimalphasenzweitor gelt das Theorem von Bode, das einen Zusammenhang zwischen Phase und Amplitude der Übertragungsfunktion $T(j\omega)$ herstellt:

$$\varphi(\omega) = \frac{2\omega}{\pi} \int_0^\infty \frac{\ln |T(j\omega')| - \ln |T(j\omega)|}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' \quad (13.13)$$

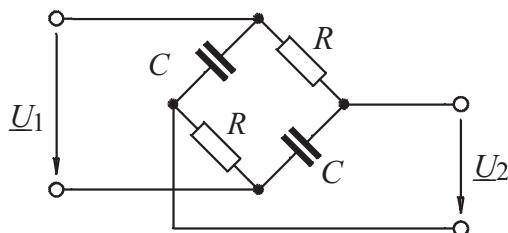
Allpässe, d.h. Zweitore mit dem Amplitudengang $|T(j\omega)| = 1$, haben folgende Übertragungsfunktion

$$T(\underline{s}) = \frac{Q(-\underline{s})}{Q(\underline{s})} \quad (13.14)$$

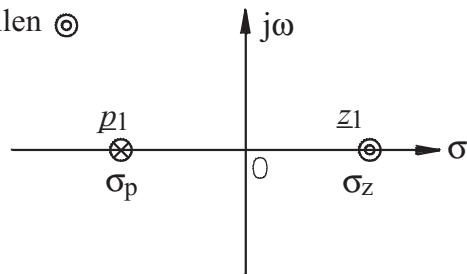
mit $Q(\underline{s})$: Hurwitzpolynom

In Figur 13.8 sind die Nullstellen-Pol-Diagramme und die Schaltungen von zwei einfachen Allpässen dargestellt.

Allpass 1. Ordnung

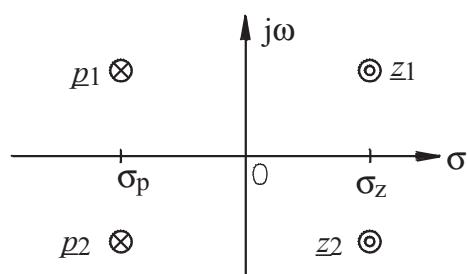
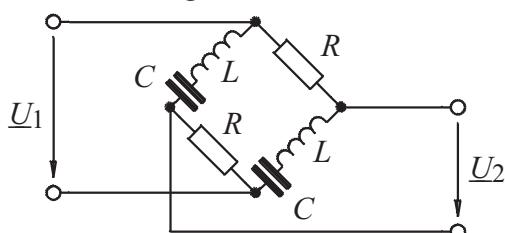


Pole \otimes Nullstellen \odot



$$T(\underline{s}) = \frac{-\underline{s} + \frac{1}{RC}}{\underline{s} + \frac{1}{RC}} = \frac{-\underline{s} - \sigma_1}{\underline{s} - \sigma_1}$$

Allpass 2. Ordnung

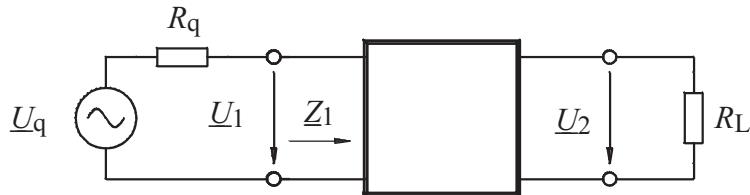


$$T(\underline{s}) = \frac{\underline{s}^2 - \frac{R}{L}\underline{s} + \frac{1}{LC}}{\underline{s}^2 + \frac{R}{L}\underline{s} + \frac{1}{LC}} = \frac{\underline{s}^2 + 2\sigma_p\underline{s} + \omega_p^2}{\underline{s}^2 - 2\sigma_p\underline{s} + \omega_p^2}$$

Figur 13.8 Nullstellen-Pol-Diagramme und Schaltungen von zwei einfachen Allpässen.

13.1.2 Die Betriebsübertragungsfunktion

In Abschnitt 13.1.1 wurde die Übertragungsfunktion als Spannungsübertragungsfunktion einer idealen Spannungsquelle am Netzwerkeingang zu einem leerlaufenden, d.h. unbelasteten Ausgang definiert. Soll das Netzwerk eine Filterfunktion ausüben, dann ist diese in Figur 13.4 dargestellte Betriebsart höchst unzweckmäßig, da die ideale Quelle mit Quellenwiderstand nicht realisierbar ist und keine Leistung auf den Ausgang übertragen werden kann. Wesentlich realistischer ist der Betrieb mit Quellen und Lasten mit endlichen, möglichst reellen Impedanzen, wie er in Figur 13.9 dargestellt ist.



Figur 13.9 Betrieb eines Zweitors (z.B. Filters) mit Quellen- und Lastwiderständen R_q und R_L

Die Frage stellt sich, wie für diese Beschaltung die Übertragungsfunktion zweckmäßig definiert werden soll. Um eine für den Einsatz von Filtern geeignete Definition der Übertragungsfunktion zu finden, gehen wir von der Wirkleistungsübertragung aus, die wie folgt definiert ist:

$$\frac{P_2}{P_{a1}} = \frac{\text{Leistung in der Last } R_L}{\text{verfügbare Quellenleistung}} \quad (13.15)$$

P_2 , Leistung in der Last R_L :

$$P_2 = \frac{|\underline{U}_2|^2}{R_L} \quad (13.16)$$

Die verfügbare Quellenleistung P_{a1} ist definiert als die Leistung, die die Quelle mit dem Innenwiderstand R_q leistungsangepasst an eine Last R_q abgibt:

$$P_{a1} = \frac{|\underline{U}_q|^2}{4 R_q} \quad (13.17)$$

Die Wirkleistungsübertragung ist nach (13.15), (13.16) und (13.17)

$$\frac{P_2}{P_{a1}} = \left| \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_q} \right|^2 \frac{4 R_q}{R_L} = k \left| \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_q} \right|^2 \quad (13.18)$$

$$\text{mit } k = \frac{4 R_q}{R_L}$$

Die Betriebsübertragungsfunktion $T_B(S)$ und die Betriebsdämpfungsfunktion $H_B(S)$ werden wie folgt definiert:

$$T_B(S) = \sqrt{k} \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_q} \quad (13.19)$$

$$\underline{H}_B(\underline{S}) = \frac{1}{\underline{T}_B(\underline{S})} = \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{\underline{U}_q}{\underline{U}_2} \quad (13.20)$$

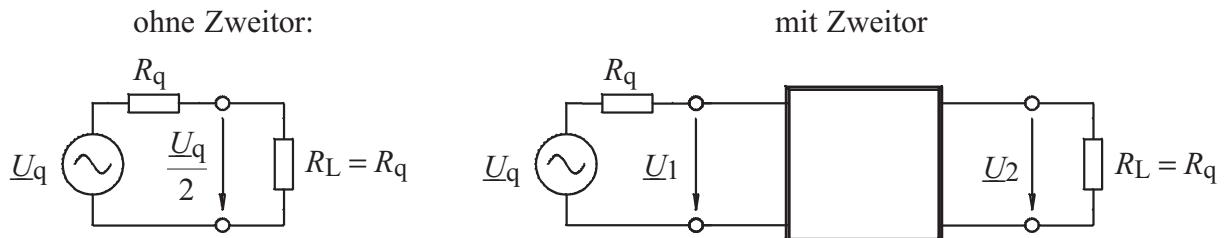
Die Betriebsübertragungsfunktion $\underline{T}_B(\underline{S})$ und die Spannungsübertragungsfunktion $\underline{T}(\underline{S})$ unterscheiden sich nur durch einen konstanten Faktor \sqrt{k} :

$$\underline{T}_B(\underline{S}) = \frac{1}{\underline{H}_B(\underline{S})} = 2 \sqrt{\frac{R_q}{R_L}} \cdot \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_q} = \sqrt{k} \cdot \underline{T}(\underline{S}) \quad (13.21)$$

$$\text{mit } k = \frac{4 R_q}{R_L}$$

In der Praxis gilt häufig: $R_q = R_L$

Diese Annahme wird auch in der folgenden Theorie der Filtersynthese getroffen. $\underline{T}_B(\underline{S})$ entspricht dann dem Verhältnis der Spannungsübertragungen mit und ohne eingefügtes Zweitor, wie es Figur 13.10 illustriert.



Figur 13.10 Die Betriebsübertragungsfunktion $\underline{T}_B(\underline{S})$ für $R_q = R_L$ entspricht dem Verhältnis der Spannungsübertragungen mit und ohne eingefügtem Zweitor

Die Betriebsübertragungsfunktion ist dann

$$\underline{T}_B(\underline{S}) = 2 \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_q} \quad (13.22)$$

Das Betriebsdämpfungsmass Γ_B ist allgemein definiert als

$$e^{\Gamma_B} = e^{A_B + jB_B} = \underline{H}_B(\underline{S}) \quad (13.23)$$

$$A_B(\underline{S}) = \ln \left[\frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \left| \frac{\underline{U}_q}{\underline{U}_2} \right| \right] \quad (13.24)$$

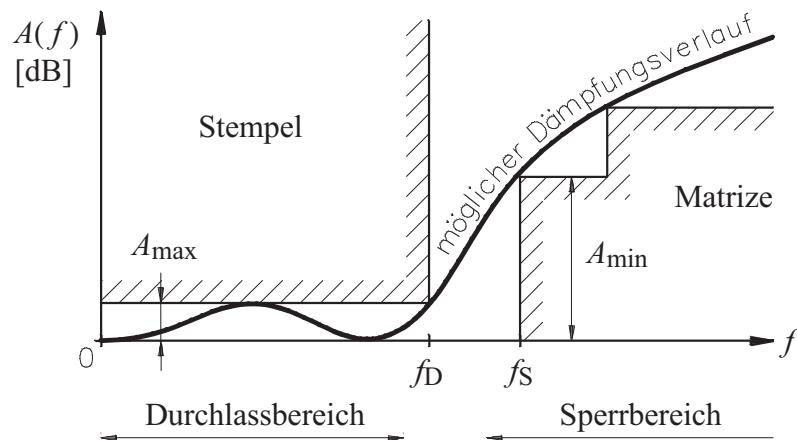
$$B_B(\underline{S}) = \angle \underline{U}_q - \angle \underline{U}_2 = \varphi_q - \varphi_2 \quad (13.25)$$

14. Die Filtersynthese im Frequenzbereich: normierte Tiefpässe

Die Aufgabe der Filtersynthese ist es, zu einem spezifizierten Amplitudengang eine geeignete Übertragungsfunktion und ein zugehöriges Netzwerk zu finden. Für ein Filter mit diskreten Elementen R , L und C sind dabei zwei Teilprobleme zu lösen:

1. Der spezifizierte Amplitudengang ist mit einer geeigneten gebrochen-rationalen Funktion, die die Eigenschaften der Übertragungsfunktion eines RLC-Netzwerkes aufweist, zu approximieren.
2. Die gewählte Übertragungsfunktion ist mit einer Zweitorschaltung zu realisieren (Synthese).

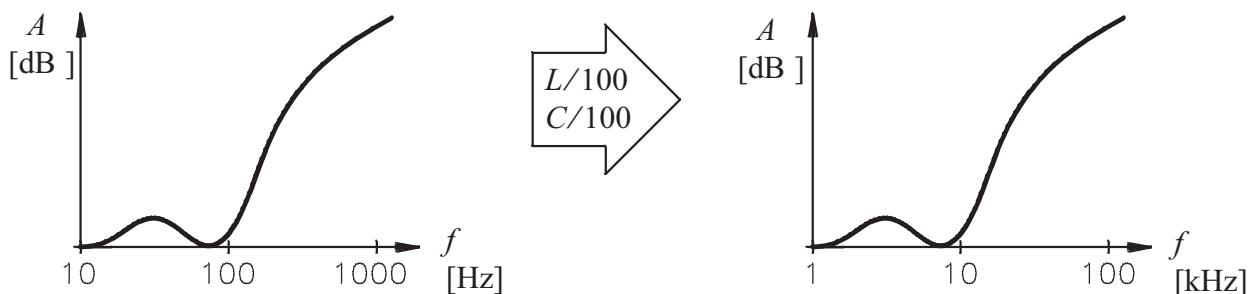
Die Spezifikation der Übertragungseigenschaften erfolgt mit einem Toleranzschema für die Dämpfungsfunktion. Figur 14.1 zeigt als Beispiel das Toleranzschema für die Spezifikation eines Tiefpasses.



Figur 14.1 Filterspezifikation: Toleranzschema der Dämpfungsfunktion $A(f)$.

- Dabei sind $A(f)$: Dämpfungsfunktion
 A_{\max} : maximale Durchlassdämpfung
 A_{\min} : minimale Sperrdämpfung
 f_D : Durchlassgrenzfrequenz
 f_S : Sperrgrenzfrequenz

Es wird später gezeigt, dass die anderen Filtertypen (Hochpass HP, Bandpass BP und Bandsperre BS) über eine Frequenztransformation in einen Tiefpass transformiert werden können. Um, im Moment nur für den Tiefpass, zu einer möglichst allgemeinen Beschreibung der Dämpfungsfunktion zu kommen, wird eine Frequenznormierung vorgenommen. Die Skalierung einer Dämpfungsfunktion im Frequenzbereich ist in Figur 14.2 dargestellt:



Figur 14.2 Skalierung der Elementwerte L und C führt zu einer Umskalierung der Frequenzachse.

Werden in einem fertig entworfenen RLC- Filter alle Werte von Induktivitäten und Kapazitäten durch einen konstanten Faktor $k > 1$ dividiert, dann wird die Dämpfungsfunktion $A(f)$ auf der Frequenzachse um den Faktor k gestreckt. Bei einer gegebenen Dämpfungsfunktion $A(\omega)$ sind verschiedene Normierungen denkbar: die Frequenz könnte auf die Durchlassgrenzkreisfrequenz ω_D , die Sperrgrenzkreisfrequenz ω_S oder die 3dB-Grenzkreisfrequenz ω_{3dB} normiert werden. In den folgenden Betrachtungen über verschiedene Filterapproximationen wird die Frequenz, je nach Zweckmässigkeit, auf ω_D oder ω_{3dB} normiert. Für den Filterentwurf mit den Filtertabellen, die im Anhang aufgeführt sind, wird konsequent eine Normierung auf die Frequenz ω_{3dB} vorgenommen.

Beim Entwurf von Filtern werden die normierte Laplacevariable \underline{S} und die normierte Frequenz Ω verwendet. Am Schluss werden für die Entnormierung \underline{S} durch s/ω_r und Ω durch ω/ω_r ersetzt.

14.1 Die Tiefpassapproximation nach Butterworth

Das Quadrat der Übertragungsfunktion (UTF) ist

$$|\underline{T}(j\Omega)|^2 = \frac{|\underline{P}(j\Omega)|^2}{|\underline{Q}(j\Omega)|^2} = \frac{\underline{P}(j\Omega) \underline{P}^*(j\Omega)}{\underline{Q}(j\Omega) \underline{Q}^*(j\Omega)} = \frac{\underline{P}(j\Omega)}{\underline{Q}(j\Omega)} \cdot \frac{\underline{P}(-j\Omega)}{\underline{Q}(-j\Omega)} = \frac{A(\Omega^2)}{B(\Omega^2)} \quad (14.1)$$

A und B sind Polynome in Ω^2 . Somit ist $|\underline{T}(j\Omega)|^2$ eine gerade Funktion von Ω .

Für einen Tiefpass machen wir für (14.1) einen einfachen Ansatz:

$$|\underline{T}(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + K(\Omega^2)} \quad (14.2)$$

$K(\Omega^2)$ ist ein Polynom in Ω^2

Diese UTF weist für endliche Frequenzen keine Nullstelle auf. Das Polynom $K(\Omega^2)$ muss für einen Tiefpass folgenden qualitativen Verlauf haben:

- im Sperrbereich (SB) für $\Omega > 1$ muss $K(\Omega^2) >> 1$ sein;
- im Durchlassbereich (DB) für $0 \leq \Omega < 1$ muss $0 \leq K(\Omega^2) << 1$ sein.

Eine sehr einfache Funktion für $K(\Omega^2)$, die Butterworth-Approximation, ist:

Butterworth-Approximation:

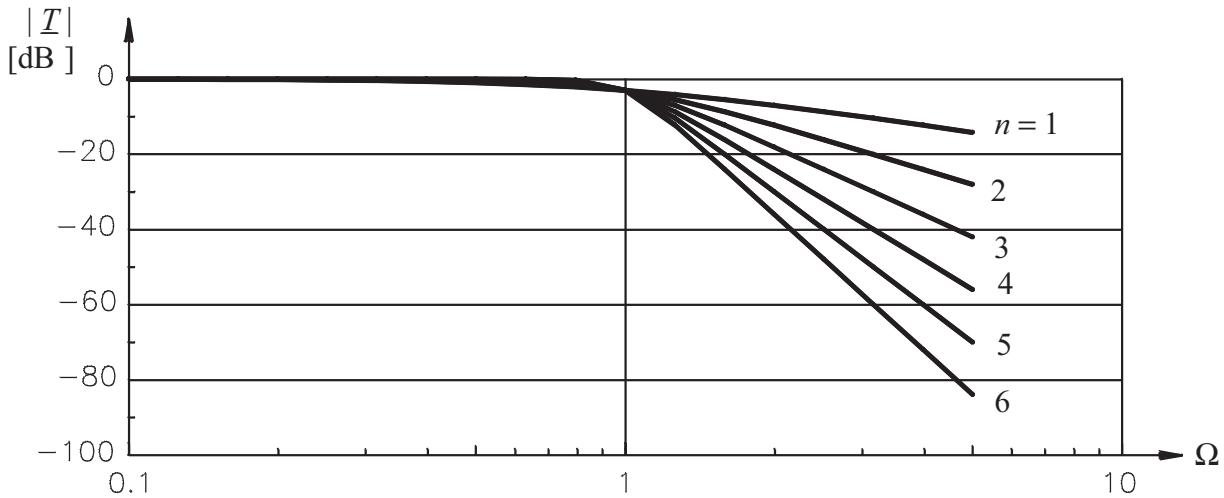
$$K(\Omega^2) = (\Omega^2)^n \quad (14.3)$$

$$|\underline{T}(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \Omega^{2n}}} \quad (14.4)$$

Die Übertragungsfunktion nach der Butterworth-Approximation nimmt mit zunehmender Frequenz Ω monoton ab. Für jeden Filtergrad n ist:

- $|\underline{T}| = 1$ für $\Omega = 0$
- $|\underline{T}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (3 dB Abfall) für $\Omega = 1$
- $\frac{d \underline{T}(\Omega^2)}{d \Omega^2} = 0$ für $\Omega = 0$

Die Butterworth-Approximation zeigt einen maximal flachen Amplitudengang (keine Welligkeit). In Figur 14.3 ist $|\underline{T}(j\Omega)|$ für die Filtergrade $n = 1 \dots 6$ dargestellt.



Figur 14.3 Tiefpass-Approximation nach Butterworth für die Filtergrade $n = 1 \dots 6$.

Für hohe Frequenzen $\Omega \gg 1$ ist $|\underline{T}(j\Omega)| \approx \frac{1}{\Omega^n}$, d.h. $|\underline{T}(j\Omega)|$ fällt mit einem Abfall von $n \cdot 20\text{dB/Dekade} \approx n \cdot 6\text{dB/Oktave}$

Mit der Betragsfunktion $|\underline{T}(j\Omega)|$ nach (14.4) haben wir wohl eine für einen Tiefpass geeignete Funktion gefunden; die *komplexe Übertragungsfunktion* $\underline{T}(j\Omega)$ ist damit aber noch nicht definiert. Im nächsten Schritt wird diese bestimmt:

Nach (14.1) und (14.4) mit $\Omega^2 = -S^2$ gilt

$$|\underline{T}(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (-S^2)^n} = \frac{1}{Q(S)Q(-S)} \quad (14.5)$$

$$\text{oder } Q(S)Q(-S) = 1 + (-S^2)^n \quad (14.6)$$

Nach Abschnitt 13.1.1 muss $Q(S)$ ein Hurwitzpolynom sein.

$$\text{Herleitung für } n=1 : Q(S)Q(-S) = 1 - S^2 = (1 - S)(1 + S)$$

$$\text{daraus } Q(S) = 1 + S \quad (\text{Hurwitzpolynom})$$

Herleitung für $n=2$: $\underline{Q}(\underline{S})\underline{Q}(-\underline{S}) = 1 + \underline{S}^4$

$$\text{Ansatz: } \underline{Q}(\underline{S}) = \underline{S}^2 + A_1\underline{S} + A_0$$

$$\text{daraus } \underline{Q}(\underline{S})\underline{Q}(-\underline{S}) = \underline{S}^4 + (2A_0 - A_1^2)\underline{S}^2 + A_0^2$$

Der Koeffizientenvergleich liefert: $A_0 = 1$, $A_1 = \sqrt{2}$

$$\underline{Q}(\underline{S}) = \underline{S}^2 + \sqrt{2}\underline{S} + 1 \quad \text{ist wiederum ein Hurwitzpolynom.}$$

14. 1.1 Bestimmung der Pollage von $\underline{T}(\underline{S})$ der Butterworth-Approximation:

Wird für \underline{S} ein Pol \underline{P}_i eingesetzt, dann gilt:

$$\left. \underline{Q}(\underline{S})\underline{Q}(-\underline{S}) \right|_{\underline{S}=\underline{P}_i} = 1 + (-\underline{S}^2)^n = 0 \quad (14.7)$$

$$\underline{S}=\underline{P}_i \quad \underline{S}=\underline{P}_i$$

$$\text{oder } (-1)^n \underline{P}_i^{2n} = -1 \quad (14.8)$$

Die Beträge von \underline{P}_i sind: $|\underline{P}_i| = 1$ und die Pole liegen somit auf dem Einheitskreis.

Die Phase von \underline{P}_i lässt sich wie folgt aus (14.8) bestimmen:

$$\underline{P}_i^{2n} = (-1)^{n-1} = e^{j(2i+n-1)\pi} \quad \text{für } i = 1 \dots 2n$$

daraus

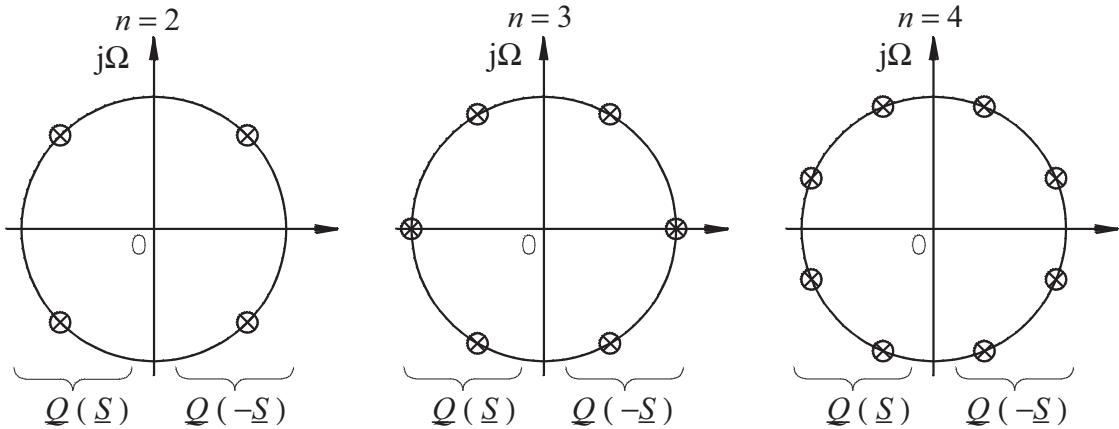
$$\underline{P}_i = e^{j\left(\frac{2i+n-1}{2n}\pi\right)} \quad \text{für } i = 1 \dots 2n \quad (14.9)$$

Alle Pole von $|\underline{T}(j\Omega)|^2$ der Butterworth-Approximation liegen symmetrisch zur $j\Omega$ -Achse auf dem Einheitskreis mit Zwischenwinkeln von π/n .

Figur 14.4 zeigt die Pollagen der Butterworth-Approximation für die Ordnungen $n = 2, 3$ und 4 . Das Nennerpolynom $\underline{Q}(\underline{S})$, ein Hurwitz-Polynom, hat nur Pole in der linken Halbebene. Diese Pole sind nach Real- und Imaginärteil: $\underline{P}_i = \sigma'_i + j\Omega_i$

$$\sigma'_i = \cos \frac{2i+n-1}{2n} \pi \quad \text{für } i = 1, 2 \dots n \quad (14.10)$$

$$\Omega_i = \sin \frac{2i+n-1}{2n} \pi \quad \text{für } i = 1, 2 \dots n \quad (14.11)$$



Figur 14.4 Pollagen der Butterworthapproximation für die Ordnungen $n = 2, 3, 4$.

Die Koeffizienten und die Faktorzerlegung des Polynoms $\underline{Q}(\underline{S})$ sind im Anhang A tabelliert:

	Koeffizienten	Faktorzerlegung
$n = 1$	$\underline{Q}(\underline{S}) = 1 + \underline{S}$	$= 1 + \underline{S}$
$n = 2$	$\underline{Q}(\underline{S}) = 1 + 1.414 \underline{S} + \underline{S}^2$	$= 1 + 1.414 \underline{S} + \underline{S}^2$
$n = 3$	$\underline{Q}(\underline{S}) = 1 + 2 \underline{S} + 2 \underline{S}^2 + \underline{S}^3$	$= (1 + \underline{S})(1 + \underline{S} + \underline{S}^2)$
$n = 4$	$\underline{Q}(\underline{S}) = 1 + 2.61 \underline{S} + 3.41 \underline{S}^2 + 2.61 \underline{S}^3 + \underline{S}^4$	$= (1 + 0.765 \underline{S} + \underline{S}^2)(1 + \underline{S} + 1.848 \underline{S}^2)$

Mit der Übertragungsfunktion (14.4): $|T(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \Omega^{2n}}}$ ist das Zählerpolynom $P(\underline{S}) = 1$ und $T(j\Omega)$ hat keine Nullstelle für endliche Frequenzen.

Filter mit $P(\underline{S}) = \text{konst.}$ werden *Allpolfilter* genannt.

14. 1.2 Bestimmung des Filtergrades n der Butterworth-Approximation

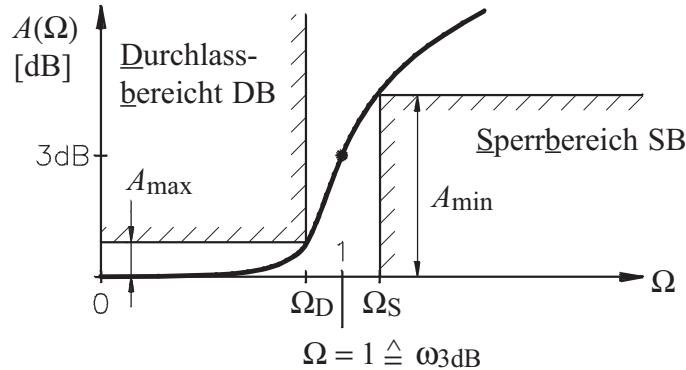
Bei einem vorgegebenen Toleranzschema der Tiefpassdämpfung nach Figur 14.5 soll mit dem Dämpfungsverlauf $A(\Omega)$ nach Butterworth der Filtergrad n bestimmt werden.

$$A(\Omega) = 20 \log \frac{1}{|T(j\Omega)|} = 10 \log (1 + \Omega^{2n}) \quad (14.12)$$

Bei den Eckfrequenzen Ω_D und Ω_S lauten die Bedingungen:

$$A(\Omega_D) = 10 \log (1 + \Omega_D^{2n}) = A_{\max}$$

$$A(\Omega_S) = 10 \log (1 + \Omega_S^{2n}) = A_{\min}$$



Figur 14.5 Toleranzschema der Dämpfungscharakteristik eines Tiefpasses

Nach Ω_D und Ω_S aufgelöst:

$$\Omega_D^{2n} = 10^{0.1A_{\max}} - 1 \quad \Omega_S^{2n} = 10^{0.1A_{\min}} - 1$$

Die Division der beiden obigen Gleichungen liefert: $\left(\frac{\Omega_S}{\Omega_D}\right)^{2n} = \frac{10^{0.1A_{\min}} - 1}{10^{0.1A_{\max}} - 1}$

Nach n aufgelöst finden wir den

$$\log\left(\frac{10^{0.1A_{\min}} - 1}{10^{0.1A_{\max}} - 1}\right) \quad (14.13)$$

$$\text{Filtergrad } n \text{ des Butterworth-Filters: } n \geq \frac{2 \log \frac{\Omega_S}{\Omega_D}}{2 \log \frac{10^{0.1A_{\min}} - 1}{10^{0.1A_{\max}} - 1}}$$

mit A_{\max} und A_{\min} in dB

Für eine Filterrealisierung muss der nach (14.13) bestimmte Filtergrad n auf den nächsten ganzzahligen Wert aufgerundet werden.

Die Filtertabellen im Anhang A sind auf die 3dB-Grenzfrequenz f_{3dB} normiert. Wenn der Filtergrad nach (14.13) festgelegt ist, lässt sich f_{3dB} , bei vorgegebener Grenzfrequenz des Durchlassbereiches f_D , wie folgt bestimmen:

$$f_{3dB} = \sqrt[2n]{\frac{1}{10^{0.1A_{\max}} - 1}} f_D \quad (14.14)$$

Beispiel:

Filterspezifikation: $A_{\max} = 0.1 \text{ dB}$ $A_{\min} = 30 \text{ dB}$

$f_D = 2 \text{ kHz}$ $f_S = 3 \text{ kHz}$

Bestimmung des Filtergrades mit (14.13):

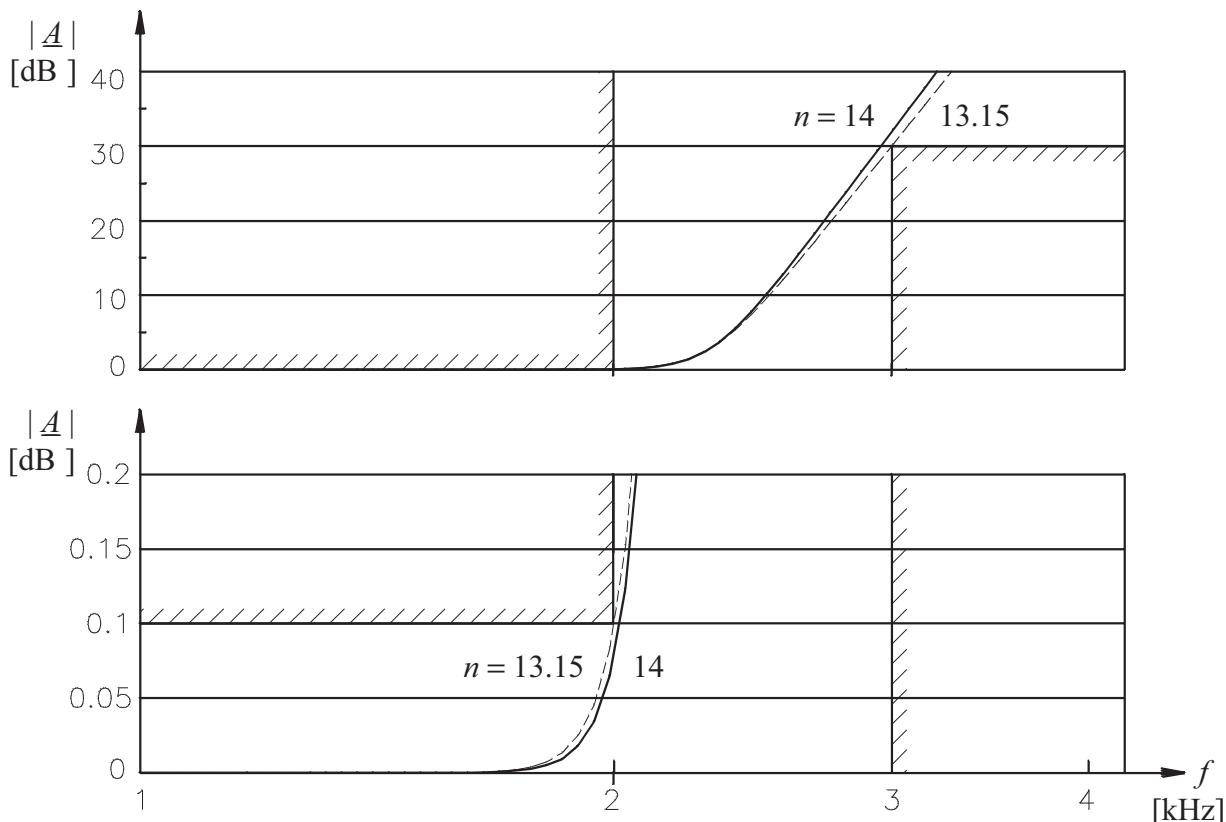
$$\frac{\Omega_S}{\Omega_D} = 1.5 \rightarrow n \geq \frac{\log \left(\frac{10^{0.1 \cdot 30} - 1}{10^{0.1 \cdot 0.1} - 1} \right)}{2 \log 1.5} = 13.15$$

aufgerundet: $n = 14$

Bestimmung der 3 dB-Grenzfrequenz mit (14.14) für $n = 13.15$:

$$f_{3dB} = f_D \left(\frac{1}{10^{0.01} - 1} \right)^{1/(2 \cdot 13.15)} = 1.1537 f_D$$

Figur 14.6 zeigt die Dämpfungscharakteristik für den ungerundeten und den gerundeten Wert von n , wobei f_{3dB} mit dem ungerundeten Wert nach (14.14) bestimmt worden ist.



Figur 14.6 Dämpfungscharakteristik für den ungerundeten ($n=13.15$) und den gerundeten ($n = 14$) Wert von n .

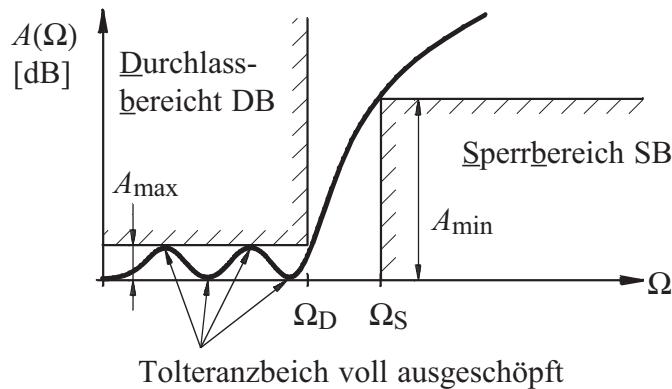
Der Grund für die Verwendung des ungerundeten Wertes $n = 13.15$ für die Bestimmung der 3 dB-Grenzfrequenz f_{3dB} ist folgender:

Ein (nicht realisierbares) Filter mit einem nach (14.13) bestimmten, nicht gerundeten Filtergrad würde die Filterspezifikation exakt erfüllen und würde, wenn f_{3dB} nach (14.14) festgelegt würde, bei f_D und f_S genau die Dämpfung A_{max} bzw. A_{min} aufweisen. Wird nun der Filtergrad auf einen ganzzahligen Wert aufgerundet, dann wird bei f_D der Wert A_{max} unterschritten und bei f_S der Wert A_{min} überschritten, sodass bei einer Filterrealisierung ein kleiner Fehler der Dämpfungscharakteristik noch zulässig wäre. Würde dagegen die Frequenz f_{3dB} mit dem gerundeten Wert des Filtergrades n mit (14.13) festgelegt, dann wäre bei f_D keine Toleranz,

dagegen bei f_S eine relativ grosse Toleranz der Dämpfung zulässig. Um bei beiden Eckfrequenzen für allfällige Herstellungstoleranzen etwas Spielraum zu haben, ist es also vorteilhaft, die Frequenz f_{3dB} mit dem *ungerundeten Wert von n* zu bestimmen.

14.2 Die Tiefpassapproximation nach Tschebyscheff

Die im vorhergehenden Abschnitt vorgestellte Tiefpass-Approximation nach Butterworth weist im Durchlassbereich einen optimal flachen Dämpfungsverlauf auf. Als Alternative zu diesem Verlauf könnte man sich einen Dämpfungsverlauf vorstellen, der das vorgegebene Toleranzband im Durchlassbereich besser ausnützt und mehrere Male den Wert A_{max} annimmt, wie dies in Figur 14.7 dargestellt ist.



Figur 14.7 Optimale Ausnutzung der Dämpfungstoleranz im Durchlassgebiet.

Dieses Verhalten der Dämpfungscharakteristik zeigt die Tschebyscheff-Approximation (englisch Chebyshev: 1821 - 1894). Zur Herleitung der Übertragungsfunktion starten wir mit dem gleichen *Allpolansatz* wie für die Butterworth-Approximation nach (14.2):

$$|T(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + K(\Omega^2)} \quad (14.15)$$

Für $K(\Omega^2)$ wählen wir ein Polynom:

$$K(\Omega^2) = e^2 C_n^2(\Omega) \quad (14.16)$$

mit e : Konstante, die ein Mass für die Welligkeit (Ripple) im Durchlassbereich darstellt,

$C_n(\Omega)$: Tschebyscheff - Polynom erster Art, der Ordnung n .

