Formelsammlung Stochastik

Daniel Winz
Ervin Mazlagić

10. April 2014 18:07

Formelsammlung Stochastik – FOSASTOC

von Daniel Winz, Ervin Mazlagić

Über diese Arbeit

Dies ist das Ergebnis einer Zusammenarbeit auf Basis freier Texte erstellt von Studierenden der Fachhochschule Luzern und ist unter der GPLv2 lizenziert. Der TEX- bzw. LATEX-Code ist auf `github.com/fosa/fosastoc` hinterlegt. Eine aktuelle PDF-Ausgabe steht auf `fosa.adinox.ch` zum Download bereit.

In dieser Formelsammlung sind die Inhalte des Moduls STOC der HSLU-T&A zusammengefasst.

Allfällige Fehler können per E-Mail an die Autoren (`nino.ninux@gmail.com` oder `daniel.winz@stud.hslu.ch`) gemeldet werden.

Kapitelübersicht

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Grundbegriffe

1.1 Arithmetisches Mittel

Das arithmetische Mittel beschreibt den Quotienten aus der Summe aller Elemente und der Anzhal Elemente. Dieses wird oft auch einfach als Mittelwert, Mittel oder Durchschnitt bezeichnet. Ein solcher Mittelwert wird mit einem übergestellten Strich markiert. $\bar{x}$.

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

Ein allseits bekanntes Beispiel für das arithmetische Mittel ist der *Notendurchschnitt*.

Berechnung in R In `R` wird das arithmetische Mittel mit der Funktion `mean()` ermittelt.

```
> a <- c(6,4,5,5,4,5,6,3,4,5,6)
> mean(a)

[1] 4.818182
```

1.2 Quantil

Ein Quantil beschreibt eine Grenze innerhalb einer sortierten Datenreihe. Diese wird stets in Prozenten angegeben, d.h. *5% Qunatil, 20% Quantil* usw. Beispielsweise ein 5% Quantil ist eine Stelle in der Datenreihe, an welcher 5% der Werte unterhalb dieser Grenze liegen (z.B. *5% aller E-Mails sind kürzer als 12 Worte ⇒ 12 ist das 5% Quantil*).

$\alpha \in [0, 1]$	Prozentwert der Grenze
$x_1 - x_n$	Elemente sortiert nach grösse
$\alpha \cdot n$	Qunatil

Bei der Berechnung des Quantils gilt es zu beachten ob die Elemente der Datenreihe ganze oder gebrochene Zahlen beinhalten, denn dies beeinflusst die Rechnung.

ganze Zahlen:	$\frac{1}{2} \cdot \left(x_{\alpha \cdot n} + x_{\alpha \cdot (n+1)}\right)$
gebrochene Zahlen:	$k = \alpha \cdot n + \frac{1}{2}$ k runden $\Rightarrow x_k$

Berechnung in R Die Brechnung von Qunatilen in `R` lässt sich mittels `quantile()` durchführen. Hierbei gilt es zu beachten, dass `R` neun verschiedene Algorithmen kennt um Quantile zu berechnen. Ohne einen Parameter nimmt `R` den Default-Algorithmus (`type=7`). Für sämtliche Aufgaben aus dem Stochastikunterricht der HSLU gilt der `type=2` als einzig richtiger!

Im Folgenden eine Beispielrechnung vom 30% Quantil 10 zufälliger ganzer Zahlen zwischen 1 und 20.

```
> x <- round(x=runif(n=10, min=1, max=20),
   digits=0)
> x <- sort(x)
> x

 [1]  3  8  8  8 10 11 12 12 14 19

> quantile(x, prob=0.2, type=2)

20%
  8
```

1.3 Quartil

Das Quartil beschreibt spezielle Quantile welche jeweils ein Vielfaches von $\frac{1}{4}$ bzw. 25% sind, d.h. das 25%, 50% als auch das 75% Quantil. Diese drei Quartile haben wiederum Eigennamen (siehe Tabelle 1.1)

1.4 Median

Der Median ist wie das Quartil ein spezielles Quantil, welches im Falle des Medians das 50% Quantil beschreibt.

