Stochastik

Serie 4

Aufgabe 4.1

Sie kaufen an einer Losbude 50 Lose, wobei der Losverkäufer garantiert, dass jedes fünfte Los ein Gewinn ist. Mit X bezeichnen wir die Anzahl Gewinne unter den 50 gezogenen Losen. X ist binomialverteilt, also $X \sim \text{Bin}(50, 0.2)$. Verwenden Sie die `R`-Funktionen `dbinom()`, `pbinom()` und `qbinom()`.

a) Warum ist X eine Zufallsvariable?

b) Erstellen Sie eine Tabelle für die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X. Wie würden Sie alle Tabellenwerte ermitteln?

c) $P(X = 10)$, also die Wahrscheinlichkeit, genau 10 Gewinne zu ziehen.

d) $P(X \leq 5)$, also die Wahrscheinlichkeit, höchstens 5 Gewinne zu ziehen.

e) $P(X \geq 15)$, also die Wahrscheinlichkeit, mindestens 15 Gewinne zu ziehen.

f) Finden Sie c so, dass $P(X \leq c) \approx 0.99$. Wie interpretieren Sie die Zahl c?

Aufgabe 4.2

Binomialkoeffizienten spielen in der abzählenden Kombinatorik eine zentrale Rolle, denn $\binom{n}{k}$ ist die Anzahl der Möglichkeiten, aus einer Menge mit n Elementen k Elemente auszuwählen, wobei die Reihenfolge der ausgewählten Elemente nicht berücksichtigt wird. Anschaulich lässt sich das so erklären: Man berechne mit $n!$ alle möglichen Vertauschungen, suche sich k „Felder“ aus (beispielsweise 6 beim Lotto) und frage sich, wie viele Möglichkeiten es gibt, diese Felder zu besetzen (beim Lotto mit 49 Zahlen). Da es keine Rolle spielt, welches „Ereignis“ sich auf welchem Feld ereignet hat, dividiert man alle unter diesen k Elementen möglichen Vertauschungen mit $k!$ heraus. Da es auch keine Rolle spielt, wie die Anordnung auf den uninteressanten Feldern aussieht, dividiert man mit $(n - k)!$ auch diese Vertauschungen heraus.

a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, beim Lotto sechs richtige Zahlen zu ziehen?

b) Das Programm eines Computers stellt für die Darstellung einer Zahl 15 Zeichenplätze (Bits) zur Verfügung, die mit 0 oder 1 belegt werden. Wie viele solcher Zahlen mit 7 Ziffern 1 gibt es? Wie viele Zahlen können insgesamt dargestellt werden?

Aufgabe 4.3

a) Nehmen Sie an, an einer Geburtstagsparty befinden sich 56 Personen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine zweite Person ebenfalls Geburtstag am selben Tag wie das Geburtstagskind hat?

b) Wie viele Leute müssen Sie fragen, um mit einer 50% Wahrscheinlichkeit auf eine weitere Person zu treffen, die am gleichen Tag Geburtstag hat wie Sie?

c) (**Zusatzaufgabe**) Nehmen Sie an, in einem Raum befinden sich 56 Personen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei Personen am selben Tag Geburtstag haben?

Aufgabe 4.4

Ein Stand auf einem Volksfest bietet ein Würfelspiel an. Man wirft zwei sechsseitige Würfel. Je nach Ausgang des Wurfs muss man Geld bezahlen oder man erhält Geld. Hier sind die Regeln des Spiels:

(1) Bei einem Pasch (also $(1,1)$, $(2,2)$, etc.) gewinnt der Spieler 10 SFr (Gewinn 10 SFr).

(2) Bei $(1,2)$ oder $(2,1)$ gewinnt der Spieler 20 SFr (Gewinn 20 SFr).

(3) Bei allen anderen Ergebnissen verliert der Spieler 4 SFr (Gewinn -4 SFr).

a) Sei X die Zufallsvariable, die den Gewinn des Spielers nach einem Wurf angibt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung.

b) Würden Sie dieses Spiel spielen? Überlegen Sie sich eine Möglichkeit, wie man mit einer Zahl angeben kann, ob sich das Spiel lohnt oder nicht.

Aufgabe 4.5

Bei einer Untersuchung werden Wasserproben (10 ml) auf Verunreinigungen untersucht. Da nur 2 Prozent aller Proben verunreinigt sind, wird vorgeschlagen, von 10 Einzelproben jeweils die Hälfte (5 ml) der Proben zu einer Sammelprobe (50 ml) zusammenzumischen und zunächst nur die Sammelprobe zu untersuchen. Wird in der Sammelprobe keine Verunreinigung festgestellt, so ist die Untersuchung für die 10 Einzeluntersuchungen beendet. Im anderen Fall werden alle 10 übriggebliebenen Hälften in 10 Einzeluntersuchungen geprüft.

a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, in der Sammelprobe keine Verunreinigung zu finden (unter der Annahme, dass die Einzelproben unabhängig voneinander sind)?

b) Sei die Zufallsvariable Y die Gesamtzahl benötigter Analysen. Welche Werte kann Y annehmen, und mit welchen Wahrscheinlichkeiten treten sie auf?

c) Wie viele Analysen werden im Durchschnitt für die gesamte Untersuchung benötigt (d.h. wie gross ist $\mathrm{E}[Y]$)? Wie viele Analysen werden durch die Bildung von Sammelproben „im Durchschnitt" eingespart?