Die Tschebyscheff - Polynome erster Art $C_n(\Omega)$ für $n = 0 \dots 4$ sind:

$$C_0(\Omega) = 1$$

$$C_1(\Omega) = \Omega$$

$$C_2(\Omega) = 2\Omega^2 - 1$$

$$C_3(\Omega) = 4\Omega^3 - 3\Omega$$

$$C_4(\Omega) = 8\Omega^4 - 8\Omega^2 + 1$$

Die Tschebyscheff - Polynome $C_n(\Omega)$ sind mit der folgenden Rekursionsbeziehung definiert, die ohne Herleitung gegeben wird:

$$C_n(\Omega) = 2\Omega C_{n-1}(\Omega) - C_{n-2}(\Omega) \quad (14.17)$$

Für $|\Omega| < 1$ ist

$$C_n(\Omega) = \cos(n \arccos \Omega) \quad (14.18)$$

Für $|\Omega| > 1$ geht $C_n(\Omega)$ über in

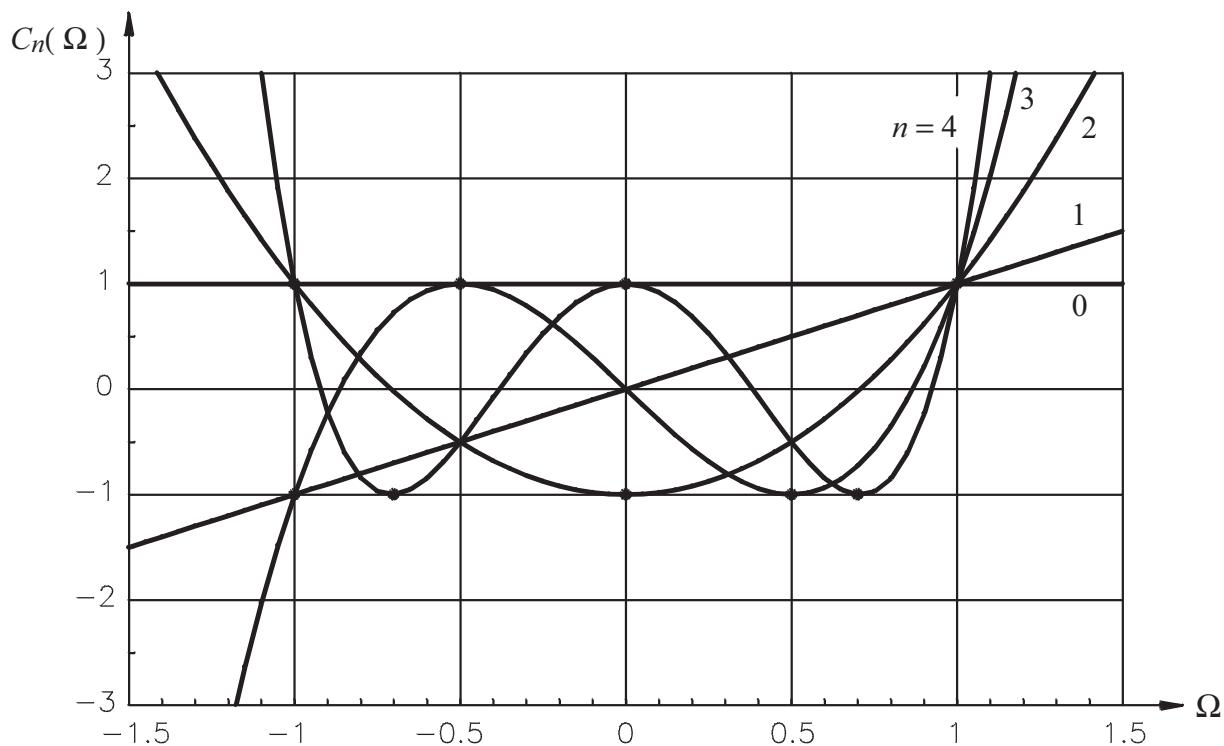
$$C_n(\Omega) = \cosh(n \operatorname{arcosh} \Omega) \quad (14.19)$$

Wie aus (14.18) und (14.19) hervorgeht, gilt

$$|C_n(\Omega)| \leq 1 \quad \text{für } |\Omega| \leq 1$$

$$|C_n(\Omega)| \geq 1 \quad \text{für } |\Omega| \geq 1$$

Die Tschebyscheff - Polynome erster Art $C_n(\Omega)$ für $n=0 \dots 4$ sind in Figur 14.8 dargestellt.



Figur 14.8 Tschebyscheff - Polynome $C_0(\Omega) \dots C_4(\Omega)$

Die Tschebyscheff - Polynome erster Art $C_n(\Omega)$ für $|\Omega| \leq 1$ sind auch unter dem Namen Lissajous-Figuren bekannt. (Lissajous, 1822 - 1880).

Ausgehend von (14.18) können die Tschebyscheff - Polynome hergeleitet werden, wie das folgende Beispiel für $n=2$ zeigt.

Nach (14.18) ist $C_2(\Omega) = \cos(2 \arccos(\Omega))$

Mit dem Additionstheorem $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1$ ist

$$C_2(x) = 2 \cos^2(\arccos(x)) - 1 = 2x^2 - 1$$

Mit dem Ansatz (14.16) wird die Welligkeit von ± 1 der Tschebyscheff-Polynome für $|\Omega| \leq 1$ in eine Welligkeit der Übertragungsfunktion $\frac{1}{\sqrt{1+e^2}} \leq |\underline{T}(j\Omega)| \leq 1$ transformiert.

$$|\underline{T}(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + e^2 C_n^2(\Omega)}$$

$|\underline{T}(j\Omega)|$ weist im Durchlassbereich Extrema gleicher Höhe auf und wird daher auch als Aequi-Rippel-Filter bezeichnet. Im Durchlassbereich ist

$$\Omega = 0: \quad |\underline{T}(0)| = \frac{1}{\sqrt{1+e^2}} \quad \text{für gerade } n$$

$$|\underline{T}(0)| = 1 \quad \text{für ungerade } n$$

$$\Omega = 1: \quad |\underline{T}(1)| = \frac{1}{\sqrt{1+e^2}} \quad \text{für alle } n$$

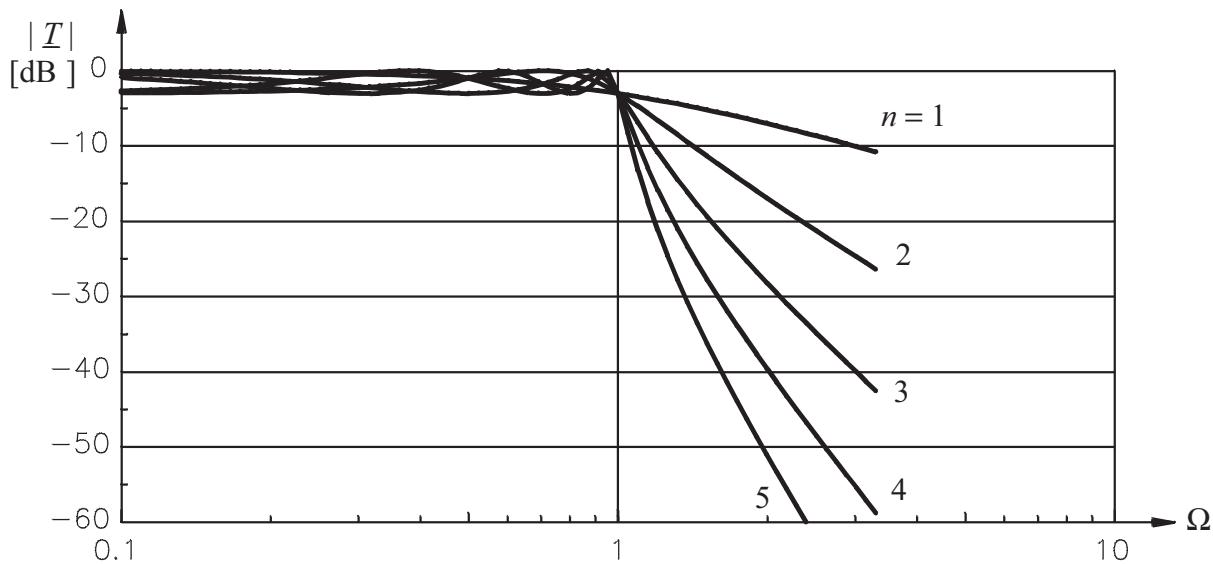
$$\Omega = 0 \dots 1 \quad A_{\max} = -20 \log |\underline{T}(1)| \Rightarrow e = \sqrt{10^{0.1A_{\max}} - 1} \quad (14.20)$$

Im Sperrbereich ist für

$$\Omega \gg 1 \quad |\underline{T}(j\Omega)| \approx \frac{1}{e C_n(\Omega)} \approx \frac{1}{e 2^{n-1} \Omega^n} \quad (14.21)$$

Der asymptotische Abfall von $|\underline{T}(j\Omega)|$ ist $n \cdot 20$ dB/Dekade.

Figur 14.9 zeigt den Amplitudengang der normierten Tschebyscheff-Tiefpass-UTF der Ordnungen $n = 1 \dots 5$, die hier auf die Durchlassgrenzfrequenz f_D normiert sind.



Figur 14.9 Amplitudengang der normierten Tschebyscheff-Tiefpass-UTF der Ordnungen $n = 1 \dots 5$

Wie im Falle des Butterworth-Filters in Abschnitt 14.1 muss mit der Kenntnis des gewünschten Amplitudengangs der Übertragungsfunktion $|T(j\Omega)|$, eine geeignete Funktion $T(j\Omega)$ gefunden werden, deren Nennerpolynom ein Hurwitz-Polynom ist. $|T(j\Omega)|^2$ muss also auf folgende Form gebracht werden:

$$|T(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + e^2 C_n^2(-j\underline{\Omega})} = \frac{1}{Q(\underline{\Omega}) Q(-\underline{\Omega})} \quad (14.22)$$

oder $Q(\underline{\Omega}) Q(-\underline{\Omega}) = 1 + e^2 C_n^2(-j\underline{\Omega})$

Dabei soll $Q(\underline{\Omega})$ ein Hurwitzpolynom sein.

Dieser Schritt soll an Hand eines einfachen Beispiels, eines Tschebyscheff-TP-Filters zweiter Ordnung illustriert werden:

$$|T(\underline{\Omega})|^2 = \frac{1}{1 + e^2(-2\underline{\Omega}^2 - 1)^2} = \frac{K^2}{\underline{\Omega}^4 + \underline{\Omega}^2 + \frac{1+e^2}{4e^2}} = \frac{K^2}{Q(\underline{\Omega}) Q(-\underline{\Omega})}$$

$$Q(\underline{\Omega}) Q(-\underline{\Omega}) = \underline{\Omega}^4 + \underline{\Omega}^2 + \frac{1+e^2}{4e^2} = (\underline{\Omega}^2 + A_1\underline{\Omega} + B_1)(\underline{\Omega}^2 - A_1\underline{\Omega} + B_1)$$

Der Koeffizientenvergleich liefert:

$$B_1 = \frac{\sqrt{1+e^2}}{2e} \quad A_1 = \sqrt{2B_1 - 1}$$

Die maximale Durchlassdämpfung A_{\max} bestimmt den Welligkeitsfaktor e nach (14.20):

$$e = \sqrt{10^{0.1A_{\max}} - 1} \quad (A_{\max} \text{ in dB})$$

A_{\max}	0.1	0.5	1	2	3 dB
e	0.153	0.349	0.509	0.765	1

Für unser Beispiel eines Tschebyscheff-TP-Filters 2. Ordnung ist mit $A_{\max} = 0.1$ dB ($e = 0.153$)

$$A_1 = 2.373; \quad B_1 = 3.314$$

Die 3dB-Grenzfrequenz f_{3dB} eines Tschebyscheff - Filters kann mit der Beziehung:

$$f_{3dB} = \cosh\left(\frac{1}{n} \operatorname{arcosh}\left(\frac{1}{e}\right)\right) \cdot f_D \quad (14.23)$$

aus den Größen A_{\max} und f_D bestimmt werden.

Die Nennerpolynome des Tschebyscheff-Tiefpasses sind bestimmt durch

- den Filtergrad n

- die maximale Durchlassdämpfung A_{\max} .

Die Nennerpolynome sind für verschiedene Parameter n und A_{\max} berechnet, tabelliert und im Anhang B zu finden. Wie für den Butterworth-TP ist die Normierungsfrequenz $f_r = f_{3dB}$.

14. 2.1 Bestimmung der Pollage von $T(S)$ der Tschebyscheff-Approximation:

In Abschnitt 14.1 wurde gezeigt, dass alle Pole der Butterworth-Approximation auf dem Einheitskreis der komplexen Ebene liegen. Ohne Herleitungen werden hier *die Eigenschaften der Pole der Tschebyscheff-Approximation* dargestellt:

- Sämtliche Pole liegen auf einer Ellipse in der komplexen Ebene, wobei die grössere Hauptachse auf der imaginären Achse liegt.
- Angenähert können die Pole der Tschebyscheff-Approximation nach Figur 14.10 mit einem Proportionalitätsfaktor für den Realteil aus den Polen der Butterworth-Approximation bestimmt werden:

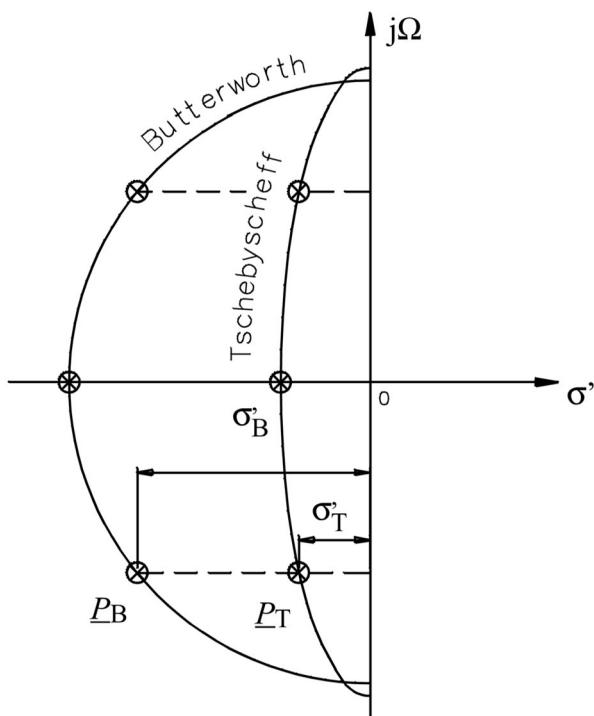
$$\text{Pole der Butterworth-Approximation: } \underline{P}_B = \sigma'_B + j\Omega_B$$

$$\text{Pole der Tschebyscheff-Approximation: } \underline{P}_T = \sigma'_T + j\Omega_T$$

es gilt näherungsweise:

$$\Omega_T \approx \Omega_B \quad (14.24)$$

$$\epsilon = \sigma'_T / \sigma'_B \approx \tanh \left[\frac{1}{n} \operatorname{arsinh} \left(\frac{1}{e} \right) \right] \quad (14.25)$$



Figur 14.10 Näherungsweise Bestimmung der Pole der Tschebyscheff-Approximation aus den Polen der Butterworth-Approximation gleicher Ordnung mit einem Proportionalitätsfaktor für den Realteil.

Filtergüte:

Bei einer UTF 2. Ordnung mit dem Nennerpolynom $Q(\underline{S}) = \underline{S}^2 - 2\sigma'_p \underline{S} + \Omega_p^2$ mit den

Polen $\underline{P}_{1,2} = \sigma'_p \pm j\sqrt{\Omega_p^2 - \sigma'^2_p}$ ist die Güte Q definiert als $Q = \left| \frac{\Omega_p}{2|\sigma'_p|} \right|$

Für den bekannten RLC -Kreis ist die Güte ausgedrückt mit den Werten der Elemente

$$Q = \omega_0 \frac{L}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

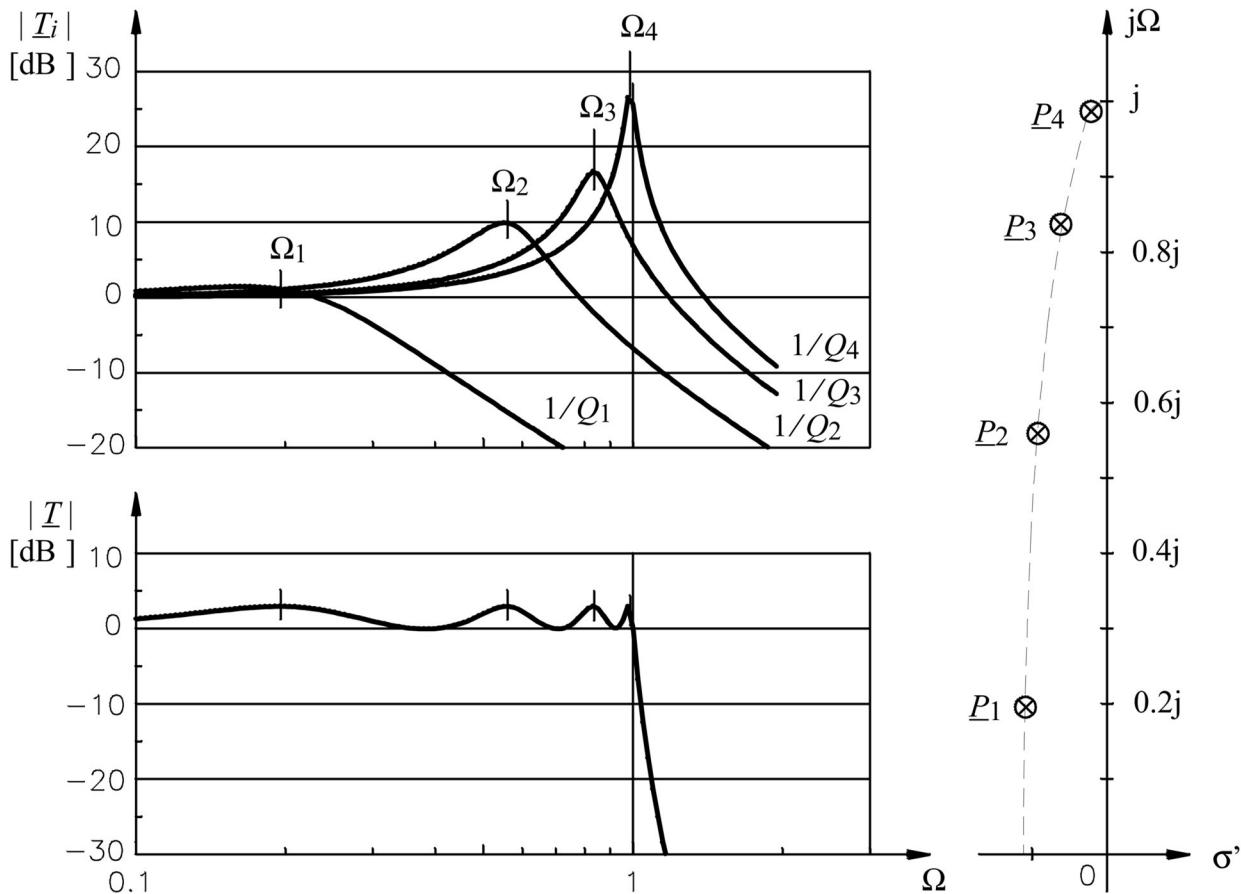
Für alle Filtertypen (Butterworth, Tschebyscheff , Bessel usw.) wird die Filtergüte Q_F

definiert als

$$Q_F = \left(\frac{|\Omega_{pi}|}{2\sigma_{pi}} \right)_{\max}$$

Ein Filter mit hoher Filtergüte verlangt bei einer Realisierung mit passiven Komponenten sehr verlustarme Elemente. Aus den Beziehungen (14.24) und (14.25) zwischen den Polen von Tschebyscheff- und Butterworth-Polen ist ersichtlich, dass die Filtergüte der Tschebyscheff-Filter immer höher ist als die Güte von Butterworth-Filters gleicher Ordnung. Bei Tschebyscheff-Filters mit hohem Rippelfaktor sind die Polfrequenzen und die Filtergüte näherungsweise aus dem Amplitudengang bestimmbare, wie dies das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel: Tschebyscheff-Tiefpass 8. Ordnung mit 3dB Rippel ($e = 1$)



Figur 14.11 Pollagen und Amplitudengang der quadratischen Faktoren $1/Q_1 \dots 1/Q_4$ und Amplitudengang der gesamten Übertragungsfunktion.

Nennerpolynom:

$$\begin{aligned} Q(\underline{S}) = Q_1 \cdot Q_2 \cdot Q_3 \cdot Q_4 &= (\underline{S}^2 + 0.217 \underline{S} + 0.050) \cdot (\underline{S}^2 + 0.184 \underline{S} + 0.321) \cdot \\ &\cdot (\underline{S}^2 + 0.123 \underline{S} + 0.704) \cdot (\underline{S}^2 + 0.043 \underline{S} + 0.974) \end{aligned}$$

Pole: $\underline{P}_1 = \sigma_1' + j\Omega_1 = -0.1085 \pm j 0.1955$
 $\underline{P}_2 = \sigma_2' + j\Omega_2 = -0.0920 \pm j 0.5590$
 $\underline{P}_3 = \sigma_3' + j\Omega_3 = -0.0615 \pm j 0.8368$
 $\underline{P}_4 = \sigma_4' + j\Omega_4 = -0.0215 \pm j 0.9867$

Der Faktor Q_4 bestimmt die Filtergüte:

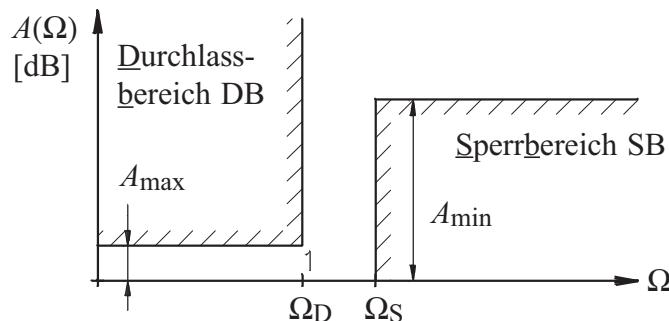
$$Q_F = \left(\frac{\Omega_{pi}}{2\sigma_{pi}} \right)_{\max} = \frac{\sqrt{\sigma_4^2 + \Omega_4^2}}{2\sigma_4} = \frac{\sqrt{0.0215^2 + 0.9867^2}}{2 \cdot 0.0215} = 22.95$$

Figur 14.11 zeigt die Pollagen, den Amplitudengang der quadratischen Faktoren $1/Q_1 \dots 1/Q_4$ sowie den Amplitudengang der gesamten Übertragungsfunktion.

Offensichtlich können die Polfrequenzen ziemlich genau und die Filtergüte näherungsweise aus dem Amplitudengang der gesamten Übertragungsfunktion bestimmt werden.

14. 2.2 Bestimmung des Filtergrades n der Tschebyscheff-Approximation

Bei gegebenem Toleranzschema (Figur 14.12) soll der niedrigst mögliche Filtergrad n eines Tschebyscheff-Filters gefunden werden das den Anforderungen genügt.



Figur 14.12 Toleranzschema eines Tiefpasses: Bestimmung des Filtergrades.

Die Dämpfungsfunktion des Tschebyscheff-Tiefpassfilters ist

$$A(\Omega) = 20 \log \frac{1}{|T(j\Omega)|} = 10 \log \left(1 + e^2 C_n^2(\Omega) \right) \quad (14.26)$$

Bei der Frequenz $\Omega = \Omega_D = 1$ ist

$$A(\Omega_D) = A_{\max} = 10 \log \left(1 + e^2 C_n^2(1) \right) = 10 \log \left(1 + e^2 \right)$$

Für $|\Omega| > 1$ gilt (14.19): $C_n(\Omega) = \cosh(n \operatorname{arcosh} \Omega)$

An der Stelle $\Omega = \Omega_S$ ist

$$A(\Omega_S) = A_{\min} = 10 \log \left[1 + e^2 (\cosh(n \operatorname{arcosh} \Omega_S))^2 \right] \quad (14.27)$$

Mit $e = \sqrt{10^{0.1A_{\max}} - 1}$ wird (14.27)

$$A_{\min} = 10 \log \left[1 + (10^{0.1A_{\max}} - 1) (\cosh(n \operatorname{arcosh} \Omega_S))^2 \right]$$

oder $10^{0.1A_{\min}} - 1 = (10^{0.1A_{\max}} - 1) (\cosh(n \operatorname{arcosh} \Omega_S))^2$

Aufgelöst nach dem Filtergrad n :

$$n \geq \frac{\operatorname{arcosh} \sqrt{\frac{10^{0.1A_{\min}} - 1}{10^{0.1A_{\max}} - 1}}}{\operatorname{arcosh}(\Omega_S/\Omega_D)} \quad (14.28)$$

(zur Erinnerung $\operatorname{arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$)

Beispiel: $A_{\max} = 0.1 \text{ dB}$ $A_{\min} = 30 \text{ dB}$

$$f_D = 2 \text{ kHz} \quad f_S = 3 \text{ kHz}$$

daraus $\Omega_S/\Omega_D = 1.5 \quad n \geq 6.26$

Ein Tschebyscheff-Filter 7. Ordnung erfüllt die Spezifikation.

Der Filtergrad n ist eine monoton zunehmende Funktion von

- $1/e$ (Rippelfaktor)
- Ω_D/Ω_S (Durchlassgrenzfrequenz/Sperrgrenzfrequenz)
- A_{\min} (Sperrdämpfung)

14.3 Die Tiefpassapproximation nach Bessel

In den beiden Filterapproximationen nach Butterworth und Tschebyscheff ist das Ziel, eine geeignete Approximation für einen gegebenen Amplitudengang zu finden. Dabei werden keine Ansprüche an den Phasengang gestellt. Diese Filter können somit Phasengänge mit grossen Laufzeitunterschieden und ausgeprägter Dispersion aufweisen. Für Anwendungen mit hohen Ansprüchen an die Signaldispersion sind diese Filter nicht optimal. In diesen Fällen muss eine Spezifikation bezüglich der Gruppenlaufzeit in den Filterentwurf eingehen.

Das dispersionsfreie Filter weist eine frequenzunabhängige Gruppenlaufzeit auf und hat folgende Übertragungsfunktion:

$$T(S) = e^{-ST_0} \quad (14.29)$$

Die Gruppenlaufzeit τ_g ist

$$\tau_g = -\frac{d\phi}{d\omega} = T_0 = \text{konst.}$$

In der normierten Darstellung kann $T_0 = 1$ gesetzt werden. Mit einer Approximation von (14.29) sollte es also möglich sein, ein dispersionsoptimiertes Filter zu realisieren:

$$T(\underline{S}) = e^{-\underline{S}} = \frac{1}{e^{\underline{S}}} \approx \frac{1}{Q(\underline{S})}$$

$e^{\underline{S}}$ sollte also mit einem Hurwitz-Polynom approximiert werden. Ein naheliegender Versuch ist, diese Funktion mit abgebrochenen Taylor-Reihen zu nähern. Wenn diese tatsächlich Hurwitz-Polynome sind, dann wäre das Problem gelöst. Tatsächlich sind die abgebrochenen Taylor-Reihen nur für gewisse Längen Hurwitz-Polynome. Es gibt aber eine andere Klasse von Approximationen, die immer *Hurwitz-Polynome* sind: die *Bessel-Polynome* $B_n(\underline{S})$. Die Bessel-Polynome werden mit der folgenden Rekursionsbeziehung bestimmt:

$$\text{Bessel-Polynome: } B_0(\underline{S}) = 1$$

$$B_1(\underline{S}) = \underline{S} + 1$$

$$\text{Rekursionsformel: } B_n(\underline{S}) = (2n - 1) B_{n-1} + \underline{S}^2 B_{n-2} \quad (14.30)$$

Als Beispiel betrachten wir ein Besselpolynom 3. Ordnung:

$$B_3(\underline{S}) = \underline{S}^3 + 6\underline{S}^2 + 15\underline{S} + 15$$

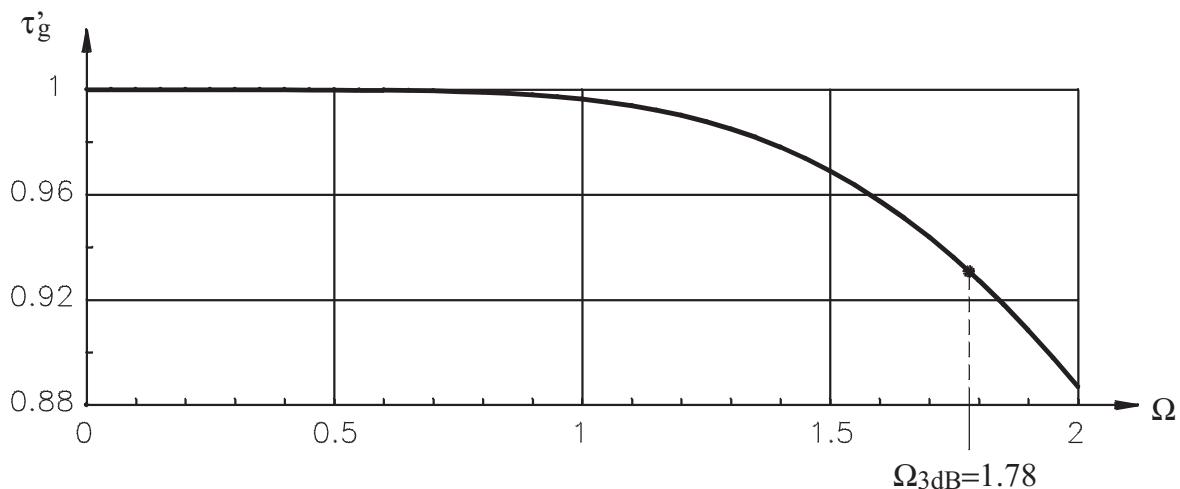
Der zugehörige Phasengang $\varphi(\Omega)$ ist

$$\varphi(\Omega) = -\arctan \frac{15\Omega - \Omega^3}{15 - 6\Omega^2}$$

und die Gruppenlaufzeit $\tau_g'(\Omega)$

$$\tau_g'(\Omega) = -\frac{d\varphi}{d\Omega} = \frac{6\Omega^4 + 45\Omega^2 + 225}{\Omega^6 + 6\Omega^4 + 45\Omega^2 + 225}$$

Figur 14.13 zeigt den Frequenzgang $\tau_g'(\Omega)$. Die 3dB-Grenzfrequenz Ω_{3dB} liegt dabei bei $\Omega_{3dB} = 1.78$. Die Laufzeit variiert im Durchlassbereich $0 < \Omega < \Omega_{3dB}$ um nur 7%.



Figur 14.13 Normierte Gruppenlaufzeit τ_g' des Besselfilters 3. Ordnung.

Die nach (14.30) definierten Bessel-Polynome sind so normiert, dass die zugehörige Gruppenlaufzeit $\tau'_g(\Omega = 0) = 1$ ist bei $\Omega = 0$. Soll zudem $|T(\Omega = 0)| = 1$ sein, dann hat das Besselfilter die folgende normierte Darstellung:

$$T(S) = \frac{15}{S^3 + 6S^2 + 15S + 15}$$

Diese Übertragungsfunktion ist nun auf die Laufzeit τ'_g und nicht wie die in den vorhergehenden Abschnitten behandelten Filter auf die 3 dB-Grenzfrequenz normiert. Um die Tiefpasscharakteristik des Besselfilters mit den Butterworth- und Tschebyscheff-Approximationen vergleichen zu können und das Besselfilter nach einer Filterspezifikation des Amplitudengangs entwerfen zu können, sollte die Normierung auf die 3dB-Grenzfrequenz vorgenommen werden:

$$A(\Omega = 1) = 3\text{dB}$$

Die nachstehende Tabelle zeigt die Koeffizienten der Übertragungsfunktion $T(S)$ mit der Normierung auf $\Omega_{3\text{dB}}$, die auch im Anhang C zu finden sind:

$$T(S) = \frac{K}{S^n + A_{n-1}S^{n-1} + \dots + A_1S + A_0}$$

n	$A_0 = K$	A_1	A_2	A_3
2	1.624	2.208		
3	2.748	4.881	3.423	
4	5.287	11.16	10.10	4.737

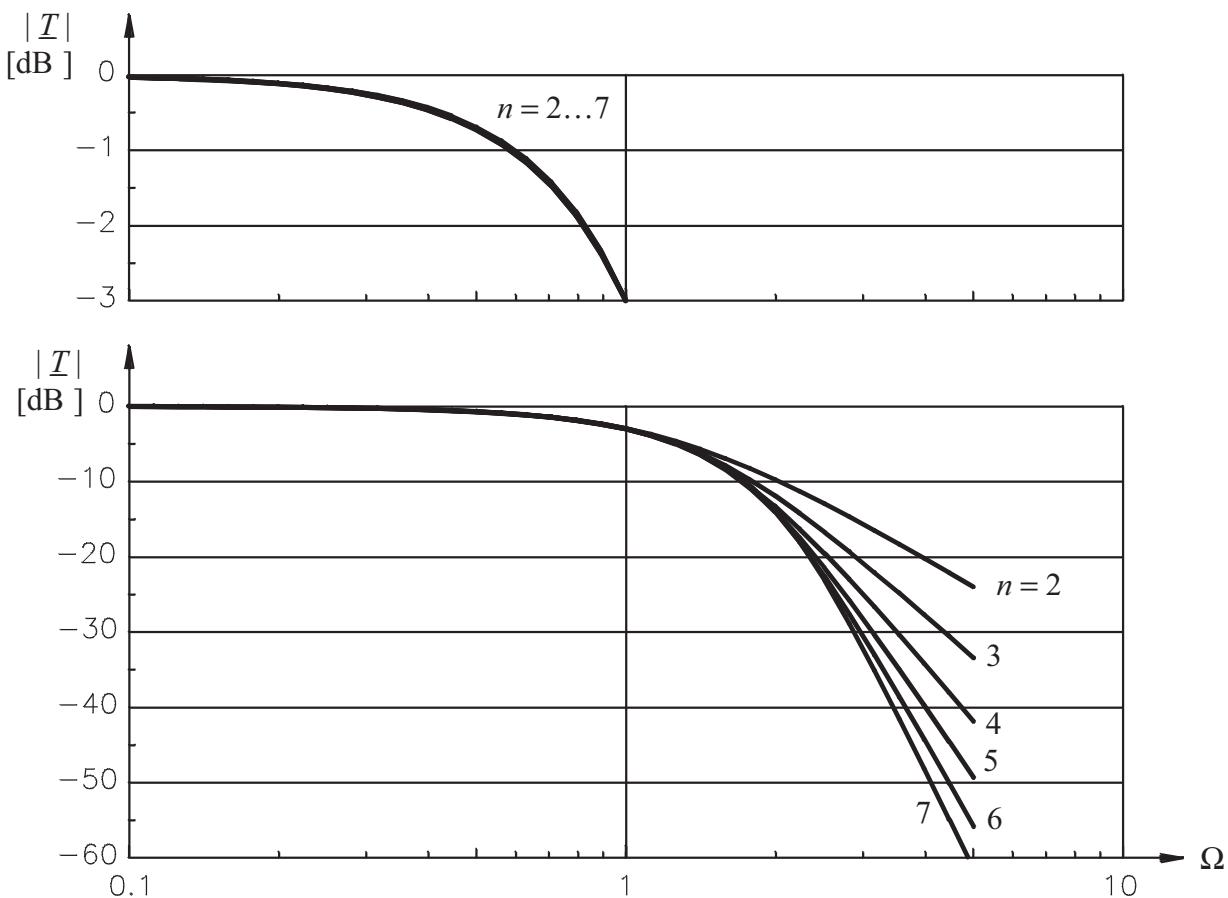
Mit dieser Normierung ist die Gruppenlaufzeit $\tau_g(\Omega = 0)$ abhängig vom Filtergrad n . Sie ist für $n = 2 \dots 7$:

$$\begin{array}{ccccccc} n & = & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \tau_g & = & 1.359 & 1.753 & 2.111 & 2.424 & 2.699 & 2.947 \end{array}$$

Die echte, entnormierte Gruppenlaufzeit τ_g ist:

$$\tau_g = \frac{\tau'_g}{\omega_{3\text{dB}}}$$

Figur 14.14 zeigt die auf $\omega_{3\text{dB}}$ normierten Amplitudengänge der Bessel-Tiefpässe der Ordnungen $n = 2 \dots 7$. Die Amplitudengänge zeigen sehr kleine Unterschiede im Bereich $0 < \Omega < 1$.