Quantil	Eigenname
25% Quantil	unteres Quartil
50% Quantil	Median (mittleres Quartil)
75% Quantil	oberes Quartil

Tabelle 1.1: Übersicht spezieller Quantile

In der Statistik hat der Median eine wichtige Bedeutung, denn er beschreibt lediglich das mittlere Element einer sortierten Datenreihe. Somit ist der Median unenpfindlich gegenüber Extremwerten (anders etwa das arithmetische Mittel).

Berechnung in R In `R` lässt sich der Median mit der Funktion `median()` ermitteln. Im Folgenden ein Beispiel welches verdeutlicht, dass der Median umempfindlich ist gegenüber Extremwerten bzw. Ausreissern.

```
> x <- c(1.6, 1.7, 1.75, 1.87, 1.94)
> y <- c(1.2, 1.4, 1.75, 1.99, 2.17)
> # sort() wird ausgelassen, da bereits sortiert
> median(x); median(y)
```

```
[1] 1.75
```

```
[1] 1.75
```

1.5 Varianz

Die Varianz beschreibt die quadratische Abweichung von Daten und ihrem arithmetischen Mittelwert. Sie ist somit das Quadrat der Standardabweichung und wird deshalb als σ^2, σ_x^2 bzw. s_x^2 notiert.

$$\sigma_x^2 = s_x^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \right)$$

Die obige Formel ergibt die sogenannte *korrigierte Stichprobenvarianz*, denn der Mittelwert $\bar{x}$ wird durch die Stichproben berechnet. Sollte der *wahre* Mittelwert μ bekannt sein, so ist die Korrektur $\frac{1}{n-1}$ hinfällig und es ergibt sich die folgende Formel.

$$\sigma_x^2 = s_x^2 = \frac{1}{n} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \right)$$

Die Standardabweichung kann auch graphisch gezeigt werden mittels eines Plots mit `rect()`. Dieses erlaubt es Quadrate zu zeichnen mit der Kantenlänge der Abweichung von `mean()` zu Daten. Die Standardabweichung entspricht somit der Kantenlänge dieser Quadrate.

```
> x <- c(1:10)
> y <- (runif(n=10, min=3, max=7))
> plot(y, ylim=c(0, 10))
> abline(h=mean(y))
> diff <- sqrt((y-mean(y))^2)
> rect(xleft=x, xright=(x+diff), ybottom=mean(y)
   , ytop=y, col='gray')
> segments(x0=x, y0=mean(y), x1=x, y1=y, lwd=3)
```

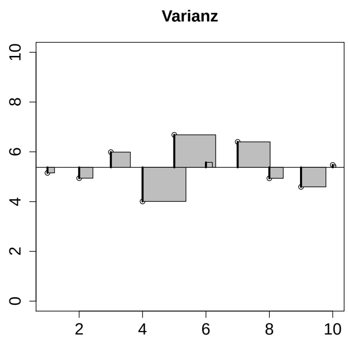


Abbildung 1.1: Varianz als Flächen dargestellt

1.6 Standardabweichung

Die Standardabweichung beschreibt wie gross die die mittlere Abweichung ist von den einzelnen Beobachtungen (Datenpunkten) zum arithmetischen Mittel[1] derselben Beobachtungen. Die Standardabweichung ist somit gleich der zweiten Wurzel von der Varianz der selben Beobachtungen. Die Standardabweichung wird oft mit σ, σ_x bzw. s, s_x notiert.

$$\sigma_x = s_x = \sqrt{\sigma_x^2} = \sqrt{s_x^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \right)}$$

Berechnung in R In `R` wird die Standardabweichung mittel `sd()` ermittelt. Im Folgenden ein Beispiel welches die Standardabweichung 10 zufälliger ganzer Zahlen ermittelt.

```
> x <- round(x=runif(n=10, min=1, max=10),
    digits=0)
> x

 [1] 7 4 5 8 9 4 3 4 7 8

> sd(x)

[1] 2.13177
```