Aufgabe 4.6

Ein Analog-Digital-Wandler oder A/D-Wandler ist ein elektronisches Gerät oder Bauteil zur Umsetzung analoger Eingangssignale in digitale Daten bzw. einen Datenstrom, der dann weiterverarbeitet oder gespeichert werden kann. Analog-Digital-Wandler sind elementare Bestandteile fast aller Geräte der modernen Kommunikations- und Unterhaltungselektronik wie beispielsweise Mobiltelefonen, Digitalkameras, oder Camcordern. Zudem werden sie in der Messwerterfassung in industriellen Anwendungen, Maschinen und in technischen Alltagsgegenständen wie Autos oder Haushaltsgeräten eingesetzt. Nach der A/D-Wandlung eines analogen Signals stehen die Daten als binäre Rechteckfolgen direkt für eine weitere Verarbeitung, Speicherung oder Übertragung zur Verfügung. Während in Verarbeitungskomponenten im Allgemeinen alle Bits parallel vorliegen, wird insbesondere bei Übertragungen digitaler Signale eine serielle Darstellung der Bits hintereinander in verschachtelter Form bevorzugt. Die Übertragung von digitalen Signalen ist häufig fehleranfällig.

Wir nehmen an, dass ein Bit, das durch einen Übertragungskanal gesendet wird, mit einer Wahrscheinlichkeit von $\pi = 0.1$ fehlerhaft empfangen wird. Wir nehmen ebenfalls an, dass die n Übertragungsversuche unabhängig voneinander sind. Wir bezeichnen mit X die Anzahl fehlerhaft übertragener Bits.

a) Geben Sie die Verteilung von X inklusive Parameter an.

b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es in den nächsten vier übertragenen Bits keinen, resp. zwei Fehler hat? Geben Sie diese beiden Ereignisse als Mengen an, indem Sie ein fehlerhaft empfangenes Bit mit E, und ein korrekt empfangenes Bit mit O bezeichnen.

c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 3 fehlerhafte Bits empfangen werden?

d) Wie viele fehlerhaft empfangene Bits erwarten Sie bei 100 übertragenen Bits? Wie gross ist die Varianz? Wie interpretieren Sie die Varianz?

Aufgabe 4.7

Angenommen, es wird ein Kommunikationssystem erfordert, um 48 gleichzeitig abgewickelte Gespräche von Ort A nach Ort B zu übertragen, und zwar in Form von „Paketen" mit Sprachinformationen. Die akustischen Wellen von jedem Gesprächsteilnehmer werden in Spannungswellen umgewandelt, die zuerst digitalisiert (d. h. in eine Folge von binären Zahlen umgewandelt) und danach in Datenpaketen gebündelt werden. Diese Datenpakete beinhalten 10 Millisekunden (ms) Sprachinformation. Eine Quell- und Zieladresse wird jedem Sprachpaket angehängt, bevor es abgesendet wird (siehe Abbildung). Es ist bekannt, dass im Durchschnitt etwa 2/3 aller Datenpakete Ruhe enthalten und somit keine Sprachinformation. Mit anderen Worten, im Durchschnitt sind von den 48 Datenpaketen pro 10 ms Zeitintervall nur $48/3 = 16$ **aktive** (nicht-stumme) Datenpakete.

Wir bezeichnen mit X die Anzahl aktiver Datenpakete (mit Sprachinformation). X nimmt Werte im Bereich von 0 (alle Datenpakete ohne Sprachinformation) bis 48 (alle Datenpakete aktiv) an.

a) Wie ist X, die Anzahl aktiver Datenpakete, verteilt? Geben Sie die Parameter an.

b) Bestimmen Sie $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{Var}(X)$ und σ_X. Wie interpretieren Sie diese Zahlen?

Die einfachste Ausführung des Kommunikationssystems würde 48 Pakete alle 10 ms in jede Richtung übertragen. Ein effizienteres System bestimmt, welche Datenpakete Sprachinformation enthalten, und überträgt nur diese aktiven Datenpakete, und zwar maximal 20. Wenn weniger als 20 Datenpakete aktiv sind, also $X \leq 20$, werden alle aktiven Datenpakete übertragen. Falls aber $X > 20$, dann können nicht alle aktiven Datenpakete übertragen werden. In diesem Fall werden $X - 20$ Datenpakete zufällig ausgewählt und von der Übertragung ausgeschlossen. Wir bezeichnen die Anzahl von der Kommunikation ausgeschlossener Pakete mit Z, wobei

$$Z = \begin{cases} 0, & \text{falls } X \leq 20 \\ X - 20, & \text{falls } X > 20\,. \end{cases}$$

c) Skizzieren Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von den Zufallsvariablen X und Z.

d) Wie ist der Erwartungswert für eine diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung im Allgemeinen definiert? Bestimmen Sie $\mathrm{E}(Z)$ und $\mathrm{Var}(Z)$. Welcher Bruchteil der aktiven Datenpakete wird im Mittel von der Kommunikation ausgeschlossen?

Kurzlösungen vereinzelter Aufgaben

A 4.2:

a) $7.2 \cdot 10^{-8}$

b) 6435 und 32768

A 4.3:

a) 0.14

b) 252.652

c) 0.988

A 4.5:

a) 0.817

b) 0.817 und 0.183

c) 7 Untersuchungen

A 4.6:

b) 0.6561 und 0.0486

c) 0.9999

d) $E(X) = 10$ und $\mathrm{Var}(X) = 9$

A 4.7:

b) $\mathrm{E}(X) = 16$ und $\mathrm{Var}(X) = 10.66$

d) 0.182 und 0.508