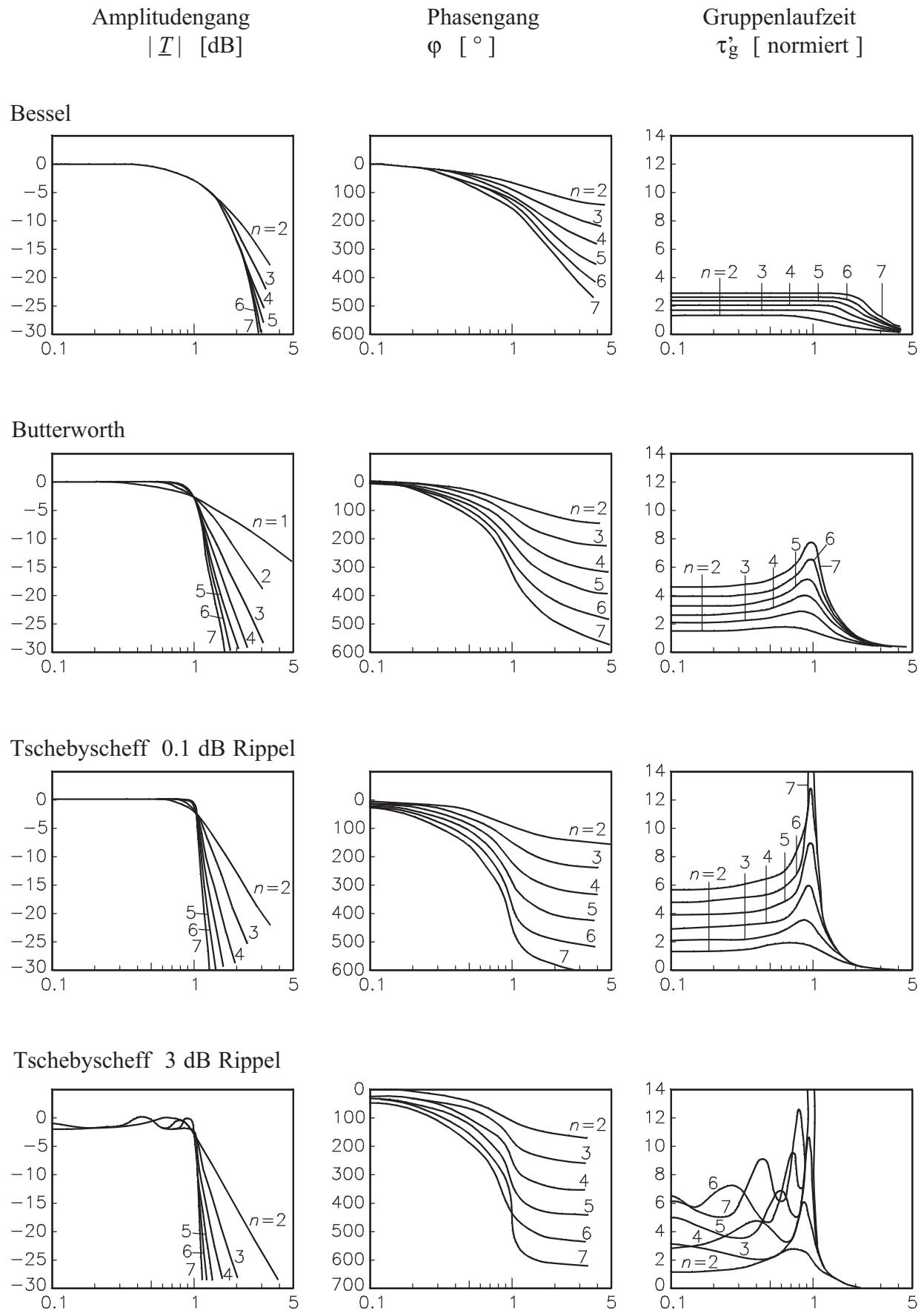
Figur 14.14 Normierter Amplitudengang der Bessel-Tiefpässe für $n = 2 \dots 7$

14. 3.1 Vergleich der Pollagen von $T(S)$ der Bessel-, Butterworth- und Tschebyscheff-Approximationen

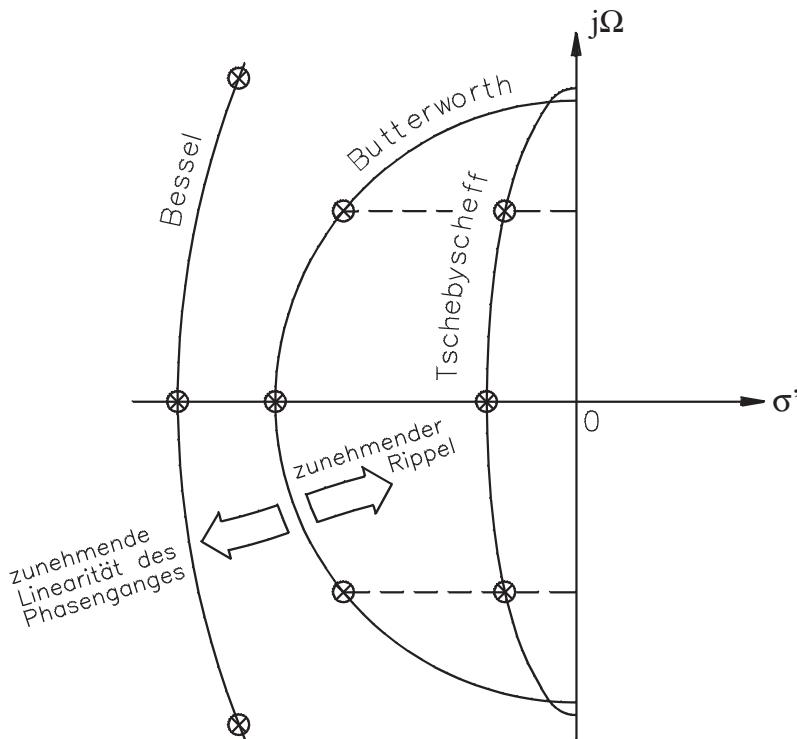
Die Pole von $T(S)$ der Bessel-Approximation liegen beinahe exakt auf einem Kreis mit dem Zentrum auf der positiven σ' -Achse, wie dies in Figur 14.16 dargestellt ist. Die Pollagen der drei verschiedenen Filtertypen nach Butterworth, Tschebyscheff und Bessel zeigen folgendes charakteristisches Verhalten:

Ausgehend von den Pollagen des Butterworth-Filters mit maximal flachem Amplitudengang, die auf dem Einheitskreis der komplexen Ebene liegen, nimmt der Rippel zu, wenn die Pole sich innerhalb des Einheitskreises auf Ellipsen verteilen (Tschebyscheff-Filter). Der Phasengang wird zunehmend linearer, wenn sich die Pollagen vom Einheitskreis nach aussen verschieben, entsprechend der Polverteilung der Bessel-Filter.

Offensichtlich sind auch Filter mit Eigenschaften die zwischen denen der besprochenen Typen liegen realisierbar. Z.B. wird ein Filter mit Polverteilungen zwischen den Typen Bessel und Butterworth nicht die Phasenlinearität des Besselfilters aufweisen, aber im Übergang vom Durchlassbereich in den Sperrbereich ein besseres Verhalten des Dämpfungsverlauf zeigen als das Bessel-Filter. Figur 14.15 zeigt den Amplitudengang, den Phasengang und die Gruppenlaufzeit in Funktion der Frequenz der drei betrachteten Filtertypen.



Figur 14.15 Amplitudengang, Phasengang und Gruppenlaufzeit in Funktion der Frequenz der Filtertypen Butterworth, Tschebyscheff und Bessel.



Figur 14.16 Vergleich der Polelagen der Tiefpassapproximationen nach Butterworth, Tschebyscheff, Bessel.

14.4 Übertragungsfunktion der verschiedenen Tiefpass-Filtertypen im Zeitbereich

Zur Charakterisierung des Verhaltens der verschiedenen Filtertypen im Zeitbereich genügt in den meisten Fällen die Kenntnis der Schrittantwort. Ausgehend von der Übertragungsfunktion im Frequenzbereich bestimmen wir die Stossantwort $f(t)$ als inverse Fouriertransformierte der Übertragungsfunktion:

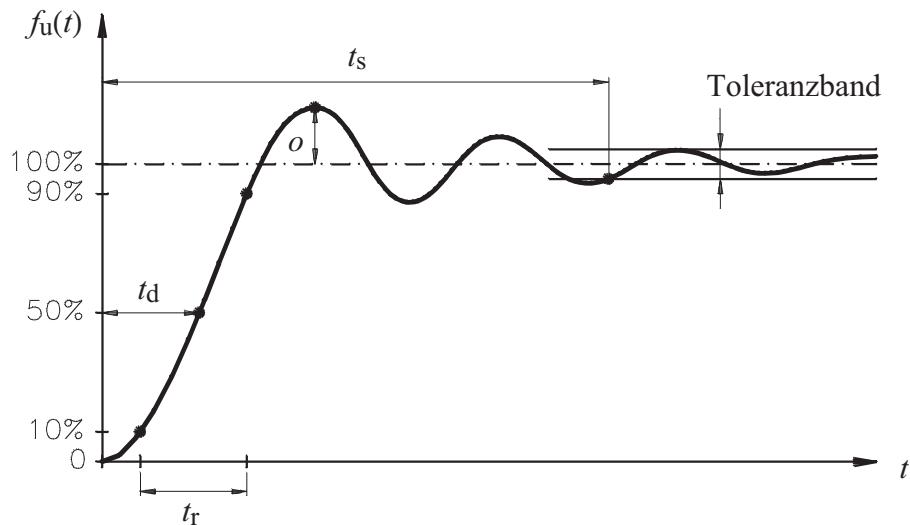
$$f(t) \text{ O---●--- } \underline{T}(\underline{S})$$

Durch Integration der Stossantwort über der Zeit ermitteln wir die Schrittantwort $f_u(t)$:

$$f_u(t) = \int_0^t f(t) \cdot dt \text{ O---●--- } \frac{1}{S} \underline{T}(\underline{S})$$

In Figur 14.17 ist eine typische Schrittantwort eines Tiefpasses mit den zugehörigen Kennwerten dargestellt. Dabei sind

- t_r : Anstiegszeit (rise time)
- t_d : Verzögerungszeit (delay time)
- t_s : Einschwingzeit (settling time)
- o : Überschwingen (overshoot)



Figur 14.17 Schrittantwort eines Tiefpasses mit den Kennwerten Anstiegszeit t_r , Verzögerungszeit t_d , Einschwingzeit t_s und Überschwingen o .

Dem Praktiker in der Elektronik und in der Kommunikationstechnik ist der Zusammenhang zwischen der Anstiegszeit t_r und der 3 dB-Grenzfrequenz $f_{3\text{dB}}$ bzw. $\omega_{3\text{dB}}$ bekannt:

$$t_r \approx \frac{2.2}{\omega_{3\text{dB}}} \approx \frac{0.35}{f_{3\text{dB}}}$$

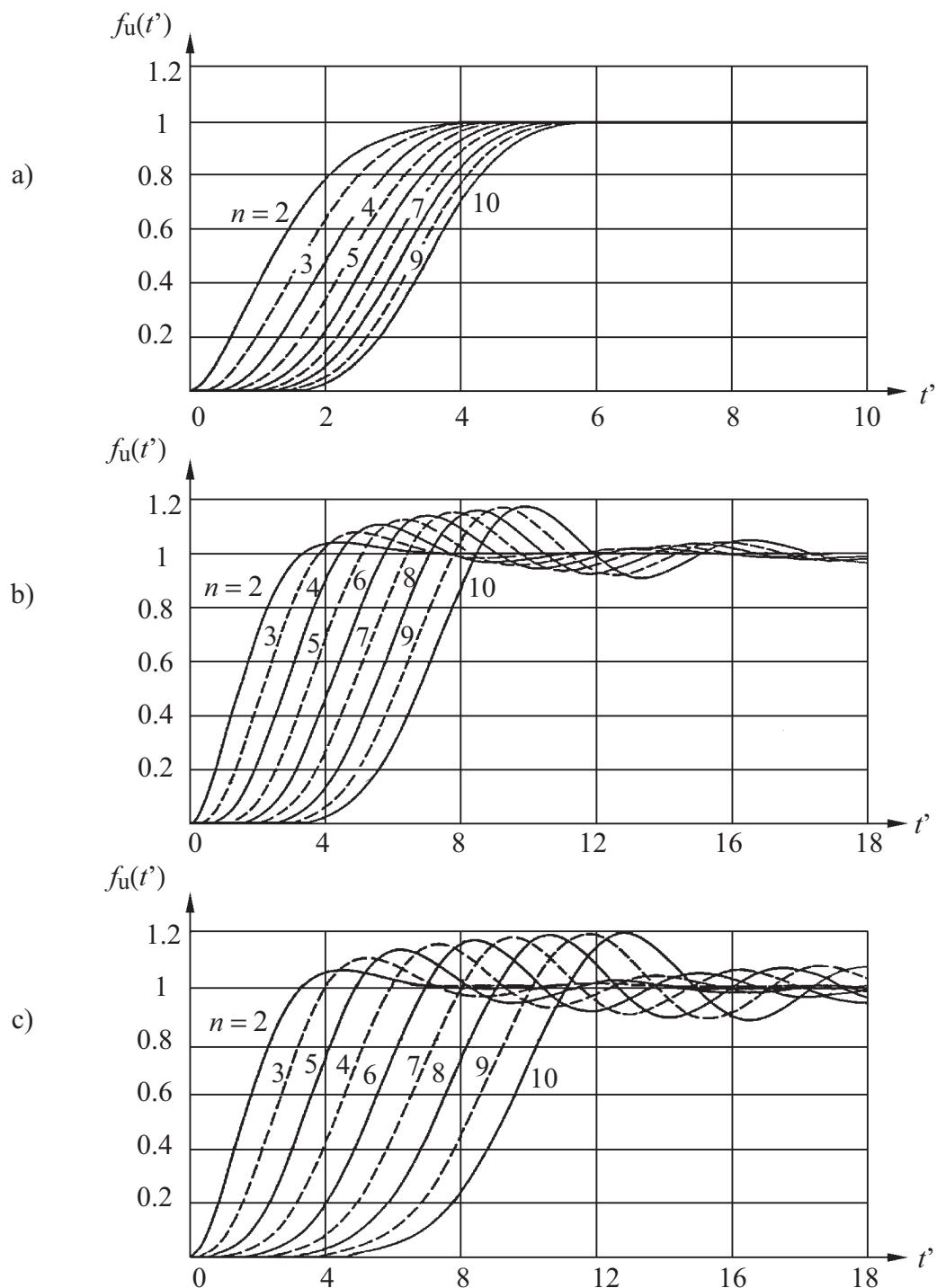
Diese Regel ist beinahe als alte Volksweisheit zu bezeichnen und sie gilt mit guter Genauigkeit für TP-Funktionen mit kleinem Überschwingen der Schrittantwort.

Sogar das ideale Gaussfilter, ein Tiefpass mit Gauss-förmigem Amplitudengang und idealisiert linearem Phasengang befolgt sie recht genau mit:

$$t_r \approx \frac{0.34}{f_{3\text{dB}}}$$

In Figur 14.18 sind die Schrittantworten des Bessel-, Butterworth- und eines Tschebyscheff-Filters für verschiedene Filtergrade dargestellt. Dabei lässt sich aus der normierten Zeit t' die reale Zeit t wie folgt berechnen:

$$t = \frac{t'}{\omega_{3\text{dB}}}$$



Figur 14.18 Schrittantworten von Tiefpassen:
 a) Bessel-Filter, b) Butterworth-Filter
 c) Tschebyscheff-Filter mit 0.1 dB Rippel.

15. Transformation der Filtertypen Hochpass, Bandpass, Bandsperre zum normierten Tiefpass

In den bisherigen Betrachtungen von realisierbaren Übertragungsfunktionen haben wir uns auf UTFs von der Form

$$\underline{T}(\underline{S}) = \frac{K}{Q_n(\underline{S})}$$

d. h. auf Allpolfilter nach Butterworth, Tschebyscheff und Bessel beschränkt.

Bevor wir uns die Realisierung dieser Filter mit konzentrierten Elementen vornehmen, verallgemeinern wir die gefundenen Übertragungsfunktionen so, dass mittels einer geeigneten Frequenztransformation Übertragungsfunktionen für die Filtertypen *Hochpass*, *Bandpass*, *Bandsperre* hergeleitet werden können.

15.1 Die Hochpass-Tiefpass-Transformation

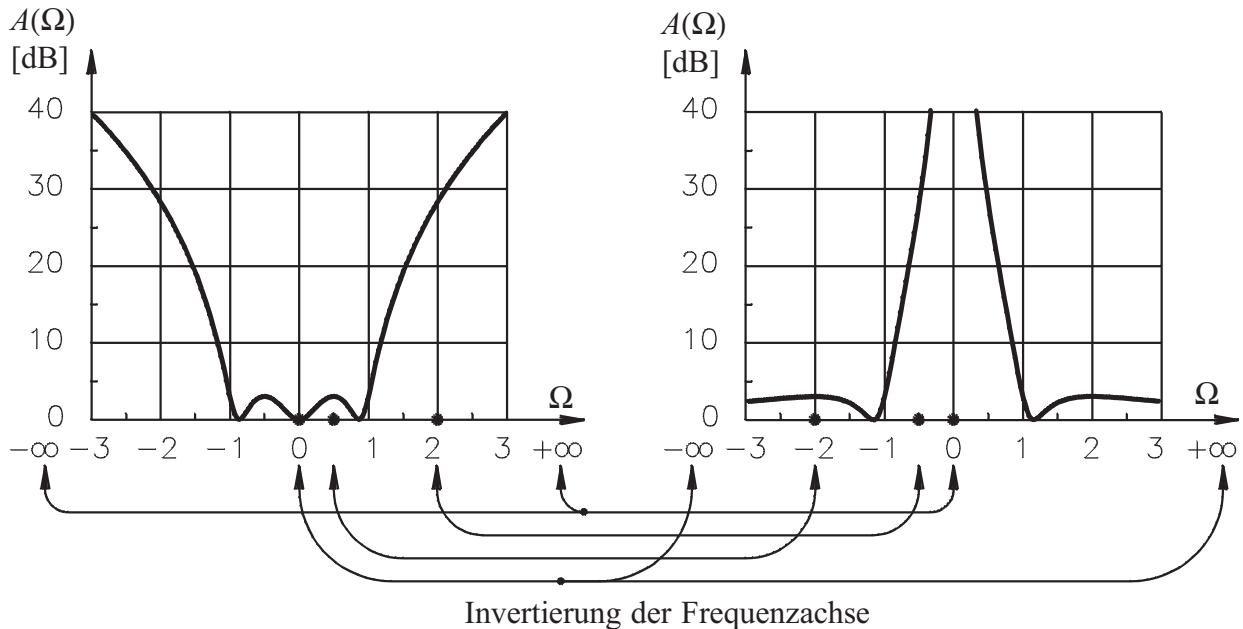
Der Tiefpass wird zum Hochpass transformiert, indem die komplexe Frequenz \underline{S} durch ihren reziproken Wert ersetzt wird:

$$\text{HP} \leftrightarrow \text{TP}$$

$$\underline{S} \leftrightarrow \frac{1}{\underline{S}} \quad (15.1)$$

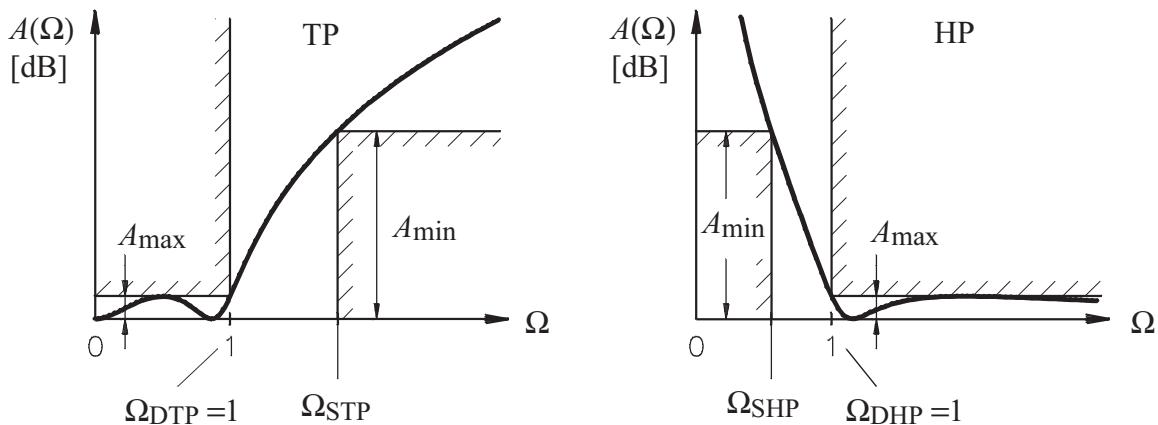
$$\underline{T}_{\text{HP}}(\underline{S}) = \underline{T}_{\text{TP}}\left(\frac{1}{\underline{S}}\right)$$

Diese Transformation wird in Figur 15.1 am Beispiel eines Tschebyscheff-Tiefpasses dargestellt.



Figur 15.1 Transformation eines Hochpasses zum Tschebyscheff-Tiefpass 3. Ordnung.

Bei der Dimensionierung eines Hochpasses, der mit dem Toleranzschema spezifiziert ist, wird dieses in einem ersten Schritt mit der Transformation (15.1) zu einem Tiefpass-Toleranzschemma transformiert (Figur 15.2).



Figur 15.2 Transformation des Hochpasstoleranzschemas zum Tiefpasstoleranzschema.

Mit der Normierung auf die Durchlassgrenzfrequenz ω_D bleibt $\Omega_D = 1$ erhalten:

$$\Omega_{DTP} = \Omega_{DHP} = 1$$

Für die Sperrgrenzfrequenz $\Omega_S = \omega_S/\omega_D$ gilt:

$$\Omega_{STP} = \frac{1}{\Omega_{SHP}}$$

Wir betrachten nun die Auswirkung dieser Transformation auf die Eigenschaften von Allpolfiltern. Die TP-UTF ist von folgender Form:

$$T_{TP}(\underline{S}) = \frac{K}{A_n \underline{S}^n + A_{n-1} \underline{S}^{n-1} + \dots + A_1 \underline{S} + A_0}$$

Mit der Transformation (14.19) ist die Hochpass-UTF:

$$T_{HP}(\underline{S}) = T_{TP}\left(\frac{1}{\underline{S}}\right) = \frac{K}{\frac{A_n}{\underline{S}^n} + \frac{A_{n-1}}{\underline{S}^{n-1}} + \dots + \frac{A_1}{\underline{S}} + A_0} = \frac{K \underline{S}^n}{A_n + A_{n-1} \underline{S} + \dots + A_1 \underline{S}^{n-1} + A_0 \underline{S}^n}$$

Die HP-UTF zeigt gegenüber der TP-UTF folgende Veränderungen:

- Der Zähler hat eine n -fache Nullstelle bei $\underline{S} = 0$.
- Die Ordnung des Nennerpolynoms bleibt erhalten. Die Konstanten $A_n \dots A_0$ werden in ihrer Reihenfolge umgekehrt.

Durch diese Transformation erfahren die Singularitäten folgende Veränderung:

$$T_{TP}(\underline{S}) = \frac{1}{(\underline{S} - P_{1TP})(\underline{S} - P_{2TP}) \dots (\underline{S} - P_{nTP})}$$

$$T_{\text{HP}}(\underline{S}) = \frac{1}{\left(\frac{1}{\underline{S}} - \underline{P}_{1\text{TP}}\right)\left(\frac{1}{\underline{S}} - \underline{P}_{2\text{TP}}\right) \dots \left(\frac{1}{\underline{S}} - \underline{P}_{n\text{TP}}\right)} = \frac{K_{\text{HP}} \underline{S}^n}{\left(\frac{1}{\underline{P}_{1\text{TP}}} - \underline{S}\right)\left(\frac{1}{\underline{P}_{2\text{TP}}} - \underline{S}\right) \dots \left(\frac{1}{\underline{P}_{n\text{TP}}} - \underline{S}\right)}$$

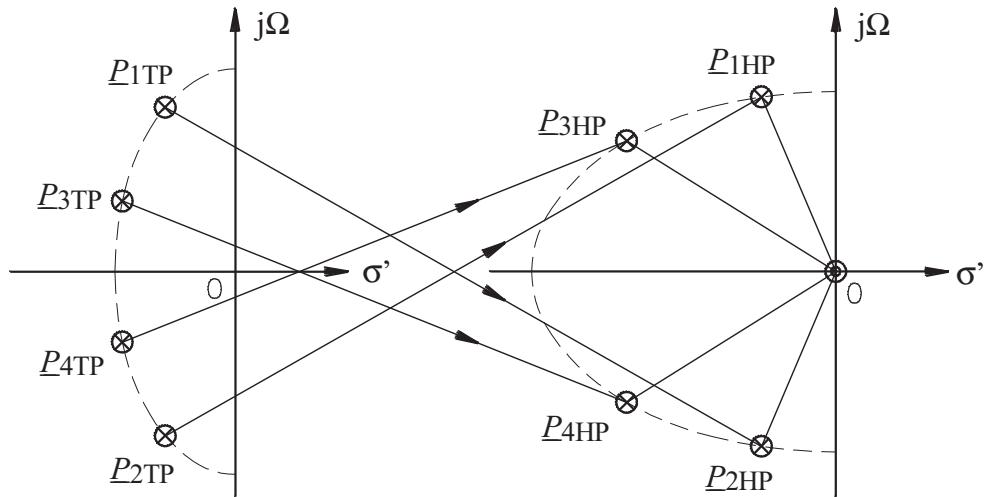
Die Singularitäten werden mit der TP-HP-Transformation wie folgt transformiert:

$$\underline{P}_{i\text{HP}} = \frac{1}{\underline{P}_{i\text{TP}}}$$

Bei dieser Transformation bleibt die Polgüte \mathcal{Q} erhalten.

$$\mathcal{Q} = \frac{\omega_p}{2|\sigma_p|} = \frac{\Omega_p}{2|\sigma'_p|}$$

Figur 15.3 zeigt als Beispiel die TP-HP-Transformation der Pole eines Tschebyscheff-Filters 4. Ordnung.



Figur 15.3 TP-HP-Transformation der Pole eines Tschebyscheff-Filters 4. Ordnung.

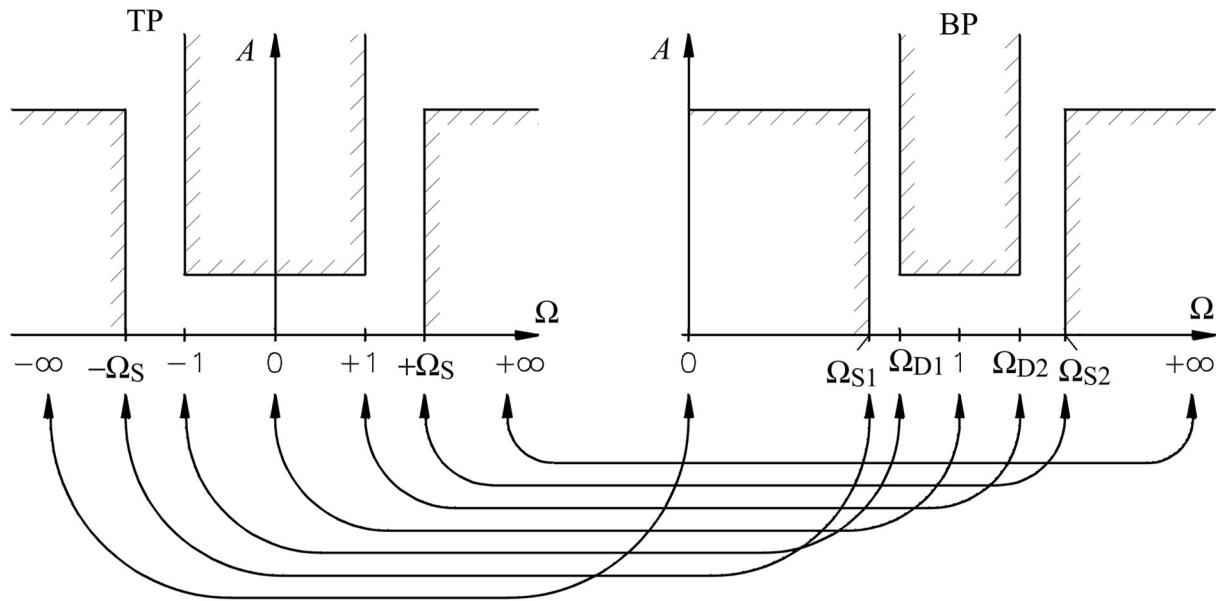
15.2 Die Bandpass-Tiefpass-Transformation

Der Ersatz der Variablen \underline{S} in der Tiefpassübertragungsfunktion durch $\frac{\underline{S}^2 + 1}{B\underline{S}}$,

mit normierter Bandbreite B führt zu einer Bandpassübertragungsfunktion:

$$T_{\text{BP}}(\underline{S}) = T_{\text{TP}}\left(\frac{\underline{S}^2 + 1}{B\underline{S}}\right) \quad (15.2)$$

Figur 15.4 zeigt die BP-TP-Transformation des Toleranzschemas durch (15.2) .



Figur 15.4 BP-TP-Transformation des Toleranzschemas.

$$\text{mit } B: \text{ normierte Bandbreite} \quad B = \frac{\omega_{D2} - \omega_{D1}}{\omega_r}$$

ω_{D1} : untere Durchlassgrenzfrequenz

ω_{D2} : obere Durchlassgrenzfrequenz

ω_{S1} : untere Sperrgrenzfrequenz

ω_{S2} : obere Sperrgrenzfrequenz

ω_r : Bandmittelfrequenz = Referenzfrequenz

Mit dieser Transformation ist das Toleranzschema des Bandpasses *geometrisch-symmetrisch*:

$$\Omega_{D1} \cdot \Omega_{D2} = \Omega_{S1} \cdot \Omega_{S2} = 1$$

Die Bandbreiten zwischen den Durchlassgrenzfrequenzen und den Sperrgrenzfrequenzen sind daher nicht gleich:

$$\Omega_{D1} - \Omega_{S1} \neq \Omega_{S2} - \Omega_{D2}$$

Die normierten Frequenzen $\Omega_{TP} = \omega_{TP}/\omega_D$ und $\Omega_{BP} = \omega_{BP}/\omega_r$ des Tiefpasses und des Bandpasses haben die folgenden Beziehungen:

$$\Omega_{TP} = \frac{\Omega_{BP}^2 - 1}{B \Omega_{BP}} \quad \Omega_{TP}: \text{ positives und negatives Vorzeichen, d.h. 2 Werte} \quad (15.3)$$

$$\Omega_{BP} = \frac{B \Omega_{TP}}{2} + \sqrt{\left(\frac{B \Omega_{TP}}{2}\right)^2 + 1} = \frac{1}{\frac{-B \Omega_{TP}}{2} + \sqrt{\left(\frac{B \Omega_{TP}}{2}\right)^2 + 1}} \quad (15.4)$$

Die Auswirkungen der TP-BP-Transformation auf die Pole und Nullstellen der Übertragungsfunktion betrachten wir anhand der in Faktoren zerlegten UTF des Allpoliefpasses.

Die Faktoren 1. Ordnung der Tiefpassfunktion sind von der Form

$$T_{\text{TP}}(\underline{S}) = \frac{1}{\underline{S} + a}$$

Diese Faktoren werden mit

$$T_{\text{BP}}(\underline{S}) = T_{\text{TP}}\left(\frac{\underline{S}^2 + 1}{B\underline{S}}\right) = \frac{B\underline{S}}{\underline{S}^2 + aB\underline{S} + 1}$$

in Faktoren 2. Ordnung transformiert. Die Faktoren 2. Ordnung

$$T_{\text{TP}}(\underline{S}) = \frac{1}{\underline{S}^2 + a\underline{S} + b}$$

werden zu Faktoren 4. Ordnung transformiert.

$$T_{\text{BP}}(\underline{S}) = T_{\text{TP}}\left(\frac{\underline{S}^2 + 1}{B\underline{S}}\right) = \frac{B^2\underline{S}^2}{\underline{S}^4 + aB\underline{S}^3 + (bB^2+2)\underline{S}^2 + aB\underline{S} + 1} = \frac{B^2\underline{S}^2}{(\underline{S}^2 + a_1\underline{S} + 1)(\underline{S}^2 + a_2\underline{S} + 1)}$$

$$\text{mit } a_{1,2} = \frac{aB}{2} \left(-1 \pm \sqrt{1 - \frac{4b}{a^2}} \right)$$

Durch die TP-BP-Transformation erhöht sich der Filtergrad n um den Faktor 2 und das Zählerpolynom hat eine n -fache Nullstelle bei $\underline{S} = 0$.

15.3 Die Bandsperre-Tiefpass-Transformation

Durch Ersatz der Variablen \underline{S} in der Tiefpassübertragungsfunktion durch $\frac{B\underline{S}}{\underline{S}^2 + 1}$ erhalten wir eine Bandsperre:

$$T_{\text{BS}}(\underline{S}) = T_{\text{TP}}\left(\frac{B\underline{S}}{\underline{S}^2 + 1}\right) \quad (15.5)$$

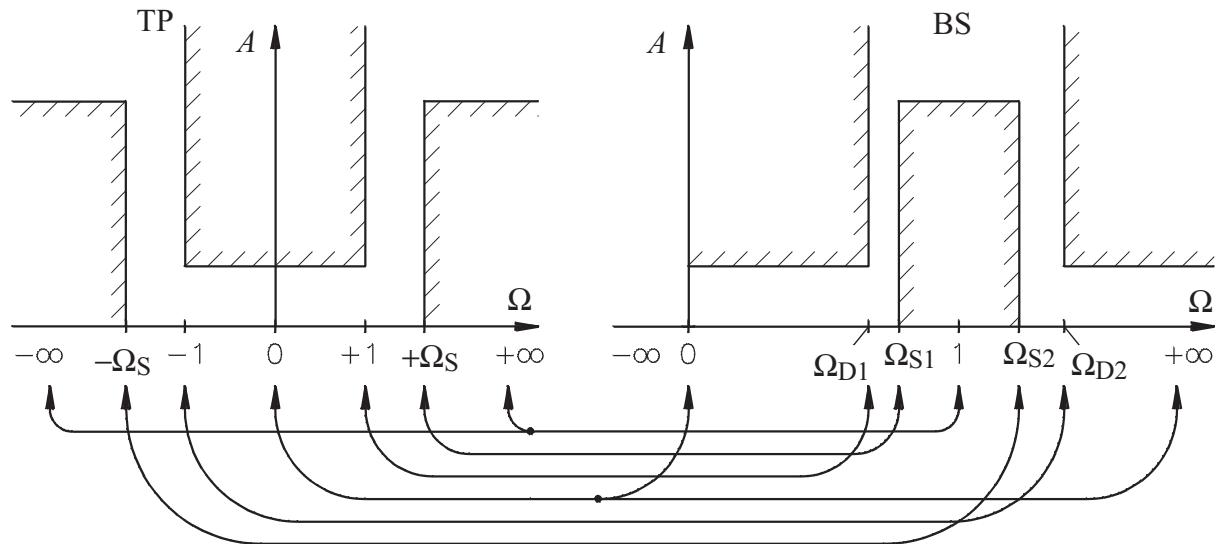
Die normierten Frequenzen $\Omega_{\text{TP}} = \omega_{\text{TP}}/\omega_D$ und $\Omega_{\text{BS}} = \omega_{\text{BS}}/\omega_r$ sind miteinander wie folgt verknüpft:

$$\Omega_{\text{TP}} = \frac{B \Omega_{\text{BS}}}{1 - \Omega_{\text{BS}}^2} \quad (15.6)$$

$$\Omega_{\text{BS}} = \frac{-B}{2 \Omega_{\text{TP}}} + \sqrt{\left(\frac{B}{2 \Omega_{\text{TP}}}\right)^2 + 1} = \frac{1}{\frac{B}{2 \Omega_{\text{TP}}} + \sqrt{\left(\frac{B}{2 \Omega_{\text{TP}}}\right)^2 + 1}} \quad (15.7)$$

mit B : normierte Bandbreite
$$B = \frac{\omega_{D2} - \omega_{D1}}{\omega_r}$$

Figur 15.5 zeigt die Transformation des Toleranzschemas.



Figur 15.5 BS-TP-Transformation des Toleranzschemas.

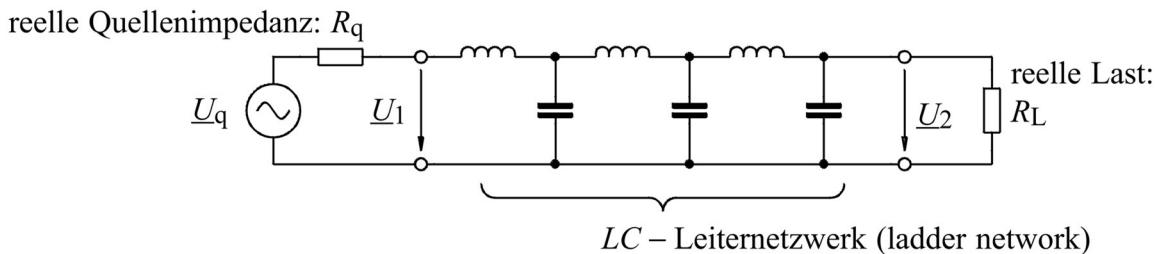
Die TP-BS-Transformation ist zur TP-BP-Transformation reziprok. Daher ist hier die Transformation des Toleranzschemas auch *geometrisch-symmetrisch*:

$$\Omega_{D1} \cdot \Omega_{D2} = \Omega_{S1} \cdot \Omega_{S2} = 1$$

Damit sind die Filtertypen Hochpass, Bandpass und Bandsperre auf den Tiefpassprototyp zurückgeführt. Die nötige Vorarbeit für die Realisierung der Filtergrundtypen TP, HP, BP und BS ist damit geleistet und im nächsten Kapitel wird die Dimensionierung von LC-Filttern vervollständigt.

16. Der Entwurf von LC-Filtern mit Filtertabellen

Mit den in den Kapiteln 13 ... 15 dargestellten Approximationen und Transformationen kann, ausgehend von den Spezifikationen der Filtertypen TP, HP, BP, BS, eine Tiefpassfunktion (Butterworth, Tschebyscheff und Bessel) gefunden werden, die die gewünschte Filterfunktion erfüllt. In diesem Kapitel wird die Aufgabe gelöst, Filternetzwerke zu finden, die die besprochenen Übertragungsfunktionen (Approximationen nach Butterworth, Tschebyscheff und Bessel) aufweisen. Die gesuchten Tiefpassnetzwerke weisen eine Topologie auf, wie in Figur 16.1 dargestellt: ein LC-Leiternetzwerk.



Figur 16.1 Topologie der gesuchten normierten Tiefpässe nach Butterworth, Tschebyscheff und Bessel.

16.1 Die Bestimmung eines verlustfreien Filternetzwerkes ausgehend von der Spezifikation des Eingangsreflexionsfaktors

In Abschnitt 13.1.2 wurde bereits die Betriebsübertragungsfunktion $T_B(\underline{S})$ als zweckmässige Übertragungsfunktion für Zweitore mit (reellen) endlichen Quellen- und Lastimpedanzen eingeführt. In diesem Abschnitt wird für den Fall mit identischen Quellen- und Lastwiderständen gezeigt, wie aus der Filterspezifikation $A(f)$ die Spezifikation für den Filtereingangsreflexionsfaktor r und daraus die Elemente eines LC-Netzwerkes bestimmt werden.

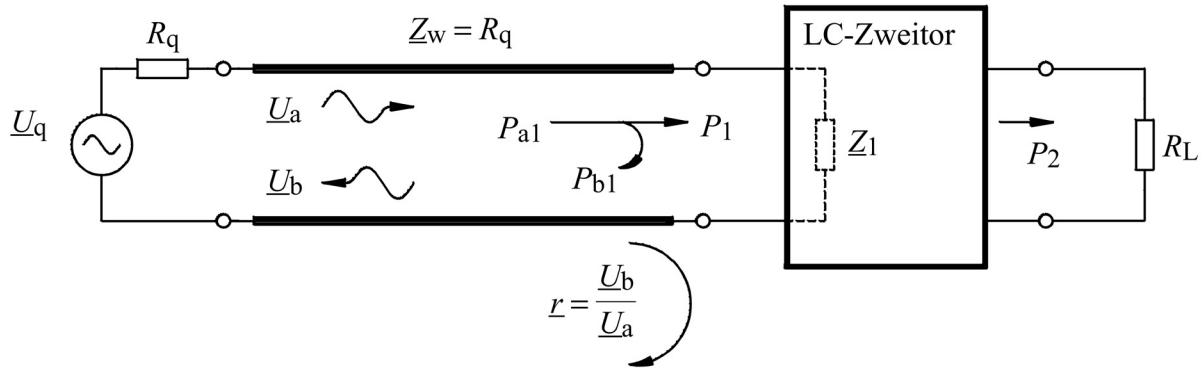
In den Betrachtungen der Leitungstheorie wurden Reflexionsfaktoren immer bezüglich einer Leitungswellenimpedanz definiert. Die Definition eines Reflexionsfaktors bezüglich einem Widerstand, beispielsweise des Innenwiderstandes einer Quelle, kann ebenfalls sehr zweckmässig sein. In Figur 16.2 ist ein mit Quelle und Last beschaltetes verlustfreies Zweitörer gezeigt. Um den Reflexionsfaktor r auf der Quellenseite einzuführen, fügen wir ein Leitungsstück von verschwindender Länge mit der Wellenimpedanz $Z_w = R_q$ (= Quellenwiderstand) ein. Auf dieser Leitung betrachten wir die vorwärts- und rückwärtslaufenden Wellen \underline{U}_a und \underline{U}_b . Der Reflexionsfaktor r am Eingang des LC-Zweitors ist

$$r = \frac{\underline{U}_b}{\underline{U}_a} = \frac{Z_1 - R_q}{Z_1 + R_q}$$

mit Z_1 : Eingangsimpedanz des mit $Z_w = R_q$ belasteten Zweitors.

Mit der Welle \underline{U}_a ist ein nach rechts laufender Leistungsfluss P_{a1} verbunden:

$$P_{a1} = P_1 + P_{b1} = \frac{\underline{U}_a \underline{U}_a^*}{R_q} = \frac{|\underline{U}_q|^2}{4 R_q} \quad (16.1)$$



Figur 16.2 Definition des Reflexionsfaktors r und der Leistungen P_{a1} , P_{b1} , P_1 und P_2

P_{a1} ist die maximal mögliche Leistung, die die Quelle mit U_q als Quellenspannung und mit R_q als Innenwiderstand abzugeben vermag. Mit dem Eingangsreflexionsfaktor r wird ein Teil der Leistung P_{a1} reflektiert. Die reflektierte, nach links laufende Leistung P_{b1} ist

$$P_{b1} = \frac{U_b U_b^*}{R_q} \quad (16.2)$$

Wir können nun einen Leistungsreflexionsfaktor definieren:

$$\frac{P_{b1}}{P_{a1}} = \frac{U_b U_b^*}{U_a U_a^*} = r \cdot r^* = |r|^2 \quad (16.3)$$

Die in das LC-Zweitor transmittierte Leistung P_1 ist

$$P_1 = P_{a1} - P_{b1} \quad (16.4)$$

und der Leistungstransmissionsfaktor P_1/P_{a1} ist

$$\frac{P_1}{P_{a1}} = \frac{P_{a1} - P_{b1}}{P_{a1}} = 1 - |r|^2 \quad (16.5)$$

Da das Zweitor als verlustfrei angenommen wird, wird die Leistung P_1 ohne Reduktion an den Lastwiderstand R_L abgegeben: $P_2 = P_1$.

Die in Abschnitt 13.1.2 definierte Betriebsdämpfungsfunktion H_B steht nun mit dem Reflexionsfaktor r in folgender Verbindung:

$$\frac{P_{a1}}{P_1} = \frac{P_{a1}}{P_2} = |H_B(\underline{s})|^2 = e^{2A_B} = \frac{1}{1 - |r|^2} \quad (16.6)$$

oder, mit (13.21):

$$|r(\underline{s})|^2 = 1 - \frac{P_1}{P_{a1}} = 1 - \frac{1}{|H_B(\underline{s})|^2} = 1 - k |\underline{T}(\underline{s})|^2 \quad (16.7)$$

mit $k = \frac{4 R_q}{R_L}$ und $\underline{T}(\underline{s})$: Spannungsübertragungsfunktion.

Nach Abschnitt 13.1.1 ist $\underline{T}(\underline{S})$ von der Form

$$\underline{T}(\underline{S}) = \frac{\underline{P}_m(\underline{S})}{\underline{Q}_n(\underline{S})}$$

wobei $\underline{Q}_n(\underline{S})$ ein Hurwitz-Polynom ist.

Für die betrachteten Allpolfilter nach Butterworth, Tschebyscheff und Bessel ist

$$\underline{T}(\underline{S}) = \frac{1}{\underline{Q}_n(\underline{S})}$$

Damit gilt für den Reflexionsfaktor r nach (16.7)

$$|\underline{r}(\underline{S})|^2 = 1 - k \frac{\underline{P}_m(\underline{S}) \underline{P}_m(-\underline{S})}{\underline{Q}_n(\underline{S}) \underline{Q}_n(-\underline{S})} \quad (16.8)$$

$|\underline{r}(\underline{S})|^2$ ist also von der Form:

$$|\underline{r}|^2 = \frac{\underline{Q}_n(\underline{S}) \underline{Q}_n(-\underline{S}) - k \underline{P}_m(\underline{S}) \underline{P}_m(-\underline{S})}{\underline{Q}_n(\underline{S}) \underline{Q}_n(-\underline{S})} = \frac{\underline{A}_n(\underline{S}) \underline{A}_n(-\underline{S})}{\underline{Q}_n(\underline{S}) \underline{Q}_n(-\underline{S})} \quad (16.9)$$

Diese Beziehung wird für verschiedene Ansätze von $\underline{r}(\underline{S})$ erfüllt. Da $\underline{r}(\underline{S})$ als Reflexionsfaktor eines passiven Netzwerks im Nenner ein Hurwitzpolynom aufweisen muss, kommen folgende Ansätze in Frage:

$$\underline{r}(\underline{S}) = \frac{\underline{A}_n(+\underline{S})}{\underline{Q}_n(\underline{S})}; \quad \underline{r}(\underline{S}) = \frac{\underline{A}_n(-\underline{S})}{\underline{Q}_n(\underline{S})}; \quad \underline{r}(\underline{S}) = -\frac{\underline{A}_n(+\underline{S})}{\underline{Q}_n(\underline{S})}; \quad \underline{r}(\underline{S}) = -\frac{\underline{A}_n(-\underline{S})}{\underline{Q}_n(\underline{S})} \quad (16.10)$$

In der Realisierung zeigt es sich, dass nur zwei Möglichkeiten ausführbar sind:

$$\text{entweder} \quad \underline{r}(\underline{S}) = \frac{\underline{A}_n(+\underline{S})}{\underline{Q}_n(\underline{S})}; \quad \underline{r}(\underline{S}) = -\frac{\underline{A}_n(-\underline{S})}{\underline{Q}_n(\underline{S})} \quad (16.11)$$

$$\text{oder} \quad \underline{r}(\underline{S}) = -\frac{\underline{A}_n(+\underline{S})}{\underline{Q}_n(\underline{S})}; \quad \underline{r}(\underline{S}) = \frac{\underline{A}_n(-\underline{S})}{\underline{Q}_n(\underline{S})} \quad (16.12)$$

Mit dem gewählten Reflexionsfaktor r wird die Eingangsimpedanz $\underline{Z}_1(\underline{S})$ bestimmt:

$$\underline{Z}_1(\underline{S}) = R_q \frac{1 + \underline{r}(\underline{S})}{1 - \underline{r}(\underline{S})} \quad (16.13)$$

Aus $\underline{Z}_1(\underline{S})$ kann über eine Kettenbruchzerlegung das gesuchte LC-Netzwerk gefunden werden. Dieser letzte Schritt ist für grössere Filtergrade aufwendig. Für eine Vielzahl von Filtern sind die entsprechenden Netzwerke tabelliert, wie z.B. in [1], aus dem die Angaben im Appendix stammen.

Das oben skizzierte Vorgehen soll anhand eines einfachen Beispiele erläutert werden:

16.1.1 Beispiel: Synthesierung eines Butterworth-Tiefpasses 2. Ordnung

Ein Butterworth-Tiefpass 2. Ordnung soll für eine Grenzfrequenz $f_{3\text{dB}} = 20 \text{ kHz}$ mit den Abschlusswiderständen $R_q = R_L = 500 \Omega$ als LC-Filter entworfen werden.

Die Betriebsübertragungsfunktion \underline{T}_B für $R_q = R_L$ des Butterworth-Tiefpasses ist gleich der normierte Übertragungsfunktion \underline{T}_N . Somit gilt für Filter 2. Ordnung gemäss Appendix Tabelle A.2

$$\underline{T}_B(\underline{S}) = \underline{T}_N(\underline{S}) = \frac{1}{\underline{S}^2 + \sqrt{2}\underline{S} + 1} \quad (16.14)$$

Mit (13.21) ist die Übertragungsfunktion $\underline{T}(\underline{S})$

$$\underline{T}(\underline{S}) = \frac{1}{\sqrt{k}} \underline{T}_B(\underline{S}) = \frac{0.5}{\underline{S}^2 + \sqrt{2}\underline{S} + 1}$$

Es sind also:

$$Q_n(\underline{S}) = \underline{S}^2 + \sqrt{2}\underline{S} + 1; \quad P_m(\underline{S}) = 0.5$$

Nach (16.9) finden wir für $|\underline{r}|^2$:

$$Q_n(\underline{S}) Q_n(-\underline{S}) = 1 + \underline{S}^4$$

$$|\underline{r}|^2 = \frac{\underline{S}^4}{1 + \underline{S}^4} = \frac{A_n(\underline{S}) A_n(-\underline{S})}{Q_n(\underline{S}) Q_n(-\underline{S})}$$

Nach (16.11) und (16.12) existieren zwei realisierbare Reflexionsfaktoren $\underline{r}(\underline{S})$:

$$\underline{r}(\underline{S}) = \frac{\pm \underline{S}^2}{\underline{S}^2 + \sqrt{2}\underline{S} + 1}$$

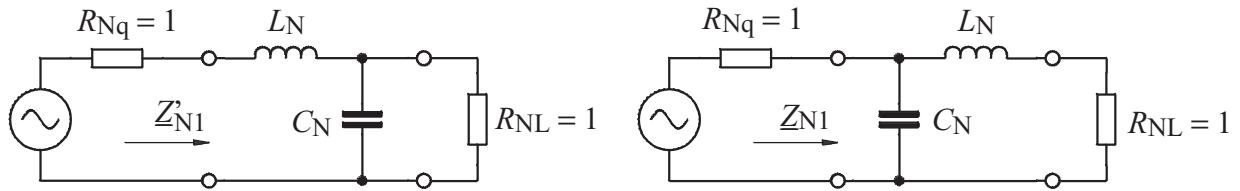
Nach (16.13) sind die entsprechenden, normierten Eingangsimpedanzen $\underline{Z}_{N1}(\underline{S})$ und $\underline{Z}'_{N1}(\underline{S})$:

$$\underline{Z}_{N1}(\underline{S}) = \frac{\underline{Z}_1(\underline{S})}{R_q} = \frac{\sqrt{2}\underline{S} + 1}{2\underline{S}^2 + \sqrt{2}\underline{S} + 1}$$

$$\underline{Z}'_{N1}(\underline{S}) = \frac{\underline{Z}'_1(\underline{S})}{R_q} = \frac{2\underline{S}^2 + \sqrt{2}\underline{S} + 1}{\sqrt{2}\underline{S} + 1}$$

Die in Figur 16.3 dargestellten Schaltungen zeigen diese normierten Eingangsimpedanzen. Die Induktivität $L_N = \sqrt{2}$ und die Kapazität $C_N = \sqrt{2}$ sind auf die Grenzkreisfrequenz $\omega_{3\text{dB}}$ normiert. Die realen Werte sind für $f_{3\text{dB}} = 20 \text{ kHz}$ und $R_L = 500 \Omega$:

$$L = \frac{L_N R_L}{\omega_{3\text{dB}}} = 5.6 \text{ mH}; \quad C = \frac{C_N}{\omega_{3\text{dB}} R_L} = 22.5 \text{ nF}$$



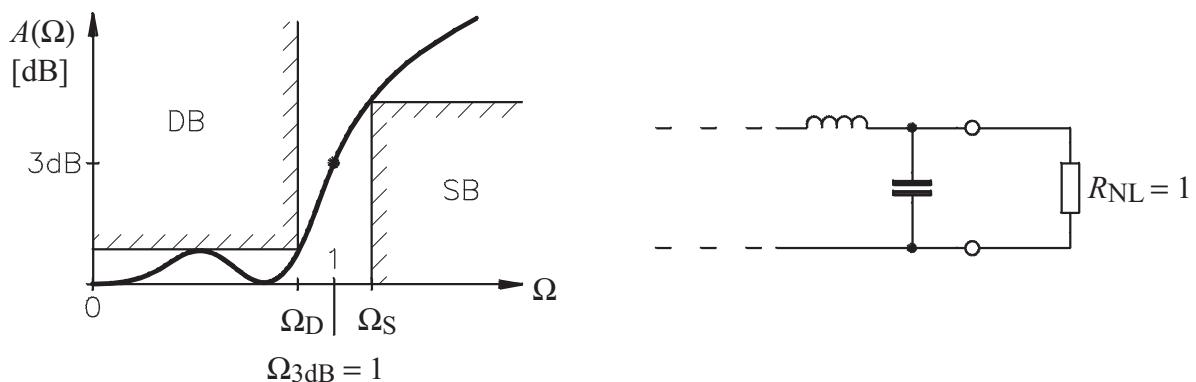
Figur 16.3 Die zwei Synthesisierungen der Eingangsimpedanzen Z_{N1} und \bar{Z}_{N1} .

Damit haben wir ein einfaches Filter als LC-Filter entworfen.

16.2 Entwurf von LC-Filters mit Filtertabellen

Die eingeführten Filtertypen nach Butterworth, Tschebyscheff und Bessel sind in Tabellenwerken und in Filterentwurfsprogrammen gut dokumentiert und für den Entwurf bequem dargestellt. Die im Appendix angeführten Tabellen nach Zwerev sind auf die

- Grenzfrequenz ω_{3dB} und auf den
- Abschlusswiderstand R_L normiert.(Figur 16.4)



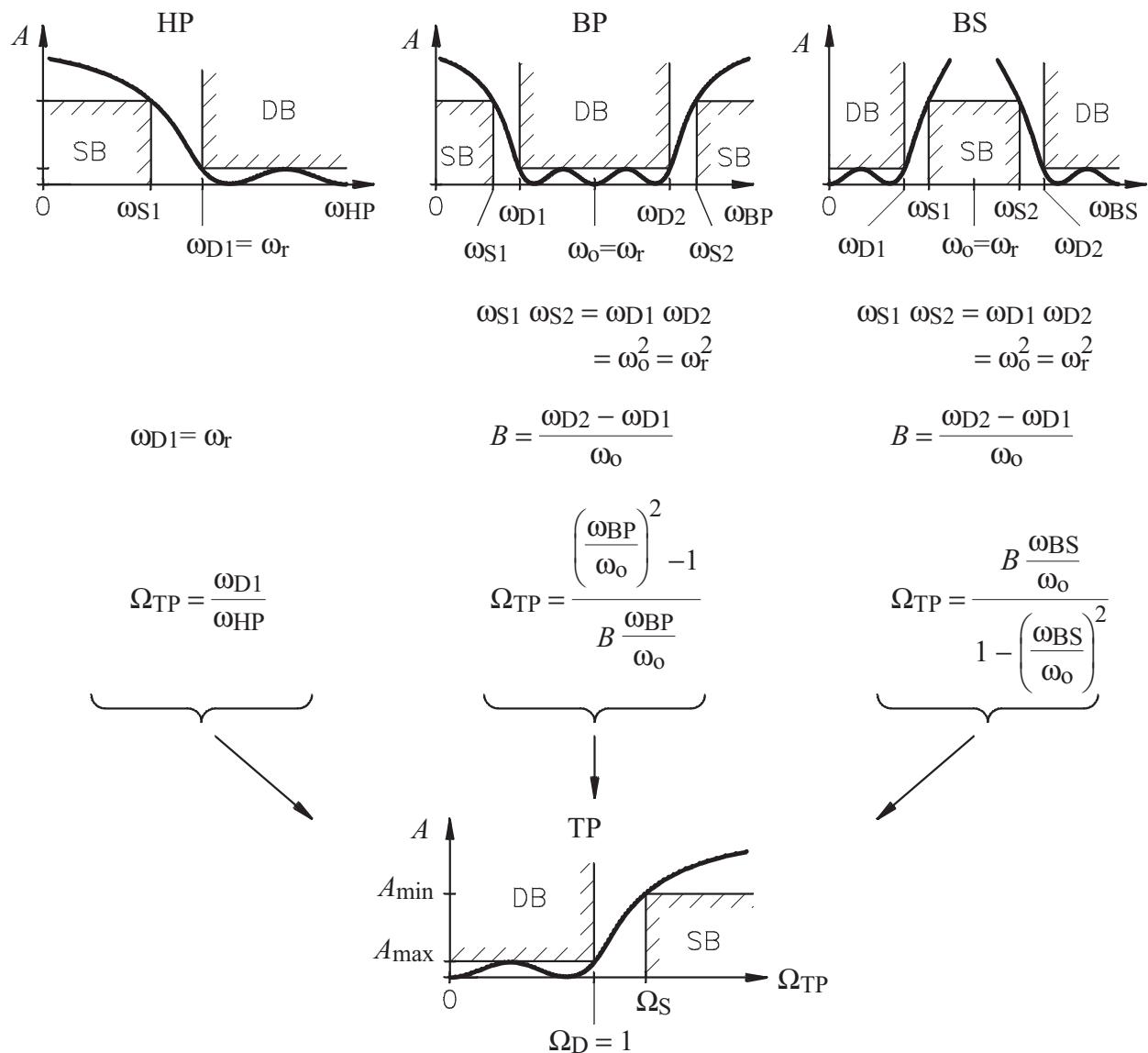
Figur 16.4 Normierung der Filtertabellen im Appendix nach Zwerev auf die Grenzfrequenz ω_{3dB} und den Abschlusswiderstand R_L .

Ausgehend vom Toleranzschema wird das LC-Filter mit den folgenden Teilschritten entworfen:

1. Transformation der Filtertypen Hochpass, Bandpass, Bandsperre zum Tiefpass
2. Bestimmung des Filtergrades und Frequenzumnormierung
3. Rücktransformation des Standardtiefpasses zu Hochpass, Bandpass oder Bandsperre
4. Entnormierung der Frequenz und der Impedanz

1. Schritt: Transformation der Filtertypen Hochpass, Bandpass, Bandsperre zum Tiefpass.

Gemäß Kapitel 15 werden die Filtertypen Hochpass, Bandpass und Bandsperre nach den in Figur 16.5 zusammengestellten Beziehungen zum Tiefpass transformiert.



Figur 16.5 Transformation der Filtertypen Hochpass, Bandpass, Bandsperre zum Tiefpass.

2. Schritt: Bestimmung des Filtergrades n und Frequenzumnormierung

Butterworth-Filter

$$n \geq \frac{\log \left(\frac{10^{0.1A_{\min}} - 1}{10^{0.1A_{\max}} - 1} \right)}{2 \log \frac{\Omega_S}{\Omega_D}}$$

n kann auch aus dem Nomogramm A6 im Anhang entnommen werden.

Tschebyscheff-Filter

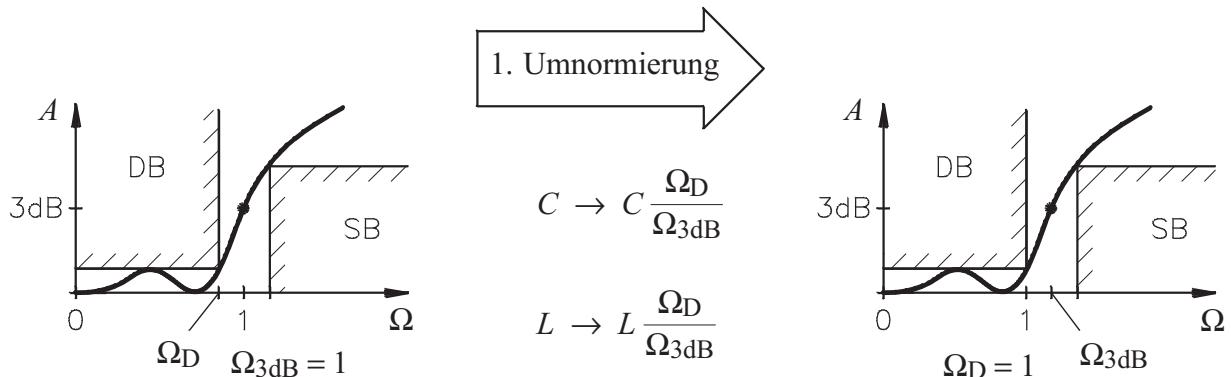
$$n \geq \frac{\operatorname{arcosh} \sqrt{\frac{10^{0.1A_{\min}} - 1}{10^{0.1A_{\max}} - 1}}}{\operatorname{arcosh} \frac{\Omega_S}{\Omega_D}}$$

n kann auch aus dem Nomogramm B1 im Appendix entnommen werden.

Bessel-Filter: n wird aus der Dämpfungscharakteristik Figur 14.14 bestimmt.

Aus den Tabellen entnehmen wir den entsprechenden Tiefpass, der so normiert ist, dass die 3dB-Bandgrenze bei $\Omega_{3dB} = 1$ liegt. Für die weiteren Schritte müssen die Standard-Tiefpässe gemäss Figur 16.6 auf die Durchlassgrenzfrequenz Ω_D normiert werden.

Die Umnormierung der Frequenz auf $\Omega_D = 1$ erfolgt nach den folgenden Beziehungen.



Figur 16.6 Umnormierung der Frequenz.

Butterworth

$$\frac{\Omega_{3dB}}{\Omega_D} = \sqrt[2n]{\frac{1}{10^{0.1A_{\max}} - 1}}$$

Tschebyscheff

$$\frac{\Omega_{3dB}}{\Omega_D} = \cosh \left[\frac{1}{n} \operatorname{arcosh} \sqrt{\frac{1}{10^{0.1A_{\max}} - 1}} \right] = \cosh \left[\frac{1}{n} \operatorname{arcosh} \frac{1}{e} \right]$$

(Siehe Anhang Tabelle B.12)

Bessel: $\frac{\Omega_{3dB}}{\Omega_D}$ wird aus der Figur C.1 im Anhang ermittelt.

Sämtliche L_N -s und C_N -s des Standardtiefpasses werden mit $\frac{\Omega_D}{\Omega_{3dB}}$ multipliziert.

3. Schritt: Rücktransformation des Standardtiefpasses zu Hochpass, Bandpass oder Bandsperre

Aus Schritt 2 liegt der auf die Durchlassgrenzfrequenz Ω_D normierte Tiefpass vor. Ist das zu entwerfende Filter ein Tiefpass, dann kann direkt zum 4. Schritt vorgerückt werden.

Andernfalls:

- Tiefpass-Hochpass-Transformation

Für die TP-HP-Transformation wird \underline{S} durch $1/\underline{S}$ ersetzt, d.h. Induktivitäten werden durch Kapazitäten und Kapazitäten durch Induktivitäten gemäss Figur 16.7 ersetzt:

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{TP} \\ \parallel \end{array} \right. \rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} \parallel \\ \mid \end{array} \right. C_{HP} = \frac{1}{L_{TP}} \quad \quad \quad \left| \begin{array}{l} \mid \\ \parallel \end{array} \right. C_{TP} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} L_{HP} = \frac{1}{C_{TP}} \\ \parallel \end{array} \right.$$

Figur 16.7 Tiefpass-Hochpass-Transformation.

- Tiefpass-Bandpass-Transformation

Mit der Transformation $\underline{S}_{TP} = \frac{\underline{S}_{BP}^2 + 1}{B\underline{S}_{BP}}$ wird eine Induktivität durch einen Serieschwingkreis und eine Kapazität durch einen Parallelschwingkreis gemäss Figur 16.8 ersetzt:

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{TP} \\ \parallel \end{array} \right. \rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \parallel \\ \mid \end{array} \right. L_{BP} = L_{TP}/B \quad \quad \quad \left| \begin{array}{l} \mid \\ \parallel \end{array} \right. C_{TP} \rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \mid \\ \parallel \end{array} \right. L_{BP} = B/C_{TP} \\ C_{BP} = B/L_{TP} \quad \quad \quad C_{BP} = C_{TP}/B$$

Figur 16.8 Tiefpass-Bandpass-Transformation.

- Tiefpass-Bandsperre-Transformation

Mit der Transformation $\underline{S}_{TP} = \frac{BS_{BS}}{\underline{S}_{BS}^2 + 1}$ wird eine Induktivität durch einen Parallelschwingkreis und eine Kapazität durch einen Serieschwingkreis gemäss Figur 16.9 ersetzt:

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{TP} \\ \parallel \end{array} \right. \rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \mid \\ \parallel \end{array} \right. L_{BS} = B L_{TP} \quad \quad \quad \left| \begin{array}{l} \mid \\ \parallel \end{array} \right. C_{TP} \rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \parallel \\ \mid \end{array} \right. L_{BS} = 1/B C_{TP} \\ C_{BS} = 1/B L_{TP} \quad \quad \quad C_{BS} = B C_{TP}$$

Figur 16.9 Tiefpass-Bandpass-Transformation.

Die ermittelten Filterschaltungen enthalten nun die frequenz- und impedanznormierten Elemente

$$\begin{array}{ll} R_{Nq} & \text{(Quellenwiderstand)} \\ R_{NL} = 1 & \text{(Lastwiderstand)} \\ L_{Ni} \\ C_{Ni} \end{array}$$

4. Schritt: Entnormierung der Frequenz und der Impedanz

Die in Schritt 3 ermittelten L_{N-s} und C_{N-s} sind, gemäss Schritt 1, auf ω_r normiert.

$$\begin{array}{ll} \omega_r \text{ ist für} & \text{TP: } \omega_r = \omega_D \\ & \text{HP: } \omega_r = \omega_D \\ & \text{BP: } \omega_r = \omega_0 \\ & \text{BS: } \omega_r = \omega_0 \end{array}$$

Alle Impedanzen sind auf den Abschlusswiderstand $R_L = R_r$ normiert.

Entnormierung:

$$\begin{array}{ll} R_q = R_{Nq} \cdot R_r; & R_L = R_r \\ L_i = \frac{L_{Ni} \cdot R_r}{\omega_r}; & C_i = \frac{C_{Ni}}{\omega_r \cdot R_r} \end{array}$$

Damit ist das Filter vollkommen entworfen!

16.2.1 Beispiel: Entwurf eines Tschebyscheff-Bandpasses

Es sei ein Tschebyscheff-BP mit folgenden Spezifikationen zu entwerfen:

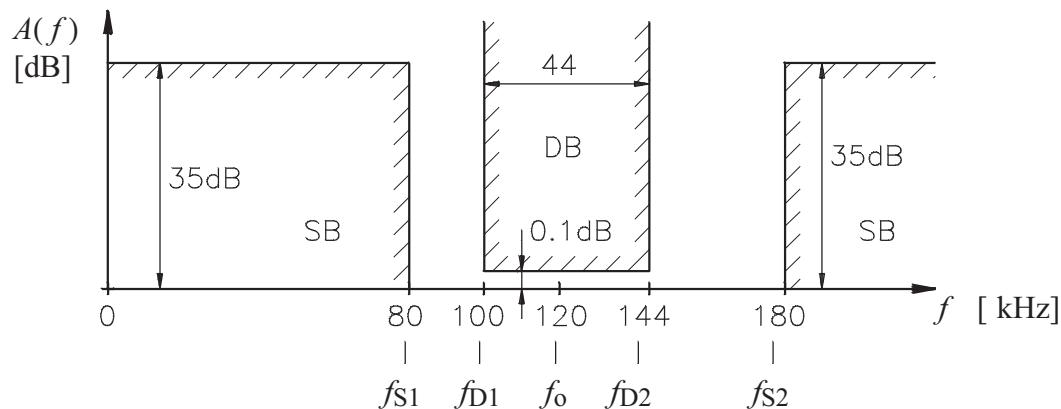
$$R_q = R_L = 300 \Omega \quad A_{\max} = 0.1 \text{ dB} \quad A_{\min} = 35 \text{ dB}$$

$$f_{S1} = 80 \text{ kHz} \quad f_{S2} = 180 \text{ kHz} \quad f_{D1} = 100 \text{ kHz} \quad f_{D2} = 144 \text{ kHz}$$

Die gegebenen Grenzfrequenzen erfüllen die Bedingung $f_{S1} f_{S2} = f_{D1} f_{D2}$

$$\text{Die Referenzfrequenz: } f_r = f_0 = \sqrt{f_{S1} f_{S2}} = 120 \text{ kHz}$$

Das entsprechende Toleranzschema zeigt Figur 16.10.

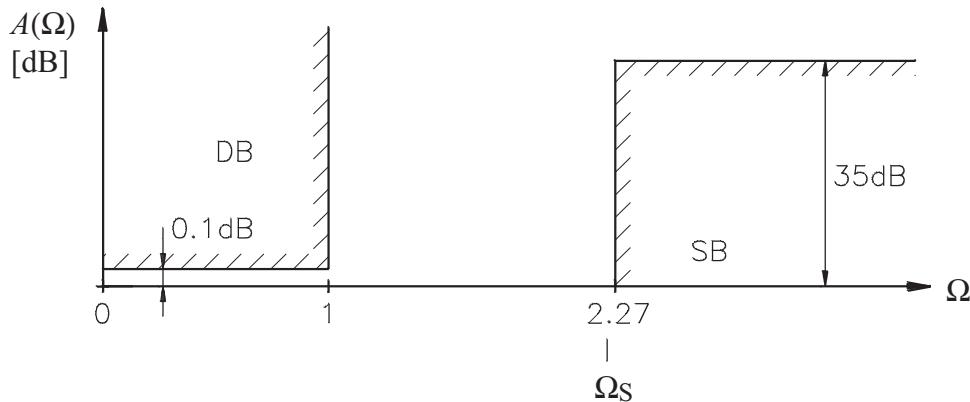


Figur 16.10 Gegebenes Bandpass-Toleranzschema.

1. Schritt: Transformation des Bandpasses zum Tiefpass

$$B = \frac{f_{D2} - f_{D1}}{f_0} = 0.3667 \quad \Omega_S = \frac{\left(\frac{f_{S2}}{f_0}\right)^2 - 1}{B \frac{f_{S2}}{f_0}} = 2.27$$

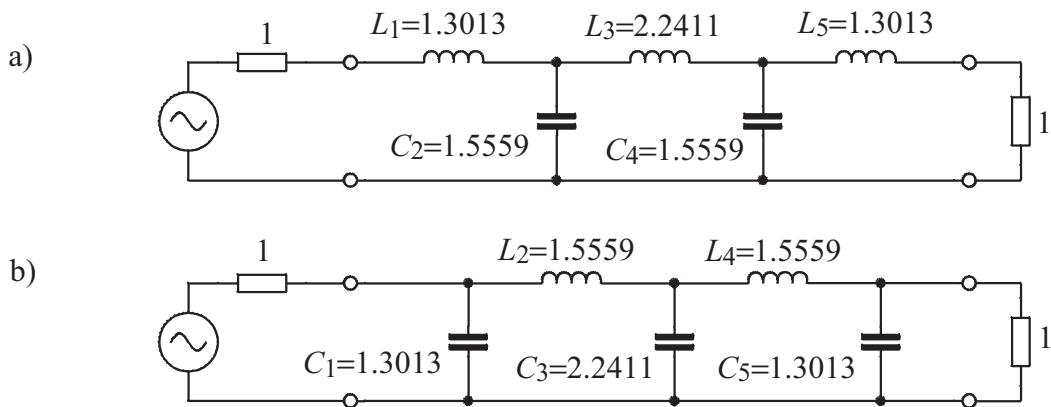
Figur 16.11 zeigt das Toleranzschema des Tiefpasses



Figur 16.11 Transformation des Toleranzschemas nach Figur 16.10 zum Tiefpass

2. Schritt: Bestimmung des Filtergrades n und Frequenzumnormierung

Nach dem Nomogramm Appendix B.1 resultiert der Filtergrad $n = 5$. Die beiden möglichen Standardtiefpässe (Figur 16.12), die auf die 3dB-Grenzfrequenz Ω_{3dB} normiert sind, können aus der Tabelle B.14 entnommen werden. Wir verfolgen den Prototyp b) (2 Induktivitäten; 3 Kapazitäten) weiter.



Figur 16.12 Standardtiefpässe des Tschebyscheff-Filters mit $n = 5$ und $A_{\max} = 0.1 \text{ dB}$.

Frequenzumnormierung:

Nach Tabelle B.12 ist für $n = 5$ und $A_{\max} = 0.1 \text{ dB}$: $\frac{\Omega_{3dB}}{\Omega_D} = 1.135$

Damit sind die umnormierten L- und C-Elemente:

$$L_{N'i} = \frac{L_{Ni}}{1.135} \quad C_{N'i} = \frac{C_{Ni}}{1.135}$$

3. Schritt: Rücktransformation des Standardtiefpasses zum Bandpass

Figur 16.13 zeigt den nach der Transformationsvorschrift (Figur 16.8) zum Bandpass transformierten Tiefpass mit den Elementen

$$L_{BP1} = L_{BP5} = 0.3198$$

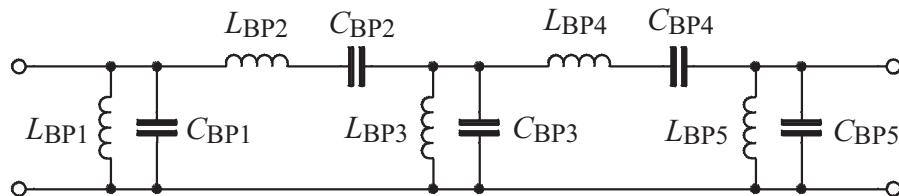
$$C_{BP1} = C_{BP5} = 3.1265$$

$$L_{BP2} = L_{BP4} = 3.7382$$

$$C_{BP2} = C_{BP4} = 0.2675$$

$$L_{BP3} = 0.1857$$

$$C_{BP3} = 5.345$$



Figur 16.13 Zum Bandpass rücktransformierter Tiefpass.

4. Schritt: Entnormierung der Frequenz und der Impedanz

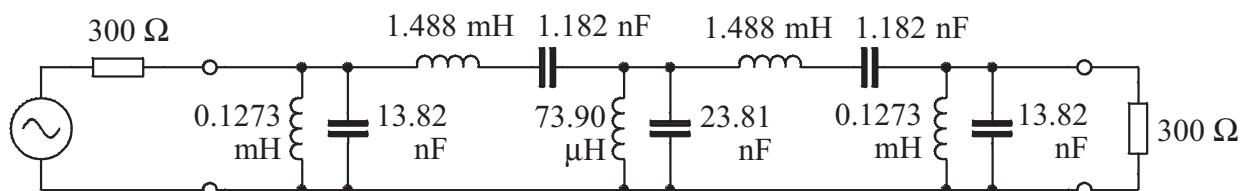
Nach Spezifikation ist der Referenzwiderstand $R_r = \text{Lastwiderstand } R_L = 300 \Omega$.

Die Referenzkreisfrequenz ω_r des Bandpasses ist die Bandmittenkreisfrequenz ω_0 :

$$\omega_r = \omega_0 = 2\pi \cdot 120 \text{ kHz} = 753.9 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$$

Damit sind die entnormierten L- und C-Elemente: $L_i = \frac{L_{Ni} \cdot R_r}{\omega_r}$; $C_i = \frac{C_{Ni}}{\omega_r \cdot R_r}$

Figur 16.14 zeigt das vollständige Tschebyscheff-Bandpassfilter



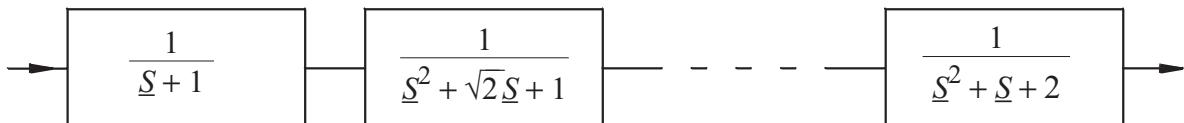
Figur 16.14 Vollständiges Tschebyscheff-Bandpassfilter

Als kurzer "Sanity-Check" kann nun noch überprüft werden, ob die Resonanzfrequenzen aller Resonanzkreise wirklich der Referenzfrequenz ω_r entsprechen.

17. Aktive Filter

Zum Schluss dieses Kapitels zum Entwurf von analogen Filtern wird in diesem Abschnitt eine Einführung in den Entwurf von Filtern gegeben, die aktive Elemente, nämlich Operationsverstärker (Opamps) enthalten. Bei der Realisierung der im vorhergehenden Abschnitt behandelten LC-Filter stossen wir, namentlich bei Filtern bei tiefen Frequenzen, auf das Problem, dass grosse und damit teure und voluminöse Induktivitäten verlangt werden. Mit dem Einsatz von Operationsverstärkern kann dieses Problem gelöst werden. Der Einsatz von Operationsverstärkern zur Realisierung von Filtern kann auf verschiedene Arten erfolgen:

- Im *Kaskadenfilter* werden mit Operationsverstärkern Übertragungsfunktionen 1. und 2. Ordnung dargestellt und gemäss Figur 17.1 kaskadiert.



Figur 17.1 Das aus Blöcken von Übertragungsfunktionen 1. und 2. Ordnung aufgebaute Kaskadenfilter.

- Bei der *Simulation von LC-Filtern mit Opamps* wird die Struktur der LC-Filter übernommen und die Induktivitäten werden mit Kapazitäten und als Impedanzinverter geschaltete Opamps simuliert.
- Mittels Transformationen von LC-Filterstrukturen können diese mit einer weiteren Klasse von Opampschaltungen, den allgemeinen Impedanzinverterschaltungen (GIC: general impedance converter) realisiert werden.

Das Kaskadenfilter ist das einfachste aktive Filter. Es ist zweckmässig für wenig kritische Anwendungen. Die LC-Filtersimulation ist aufwendiger, aber bezüglich der Empfindlichkeit gegenüber den Toleranzen der Bauelemente vorteilhafter.

In dieser einführenden Behandlung bleiben wir beim einfachen Kaskadenfilter.

17.1 Das Kaskadenfilter

Wie bereits erwähnt, werden mit dem Kaskadenfilter Filter beliebiger Ordnung aus einzelnen Sektionen mit Übertragungsfunktionen 1. oder 2. Ordnung aufgebaut. Als einziger Grundstein einer solchen Sektion wäre dazu ein Element mit einer allgemeinen Übertragungsfunktion 2. Ordnung

$$T(S) = \frac{B_0 + B_1 S + S^2}{A_0 + A_1 S + S^2} \quad (17.1)$$

mit einstellbaren Koeffizienten A_0 , A_1 , B_0 und B_1 erforderlich.

Diese Sektion muss zudem, wenn das Signal mit einer Spannung dargestellt werden soll, einen hochohmigen Eingang und einen niederohmigen Ausgang aufweisen.

Es existiert eine Vielzahl von Opamp-Schaltungen mit der allgemeinen UTF (17.1) und mit den einfacheren UTFS:

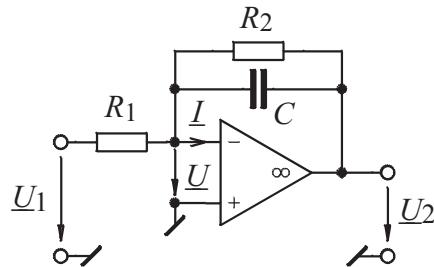
TP, HP	1. Ordnung
TP, HP, BP, BS, AP	2. Ordnung

Dabei ist die Eingangsimpedanz \gg Ausgangsimpedanz.

Im folgenden Abschnitt werden einige dieser Schaltungen vorgestellt.

17.1.1 Sektionen 1. Ordnung

Figur 17.2 zeigt eine TP-Sektion 1. Ordnung



Figur 17.2 Schaltung einer Tiefpasssektion 1. Ordnung.

Wir analysieren diese Schaltung unter der Annahme, dass die Spannungsverstärkung V des Opamps sehr gross sei ($V \rightarrow \infty$) und daher die Eingangsspannung U und der Eingangsstrom I des Verstärkers verschwindend seien:

$$\begin{aligned} \frac{U_1}{R_1} &= -\underline{U}_2 \left(s C + \frac{1}{R_2} \right) \\ \underline{T}(s) &= \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{-\frac{1}{R_1 C}}{s + \frac{1}{R_2 C}} \end{aligned} \quad (17.2)$$

Die allgemeine TP-UTF ist von der Form

$$\underline{T}_{\text{TP}}(s) = \frac{K p_1}{s + p_1} \quad (17.3)$$

mit K : Spannungsverstärkung des aktiven Filters für $\omega = 0$ ($K < 0$).

p_1 : 3 dB -Grenzkreisfrequenz

Der Koeffizientenvergleich liefert:

$$R_1 = \frac{-1}{K C p_1} \quad (17.4)$$

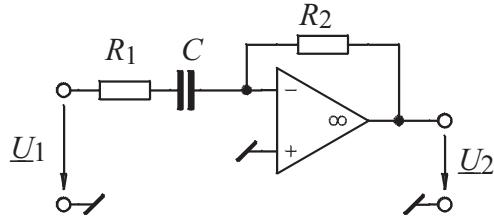
$$R_2 = \frac{1}{C p_1} \quad (17.5)$$

Dabei ist C frei wählbar.

Es ist zu beachten, dass diese Sektion invertierend ist, d.h. für $\omega = 0$ ist die Verstärkung:

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = K < 0$$

In Figur 17.3 ist eine HP-Sektion 1. Ordnung dargestellt.



Figur 17.3 Hochpasssektion 1. Ordnung

Mit den gleichen Annahmen wie beim vorhergehenden Tiefpass ($V \rightarrow \infty$ und $I \rightarrow 0$) finden wir

$$T(\underline{s}) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{-\frac{R_2}{R_1}\underline{s}}{\underline{s} + \frac{1}{R_1C}} \quad (17.6)$$

Die Standarddarstellung des Hochpasses 1. Ordnung ist

$$T_{HP}(\underline{s}) = \frac{K\underline{s}}{\underline{s} + p_1} \quad (17.7)$$

K ist dabei die Spannungsverstärkung für $\omega = \infty$.

Der Koeffizientenvergleich liefert

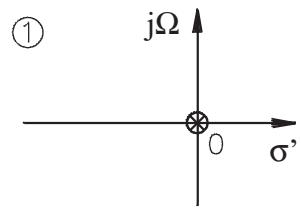
$$R_1 = \frac{1}{C p_1} \quad (17.8)$$

$$R_2 = \frac{-K}{C p_1} \quad (17.9)$$

und wiederum ist C frei wählbar.

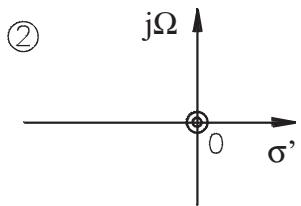
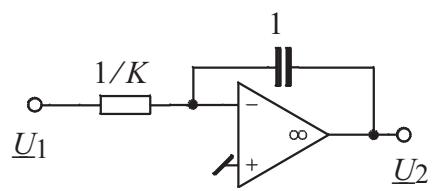
Figur 17.4 zeigt eine Zusammenstellung der wichtigsten Realisierungen von Übertragungsfunktionen 1. Ordnung.

Es existieren zwei häufig eingesetzte Schaltungen, die mit nur einem Opamp UFs 2. Ordnung aufweisen: die Sallen + Key-Schaltung und die Delyannis-Friend-Schaltung.

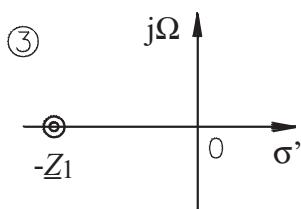
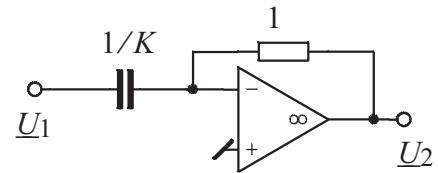


Pole \otimes Nullstellen \odot

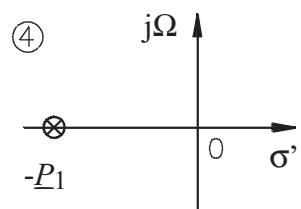
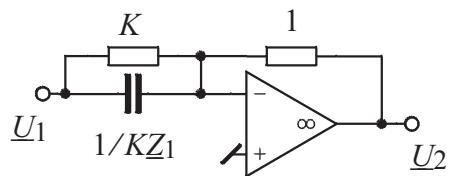
$$T(\underline{S}) = -\frac{K}{\underline{S}}$$



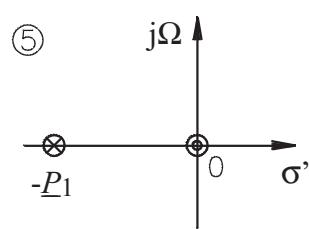
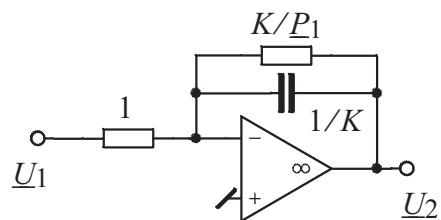
$$T(\underline{S}) = -KS$$



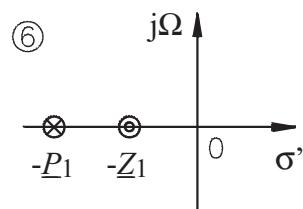
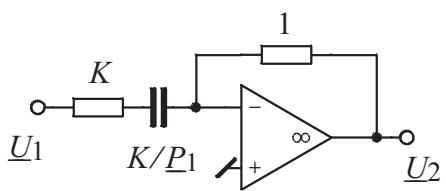
$$T(\underline{S}) = -K(\underline{S} + \underline{Z}_1)$$



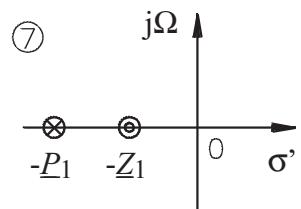
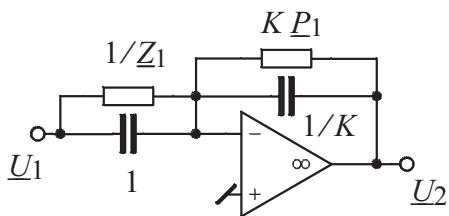
$$T(\underline{S}) = \frac{-K}{\underline{S} + \underline{P}_1}$$



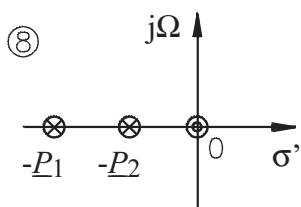
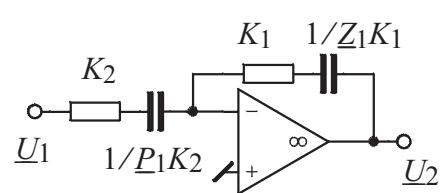
$$T(\underline{S}) = \frac{-\underline{S}K}{\underline{S} + \underline{P}_1}$$



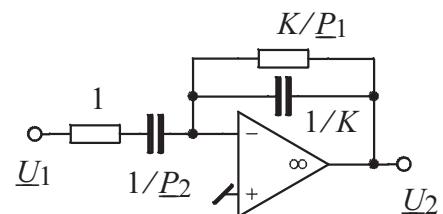
$$T(\underline{S}) = -K \frac{\underline{S} + \underline{Z}_1}{\underline{S} + \underline{P}_1}$$



$$T(\underline{S}) = -\frac{K_1}{K_2} \frac{\underline{S} + \underline{Z}_1}{\underline{S} + \underline{P}_1}$$



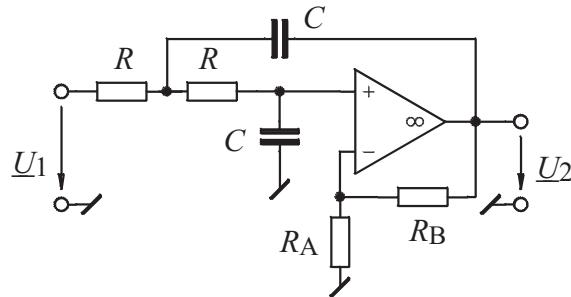
$$T(\underline{S}) = \frac{-\underline{S}K}{(\underline{S} + \underline{P}_1)(\underline{S} + \underline{P}_2)}$$



Figur 17.4 Realisierungen von UTFs 1. Ordnung mit einem Opamp.

17.1.2 Die Sallen + Key-Schaltung: eine TP-Sektion 2.Ordnung

Die in Figur 17.5 dargestellte *Sallen + Key-Schaltung* ist eine TP-Sektion 2.Ordnung.



Figur 17.5 Die Sallen + Key-Schaltung, eine Tiefpasssektion 2. Ordnung

Eine (etwas längere) Analyse liefert

$$T(\underline{s}) = \frac{\frac{\beta}{R^2 C^2}}{\underline{s}^2 + \underline{s} \frac{3-\beta}{RC} + \frac{1}{R^2 C^2}} \quad (17.10)$$

$$\text{mit } \beta = 1 + \frac{R_B}{R_A} \quad (17.11)$$

Der Vergleich mit der allgemeinen TP-Übertragungsfunktion 2. Ordnung

$$T_{\text{TP}}(\underline{s}) = \frac{K \omega_p^2}{\underline{s}^2 + \underline{s} \frac{\omega_p}{q_p} + \omega_p^2} \quad (17.12)$$

liefert die Konstanten

$$\omega_p = \frac{1}{RC}; \quad \frac{\omega_p}{q_p} = \frac{3-\beta}{RC}; \quad K = \beta \quad (17.13)$$

Mit (17.11) und (17.13) lassen sich R und R_B/R_A bei festgelegtem C bestimmen:

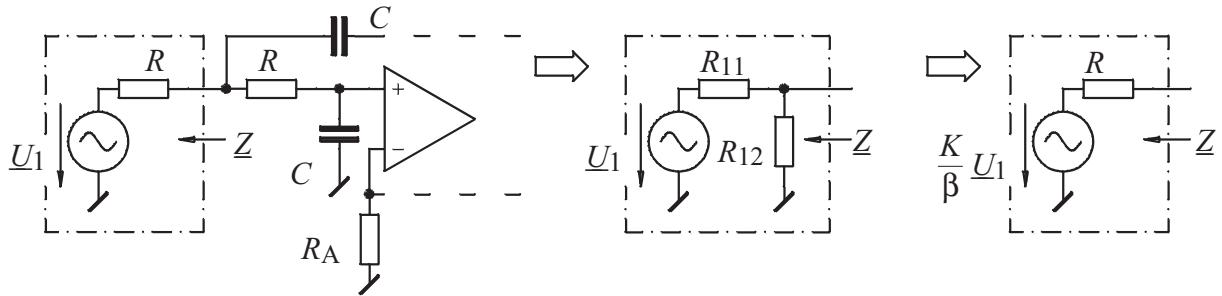
$$R = \frac{1}{\omega_p C} \quad (17.14)$$

$$\frac{R_B}{R_A} = \beta - 1 = 2 - \frac{1}{q_p} \quad (17.15)$$

Die Spannungsverstärkung K bei $\omega=0$ ist dabei bereits durch die geforderte Güte q_p festgelegt:

$$K = \beta = 3 - \frac{1}{q_p} \quad (17.16)$$

Eine DC-Verstärkung $K < \beta$ kann nach Figur 17.6 mit einem Spannungsteiler am Eingang der Sallen + Key - Schaltung erreicht werden.



Figur 17.6 Reduzierung der Spannungsverstärkung der Sallen + Key-Schaltung durch einen Spannungsteiler am Eingang.

Beim Ersatz des Eingangswiderstandes R durch den Spannungsteiler R_{11}, R_{12} muss die Impedanz $\underline{Z} = R$ erhalten bleiben. Der mit dem Spannungsteiler versehene Schaltungseingang verhält sich somit wie eine Spannungsquelle mit dem Innenwiderstand R und mit der Quellenspannung U_q :

$$R = \frac{R_{11} R_{12}}{R_{11} + R_{12}}; \quad U_q = \frac{K}{\beta} \underline{U}_1 \quad \text{mit} \quad \frac{K}{\beta} = \frac{R_{12}}{R_{11} + R_{12}}$$

Der Spannungsteiler R_{11}, R_{12} wird somit wie folgt dimensioniert:

$$R_{11} = \frac{R \beta}{K} = \frac{R}{K} \left(3 - \frac{1}{q_p} \right) \quad (17.17)$$

$$R_{12} = \frac{R_{11} R}{R_{11} - R} \quad (17.18)$$

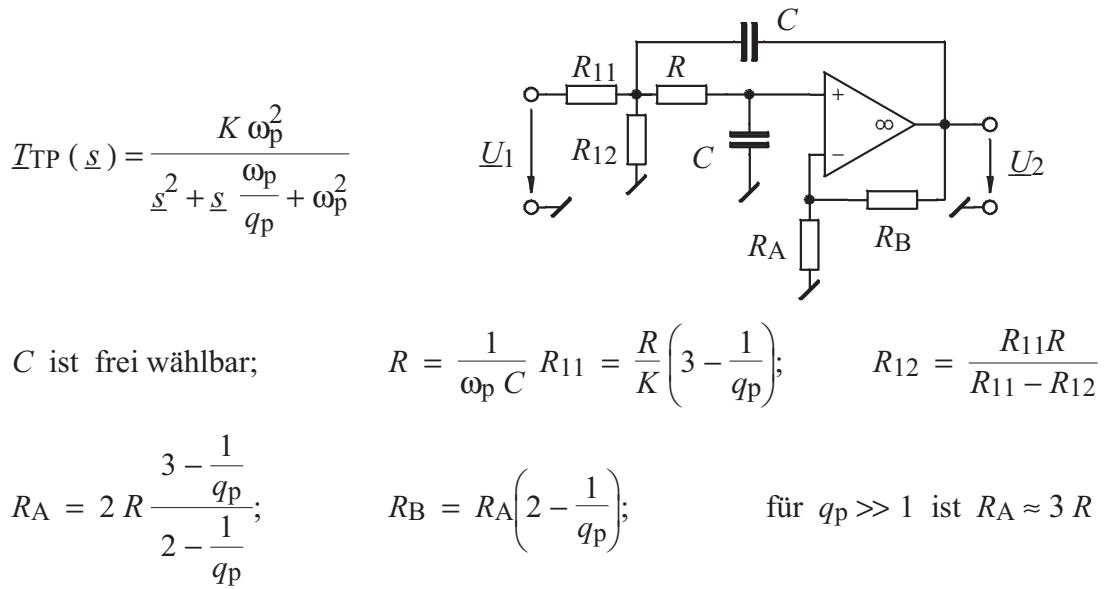
In der Wahl von R_A und R_B sind bisher keine absoluten Werte angegeben worden. Nur das Verhältnis R_B/R_A ist mit (17.15) festgelegt. Es ist aber eine bekannte Tatsache, dass Operationsverstärker minimalen DC-Offset aufweisen, wenn sie mit gleichen Eingangswiderständen betrieben werden. Damit gilt die Bedingung:

$$R_A \parallel R_B = \frac{R_A R_B}{R_A + R_B} = \frac{R_A \left(2 - \frac{1}{q_p} \right)}{3 - \frac{1}{q_p}} = 2 R \quad (17.19)$$

Daraus erhalten wir mit (17.15)

$$R_A = 2 R \frac{\frac{3 - \frac{1}{q_p}}{2 - \frac{1}{q_p}}}{\frac{3 - \frac{1}{q_p}}{2 - \frac{1}{q_p}}} \quad (17.20)$$

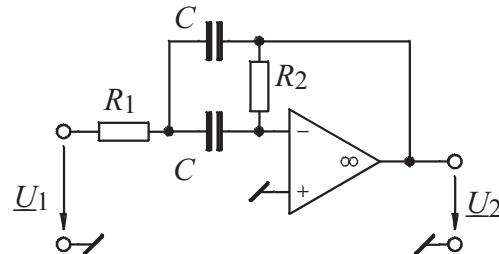
Figur 17.7 zeigt eine Zusammenfassung der Dimensionierung der Sallen + Key - Schaltung.



Figur 17.7 Die Dimensionierung der Sallen + Key-Schaltung

17.1.3 Die Delyiannis-Friend-Schaltung: eine Bandpass-Schaltung 2. Ordnung

In Figur 17.8 ist die Delyiannis-Friend-Schaltung, eine Bandpass-Schaltung 2. Ordnung, dargestellt.



Figur 17.8 Die Delyiannis-Friend-Schaltung.

Die Analyse der Schaltung liefert eine Übertragungsfunktion

$$T(\underline{s}) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{-\frac{\underline{s}}{R_1 C}}{\underline{s}^2 + \underline{s} \frac{2}{R_2 C} + \frac{1}{R_1 R_2 C^2}} \quad (17.21)$$

Die Standardform der Übertragungsfunktion der BP 2. Ordnung ist

$$T(\underline{s}) = \frac{-\underline{s} K \frac{\omega_p}{q_p}}{\underline{s}^2 + \underline{s} \frac{\omega_p}{q_p} + \omega_p^2} \quad (17.22)$$

Bei vorgewähltem C finden wir für die Widerstände R_1 und R_2 :

$$R_2 = \frac{2 q_p}{\omega_p C}; \quad R_1 = \frac{1}{R_2 \omega_p^2 C^2} \quad (17.23)$$

Dabei ist die Verstärkung K bei der Resonanzfrequenz $\omega = \omega_p$ mit

$$K = 2 q_p^2$$

festgelegt. Es wird hier daran erinnert, dass die Übertragungsfunktion der Schaltung unverändert bleibt, wenn alle Impedanzen mit dem gleichen Faktor K_s skaliert werden:

$$R \rightarrow K_s R \quad C \rightarrow C/K_s$$

17.1.4 Realisierung einer UTF 2. Ordnung mit drei Operationsverstärkern

Wir gehen von der allgemeinen invertierenden TP-UTF 2. Ordnung

$$T(\underline{s}) = \frac{-K \omega_p^2}{\underline{s}^2 + \underline{s} \frac{\omega_p}{q_p} + \omega_p^2} \quad (17.24)$$

aus und realisieren diese, indem wir vorerst einige Umformungen vornehmen.

Mit der Normierung $\underline{S} = \underline{s}/\omega_p$ ist

$$T(\underline{S}) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{-K}{\underline{S}^2 + \frac{\underline{S}}{q_p} + 1} \quad (17.25)$$

Dies ist identisch mit den folgenden Umformungen:

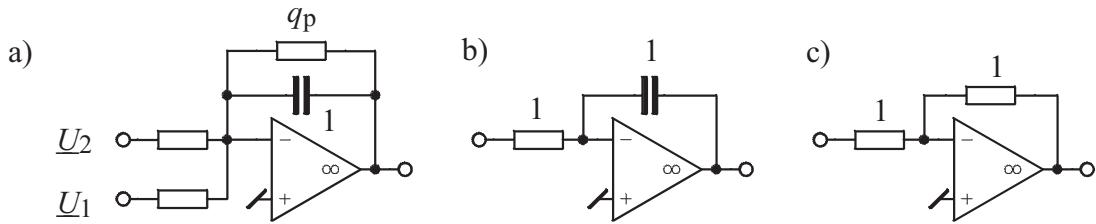
$$\left(\underline{S}^2 + \frac{\underline{S}}{q_p} + 1 \right) \underline{U}_2 = -K \underline{U}_1; \quad \left(1 + \frac{1}{\underline{S} \left(\underline{S} + \frac{1}{q_p} \right)} \right) \underline{U}_2 = \frac{-K \underline{U}_1}{\underline{S} \left(\underline{S} + \frac{1}{q_p} \right)}$$

Diese letzte Darstellung kann so dargestellt werden, dass sie mit elementaren Opamp-Schaltungen realisierbar ist:

$$\underline{U}_2 = (\underline{U}_2 + K \underline{U}_1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ \underline{S} + \frac{1}{q_p} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ \underline{S} \end{pmatrix} \cdot (-1) \quad (17.26)$$

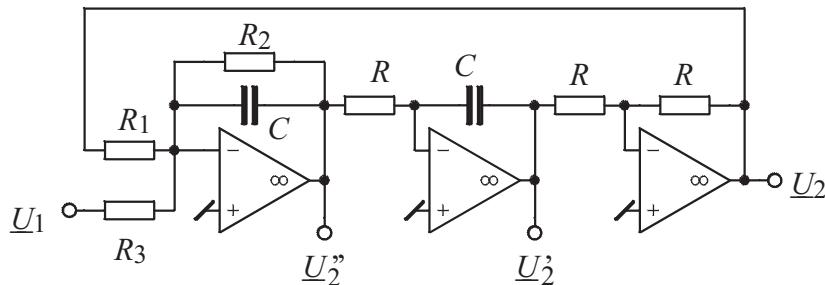
Summierung TP 1. Ordnung Integrator Inverter

Die entsprechenden Opamp-Schaltungen sind in Figur 17.9 dargestellt.



Figur 17.9 Grundschaltungen zur Realisierung der Faktoren von (17.26):
a) Summierer mit TP 1. Ordnung, b) Integrator und c) Inverter

Die in Figur 17.9 dargestellten Elemente werden nach Figur 17.10 zusammengeschaltet.



Figur 17.10 Vollständiger Tiefpass 2. Ordnung

Die Teilschaltung bestehend aus TP 1. Ordnung und dem Integrator hat dabei die folgende Übertragungsfunktion zu liefern:

$$\frac{\underline{U}_2}{(\underline{U}_2 + K \underline{U}_1)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{R_1 C} \\ \frac{1}{R_2 C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{RC} \\ \frac{1}{s} \end{pmatrix} (-1) = \frac{-\omega_p^2}{s^2 + s \frac{\omega_p}{q_p}} \quad (17.27)$$

Der Koeffizientenvergleich liefert

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{R_1 R} C}; \quad q_p = \frac{R_2}{\sqrt{R_1 R}}; \quad K = \frac{R_1}{R_3} \quad (17.28)$$

Die Parametereinstellung dieser Schaltung ist besonders einfach: zuerst wird eine "vernünftige" Wahl für R und C getroffen. "Vernünftig" heisst in diesem Fall, dass R in der Größenordnung der realisierbaren Werte: $k\Omega \dots 100 k\Omega$ und die Zeitkonstante $RC \approx 1/\omega_p$ gewählt wird. Mit diesen Annahmen wird R_1 von ω_p , R_2 von q_p und R_3 von K bestimmt.

Mit den in Figur 17.10 angegebenen Abgriffen für \underline{U}_2' und \underline{U}_2'' werden gleichzeitig die folgenden UTFs realisiert:

$$\frac{\underline{U}_2'}{\underline{U}_1} = \frac{K \omega_p^2}{s^2 + s \frac{\omega_p}{q_p} + \omega_p^2} \quad (\text{nicht invertierender Tiefpass}) \quad (17.29)$$

$$\frac{\underline{U}_2''}{\underline{U}_1} = \frac{-s K R C \omega_p^2}{s^2 + s \frac{\omega_p}{q_p} + \omega_p^2} \quad (\text{Bandpass}) \quad (17.30)$$

Als Beispiel soll nun mit dieser Schaltung ein Butterworth-Tiefpass 4. Ordnung mit der 3 dB-Grenzfrequenz $f_{3\text{dB}} = 1 \text{ kHz}$ entworfen werden.

Gemäss Appendix A2 hat die normierte Tiefpassübertragungsfunktion $T(\underline{S}) = 1/Q_n(\underline{S})$ folgende zwei quadratische Terme im Nenner:

$$Q_n(\underline{S}) = (1 + 0.765 \underline{S} + \underline{S}^2) (1 + 1.848 \underline{S} + \underline{S}^2)$$

Nach Spezifikation ist die Polkreisfrequenz für beide Terme

$$\omega_p = \omega_{3\text{dB}} = 6283 \text{ s}^{-1}$$

Die frei wählbaren Elemente R und C werden für die beiden quadratischen Terme wie folgt festgelegt:

$$R = 10 \text{ k}\Omega \quad 10 \text{ k}\Omega$$

$$C = 18 \text{ nF} \quad 18 \text{ nF}$$

Nach (17.28) sind

$$R_1 = \frac{1}{\omega_p^2 R C^2} = 7.82 \text{ k}\Omega \quad 7.82 \text{ k}\Omega$$

$$R_2 = q_p \sqrt{R_1 R} = 11.6 \text{ k}\Omega \quad 4.78 \text{ k}\Omega$$

$$R_3 = R_1 / K = 7.82 \text{ k}\Omega \quad 7.82 \text{ k}\Omega \quad (K = 1)$$

Damit ist der Butterworth-Tiefpass vollständig entworfen.

Mit der in Figur 17.10 dargestellten Schaltung wurde ein einfacher Baublock für aktive Filter besprochen. Kommerziell erhältlich sind weitere fertige Baublöcke bestehend aus vier Opamps, sog. Biquads, die mit externer Beschaltung als TP, BP, BS, HP und AP konfiguriert werden können. Eine Einführung zu diesen Schaltungen findet sich in [5].

Literatur für Filtertheorie

- [1] A. I. Zverev: *Handbook of filter synthesis*. New York: John Wiley & Sons, 1967.
- [2] G.S. Moschytz, P. Horn: *Active filter design handbook*. New York: John Wiley & Sons, 1981.
- [3] M.E. van Valkenburg: *Analog filter design*. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1982.
- [4] M.S. Ghausi, K.R. Laker: *Modern filter design*. Engelwood Cliffs: Prentice-Hall Inc, 1981.
- [5] U. Tietze, Ch. Schenk: *Halbleiter-Schaltungstechnik*. Berlin: Springer Verlag, 1993 (10. Auflage).
- [6] R. Schaumann, M.S. Ghausi, K.R. Laker: *Design of analog filters*. Engelwood Cliffs: Prentice-Hall Inc., 1990.
- [7] R. Saal, W. Entenmann: *Handbuch zum Filterentwurf*. Heidelberg: Hüting, 1988.

Anhang

1 Normierte Tiefpassübertragungsfunktionen

A. Butterworth - Filter

Ansatz für die auf die 3dB-Durchlassgrenzfrequenz normierte Übertragungsfunktion ($A_{\max} = 3 \text{ dB}$, für $\Omega_D = \Omega_{3\text{dB}} = 1$) mit $|\underline{H}_N(\underline{S})|_{\max} = |\underline{H}_N(0)| = 1$:

$$|\underline{H}_N(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \Omega^{2n}}$$

Polynomdarstellung der normierten Übertragungsfunktion:

$$\underline{H}_N(\underline{S}) = \frac{1}{Q(\underline{S})}$$

$$\text{mit } Q(\underline{S}) = \underline{S}^n + A_{n-1}\underline{S}^{n-1} + \dots + A_2\underline{S}^2 + A_1\underline{S} + A_0$$

Die Koeffizienten der Polynome der Übertragungsfunktionen können aus den Tabellen A.1 und A.2 entnommen werden.

Für eine Filterspezifikation mit beliebiger Durchlassdämpfung A_{\max} und Durchlassgrenzfrequenz f_D kann die 3dB-Grenzfrequenz $f_{3\text{dB}}$ mit der folgenden Beziehung bestimmt werden:

$$f_{3\text{dB}} = \sqrt[2n]{\frac{1}{10^{0.1A_{\max}} - 1}} f_D$$

n	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
1	1.00000							
2	1.00000	1.41421						
3	1.00000	2.00000	2.00000					
4	1.00000	2.61313	3.41421	2.61313				
5	1.00000	3.23607	5.23607	5.23607	3.23607			
6	1.00000	3.86370	7.46410	9.14162	7.46410	3.86370		
7	1.00000	4.49396	10.09783	14.59179	14.59179	10.09783	4.49396	
8	1.00000	5.12583	13.13707	21.84615	25.68836	21.84615	13.13707	5.12583

Tabelle A.1: Koeffizienten des Nennerpolynoms $\underline{Q}(\underline{S})$

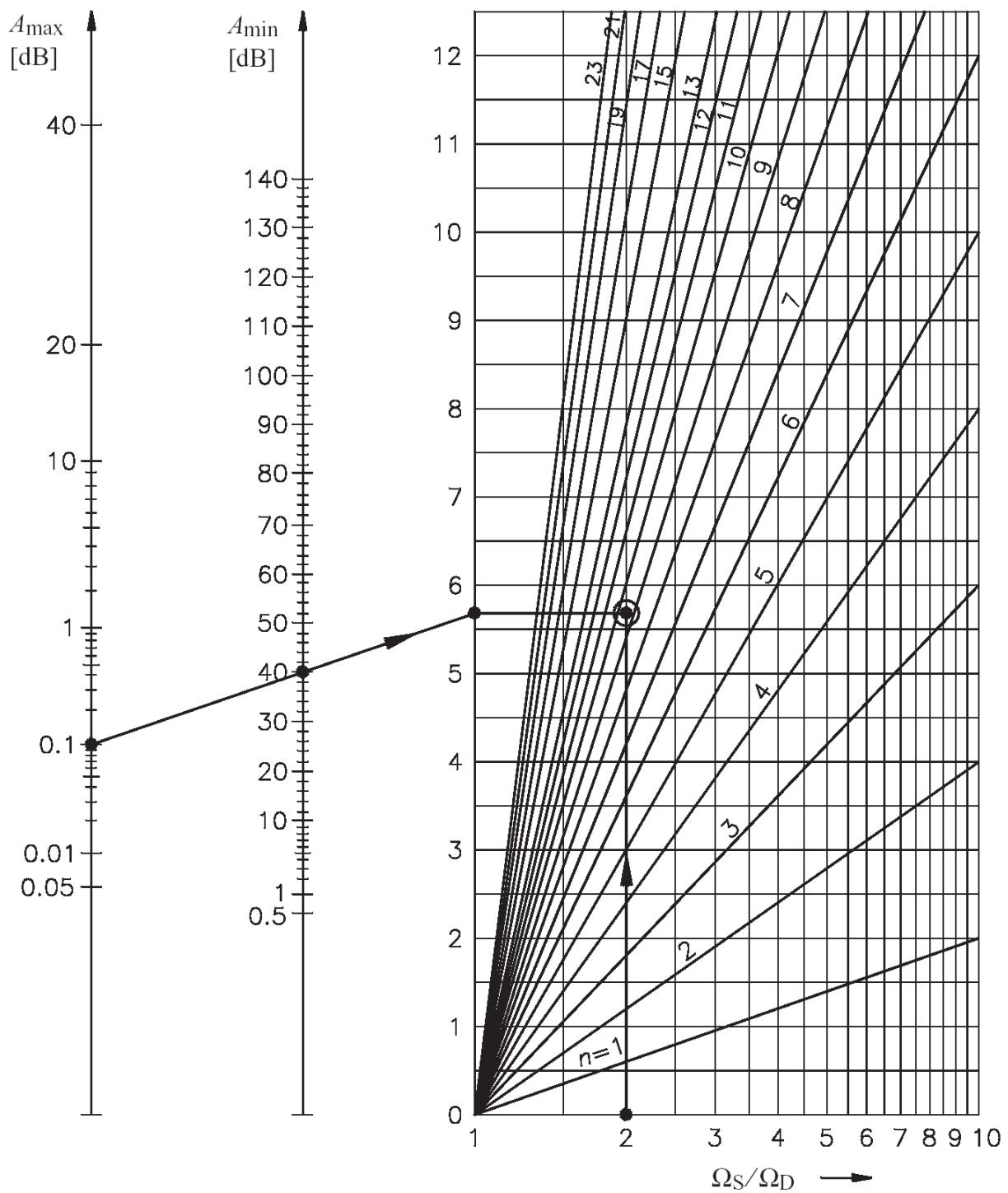
n	
1	$(1 + \underline{S})$
2	$(1 + 1.414 \underline{S} + \underline{S}^2)$
3	$(1 + \underline{S})(1 + \underline{S} + \underline{S}^2)$
4	$(1 + 0.765 \underline{S} + \underline{S}^2)(1 + 1.848 \underline{S} + \underline{S}^2)$
5	$(1 + \underline{S})(1 + 0.618 \underline{S} + \underline{S}^2)(1 + 1.618 \underline{S} + \underline{S}^2)$
6	$(1 + 0.518 \underline{S} + \underline{S}^2)(1 + 1.414 \underline{S} + \underline{S}^2)(1 + 1.932 \underline{S} + \underline{S}^2)$
7	$(1 + \underline{S})(1 + 0.445 \underline{S} + \underline{S}^2)(1 + 1.247 \underline{S} + \underline{S}^2)(1 + 1.802 \underline{S} + \underline{S}^2)$
8	$(1 + 0.390 \underline{S} + \underline{S}^2)(1 + 1.111 \underline{S} + \underline{S}^2)(1 + 1.663 \underline{S} + \underline{S}^2)(1 + 1.962 \underline{S} + \underline{S}^2)$

Tabelle A.2: Faktorenzerlegung von $\underline{Q}(\underline{S})$

Die konjugiert komplexen Polpaare weisen folgende Polgüten auf:

n	2	3	4	5	6	7	8
q_p	0.71	1.00	1.31 0.54	1.62 0.62	1.93 0.71 0.52	2.25 0.80 0.55	2.57 0.90 0.60 0.51

Tabelle A.3: Polgüten der konjugiert komplexen Polpaare



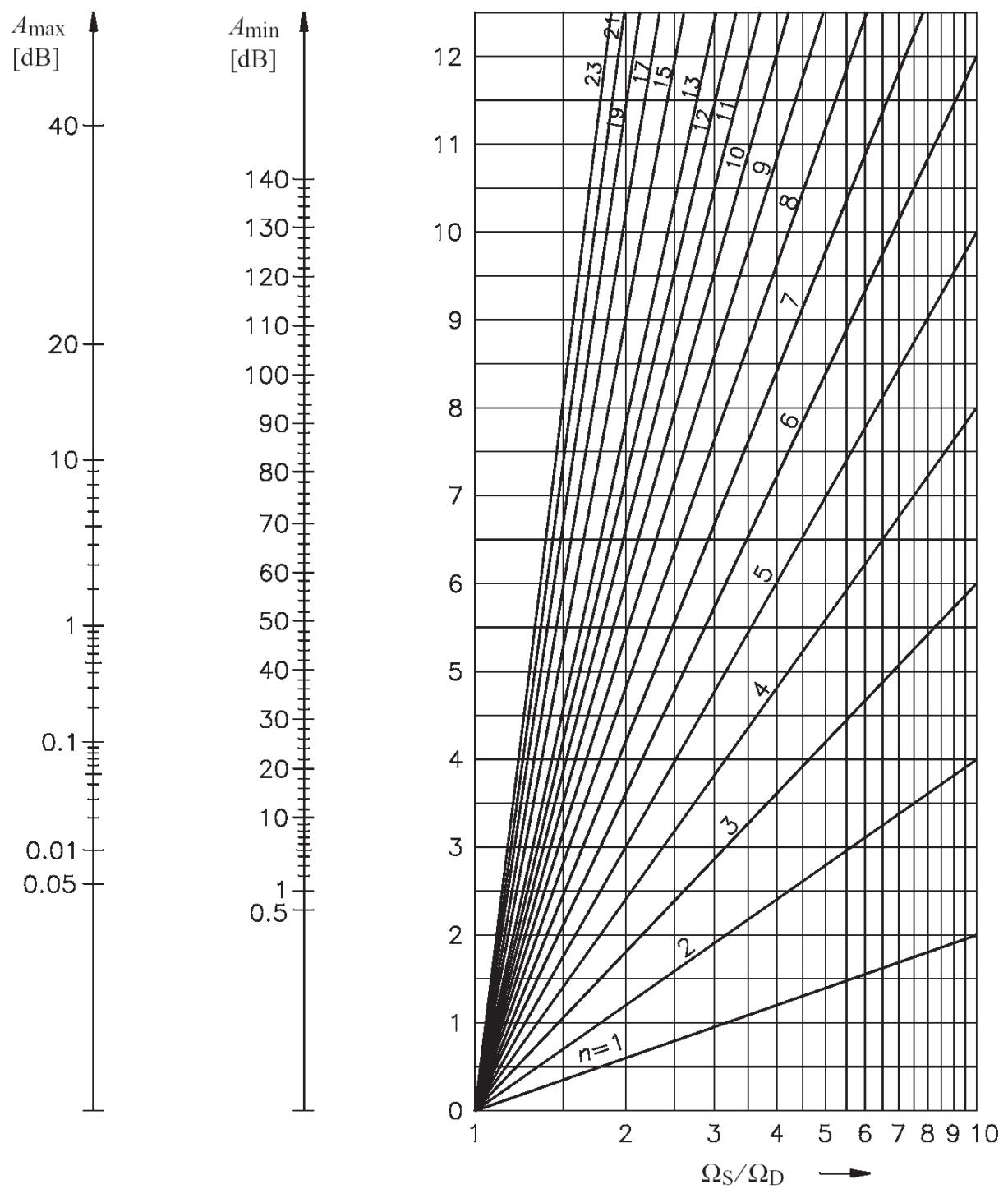
Ablesebeispiel für die Benützung der Nomogramme für die Bestimmung des Filtergrades n :

$$\text{Gegeben: } A_{\max} = 0.1 \text{ dB}$$

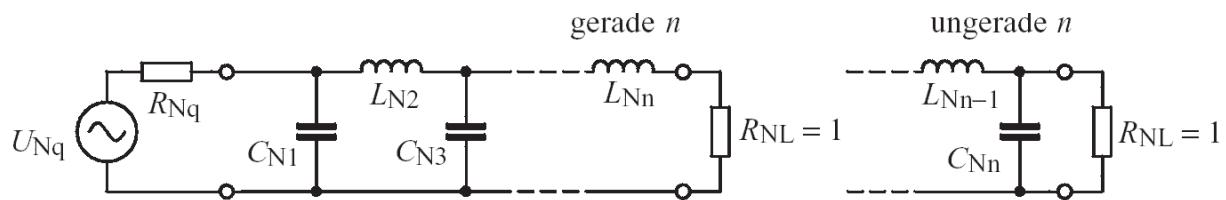
$$A_{\min} = 40 \text{ dB}$$

$$\Omega_S / \Omega_D = 2$$

Resultat : $n \geq 10$



Figur A.1 Nomogramm für die Bestimmung des Filtergrades n des Butterworth - Filters



n	$A_{\max} = 3 \text{ dB}$				
	R_{Nq}	C_{N1}	L_{N2}	C_{N3}	L_{N4}
2	1.0000	1.4142	1.4142		
	1.1111	1.0353	1.8352		
	1.2500	0.8485	2.1213		
	1.4286	0.6971	2.4387		
	1.6667	0.5657	2.8284		
	2.0000	0.4483	3.3461		
	2.5000	0.3419	4.0951		
	3.3333	0.2447	5.3126		
	5.0000	0.1557	7.7067		
	10.0000	0.0743	14.8138		
3	inf.	1.4142	0.7071		
	1.0000	1.0000	2.0000	1.0000	
	0.9000	0.8082	1.6332	1.5994	
	0.8000	0.8442	1.3840	1.9259	
	0.7000	0.9152	1.1652	2.2774	
	0.6000	1.0225	0.9650	2.7024	
	0.5000	1.1811	0.7789	3.2612	
	0.4000	1.4254	0.6042	4.0642	
	0.3000	1.8380	0.4396	5.3634	
	0.2000	2.6687	0.2842	7.9102	
4	0.1000	5.1672	0.1377	15.4554	
	inf.	1.5000	1.3333	0.5000	
n	$1/R_{Nq}$	L_{N1}	C_{N2}	L_{N3}	C_{N4}

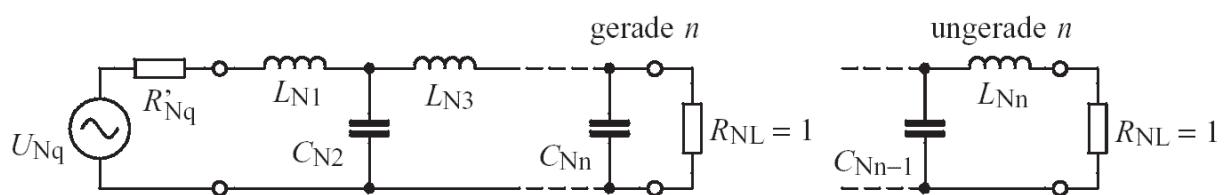
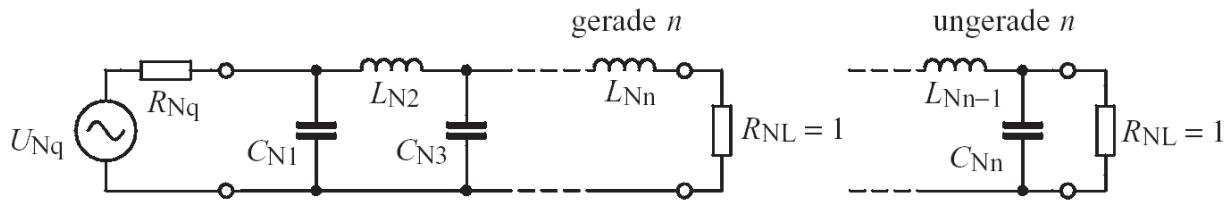


Tabelle A.4: Normierte Elemente für Butterworth - Filter (frequenznormiert auf die 3dB-Grenzfrequenz) $n = 2 \dots 4$.



		$A_{\max} = 3 \text{ dB}$						
n	R_{Nq}	C_{N1}	L_{N2}	C_{N3}	L_{N4}	C_{N5}	L_{N6}	C_{N7}
5	1.0000	0.6180	1.6180	2.0000	1.6180	0.6180		
	0.9000	0.4416	1.0265	1.9095	1.7562	1.3887		
	0.8000	0.4698	0.8660	2.0605	1.5443	1.7380		
	0.7000	0.5173	0.7313	2.2849	1.3326	2.1083		
	0.6000	0.5860	0.6094	2.5998	1.1255	2.5524		
	0.5000	0.6857	0.4955	3.0510	0.9237	3.1331		
	0.4000	0.8378	0.3877	3.7357	0.7274	3.9648		
	0.3000	1.0937	0.2848	4.8835	0.5367	5.3073		
	0.2000	1.6077	0.1861	7.1849	0.3518	7.9345		
	0.1000	3.1522	0.0912	14.0945	0.1727	15.7103		
6	inf.	1.5451	1.6944	1.3820	0.8944	0.3090		
	1.0000	0.5176	1.4142	1.9319	1.9319	1.4142	0.5176	
	1.1111	0.2890	1.0403	1.3217	2.0539	1.7443	1.33347	
	1.2500	0.2445	1.1163	1.1257	2.2389	1.5498	1.6881	
	1.4286	0.2072	1.2363	0.9567	2.4991	1.3464	2.0618	
	1.6667	0.1732	1.4071	0.8011	2.8580	1.1431	2.5092	
	2.0000	0.1412	1.6531	0.6542	3.3687	0.9423	3.0938	
	2.5000	0.1108	2.0275	0.5139	4.1408	0.7450	3.9305	
	3.3333	0.0816	2.6559	0.3788	5.4325	0.5517	5.2804	
	5.0000	0.0535	3.9170	0.2484	8.0201	0.3628	7.9216	
7	10.0000	0.0263	7.7053	0.1222	15.7855	0.1788	15.7375	
	inf.	1.5529	1.7593	1.5529	1.2016	0.7579	0.2588	
n		$1/R_{Nq}$	L_{N1}	C_{N2}	L_{N3}	C_{N4}	L_{N5}	C_{N6}
								L_{N7}

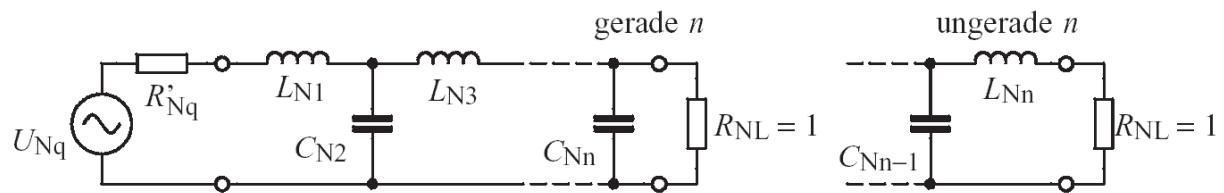


Tabelle A.5: Normierte Elemente für Butterworth - Filter (frequenznormiert auf die 3dB-Grenzfrequenz) $n = 5 \text{--} 7$.

B. Tschebyscheff - Filter

Ansatz für die auf die Durchlassgrenzfrequenz normierte Übertragungsfunktion ($\Omega_D = 1$) mit $|T_N(\underline{S})|_{\max} = 1$

$$\text{Ansatz: } \left| T_N(j\Omega) \right|^2 = \frac{1}{1 + e^2 C_n^2(\Omega)}$$

Die Tschebyscheff - Polynome $C_n(\Omega)$ können aus der Tabelle B.1 entnommen werden.

Polynomdarstellung der normierten Übertragungsfunktion:

$$T_N(\underline{S}) = \frac{K}{Q(\underline{S})}$$

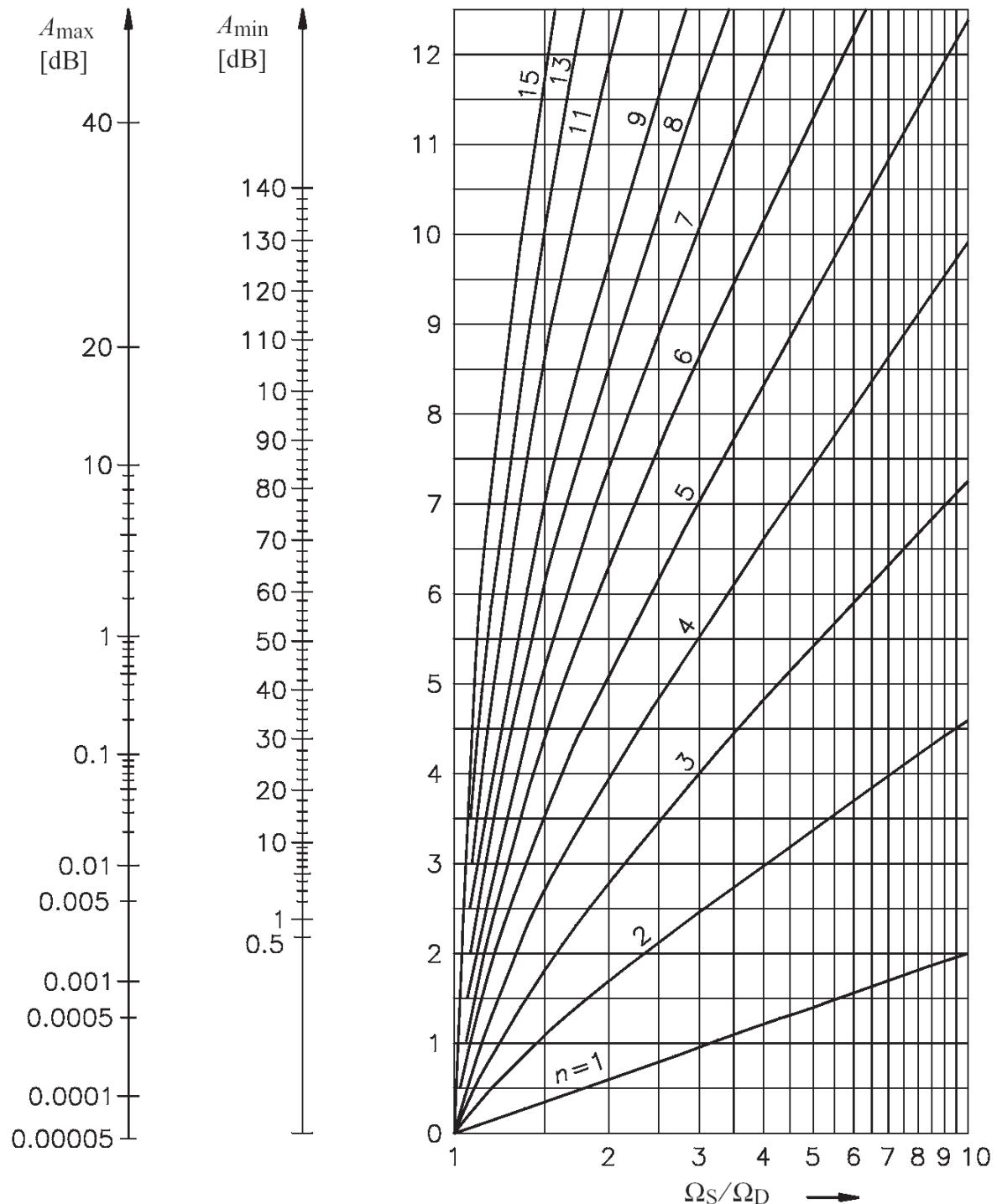
$$\text{mit } Q(\underline{S}) = \underline{S}^n + A_{n-1} \underline{S}^{n-1} + \dots + A_2 \underline{S}^2 + A_1 \underline{S} + A_0$$

Die Koeffizienten der Nennerpolynome $Q(\underline{S})$ der Übertragungsfunktionen können den Tabellen B.2 bis B.11 entnommen werden.

Die 3dB-Grenzfrequenz f_{3dB} eines Tschebyscheff - Filters kann mit der Beziehung:

$$f_{3dB} = \cosh \left(\frac{1}{n} \operatorname{arcosh} \left(\frac{1}{e} \right) \right) \cdot f_D$$

aus den Größen A_{\max} und f_D bestimmt oder der Tabelle B.12 entnommen werden.



Figur B.1 Nomogramm für die Bestimmung des Filtergrades n des Tschebyscheff-Filters

n	
0	1
1	Ω
2	$2\Omega^2 - 1$
3	$4\Omega^3 - 3\Omega$
4	$8\Omega^4 - 8\Omega^2 + 1$
5	$16\Omega^5 - 20\Omega^3 + 5\Omega$
6	$32\Omega^6 - 48\Omega^4 + 18\Omega^2 - 1$
7	$64\Omega^7 - 112\Omega^5 + 56\Omega^3 - 7\Omega$
8	$128\Omega^8 - 256\Omega^6 + 160\Omega^4 - 32\Omega^2 + 1$

Tabelle B.1: Tschebyscheff - Polynome $C_n(\Omega)$

n	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	K
1	6.55222								6.552
2	3.31329	2.37209							3.275
3	1.63809	2.62953	1.93883						1.638
4	0.82851	2.02550	2.62680	1.80377					0.8195
5	0.40951	1.43556	2.39696	2.77071	1.74396				0.410
6	0.20713	0.90176	2.04784	2.77908	2.96575	1.71217			0.2046
7	0.10238	0.56179	1.48293	2.70514	3.16925	3.18350	1.69322		0.102
8	0.05179	0.32645	1.06667	2.15932	3.41855	3.56485	3.41297	1.68104	0.0514

Tabelle B.2: Koeffizienten von $\underline{Q}(\underline{S})$ für 0.1dB-Rippel ($e = 0.153$)

n	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	K
1	2.86278								2.863
2	1.51620	1.42562							1.431
3	0.71569	1.53490	1.25291						0.716
4	0.37905	1.02546	1.71687	1.19739					0.3578
5	0.17892	0.75252	1.30957	1.93737	1.17249				0.179
6	0.09476	0.43237	1.17186	1.58976	2.17184	1.15918			0.0894
7	0.04473	0.28207	0.75565	1.64790	1.86941	2.41265	1.15122		0.0447
8	0.02369	0.15254	0.57356	1.14859	2.18402	2.14922	2.65675	1.14608	0.0227

Tabelle B.3: Koeffizienten von $\underline{Q}(\underline{S})$ für 0.5dB-Rippel ($e = 0.349$)

n	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	K
1	1.96523								1.965
2	1.10251	1.09773							0.983
3	0.49131	1.23841	0.98834						0.491
4	0.27563	0.74262	1.45392	0.95281					0.246
5	0.12283	0.58053	0.97440	1.68882	0.93682				0.123
6	0.06891	0.30708	0.93935	1.20214	1.93083	0.92825			0.0614
7	0.03071	0.21367	0.54862	1.35754	1.42879	2.17608	0.92312		0.0307
8	0.01723	0.10734	0.44783	0.84682	1.83690	1.65516	2.42303	0.91981	0.0152

Tabelle B.4: Koeffizienten von $\underline{Q}(\underline{S})$ für 1dB-Rippel ($e = 0.509$)

n	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	K
1	1.30756								1.3076
2	0.82302	0.80382							0.6537
3	0.32689	1.02219	0.73782						0.3269
4	0.20577	0.51680	1.25648	0.71622					0.1636
5	0.08172	0.45935	0.69348	1.49954	0.70646				0.0817
6	0.05144	0.21027	0.77146	0.86701	1.74586	0.70123			0.0405
7	0.02042	0.16609	0.38251	1.14444	1.03922	1.99353	0.69789		0.0204
8	0.01286	0.07294	0.35870	0.59822	1.57958	1.21171	2.24225	0.69606	0.0103

Tabelle B.5: Koeffizienten von $\underline{Q}(\underline{S})$ für 2dB-Rippel ($e = 0.765$)

n	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	K
1	1.00238								1.0024
2	0.70795	0.64490							0.5006
3	0.25059	0.92835	0.59724						0.2506
4	0.17699	0.40477	1.16912	0.58158					0.1252
5	0.06264	0.40794	0.54886	1.41498	0.57443				0.0626
6	0.04425	0.16343	0.69910	0.69061	1.66285	0.57070			0.0311
7	0.01566	0.14615	0.30002	1.05184	0.83144	1.91155	0.56842		0.0156
8	0.01106	0.05648	0.32076	0.47190	1.46670	0.97195	2.16071	0.56695	0.00778

Tabelle B.6: Koeffizienten von $\underline{Q}(\underline{S})$ für 3dB-Rippel ($e = 1$)

n	
1	$(6.552 + \underline{S})$
2	$(3.314 + 2.372 \underline{S} + \underline{S}^2)$
3	$(0.969 + \underline{S})(1.690 + 0.969 \underline{S} + \underline{S}^2)$
4	$(1.330 + 0.528 \underline{S} + \underline{S}^2)(0.623 + 1.275 \underline{S} + \underline{S}^2)$
5	$(0.539 + \underline{S})(1.195 + 0.333 \underline{S} + \underline{S}^2)(0.636 + 0.872 \underline{S} + \underline{S}^2)$
6	$(1.129 + 0.229 \underline{S} + \underline{S}^2)(0.696 + 0.627 \underline{S} + \underline{S}^2)(0.263 + 0.856 \underline{S} + \underline{S}^2)$
7	$(0.377 + \underline{S})(1.092 + 0.168 \underline{S} + \underline{S}^2)(0.753 + 0.470 \underline{S} + \underline{S}^2)(0.330 + 0.679 \underline{S} + \underline{S}^2)$
8	$(1.069 + 0.128 \underline{S} + \underline{S}^2)(0.799 + 0.364 \underline{S} + \underline{S}^2)(0.416 + 0.545 \underline{S} + \underline{S}^2)(0.146 + 0.643 \underline{S} + \underline{S}^2)$

Tabelle B.7: Faktorenzerlegung von $\underline{Q}(\underline{S})$ für 0.1dB-Rippel ($e = 0.153.$)

n	
1	$(2.863 + \underline{S})$
2	$(1.516 + 1.426 \underline{S} + \underline{S}^2)$
3	$(0.626 + \underline{S})(1.142 + 0.626 \underline{S} + \underline{S}^2)$
4	$(1.064 + 0.351 \underline{S} + \underline{S}^2)(0.356 + 0.847 \underline{S} + \underline{S}^2)$
5	$(0.362 + \underline{S})(1.036 + 0.224 \underline{S} + \underline{S}^2)(0.477 + 0.586 \underline{S} + \underline{S}^2)$
6	$(1.023 + 0.155 \underline{S} + \underline{S}^2)(0.590 + 0.424 \underline{S} + \underline{S}^2)(0.157 + 0.580 \underline{S} + \underline{S}^2)$
7	$(0.256 + \underline{S})(1.016 + 0.114 \underline{S} + \underline{S}^2)(0.677 + 0.319 \underline{S} + \underline{S}^2)(0.254 + 0.462 \underline{S} + \underline{S}^2)$
8	$(1.012 + 0.087 \underline{S} + \underline{S}^2)(0.741 + 0.248 \underline{S} + \underline{S}^2)(0.359 + 0.372 \underline{S} + \underline{S}^2)(0.088 + 0.439 \underline{S} + \underline{S}^2)$

Tabelle B.8: Faktorenzerlegung von $\underline{Q}(\underline{S})$ für 0.5dB-Rippel ($e = 0.349.$)

n	
1	$(1.965 + \underline{S})$
2	$(1.103 + 1.098 \underline{S} + \underline{S}^2)$
3	$(0.494 + \underline{S})(0.994 + 0.494 \underline{S} + \underline{S}^2)$
4	$(0.987 + 0.279 \underline{S} + \underline{S}^2)(0.279 + 0.674 \underline{S} + \underline{S}^2)$
5	$(0.287 + \underline{S})(0.988 + 0.179 \underline{S} + \underline{S}^2)(0.429 + 0.468 \underline{S} + \underline{S}^2)$
6	$(0.991 + 0.124 \underline{S} + \underline{S}^2)(0.558 + 0.340 \underline{S} + \underline{S}^2)(0.125 + 0.464 \underline{S} + \underline{S}^2)$
7	$(0.205 + \underline{S})(0.993 + 0.091 \underline{S} + \underline{S}^2)(0.653 + 0.256 \underline{S} + \underline{S}^2)(0.230 + 0.370 \underline{S} + \underline{S}^2)$
8	$(0.994 + 0.070 \underline{S} + \underline{S}^2)(0.724 + 0.199 \underline{S} + \underline{S}^2)(0.341 + 0.298 \underline{S} + \underline{S}^2)(0.070 + 0.352 \underline{S} + \underline{S}^2)$

Tabelle B.9: Faktorenzerlegung von $\underline{Q}(\underline{S})$ für 1dB-RippeL ($e = 0.509$).

n	
1	$(1.308 + \underline{S})$
2	$(0.823 + 0.804 \underline{S} + \underline{S}^2)$
3	$(0.369 + \underline{S})(0.886 + 0.369 \underline{S} + \underline{S}^2)$
4	$(0.924 + 0.210 \underline{S} + \underline{S}^2)(0.222 + 0.506 \underline{S} + \underline{S}^2)$
5	$(0.218 + \underline{S})(0.952 + 0.135 \underline{S} + \underline{S}^2)(0.393 + 0.353 \underline{S} + \underline{S}^2)$
6	$(0.966 + 0.094 \underline{S} + \underline{S}^2)(0.533 + 0.257 \underline{S} + \underline{S}^2)(0.100 + 0.351 \underline{S} + \underline{S}^2)$
7	$(0.155 + \underline{S})(0.975 + 0.069 \underline{S} + \underline{S}^2)(0.635 + 0.194 \underline{S} + \underline{S}^2)(0.212 + 0.280 \underline{S} + \underline{S}^2)$
8	$(0.980 + 0.053 \underline{S} + \underline{S}^2)(0.710 + 0.151 \underline{S} + \underline{S}^2)(0.327 + 0.226 \underline{S} + \underline{S}^2)(0.057 + 0.266 \underline{S} + \underline{S}^2)$

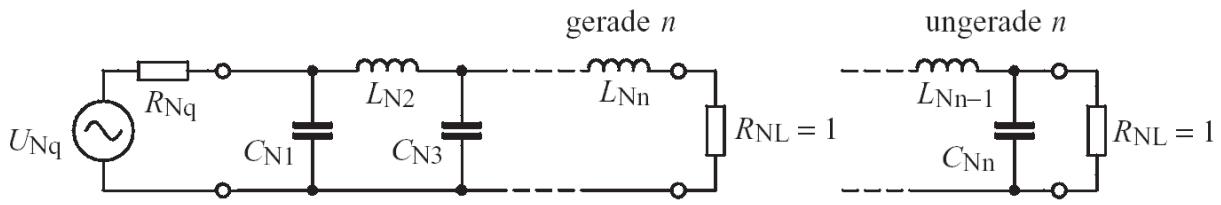
Tabelle B.10: Faktorenzerlegung von $\underline{Q}(\underline{S})$ für 2dB-RippeL ($e = 0.765$).

n	
1	$(1.002 + \underline{S})$
2	$(0.708 + 0.645 \underline{S} + \underline{S}^2)$
3	$(0.299 + \underline{S})(0.839 + 0.299 \underline{S} + \underline{S}^2)$
4	$(0.903 + 0.170 \underline{S} + \underline{S}^2)(0.196 + 0.411 \underline{S} + \underline{S}^2)$
5	$(0.178 + \underline{S})(0.936 + 0.110 \underline{S} + \underline{S}^2)(0.377 + 0.287 \underline{S} + \underline{S}^2)$
6	$(0.955 + 0.076 \underline{S} + \underline{S}^2)(0.522 + 0.209 \underline{S} + \underline{S}^2)(0.089 + 0.285 \underline{S} + \underline{S}^2)$
7	$(0.126 + \underline{S})(0.966 + 0.056 \underline{S} + \underline{S}^2)(0.627 + 0.158 \underline{S} + \underline{S}^2)(0.204 + 0.228 \underline{S} + \underline{S}^2)$
8	$(0.974 + 0.043 \underline{S} + \underline{S}^2)(0.704 + 0.123 \underline{S} + \underline{S}^2)(0.321 + 0.184 \underline{S} + \underline{S}^2)(0.050 + 0.217 \underline{S} + \underline{S}^2)$

Tabelle B.11: Faktorenzerlegung von $\underline{Q}(\underline{S})$ für 3dB-Rippel ($e = 1$).

A_{\max} [dB]	$\Omega_{3\text{dB}}/\Omega_D$							
	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$	$n = 8$
0.1	6.552	1.943	1.389	1.213	1.135	1.093	1.068	1.052
0.5	2.863	1.390	1.167	1.093	1.059	1.041	1.030	1.023
1	1.965	1.218	1.095	1.053	1.034	1.023	1.017	1.013
2	1.308	1.074	1.033	1.018	1.012	1.008	1.006	1.005
3	1.002	1.001	1	1	1	1	1	1

Tabelle B.12: Verhältnis von 3dB-Grenzfrequenz $\Omega_{3\text{dB}}$ zur Durchlassgrenzfrequenz Ω_D



n	$A_{\max} = 0.1 \text{ dB}$				
	R_{Nq}	C_{N1}	L_{N2}	C_{N3}	L_{N4}
2	1.3554	1.2087	1.6382		
	1.4286	0.9771	1.9824		
	1.6667	0.7326	2.4885		
	2.0000	0.5597	3.0538		
	2.5000	0.4169	3.8265		
	3.3333	0.2933	5.0502		
	5.0000	0.1841	7.4257		
	10.0000	0.0868	14.4332		
	inf.	1.3911	0.8191		
3	1.0000	1.4328	1.5937	1.4328	
	0.9000	1.4258	1.4935	1.6219	
	0.8000	1.4511	1.3557	1.8711	
	0.7000	1.5210	1.1927	2.1901	
	0.6000	1.6475	1.0174	2.6026	
	0.5000	1.8530	0.8383	3.1594	
	0.4000	2.1857	0.6603	3.9675	
	0.3000	2.7630	0.4860	5.2788	
	0.2000	3.9418	0.3172	7.8503	
	0.1000	7.5121	0.1549	15.4656	
	inf.	1.5133	1.5090	0.7164	
4	1.3554	0.9924	2.1476	1.5845	1.3451
	1.4286	0.7789	2.3480	1.4292	1.7001
	1.6667	0.5764	2.7304	1.1851	2.2425
	2.0000	0.4398	3.2269	0.9672	2.8563
	2.5000	0.3288	3.9605	0.7599	3.6976
	3.3333	0.2329	5.1777	0.5602	5.0301
	5.0000	0.1475	7.6072	0.3670	7.6143
	10.0000	0.0704	14.8873	0.1802	15.2297
	inf.	1.5107	1.7682	1.4550	0.6725
n	$1/R_{Nq}$	L_{N1}	C_{N2}	L_{N3}	C_{N4}

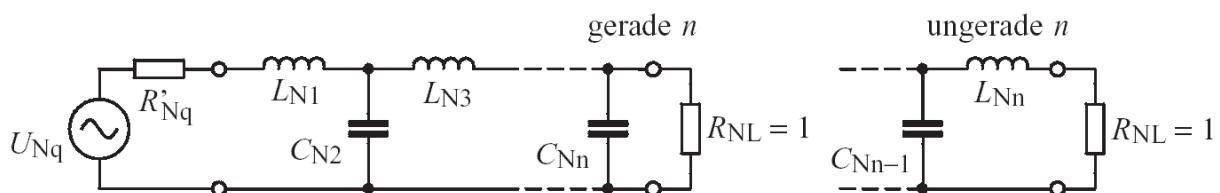
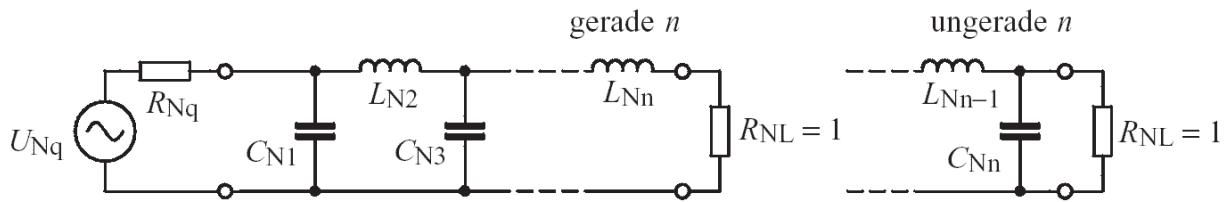


Tabelle B.13: Normierte Elemente für Tschebyscheff - Filter (frequenznormiert auf die 3dB-Grenzfrequenz) mit 0.1dB-Ripplen $n = 2 \dots 4$.



n	$A_{\max} = 0.1 \text{ dB}$							
	R_{Nq}	C_{N1}	L_{N2}	C_{N3}	L_{N4}	C_{N5}	L_{N6}	C_{N7}
5	1.0000	1.3013	1.5559	2.2411	1.5559	1.3013		
	0.9000	1.2845	1.4329	2.3794	1.4878	1.4883		
	0.8000	1.2998	1.2824	2.5819	1.3815	1.7384		
	0.7000	1.3580	1.1170	2.8679	1.2437	2.0621		
	0.6000	1.4694	0.9469	3.2688	1.0846	2.4835		
	0.5000	1.6535	0.7777	3.8446	0.9126	3.0548		
	0.4000	1.9538	0.6119	4.7193	0.7333	3.8861		
	0.3000	2.4765	0.4509	6.1861	0.5503	5.2373		
	0.2000	3.5457	0.2950	9.1272	0.3659	7.8890		
	0.1000	6.7870	0.1447	17.9569	0.1820	15.7447		
6	inf.	1.5613	1.8069	1.7659	1.4173	0.6507		
	1.3554	0.9419	2.0797	1.6581	2.2473	1.5344	1.2767	
	1.4286	0.7347	2.2492	1.4537	2.5437	1.4051	1.6293	
	1.6667	0.5422	2.6003	1.1830	3.0641	1.1850	2.1739	
	2.0000	0.4137	3.0679	0.9575	3.7119	0.9794	2.7936	
	2.5000	0.3095	3.7652	0.7492	4.6512	0.7781	3.6453	
	3.3333	0.2195	4.9266	0.5514	6.1947	0.5795	4.9962	
	5.0000	0.1393	7.2500	0.3613	9.2605	0.3835	7.6184	
	10.0000	0.0666	14.2200	0.1777	18.4267	0.1901	15.3495	
	inf.	1.5339	1.8838	1.8306	1.7485	1.3937	0.6383	
7	1.0000	1.2615	1.5196	2.2392	1.6804	2.2392	1.5196	1.2615
	0.9000	1.2422	1.3946	2.3613	1.5784	2.3966	1.4593	1.4472
	0.8000	1.2550	1.2449	2.5481	1.4430	2.6242	1.3619	1.6967
	0.7000	1.3100	1.0826	2.8192	1.2833	2.9422	1.2326	2.0207
	0.6000	1.4170	0.9169	3.2052	1.1092	3.3841	1.0807	2.4437
	0.5000	1.5948	0.7529	3.7642	0.9276	4.0150	0.9142	3.0182
	0.4000	1.8853	0.5926	4.6179	0.7423	4.9702	0.7384	3.8552
	0.3000	2.3917	0.4369	6.0535	0.5557	6.5685	0.5569	5.2167
	0.2000	3.4278	0.2862	8.9371	0.3692	9.7697	0.3723	7.8901
	0.1000	6.5695	0.1405	17.6031	0.1838	19.3760	0.1862	15.8127
n	inf.	1.5748	1.8577	1.9210	1.8270	1.7340	1.3786	0.6307
	n	$1/R'_{Nq}$	L_{N1}	C_{N2}	L_{N3}	C_{N4}	L_{N5}	C_{N6}

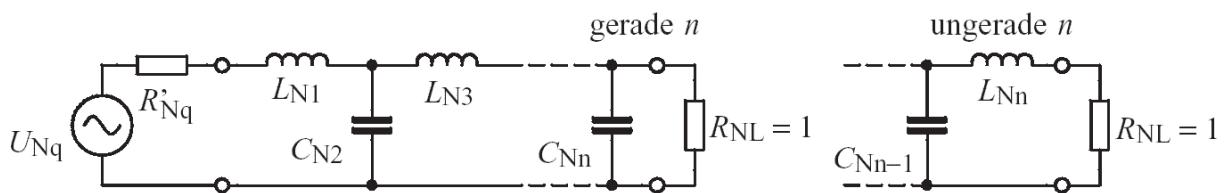
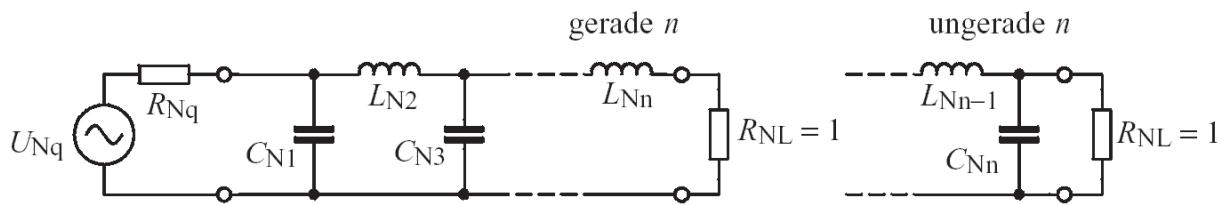


Tabelle B.14: Normierte Elemente für Tschebyscheff - Filter (frequenznormiert auf die 3dB-Grenzfrequenz) mit 0.1dB-Ripple $n = 5...7$.



n	$A_{\max} = 0.5 \text{ dB}$				
	R_{Nq}	C_{N1}	L_{N2}	C_{N3}	L_{N4}
2	1.9841	0.9827	1.9497		
	2.0000	0.9086	2.1030		
	2.5000	0.5635	3.1647		
	3.3333	0.3754	4.4111		
	5.0000	0.2282	6.6995		
	10.0000	0.1052	13.3221		
3	inf.	1.3067	0.9748		
	1.0000	1.8636	1.2804	1.8636	
	0.9000	1.9175	1.2086	2.0255	
	0.8000	1.9965	1.1203	2.2368	
	0.7000	2.1135	1.0149	2.5172	
	0.6000	2.2889	0.8937	2.8984	
	0.5000	2.5571	0.7592	3.4360	
	0.4000	2.9854	0.6146	4.2461	
	0.3000	3.7292	0.4633	5.5762	
	0.2000	5.2543	0.3087	8.2251	
	0.1000	9.8899	0.1534	16.1177	
	inf.	1.5720	1.5179	0.9318	
n	$1/R_{Nq}'$	L_{N1}	C_{N2}	L_{N3}	C_{N4}

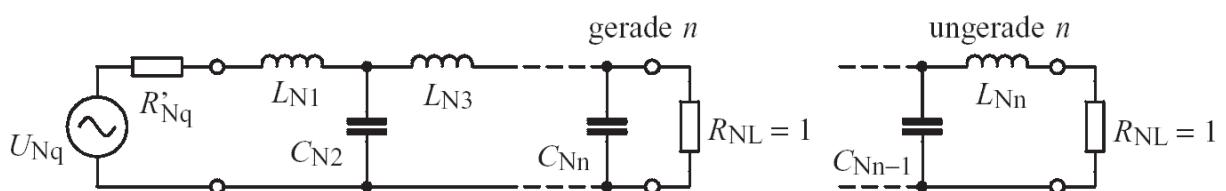
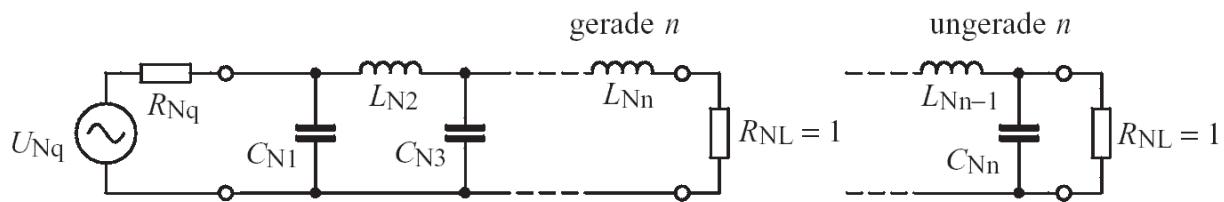


Tabelle B.15: Normierte Elemente für Tschebyscheff - Filter (frequenznormiert auf die 3dB-Grenzfrequenz) mit 0.5dB-Rippl $n = 2 \dots 4$.



$A_{\max} = 0.5 \text{ dB}$								
n	R_{Nq}	C_{N1}	L_{N2}	C_{N3}	L_{N4}	C_{N5}	L_{N6}	C_{N7}
5	1.0000	1.8068	1.3025	2.6914	1.3025	1.8068		
	0.9000	1.8540	1.2220	2.8478	1.2379	1.9701		
	0.8000	1.9257	1.1261	3.0599	1.1569	2.1845		
	0.7000	2.0347	1.0150	3.3525	1.0582	2.4704		
	0.6000	2.2006	0.8901	3.7651	0.9420	2.8609		
	0.5000	2.4571	0.7537	4.3672	0.8098	3.4137		
	0.4000	2.8692	0.6091	5.2960	0.6640	4.2447		
	0.3000	3.5877	0.4590	6.8714	0.5075	5.6245		
	0.2000	5.0639	0.3060	10.0537	0.3430	8.3674		
	0.1000	9.5560	0.1525	19.6465	0.1731	16.5474		
	inf.	1.6299	1.7400	1.9217	1.5138	0.9034		
6	1.9841	0.9053	2.5774	1.3675	2.7133	1.2991	1.7961	
	2.0000	0.8303	2.7042	1.2912	2.8721	1.2372	1.9557	
	2.5000	0.5056	3.7219	0.8900	4.1092	0.8808	3.1025	
	3.3333	0.3370	5.0554	0.6323	5.6994	0.6348	4.4810	
	5.0000	0.2059	7.6145	0.4063	8.7319	0.4121	7.0310	
	10.0000	0.0958	15.1862	0.1974	17.6806	0.2017	14.4328	
	inf.	1.4618	1.9799	1.7803	1.9253	1.5077	0.8981	
7	1.0000	1.7896	1.2961	2.1777	1.3848	2.7177	1.2961	1.7896
	0.9000	1.8348	1.2146	2.8691	1.3080	2.8829	1.2335	1.9531
	0.8000	1.9045	1.1182	3.0761	1.2149	3.1071	1.1546	2.1681
	0.7000	2.0112	1.0070	3.3638	1.1050	3.4163	1.0582	2.4554
	0.6000	2.1744	0.8824	3.7717	0.9786	3.8524	0.9441	2.8481
	0.5000	2.4275	0.7470	4.3695	0.8377	4.4886	0.8137	3.4050
	0.4000	2.8348	0.6035	5.2947	0.6846	5.4698	0.6690	4.2428
	0.3000	3.5456	0.4548	6.8674	0.5221	7.1341	0.5129	5.6350
	0.2000	5.0070	0.3034	10.0491	0.3524	10.4959	0.3478	8.4041
	0.1000	9.4555	0.1513	19.6486	0.1778	20.6314	0.1761	16.6654
	inf.	1.6464	1.7772	2.0306	1.7892	1.9239	1.5034	0.8948
n	$1/R_{Nq}^*$	L_{N1}	C_{N2}	L_{N3}	C_{N4}	L_{N5}	C_{N6}	L_{N7}

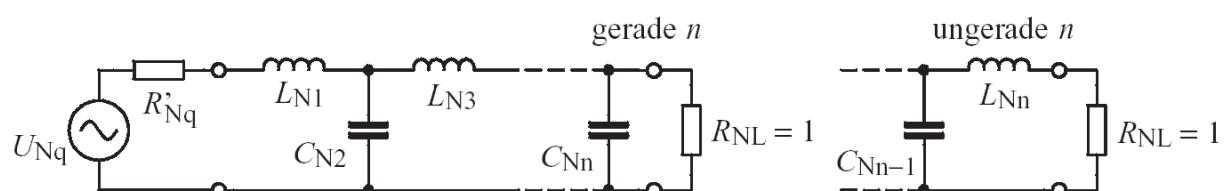
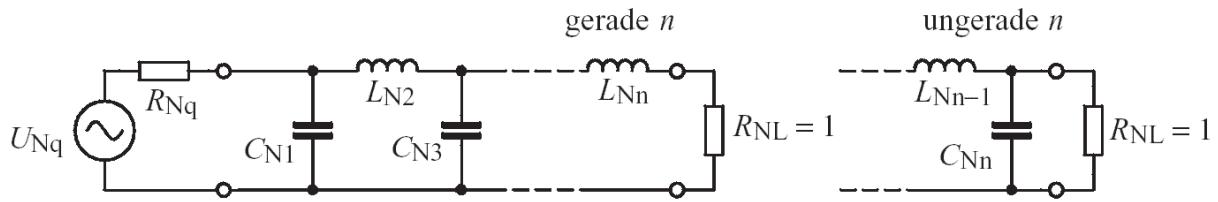


Tabelle B.16: Normierte Elemente für Tschebyscheff - Filter (frequenznormiert auf die 3dB-Grenzfrequenz) mit 0.5dB-Rippel $n = 5 \dots 7$.



n	$A_{\max} = 0.5 \text{ dB}$											
	R_{Nq}	C_{N1}	L_{N2}	C_{N3}	L_{N4}	C_{N5}	L_{N6}	C_{N7}	L_{N8}	C_{N9}	L_{N10}	
8	1.9841	0.8998	2.5670	1.3697	2.7585	1.3903	2.7175	1.2938	1.7852			
	2.0000	0.8249	2.6916	1.2919	2.9134	1.3160	2.8800	1.2331	1.9449			
	2.5000	0.5017	3.6988	0.8878	4.1404	0.9184	4.1470	0.8815	3.0953			
	3.3333	0.3344	5.0234	0.6304	5.7323	0.6577	5.7761	0.6370	4.4807			
	5.0000	0.2044	7.5682	0.4052	8.7771	0.4257	8.8833	0.4146	7.0453			
	10.0000	0.0951	15.1014	0.1969	17.7747	0.2081	18.0544	0.2035	14.4924			
9	inf.	1.4710	2.0022	1.8248	2.0440	1.7911	1.9218	1.5003	0.8926			
	1.0000	1.7822	1.2921	2.7162	1.3922	2.7734	1.3922	2.7162	1.2921	1.7822		
	0.9000	1.8267	1.2103	2.8658	1.3135	2.9353	1.3165	2.8834	1.2302	1.9458		
	0.8000	1.8955	1.1139	3.0709	1.2189	3.1565	1.2246	3.1102	1.1523	2.1611		
	0.7000	2.0013	1.0028	3.3565	1.1075	3.4635	1.1157	3.4232	1.0568	2.4489		
	0.6000	2.1634	0.8786	3.7621	0.9801	3.8985	0.9900	3.8647	0.9436	2.8426		
	0.5000	2.4150	0.7436	4.3573	0.8385	4.5355	0.8493	4.5087	0.8140	3.4010		
	0.4000	2.8203	0.6008	5.2792	0.6850	5.5207	0.6957	5.5023	0.6700	4.2416		
	0.3000	3.5279	0.4528	6.8474	0.5223	7.1951	0.5318	7.1876	0.5142	5.6390		
	0.2000	4.9830	0.3021	10.0212	0.3526	10.5818	0.3600	10.5925	0.3491	8.4189		
10	0.1000	9.4131	0.1507	19.5995	0.1779	20.8006	0.1822	20.8588	0.1770	16.7140		
	inf.	1.6533	1.7890	2.0570	1.8383	2.0481	1.7910	1.9199	1.4981	0.8911		
n		$1/R_N^*$	L_{N1}	C_{N2}	L_{N3}	C_{N4}	L_{N5}	C_{N6}	L_{N7}	C_{N8}	L_{N9}	C_{N10}

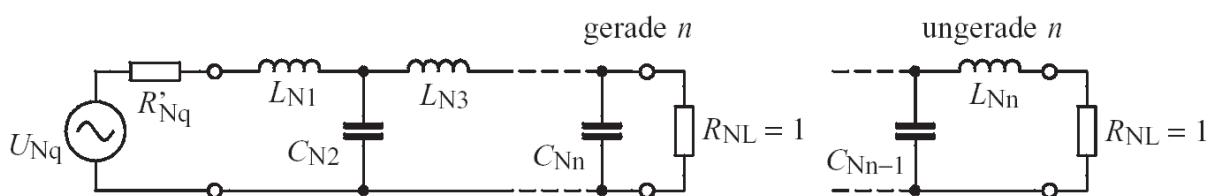


Tabelle B.17: Normierte Elemente für Tschebyscheff - Filter (frequenznormiert auf die 3dB-Grenzfrequenz) mit 0.5dB-Ripple $n = 8...10$.

C. Bessel - Filter

Ansatz für die auf die 3dB-Durchlassgrenzfrequenz normierte Übertragungsfunktion ($A_{\max} = 3 \text{ dB}$, $\Omega_D = \Omega_{3\text{dB}} = 1$) mit $|\underline{T}_N(\underline{s})|_{\max} = |\underline{T}_N(0)| = 1$:

$$\underline{T}_N(\underline{s}) = e^{-\underline{s}T_o} \approx \frac{1}{B_n(\underline{s})}$$

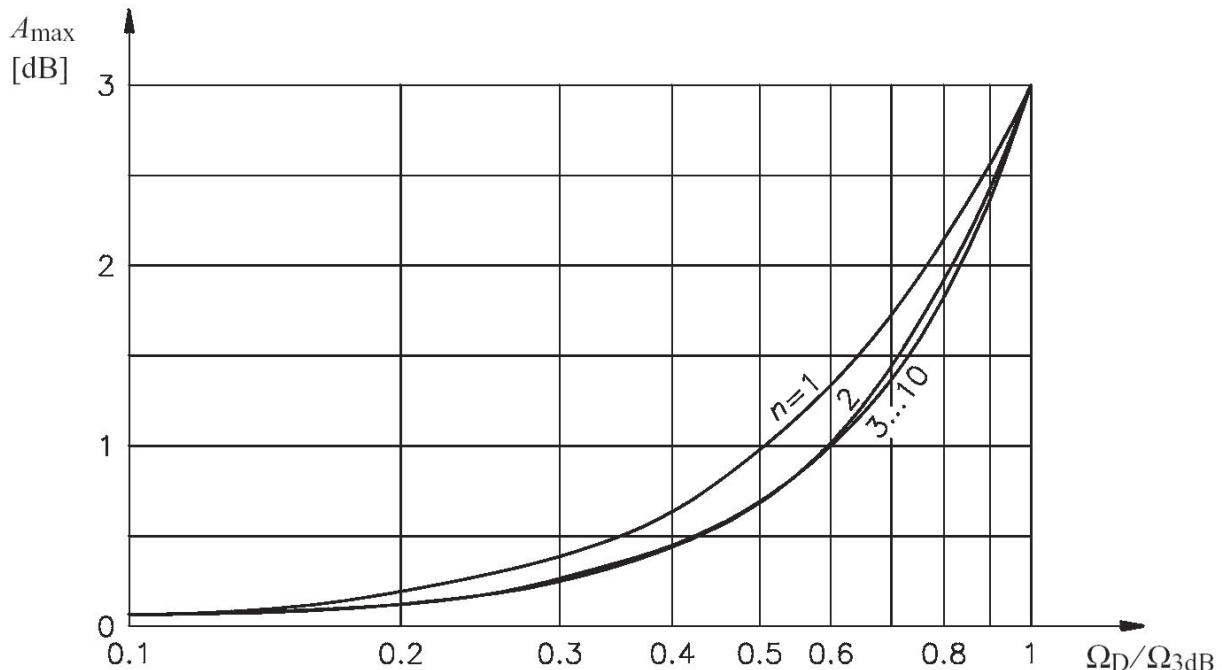
Polynomdarstellung der normierten Übertragungsfunktion:

$$\underline{T}_N(\underline{s}) = \frac{A_0}{Q(\underline{s})}$$

$$\text{mit } Q(\underline{s}) = \underline{s}^n + A_{n-1}\underline{s}^{n-1} + \dots + A_2\underline{s}^2 + A_1\underline{s} + A_0$$

Die Koeffizienten und Faktorenzerlegung des Nennerpolynoms $Q(\underline{s})$ können den Tabellen C.1 und C.2 entnommen werden.

Das Verhältnis von Durchlassgrenzfrequenz Ω_D zur 3dB-Grenzfrequenz $\Omega_{3\text{dB}}$ des Bessel-Filters kann aus folgender Dämpfungscharakteristik bestimmt werden:



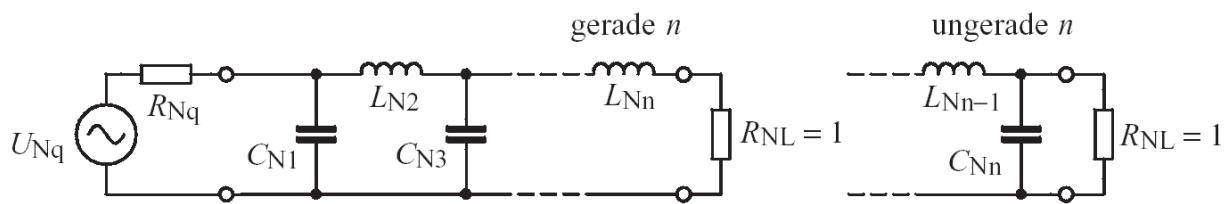
Figur C.1 Dämpfungscharakteristik des Bessel-Filters im Durchlassbereich

n	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
2	1.624	2.208						
3	2.748	4.881	3.423					
4	5.287	11.16	10.10	4.737				
5	11.29	27.37	29.49	17.87	6.188			
6	26.89	72.58	89.04	64.09	28.83	7.781		
7	70.00	206.3	280.6	229.7	123.1	43.52	9.501	
8	196.8	624.6	925.2	839.0	512.1	216.7	62.54	11.34

Tabelle C.1: Koeffizienten des Nennerpolynoms $\underline{Q}(\underline{S})$.

n	
2	$(1.624 + 2.208 \underline{S} + \underline{S}^2)$
3	$(1.325 + \underline{S})(2.102 + 2.098 \underline{S} + \underline{S}^2)$
4	$(2.051 + 2.744 \underline{S} + \underline{S}^2)(2.578 + 1.993 \underline{S} + \underline{S}^2)$
5	$(1.505 + \underline{S})(2.429 + 2.766 \underline{S} + \underline{S}^2)(3.090 + 1.918 \underline{S} + \underline{S}^2)$
6	$(2.581 + 3.148 \underline{S} + \underline{S}^2)(2.863 + 2.768 \underline{S} + \underline{S}^2)(3.640 + 1.864 \underline{S} + \underline{S}^2)$
7	$(1.687 + \underline{S})(2.955 + 3.229 \underline{S} + \underline{S}^2)(3.332 + 2.762 \underline{S} + \underline{S}^2)(4.214 + 1.823 \underline{S} + \underline{S}^2)$
8	$(3.174 + 3.521 \underline{S} + \underline{S}^2)(3.368 + 3.280 \underline{S} + \underline{S}^2)(3.828 + 2.753 \underline{S} + \underline{S}^2)(4.807 + 1.789 \underline{S} + \underline{S}^2)$

Tabelle C.2: Faktorenzerlegung von $\underline{Q}(\underline{S})$.



n	$A_{\max} = 3 \text{ dB}$				
	R_{Nq}	C_{N1}	L_{N2}	C_{N3}	L_{N4}
2	1.0000	0.5755	2.1478		
	1.1111	0.5084	2.3097		
	1.2500	0.4433	2.5096		
	1.4286	0.3801	2.7638		
	1.6667	0.3191	3.0993		
	2.0000	0.2601	3.5649		
	2.5000	0.2032	4.2577		
	3.3333	0.1486	5.4050		
	5.0000	0.0965	7.6876		
	10.0000	0.0469	14.5097		
3	inf.	1.3617	0.4539		
	1.0000	0.3374	0.9705	2.2034	
	0.9000	0.3708	0.8650	2.3745	
	0.8000	0.4124	0.7609	2.5867	
	0.7000	0.4657	0.6584	2.8575	
	0.6000	0.5365	0.5576	3.2159	
	0.5000	0.6353	0.4587	3.7144	
	0.4000	0.7829	0.3618	4.4573	
	0.3000	1.0283	0.2673	5.6888	
	0.2000	1.5176	0.1752	8.1403	
4	0.1000	2.9825	0.0860	15.4697	
	inf.	1.4631	0.8427	0.2926	
n	1.0000	0.2334	0.6725	1.0815	2.2404
	1.1111	0.2085	0.7423	0.9670	2.4143
	1.2500	0.1839	0.8292	0.8534	2.6304
	1.4286	0.1596	0.9406	0.7410	2.9066
	1.6667	0.1356	1.0886	0.6299	3.2727
	2.0000	0.1120	1.2952	0.5202	3.7824
	2.5000	0.0887	1.6040	0.4120	4.5430
	3.3333	0.0658	2.1174	0.3056	5.8048
	5.0000	0.0434	3.1416	0.2013	8.3185
	10.0000	0.0214	6.2086	0.0993	15.8372
	inf.	1.5012	0.9781	0.6127	0.2114
n	$1/R_{Nq}$	L_{N1}	C_{N2}	L_{N3}	C_{N4}

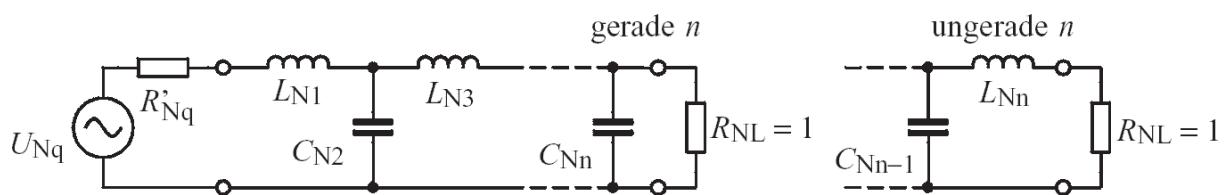
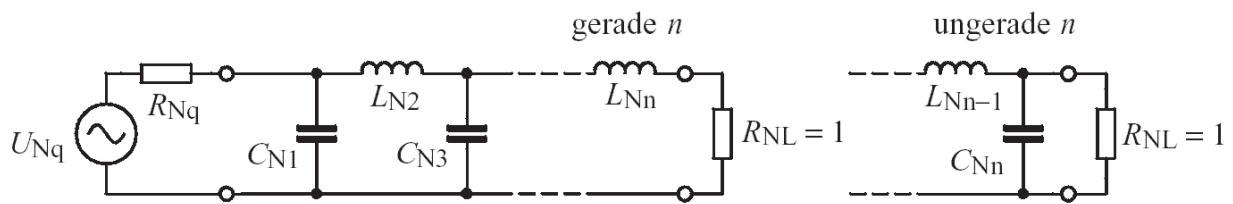


Tabelle C.3: Normierte Elemente für Bessel - Filter (frequenznormiert auf die 3dB-Grenzfrequenz) $n = 2 \dots 4$.



n	$A_{\max} = 3 \text{ dB}$							
	R_{Nq}	C_{N1}	L_{N2}	C_{N3}	L_{N4}	C_{N5}	L_{N6}	C_{N7}
5	1.0000	0.1743	0.5072	0.8040	1.1110	2.2582		
	0.9000	0.1926	0.4542	0.8894	0.9945	2.4328		
	0.8000	0.2154	0.4016	0.9959	0.8789	2.6497		
	0.7000	0.2447	0.3494	1.1323	0.7642	2.9272		
	0.6000	0.2836	0.2977	1.3138	0.6506	3.2952		
	0.5000	0.3380	0.2465	1.5672	0.5382	3.8077		
	0.4000	0.4194	0.1958	1.9464	0.4270	4.5731		
	0.3000	0.5548	0.1457	2.5768	0.3174	5.8433		
	0.2000	0.8251	0.0964	3.8352	0.2095	8.3747		
	0.1000	1.6349	0.0478	7.6043	0.1036	15.9487		
	inf.	1.5125	1.0232	0.7531	0.4729	0.1618		
6	1.0000	0.1365	0.4002	0.6392	0.8538	1.1126	2.2645	
	1.1111	0.1223	0.4429	0.5732	0.9456	0.9964	2.4388	
	1.2500	0.1082	0.4961	0.5076	1.0600	0.8810	2.6554	
	1.4286	0.0943	0.5644	0.4424	1.2069	0.7665	2.9325	
	1.6667	0.0804	0.6553	0.3775	1.4022	0.6530	3.3001	
	2.0000	0.0666	0.7824	0.3131	1.6752	0.5405	3.8122	
	2.5000	0.0530	0.9725	0.2492	2.0837	0.4292	4.5770	
	3.3333	0.0395	1.2890	0.1859	2.7633	0.3193	5.8467	
	5.0000	0.0261	1.9209	0.1232	4.1204	0.2110	8.3775	
	10.0000	0.0130	3.8146	0.0612	8.1860	0.1045	15.9506	
	inf.	1.5124	1.0329	0.8125	0.6072	0.3785	0.1287	
7	1.0000	0.1106	0.3259	0.5249	0.7020	0.8690	1.1052	2.2659
	0.9000	0.1224	0.2923	0.5815	0.6302	0.9630	0.9899	2.4396
	0.8000	0.1372	0.2589	0.6521	0.5586	1.0803	0.8754	2.6556
	0.7000	0.1562	0.2257	0.7428	0.4873	1.2308	0.7618	2.9319
	0.6000	0.1815	0.1927	0.8634	0.4163	1.4312	0.6491	3.2984
	0.5000	0.2168	0.1599	1.0321	0.3457	1.7111	0.5374	3.8090
	0.4000	0.2698	0.1274	1.2847	0.2755	2.1304	0.4269	4.5718
	0.3000	0.3579	0.0951	1.7051	0.2058	2.8280	0.3177	5.8380
	0.2000	0.5338	0.0630	2.5448	0.1365	4.2214	0.2100	8.3623
	0.1000	1.0612	0.0313	5.0616	0.0679	8.3967	0.1040	15.9166
	inf.	1.5087	1.0293	0.8345	0.6752	0.5031	0.3113	0.1054
n	$1/R_{Nq}$	L_{N1}	C_{N2}	L_{N3}	C_{N4}	L_{N5}	C_{N6}	L_{N7}

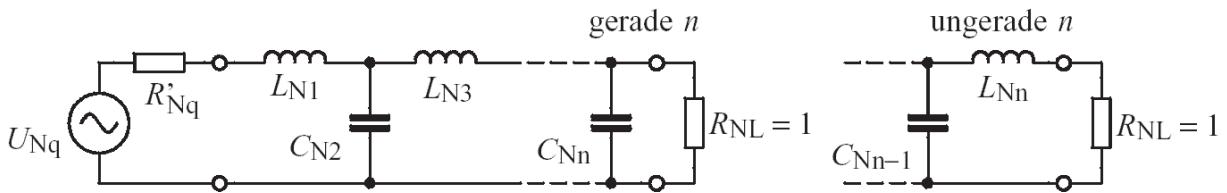
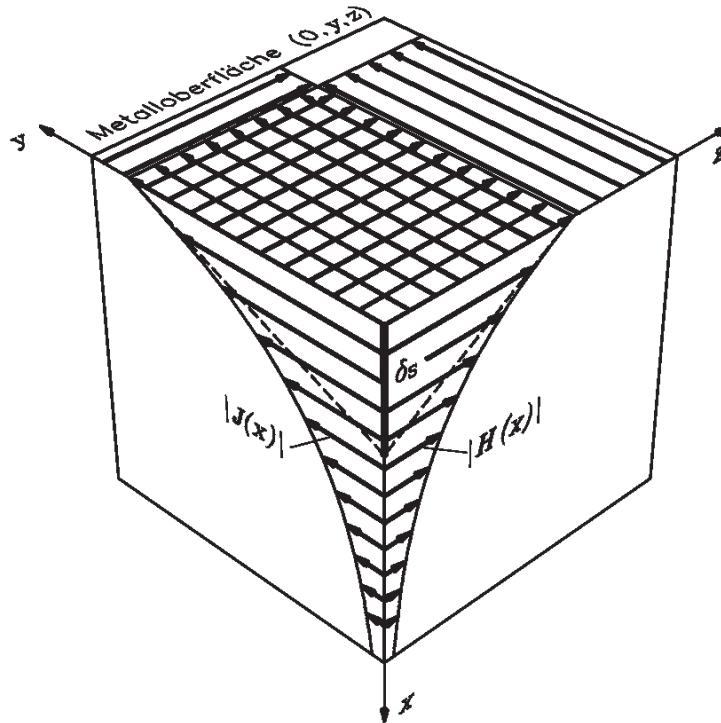


Tabelle C.4: Normierte Elemente für Bessel - Filter (frequenznormiert auf die 3dB-Grenzfrequenz) $n = 5 \dots 7$.

2 Herleitung des Skin-Effektes

Wir betrachten eine ausgedehnte ebene metallische Oberfläche mit einer magnetischen Feldstärke $H(x=0)$ an der Oberfläche (Figur 2.1). Diese Feldstärke sei parallel zur Metallocberfläche.

$$\mathbf{H}(x=0) = \mathbf{e}_z H_z(x=0) \quad (2.1)$$



Figur 2.1 Verteilung der magnetischen Feldstärke $H(x)$ und der Stromdichte $J(x)$ in einem metallischen Leiter

In einem Leiter gilt die Maxwellsche Gleichung 2:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \quad (2.2)$$

In Metallen gilt bis zu Frequenzen im Terahertzbereich

$$\left| \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right| \ll \mathbf{J} \quad (2.3)$$

Wir vernachlässigen daher die elektrische Verschiebung $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ gegenüber der Stromdichte \mathbf{J} .

Weiter gilt die Materialbeziehung

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (2.4)$$

mit $\sigma = 1/\rho$: elektrische Leitfähigkeit.

Mit der Maxwellschen Gleichung 1

$$\text{rot } \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.5)$$

zusammen mit der Materialbeziehung $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ erhalten wir für den eindimensionalen Fall mit einer einzigen Feldabhängigkeit in x -Richtung:

$$-\frac{\partial H_z}{\partial x} = J_y = \sigma E_y \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} \quad (2.7)$$

Mit Ableiten von (2.6) nach x und Einsetzen in (2.7) erhalten wir eine Differentialgleichung in Hz

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \mu \sigma \frac{\partial H_z}{\partial t} \quad (2.8)$$

Für eine harmonische Zeitabhängigkeit

$$H_z(x, t) = \operatorname{Re} \left[H_z(x) e^{j\omega t} \right]$$

vereinfacht sich (2.8):

$$\frac{d^2 H_z}{dx^2} = j\omega \mu \sigma H_z \quad (2.9)$$

Die allgemeine Lösung von (2.9) ist

$$H_z(x) = H_{zo} e^{\gamma x} \quad (2.10)$$

$$\gamma = \sqrt{j\omega \mu \sigma} = \pm \frac{1+j}{\delta_s} \quad (2.11)$$

Für das Leiterinnere gilt die abklingende Lösung:

$$H_z(x) = H_{zo} e^{-\frac{1+j}{\delta_s} x} \quad (2.12)$$

mit der Skin-Eindringtiefe

$$\delta_s = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}} = \sqrt{\frac{1}{\pi f \mu \sigma}} \quad (2.13)$$

Diese Lösung des eindimensionalen Falles ist auch eine gute Näherung, wenn die Eindring-tiefe δ_s viel kleiner ist als die Dicken und Oberflächenkrümmungsradien der Leiter.

Berechnung der Stromdichte $J_y(x)$ und der Oberflächenstromdichte I'_y :

Nach (2.6) und (2.12) gilt für die Stromdichte $J_y(x)$

$$J_y(x) = -\frac{d H_z}{d x} = H_{zo} \frac{1+j}{\delta_s} e^{-\frac{1+j}{\delta_s} x} = J_{yo} e^{-\frac{1+j}{\delta_s} x} \quad (2.14)$$

$$\text{mit } J_{yo} = \frac{1+j}{\delta_s} H_{zo}$$

Die Oberflächenstromdichte \underline{I}'_y ist die über x integrierte Stromdichte $\underline{J}_y(x)$:

$$\underline{I}'_y = \int_0^\infty \underline{J}_y(x) dx = \int_0^\infty -\frac{d \underline{H}_z}{dx} dx = -\underline{H}_z(\infty) + \underline{H}_z(0) = \underline{H}_{zo} \quad (2.15)$$

Die elektrische Feldstärke an der Leiteroberfläche \underline{E}_{yo} in y -Richtung ist:

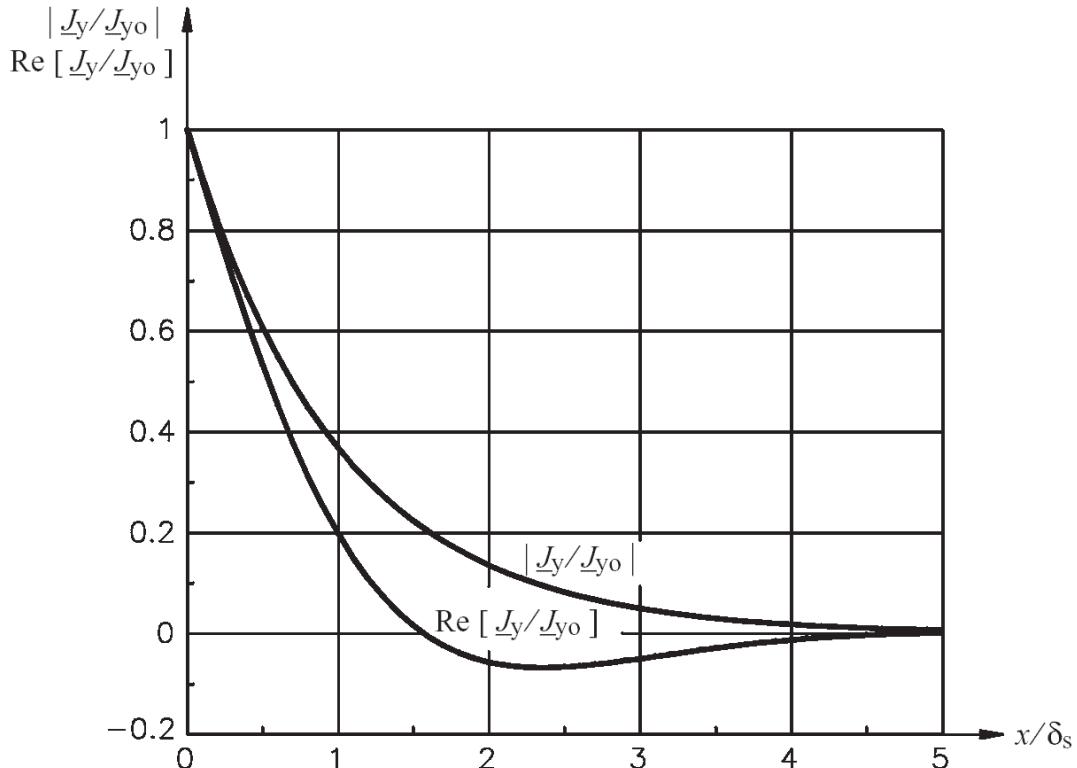
$$\underline{E}_{yo} = \underline{J}_{yo}/\sigma \quad (2.16)$$

Damit kann eine Oberflächenimpedanz Z_\square bestimmt werden

$$Z_\square = \frac{\underline{E}_{yo}}{\underline{I}'_y} = \frac{1+j}{\sigma \delta_s} = R_\square (1+j) \quad (2.17)$$

$$\text{mit dem Oberflächenwiderstand } R_\square = \frac{1}{\sigma \delta_s} \quad (2.18)$$

Es ist dabei bemerkenswert, dass der induktive Anteil von Z_\square immer gleich dem resistiven Anteil ist. Nach (2.14) nimmt die Stromdichte $\underline{J}_y(x)$ mit zunehmender Tiefe x exponentiell ab. Dabei ist zu beachten, dass die Phase von $\underline{J}_y(x)$ proportional zu x abnimmt. Dies führt dazu, dass der Momentanwert der Stromdichte Nullstellen und eine Vorzeichenumkehr aufweist, wie dies in Figur 2.2 dargestellt ist.



Figur 2.2 Verlauf der Stromdichte in einem metallischen Leiter.

3 Streuparameterdarstellung von linearen Zwei- und Mehrtoren

3.1 Wellengrößen

In der Niederfrequenztechnik werden die linearen Eigenschaften von Zwei- und Mehrtoren beschrieben, indem Beziehungen zwischen Spannungen und Strömen an den Toren angegeben werden. Die Beschreibung linearer Zweitore mit den Z, Y und H-Matrizen ist bestens bekannt:

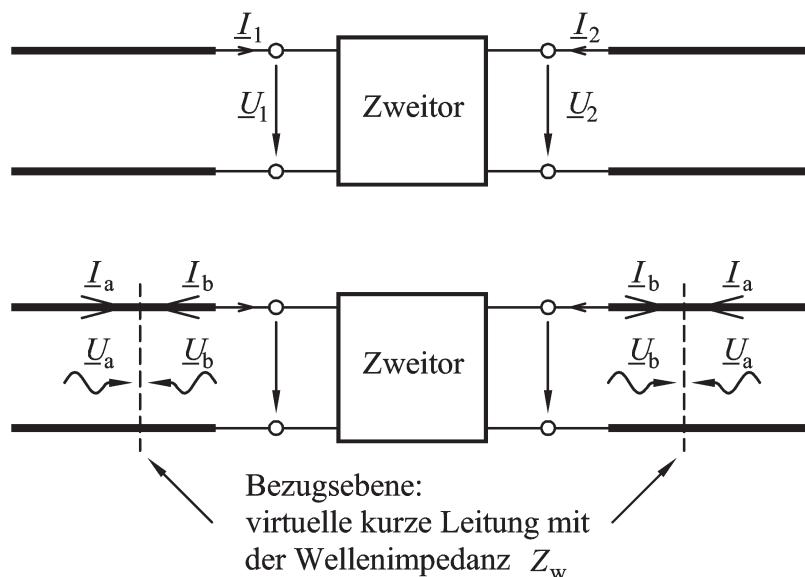
$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = [\underline{Z}] \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = [\underline{Y}] \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = [\underline{H}] \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

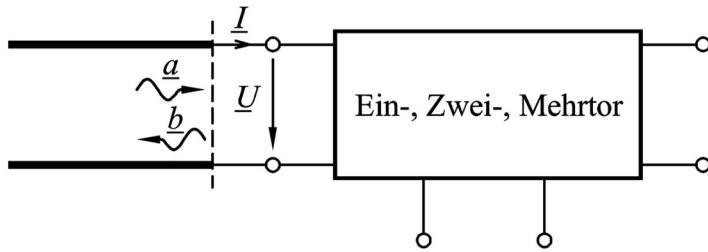
In der Hochfrequenztechnik ist diese Charakterisierung des Betriebszustandes nicht zweckmäßig und in vielen Fällen auch nicht möglich. In allen Systemen mit Nicht-TEM-Wellen, wie bei Hohlleitern und dielektrischen Wellenleitern, sind Spannung und Strom nicht definiert. Zudem ist es in der Hochfrequenz-Messtechnik kaum möglich, an den Toren eines Messobjektes einen Kurzschluss oder einen Leerlauf herzustellen. Ein Messobjekt kann aber mit einer gut definierten Abschlussimpedanz, in koaxialen Messsystemen meist 50Ω , gemessen werden.

Auch in Fällen, in denen Spannung und Strom nicht definiert sind, können leicht Leistungen, Reflexionsfaktoren und Übertragungsfaktoren gemessen werden. Es ist daher naheliegend, eine lineare Beschreibung des Verhaltens von Mehrtoren so vorzunehmen, dass eine enge Beziehung zu den direkt messbaren Größen besteht. In der Leitungstheorie (Kapitel 1) wurden die Begriffe der einfallenden und reflektierten Spannungs- und Stromwellen eingeführt, die sich für die Beschreibung von Wellen auf Leitungen als sehr zweckmäßig erwiesen haben. Die Kombination der Begriffe von einfallenden und reflektierten Strom- und Spannungswellen, \underline{I}_a und \underline{I}_b bzw. \underline{U}_a und \underline{U}_b zusammen mit einer engen Beziehung zur Leistung führt uns zur Definition der Wellengrößen a und b . In Figur 3.1 sind die Strom- und Spannungswellen \underline{I}_a und \underline{I}_b bzw. \underline{U}_a und \underline{U}_b an den Toren eines Zweitors dargestellt.



Figur 3.1 Definition der Strom- und Spannungswellen an den Toren eines Zweitors

Dabei definieren wir an den Toren eine reelle Bezugsimpedanz Z_w . Dies ist gleichbedeutend mit der Vorstellung, dass an den Toren ein Leitungselement mit verschwindender Länge eingeführt wird.



Figur 3.2 Zur Definition der Wellengrößen

Die Wellengrößen \underline{a} und \underline{b} eines Mehrtors nach Figur 3.2 werden wie folgt definiert:

$$\underline{U} = \underline{U}_a + \underline{U}_b \quad \underline{I} = \underline{I}_a - \underline{I}_b \quad \text{Spitzenwerte} \quad (3.4)$$

$$\underline{a} = \frac{\underline{U}_a}{\sqrt{Z_w}} = \underline{I}_a \sqrt{Z_w} = \frac{1}{2} \left(\frac{\underline{U}}{\sqrt{Z_w}} + \underline{I} \sqrt{Z_w} \right) \quad (3.5)$$

$$\underline{b} = \frac{\underline{U}_b}{\sqrt{Z_w}} = \underline{I}_b \sqrt{Z_w} = \frac{1}{2} \left(\frac{\underline{U}}{\sqrt{Z_w}} - \underline{I} \sqrt{Z_w} \right) \quad (3.6)$$

Die Wellengrößen \underline{a} und \underline{b} sind nach Betrag proportional zu den Größen der Spannungswellen \underline{U}_a und \underline{U}_b , und die Phasen von \underline{a} und \underline{b} sind identisch mit den Phasen von \underline{U}_a und \underline{U}_b . Der Reflexionsfaktor an der Bezugsebene ist:

$$r = \frac{\underline{U}_b}{\underline{U}_a} = \frac{\underline{b}}{\underline{a}} \quad (3.7)$$

3.2 Leistungen, Momentanwert

Mit der Definition der Wellengrößen (3.5) und (3.6) ist die Leistung der nach rechts laufenden Welle

$$P_a = \frac{1}{2} \underline{U}_a \underline{I}_a^* = \frac{1}{2} \frac{\underline{U}_a \underline{U}_a^*}{Z_w} = \frac{1}{2} |\underline{a}|^2 \quad (3.8)$$

und der nach links laufenden Welle: $P_b = \frac{1}{2} |\underline{b}|^2$ (3.9)

Gelegentlich findet man auch die Definition der Wellenstärken über die Effektivwerte, wobei dann der obige Faktor 1/2 entfällt.

Die Dimension der Welle ist $[\underline{a}] = \sqrt{\text{VA}}$ (3.10)

und der Momentanwert ist $a(t) = \text{Re} [\underline{a} e^{j\omega t}]$ (3.11)

3.3 Streumatrizen von Zweitoren

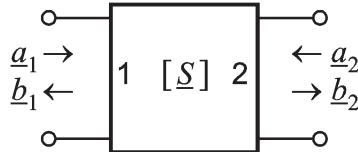
Die linearen Eigenschaften von Zwei- und Mehrtoren können nun mit den Wellengrößen \underline{a} und \underline{b} beschrieben werden. Die gebräuchliche Darstellung ist die Streuparameterdarstellung, wobei die vom Zwei- oder Mehrtor wegführenden Wellen \underline{b} in Funktion der zulaufenden

Wellen \underline{a} ausgedrückt werden. Im Fall des Zweitors nach Figur 3.3 ist die Streumatrix wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} b_1 &= \underline{S}_{11} \underline{a}_1 + \underline{S}_{12} \underline{a}_2 \\ b_2 &= \underline{S}_{21} \underline{a}_1 + \underline{S}_{22} \underline{a}_2 \end{aligned} \quad (3.12)$$

oder in Vektorform:

$$[\underline{b}] = [\underline{S}] \cdot [\underline{a}] \quad \text{mit} \quad [\underline{S}]: \text{Streumatrix}, \quad [\underline{S}] = \begin{bmatrix} \underline{S}_{11} & \underline{S}_{12} \\ \underline{S}_{21} & \underline{S}_{22} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

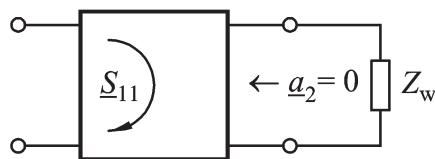


Figur 3.3 Definition der Streuparameter

Die Bedeutung der S-Parameter eines Zweitors sind folgende:

Eingangs-, Ausgangsreflexionsfaktoren \underline{S}_{11} und \underline{S}_{22}

Wenn das Zweitor nach Figur 3.4 mit der Bezugsimpedanz Z_w abgeschlossen ist, dann ist die Welle $\underline{a}_2 = 0$.



Figur 3.4 Bedeutung des Eingangsreflexionsfaktors \underline{S}_{11}

Nach (3.12) gilt für den Eingangsreflexionsfaktor:
$$\underline{S}_{11} = \left. \frac{\underline{b}_1}{\underline{a}_1} \right|_{\underline{a}_2 = 0} \quad (3.14)$$

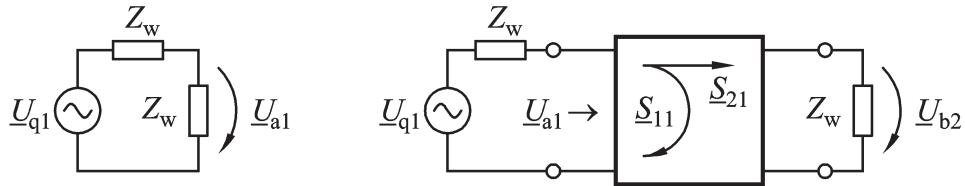
\underline{S}_{11} ist der *Eingangsreflexionsfaktor*, wenn der Ausgang mit der Referenzimpedanz Z_w abgeschlossen ist. Analog dazu ist \underline{S}_{22} der *Ausgangsreflexionsfaktor*, wenn der Eingang mit der Referenzimpedanz Z_w abgeschlossen ist.

Übertragungsfaktoren \underline{S}_{12} und \underline{S}_{21}

Wird die Signalquelle mit dem Innenwiderstand Z_w direkt mit der Bezugsimpedanz Z_w belastet nach Figur 3.5 links, dann ist die Spannung über der Last $\underline{U}_L = \underline{U}_{a1}$, was der auf das Zweitor zulaufenden Spannungswelle entspricht. Wird das Zweitor am Eingang mit einer Quelle mit dem Innenwiderstand = Bezugsimpedanz Z_w beschaltet und ausgangsseitig mit Z_w belastet, dann erscheint über der Ausgangslast Z_w die Spannung \underline{U}_{b2} , also die vom Zweitor wegfahrende Spannungswelle. Der Parameter \underline{S}_{21} ist nun

$$\underline{S}_{21} = \left. \frac{\underline{b}_2}{\underline{a}_1} \right|_{\underline{a}_2 = 0} = \frac{\underline{U}_{b2}}{\underline{U}_{a1}} = 2 \frac{\underline{U}_{b2}}{\underline{U}_{q1}} \quad (3.15)$$

Der Übertragungsfaktor vorwärts, \underline{S}_{21} , kann also als Verhältnis der Spannungen am Lastwiderstand Z_w nach der Schaltung Figur 3.5 rechts, mit und ohne eingefügtes Zweitor interpretiert werden.



Figur 3.5 Bedeutung des Übertragungsfaktors \underline{S}_{21}

Betriebsübertragungsfaktor vorwärts \underline{S}_{21} :

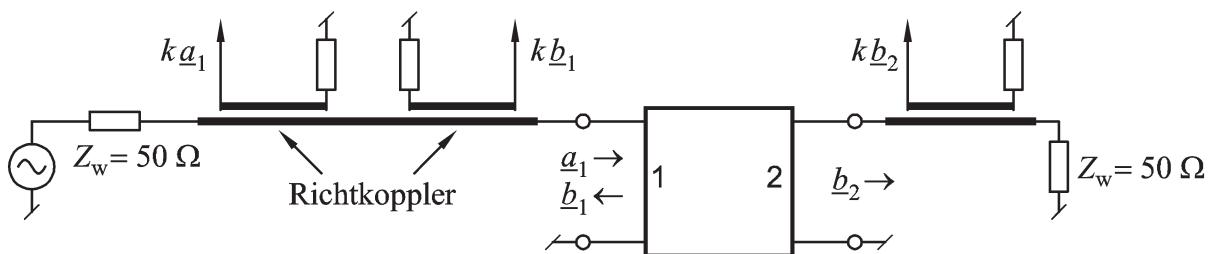
$$\frac{\text{Spannung an der ausgangsseitigen Lastimpedanz } Z_w}{0.5 \times \text{Quellenspannung am Eingang}}$$

Betriebsübertragungsfaktor rückwärts \underline{S}_{12} :

$$\frac{\text{Spannung an der eingangsseitigen Lastimpedanz } Z_w}{0.5 \times \text{Quellenspannung am Ausgang}}$$

3.4 Messung von Streuparametern

Streuparameter werden mit Netzwerkanalysatoren (NWA) gemessen. Es stehen heute Geräte mit koaxialen Messtoren, meist mit einer Bezugsimpedanz von 50Ω für den Frequenzbereich bis über 100GHz zur Verfügung. Das Messprinzip zur Bestimmung der Parameter \underline{S}_{11} und \underline{S}_{21} ist in Figur 3.6 dargestellt. Mit den Richtkopplern wird ein Anteil k der Wellen \underline{a}_1 , \underline{b}_1 und \underline{b}_2 ausgekoppelt und es werden elektronisch die Quotienten $\underline{S}_{11} = \underline{b}_1 / \underline{a}_1$ und $\underline{S}_{21} = \underline{b}_2 / \underline{a}_1$ gebildet.

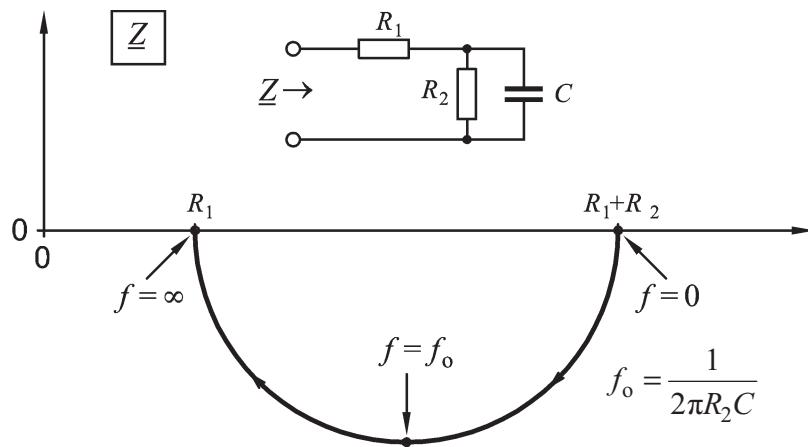


Figur 3.6 Prinzip des Netzwerkanalysators (NWA) zur Messung der Streuparameter \underline{S}_{11} und \underline{S}_{21} .

3.5 Wichtige Eigenschaften der Streumatrix

Für reziproke Zweitore ist die S-Matrix (wie die Z und Y-Matrix) symmetrisch: $\underline{S}_{ij} = \underline{S}_{ji}$.

Bekanntlich zeigen die Impedanzortskurven von passiven und aktiven reaktiven Netzwerken in Funktion der Frequenz immer eine Rechtsdrehung. Figur 3.7 zeigt als Beispiel eine einfache halbkreisförmige Ortskurve mit der typischen Rechtsdrehung.

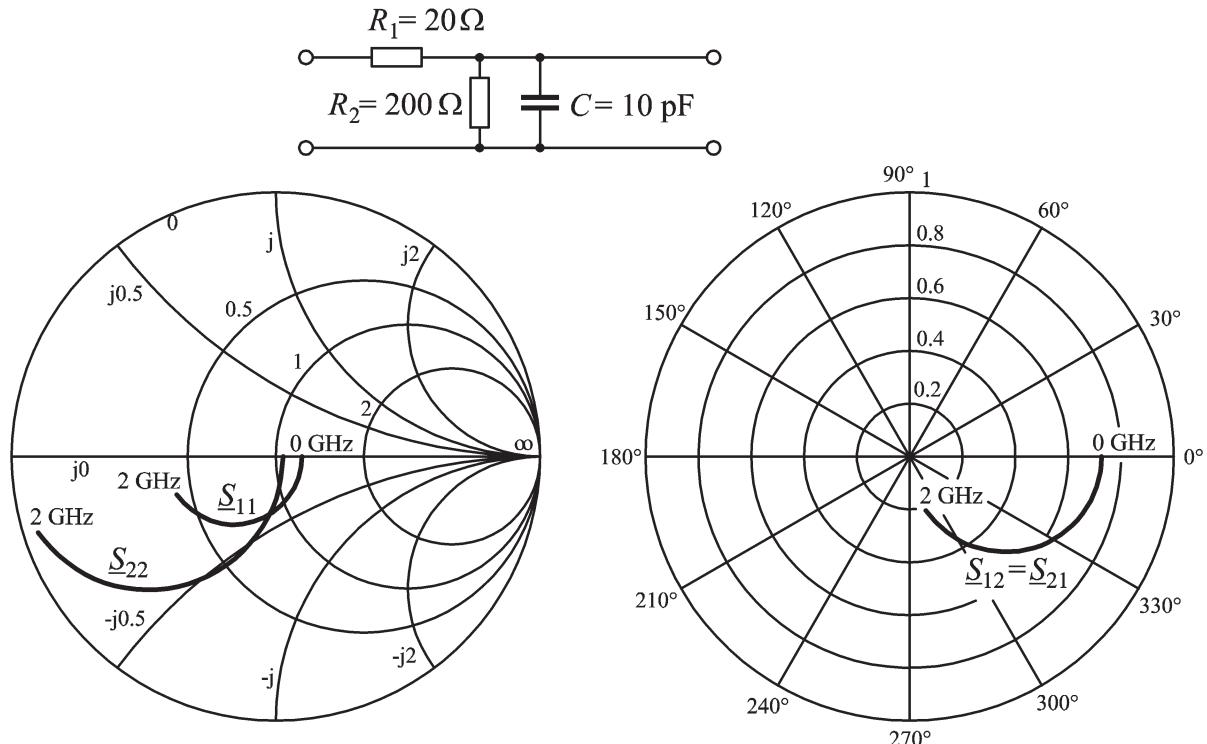


Figur 3.7 Ortskurve der Impedanz eines reaktiven Netzwerkes mit der typischen Rechtsdrehung.

Ebenso zeigen die Ortskurven aller Streuparameter (Reflexionsfaktoren \underline{S}_{11} , \underline{S}_{22} und Transmissionsfaktoren \underline{S}_{12} , \underline{S}_{21}) Rechtsdrehungen.

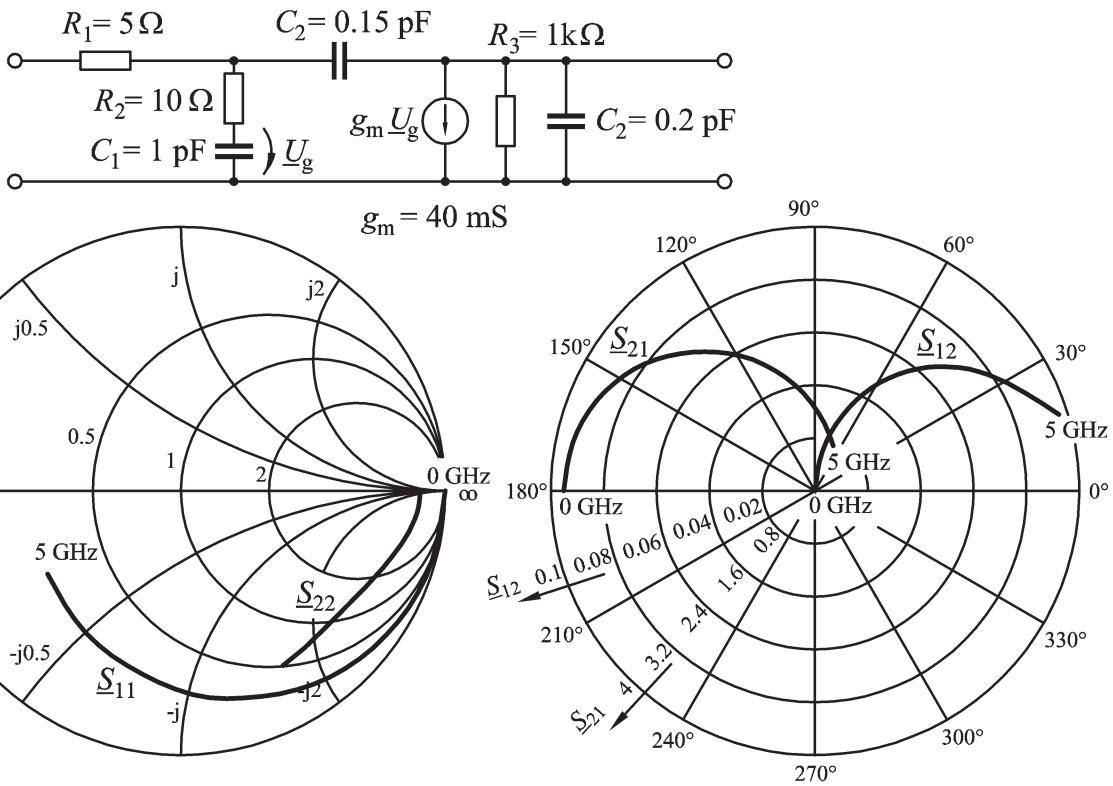
3.6 Beispiele von Streuparameter-Ortskurven

Figur 3.8 zeigt ein passives reziprokes Netzwerk.



Figur 3.8 Frequenzverlauf der S-Parameter eines passiven reziproken Netzwerkes.

Figur 3.9 zeigt ein nichtreziprokes Netzwerk anhand des Kleinsignalmodells eines FETs.



Figur 3.9 Kleinsignalverhalten der S-Parameter eines Feldeffekttransistors

3.7 Umrechnungen von Wellen- und Strom/Spannungsmatrizen

Über die Definition der Wellengrößen können die Z und Y-Parameter in Streuparameter und umgekehrt umgewandelt werden. Diese Beziehungen sind nachfolgend gegeben. Dabei sind die Impedanzen und Admittanzen auf die Bezugsimpedanz Z_w normiert:

$$\underline{z}_{ij} = \underline{Z}_{ij} / \underline{Z}_w \quad \underline{y}_{ij} = \underline{Y}_{ij} \underline{Z}_w \quad (3.16)$$



$$\begin{aligned}
 N_1 &= (1 + z_{11})(1 + z_{22}) - z_{12}z_{21} \\
 S_{11} &= [(z_{11} - 1)(1 + z_{22}) - z_{12}z_{21}] / N_1 \\
 S_{12} &= 2z_{12} / N_1 \\
 S_{21} &= 2z_{21} / N_1 \\
 S_{22} &= [(1 + z_{11})(z_{22} - 1) - z_{12}z_{21}] / N_1 \\
 N_3 &= (1 + y_{11})(1 + y_{22}) - y_{12}y_{21} \\
 S_{11} &= [(1 - y_{11})(1 + y_{22}) + y_{12}y_{21}] / N_3 \\
 S_{12} &= -2y_{12} / N_3 \\
 S_{21} &= -2y_{21} / N_3 \\
 S_{22} &= [(1 + y_{11})(1 - y_{22}) + y_{12}y_{21}] / N_3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_2 &= (1 - S_{11})(1 - S_{22}) - S_{12}S_{21} \\
 z_{11} &= [(1 + S_{11})(1 - S_{22}) + S_{12}S_{21}] / N_2 \\
 z_{12} &= 2S_{12} / N_2 \\
 z_{21} &= 2S_{21} / N_2 \\
 z_{22} &= [(1 - S_{11})(1 + S_{22}) + S_{12}S_{21}] / N_2 \\
 N_4 &= (1 + S_{11})(1 + S_{22}) - S_{12}S_{21} \\
 y_{11} &= [(1 - S_{11})(1 + S_{22}) + S_{12}S_{21}] / N_4 \\
 y_{12} &= -2S_{12} / N_4 \\
 y_{21} &= -2S_{21} / N_4 \\
 y_{22} &= [(1 + S_{11})(1 - S_{22}) + S_{12}S_{21}] / N_4
 \end{aligned}$$

Literatur für Filtertabellen

Die in diesem Anhang gegebenen numerische Daten wurden aus der folgenden Literatur entnommen:

- [1] A. I. Zverev: Handbook of filter synthesis. New York: John Wiley & Sons, 1967
- [2] D. E. Johnson: Introduction to Filter Theory. Engelwood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall 1976
- [3] G.S. Moschytz: Leitungen und Filter. Vorlesungsscript Zürich: AMIV-Verlag 1989, Teil 2

Sachwortverzeichnis

- 3dB-Grenzfrequenz $f_{3\text{dB}}$, in 1/s, 145
- 3dB-Grenzkreisfrequenz $\omega_{3\text{dB}}$, in 1/s, 141
- A Querschnitt des Innenleiters, in m^2 , 55
- A Kettenmatrix, komplex, 31
- $A(f)$ Dämpfungsfunktion, in dB, 140
- A_{\max} maximale Durchlassdämpfung, in dB, 140
- A_{\min} minimale Sperrdämpfung, in dB, 140
- aktive Filter, 179
- Allpass (AP), 130
- Allpolfilter , 144
- Amplitudengang, logarithmischer, $\Gamma(\omega)$, in Np (Neper), 134
- Anstiegszeit (rise time) t_r , in s, 159
- AP (Allpass), 130
- Aussenleiterradius r_a , in m, 53
- B** magnetische Induktion, Raumvektor, in $\text{T} = \text{Vs}/\text{m}^2$ (Tesla), 55
- $B_n(\underline{S})$ Bessel-Polynome, komplex, 155
- Bandpass (BP), 130
- Bandpass-Tiefpass-Transformation, 164
- Bandsperre (BS), 130
- Bandsperre-Tiefpass-Transformation, 166
- Bergeron-Diagramm, 82
- Bessel-Approximation, 154
- Bessel-Filter , 130, 207
- Bessel-Polynome $B_n(\underline{S})$, komplex, 155
- Betriebsdämpfungsfunktion $H_B(\underline{S})$, komplex, 138
- Betriebsdämpfungsmass $\underline{\Gamma}_B$, komplex, 139
- Betriebsübertragungsfunktion $\underline{T}_B(\underline{S})$, komplex, 138
- bilineare Transformation, 33, 40
- Bodediagramm, 134
- BP (Bandpass), 130
- BS (Bandsperre), 130
- Butterworth-Approximation, 141
- Butterworth-Filter, 130, 189
- C** Kapazitätsbelag, in F/m, , 12, 53
- $C_n(\Omega)$ Tschebyscheff-Polynome, komplex, 147
- c_0 Lichtgeschwindigkeit im Vakuum,
 $c_0 = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$, 8, 10, 11
- CATV-Technik (community antenna TV system: Gemeinschaftsantennen-Anlage), 10
- D** elektrische Verschiebung, Raumvektor, in C/m^2 , 53, 211
- d Dicke des Aussenleiters, in m, 55
- Dämpfungsbelag α , in 1/m, 20, 61
- Dämpfungsfunktion $A(f)$, in dB, 140
- Delyannis-Friend-Schaltung, 185
- Dicke des Aussenleiters d , in m, 55
- Dielektrizitätskonstante im Vakuum
 $\epsilon_0 = 8.854 \text{ pF/m}$, 10
- Dielektrizitätskonstante, reelle ϵ , in F/m, 15, 53
- Dielektrizitätskonstante, reelle, relative, ϵ_r , 11, 15, 52
- Dielektrizitätskonstante, relative, effektive, ϵ_{re} , 65
- Durchlassdämpfung, maximale, A_{\max} , in dB, 140
- Durchlassgrenzfrequenz f_D , in 1/s, 140
- Durchlassgrenzkreisfrequenz ω_D , in 1/s, 141

- E** elektrische Feldstärke, Raumvektor, in V/m, 11, 53, 211
- Eindringtiefe δ_s , in m, 59, 212
- Einschwingzeit (settling time) t_s , in s, 159
- elektrische Feldstärke **E**, Raumvektor in V/m, 11, 53, 211
- elektrische Leitfähigkeit $\sigma = 1/\rho$, in S/m, 59, 211
- elektrische Verschiebung **D**, Raumvektor in C/m², 53, 211
- $\text{erf}(x)$ Errorfunktion, 91
- Errorfunktion $\text{erf}(x)$, 91
- even mode
- siehe Gleichtaktanregung
- f* Frequenz, in 1/s, 11
- f_{3dB} 3dB-Grenzfrequenz, in 1/s, 145
- f_D Durchlassgrenzfrequenz, in 1/s, 140
- f_S Sperrgrenzfrequenz, in 1/s, 140
- Filtergrad n , 144, 145
- Filtergüte Q_F , 152
- Frequenz *f*, in 1/s, 10, 11
- Frequenz, normierte Ω , 137, 141
- FWHM (Full Width Half Maximum) = 50 % Impulsbreite, 99
- $G(j\omega)$ logarithmische Übertragungsfunktion, komplex, 134
- G' Leitwertsbelag, in S/m, 12
- $G(x)$ Gaussintegral, 91
- Gaussintegral $G(x)$, 91
- Gegenadmittanzbeläge Y_{ik} , komplex, in S/m, 103
- Gegenimpedanzbeläge Z_{ik} , komplex, in Ω/m , 102
- Gegeninduktivitätsbeläge M_{ik} , in H/m, 102
- Gegentaktanregung (odd mode), 101, 114, 118, 120
- Gegentaktwellenausbreitungskonstante, komplex, γ_0 , in 1/m, 114
- Gegentaktwellenimpedanz, Z_{wo} , in Ω , 114
- Gleichtaktanregung (even mode), 101, 113, 118, 120
- Gleichtaktwellenausbreitungskonstante γ_e , komplex, in 1/m, 114
- Gleichtaktwellenimpedanz, Z_{we} , in Ω , 114
- Gruppengeschwindigkeit v_g , in m/s, 94
- Gruppenlaufzeit τ_g , in s, 134, 156
- Gruppenlaufzeit, normierte, τ_g , 156
- H** magnetische Feldstärke, Raumvektor, in A/m, 11, 54, 211
- $H_B(S)$ Betriebsdämpfungsfunktion, komplex, 138
- Hochpass (HP), 130
- Hochpass-Tiefpass-Transformation, 162
- HP (Hochpass), 130
- Hurwitz-Polynome, 132
- i_a vorwärtslaufende Stromwelle in A, 75
- i_b rückwärtslaufende Stromwelle in A, 75
- I' Oberflächenstromdichte, in A/m, 59, 212
- Impedanztransformation, 31, 34
- Induktivitätsbelag L' , in H/m, 12, 54
- Induktivitätsbelag, äusserer, L'_a , in H/m, 54
- Induktivitätsbelag, innerer, L'_i , in H/m, 54
- Induktivitätsbelag, innerer, des Außenleiters L'_{ia} , in H/m, 54
- Induktivitätsbelag, innerer, des Innenleiters L'_{ii} , in H/m, 54
- J** Stromdichte, Raumvektor, in A/m², 59, 211

- \underline{K} Leitungsmatrix, komplex, in $1/m^2$, 104
- Kapazitätsbelag C' , in F/m , 12, 53
- Kaskadenfilter, 179
- Kettengleichungen, 31
- Kettenmatrix \underline{A} , komplex, 31
- Koaxialleitung, 52
- Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$, in $1/s$, 18
- Kronecker-Delta δ_{ik} , 105
- L' Induktivitätsbelag, in H/m , 12, 54
- L'_a äusserer Induktivitätsbelag, in H/m , 54
- L'_i Längsinduktivitätsbelag, in H/m , 102
- L'_i innerer Induktivitätsbelag, in H/m , 54
- L'_{ia} innerer Induktivitätsbelag des Aussenleiters, in H/m , 54
- L'_{ii} innerer Induktivitätsbelag des Innenleiters, in H/m , 54
- Ladungsbelag Q' , in C/m , 12, 53
- Längsimpedanzbeläge Z'_{ii} , komplex, in Ω/m , 102
- Längsinduktivitätsbelag L'_i , in H/m , 102
- Laplacevariable \underline{s} , komplex, in $1/s$, 132
- Laplacevariable, normierte, \underline{S} , komplex, 137, 141
- Leitungsmatrix \underline{K} , komplex, in $1/m^2$, 104
- Leitwertsbelag G' , in S/m , 12
- Lichtgeschwindigkeit im Vakuum
 $c_0 = 3 \cdot 10^8 m/s$, 8, 10, 11
- M_{ik} Gegeninduktivitätsbeläge, in H/m , 102
- magnetische Energie pro Längeneinheit
 W_{mi} , in J/m , 55
- magnetische Feldstärke \mathbf{H} , Raumvektor, in A/m , 11, 54, 211
- magnetische Induktion \mathbf{B} , Raumvektor, in $T = Vs/m^2$ (Tesla), 55
- magnetischer Flussbelag Φ' , in Vs/m , 11
- Mikrostreifenleitung, 65
- Minimalphasenzweitor, 135
- Möbius-Transformation, 33, 40, 49
- n Filtergrad, 144, 145
- Netzwerkanalysator, 30
- normierte Tiefpassübertragungsfunktionen, 189
- Normierungskreisfrequenz ω_r , in $1/s$, 137
- o Überschwingen (overshoot), in %, 159
- Oberflächenimpedanz Z_\square , komplex, in Ω , 59, 213
- Oberflächensstromdichte \underline{I}' , in A/m , 212
- Oberflächenstromdichte \underline{I}' , in A/m , 59
- Oberflächenwiderstand R_\square , in Ω , 59, 213
- odd mode
- siehe Gegentaktanregung
- P_{a1} verfügbare Quellenleistung in W , 138
- Permabilitätskonstante, reelle, μ , in H/m , 15, 55, 56
- Permabilitätskonstante, reelle, relative, μ_r , 15, 56
- Permabilitätskonstante im Vakuum
 $\mu_0 = 0.4\pi \mu H/m$, 10, 56
- Phasenbelag β , in $1/m$, 20
- Phasengang $\phi(\omega)$, in rad (Radian), 134
- Phasengeschwindigkeit v_p , in m/s , 21, 94
- Polyäthylen, 52
- Polystren, 52
- Polystyrol, 52
- Polytetrafluoräthylen, 52
- siehe auch Teflon
- Q' Ladungsbelag, in C/m , 12, 53
- Q_F Filtergüte, 152

- Quellenleistung, verfügbare, P_{a1} , in W, 138
- Queradmittanzbeläge \underline{Y}_i , komplex, in S/m, 103
- Querschnitt des Innenleiters A , in m^2 , 55
- R' Widerstandsbelag, in Ω/m , 12, 53, 61
- R_\square Oberflächenwiderstand, in Ω , 59, 213
- r Reflexionsfaktor, komplex, 24, 30, 31, 35
- Reflexionsfaktor r , komplex, 24, 30, 31, 35
- s Laplacevariable, komplex, in 1/s, 132
- \underline{S} normierte Laplacevariable, komplex, 137, 141
- Sallen+Key-Schaltung, 183
- Signalgeschwindigkeit v , in m/s, 74
- Skineffekt, 58, 211
- Smith-Diagramm, 31, 39, 40, 43, 44
- Spannungswelle, rückwärtslaufende, u_b , in V, 75
- Spannungswelle, vorwärtslaufende, u_a , in V, 75
- Sperrdämpfung, minimale, A_{\min} , in dB, 140
- Sperrgrenzfrequenz f_S , in 1/s, 140
- Sperrgrenzkreisfrequenz ω_S , in 1/s, 141
- spezifischer Widerstand $\rho = 1/\sigma$, in Ωm , 58
- Standardabweichung, komplexe zeitliche σ_{tc} , in s, 98
- Standardabweichung, zeitliche σ_t , in s, 96
- Stehwelle, 30
- Stehwellenverhältnis VSWR, 30
- Streifenleitung, 52
- Stromdichte \mathbf{J} , Raumvektor, in A/m^2 , 59, 211
- Stromwelle, rückwärtslaufende, i_b , in A, 75
- Stromwelle, vorwärtslaufende, i_a , in A, 75
- T-Ersatzschaltung, 32
- $\underline{T}(s)$ Übertragungsfunktion (UTF), komplex, 131
- $\underline{T}_N(S)$ normierte Übertragungsfunktion, komplex, 171, 189, 195, 207
- $\underline{T}_B(S)$ Betriebsübertragungsfunktion, komplex, 138
- t_d Verzögerungszeit (delay time), in s, 159
- t_r Anstiegszeit (rise time), in s, 159
- t_s Einschwingzeit (settling time), in s, 159
- Teflon, 52
- Telegraphengleichung, 13, 14, 18
- TEM-Wellen (transverse electormagnetic waves), 10, 52
- Tiefpass (TP), 130
- Time Domain Reflectometer TDR, 85
- TP (Tiefpass), 130
- Transferfunktion
- siehe Übertragungsfunktion
- Transformation der Filtertypen, 162
- Transformationsmatrix \underline{L} , komplex, 104
- Tschebyscheff -Polynome $C_n(\Omega)$, komplex, 147
- Tschebyscheff-Approximation, 147, 151
- Tschebyscheff-Filter, 130, 195
- u_a vorwärtslaufende Spannungswelle in V, 75
- u_b rückwärtslaufende Spannungswelle in V, 75
- Überschwingen (overshoot) σ , in %, 159
- Übertragungsfunktion (UTF) $\underline{T}(s)$, komplex, 131
- Übertragungsfunktion, logarithmische, $G(j\omega)$, komplex, 134

- Übertragungsfunktion, normierte, $\underline{T}_N(S)$, komplex, 171, 189, 195, 207
 UTF (Übertragungsfunktion) $\underline{T}(s)$, komplex, 131
 v Signalgeschwindigkeit, in m/s, 74
 V Transformationsmatrix, komplex, 104
 v_g Gruppengeschwindigkeit, in m/s, 94
 v_p Phasengeschwindigkeit, in m/s, 21, 94
 Verlustwinkel δ , 58
 Verzögerungszeit (delay time) t_d , in s, 159
 Viertelwellenlängen-Transformator, 35
 siehe auch $\lambda/4$ -Transformator
 VSWR Stehwellenverhältnis, 30
 W_{mi} magnetische Energie pro Längeneinheit, in J/m, 55
 Wellenadmittanz, komplex, $\underline{Y}_w = 1/\underline{Z}_w$, in S (Siemens), 46
 Wellenadmittanzmatrix \underline{Y}_w , komplex, in S, 111
 Wellenanpassung, 24
 Wellenausbreitungskonstante γ , komplex, in 1/m, 19, 20
 Wellenimpedanz, komplex, \underline{Z}_w , in Ω , 20
 Wellenimpedanz, reelle, Z_w , für verlustlose Leiter, in Ω , 15
 Wellenimpedanzmatrix \underline{Z}_w , komplex, in Ω , 100, 111
 Wellenlänge λ , in m, 10, 11, 21
 Widerstandsbelag R' , in Ω/m , 12, 61
 \underline{Y}_w komplexe Wellenadmittanz, in S (Siemens), 46
 \underline{Y}_w Wellenadmittanzmatrix, komplex, in S, 111
 \underline{Y}_i Queradmittanzbeläge, komplex, in S/m , 103
 \underline{Y}_{ik} Gegenadmittanzbeläge, komplex, in S/m , 103
 Z'_{ii} Längsimpedanzbeläge, komplex, in Ω/m , 102
 Z'_{ik} Gegenimpedanzbeläge, komplex, in Ω/m , 102
 Z_\square Oberflächenimpedanz, komplex, in Ω , 59, 213
 Z_w reelle Wellenimpedanz, für verlustlose Leiter, in Ω , 15
 \underline{Z}_w komplexe Wellenimpedanz, in Ω , 20
 \underline{Z}_w Wellenimpedanzmatrix, komplex, in Ω , 100, 111
 Z_{we} Gleichtaktwellenimpedanz, in Ω , 114
 Z_{wo} Gegentaktwellenimpedanz, in Ω , 114
 Zweidrahtleitung, 11, 52, 64
 Zweitor, 31
 α Dämpfungsbelag, in $1/m$, 20, 61
 β Phasenbelag, in $1/m$, 20
 γ Wellenausbreitungskonstante, komplex, in $1/m$, 19, 20
 γ_e Gleichtaktwellenausbreitungskonstante, komplex, in $1/m$, 114
 γ_o Gegentaktwellenausbreitungskonstante, komplex, in $1/m$, 114
 δ Verlustwinkel, 58
 δ_{ik} Kronecker-Delta, 105
 δ_s Eindringtiefe, in m, 59, 212
 ϵ reelle Dielektrizitätskonstante, in F/m , 15, 53
 ϵ_0 Dielektrizitätskonstante im Vakuum, $\epsilon_0 = 8.854 \text{ pF/m}$, 10
 ϵ_r reelle, relative Dielektrizitätskonstante, 11, 15, 52
 ϵ_{re} relative, effektive Dielektrizitätskonstante, 65
 $\varphi(\omega)$ Phasengang, in rad (Radian), 134
 Φ' magnetischer Flussbelag, in Vs/m , 11

$\Gamma(\omega)$ logarithmischer Amplitudengang, in
Np (Neper), 134

$\underline{\Gamma}_B$ Betriebsdämpfungsmass, komplex, 139

λ Wellenlänge, in m, 10, 11, 21

$\lambda/4$ -Transformator, 35

siehe auch Viertelwellenlängen-Transfor-
mator

μ reelle Permeabilitätskonstante, in H/m,
15, 55, 56

μ_0 Permeabilitätskonstante im Vakuum,
 $\mu_0 = 0.4\pi \mu\text{H}/\text{m}$, 10, 56

μ_r reelle, relative Permeabilitätskonstante,
15, 56

π -Ersatzschaltung, 32

ρ spezifischer Widerstand, $\rho = 1/\sigma$, in
 Ωm , 58

σ elektrische Leitfähigkeit, $\sigma = 1/\rho$, in
 S/m , 59, 211

σ_t zeitliche Standardabweichung, in s, 96

σ_{tc} komplexe zeitliche Stand-
ardabweichung, in s, 98

τ_g Gruppenlaufzeit, in s, 134, 156

τ_g^* normierte Gruppenlaufzeit, 156

ω Kreisfrequenz, $\omega = 2\pi f$, in 1/s, 18

ω_{3dB} 3dB-Grenzkreisfrequenz, in 1/s, 141

ω_D Durchlassgrenzkreisfrequenz, in 1/s,
141

ω_r Normierungskreisfrequenz, in 1/s, 137

ω_S Sperrgrenzkreisfrequenz, in 1/s, 141

Ω normierte Frequenz, 137, 141