Die Standardabweichung kann auch graphisch gezeigt werden mittels eines Plots mit `segments()`. Dieses erlaubt es Linensegmente zwischen `mean()` und den Daten zu zeichnen. Die Varianz erhält man bei der Quadrierung dieser Linien.

```
> x <- c(1:20)
> y <- (runif(n=20))
> plot(y)
> abline(h=mean(y))
> segments(x0=x, y0=mean(y), x1=x, y1=y, lwd=2)
```

[1] Das arithmetische Mittel ist eine Schätzung für den *waren* Mittelwert und verändert die Formel (siehe Kapiel 1.5).

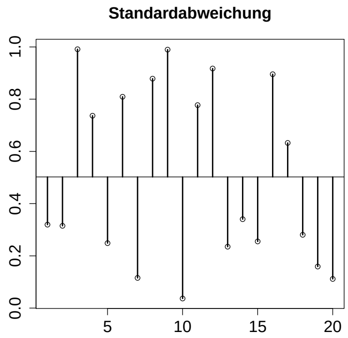


Abbildung 1.2: Standardabweichung (Daten zu `mean()`)

1.7 Kovarianz

Die Kovarianz (*mit der Varianz*) ist ein Mass für den Zusammenhang zweier Zufallsvariablen.

$$\begin{aligned} C(X,Y) &:= E((X-E(X))\cdot(Y-E(Y))) \\ s_{xy} &= \frac{1}{n-1}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})\cdot(y_i-\bar{y})\right) \end{aligned}$$

Sie ist ein Term aus der Varianz zweier Zufallsvariablen, denn es gilt

$$\begin{aligned} V(X+Y) &= E(X+Y-E(X+Y))^2 \\ &= V(X)+V(Y)+2\cdot\underbrace{E((X-E(X))\cdot(Y-E(Y)))}_{\text{Kovarianz } C(X,Y)} \end{aligned}$$

Die Kovarianz beschreibt ob sich zwei Datenreihen ähnlich entwickeln. Dabei gilt, dass positive Werte der Kovarianz für ein ähnliches Verhalten sprechen und negative dagegen. Um auch eine Aussage über die Intensität des Zusammenhangs machen zu können, muss die Korrelation bzw. der Korrelationskoeffizient betrachtet werden.

Es gibt fünf wichtige Rechenregeln für Kovarianzen.

$$
\begin{aligned}
C(X,Y) &= E(X \cdot Y) - (E(X) \cdot E(Y)) \\
C(X,Y) &= C(Y,X) \\
C(X,X) &= V(X) \\
C(X,Y) &= C((X+a),(Y+b)) \\
C(X,Y) &= 0 \qquad \text{falls X,Y stochastisch unabhängig}
\end{aligned}
$$

Berechnung in R Die Kovarianz lässt sich in `R` mit der Funktion `cov()` ermitteln. Im Folgenden ein extremes Positiv-Beispiel, generiert mit je 1000 sortierten exponentialverteilten Zufallszahlen.

```
> x <- sort(x=rexp(n=1000))
> y <- sort(x=rexp(n=1000))
> cov(x,y)

[1] 0.9019804
```

1.8 Korrelation

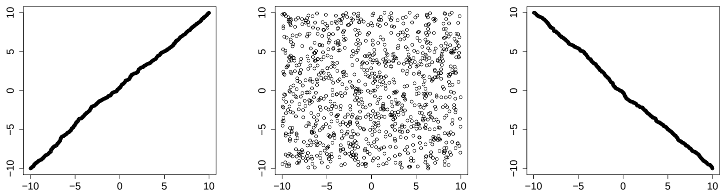
Die Korrelation beschreibt den Zusammenhang verschiedener Variablen. Dieser Zusammenhang kann mittels eines Koeffizienten, dem sog. Korrelationskoeffizient beschrieben werden. Dieser beschreibt den Zusammenhang mittels eines Wertes aus dem Intervall $[-1, 1]$ und hat somit auch eine Richtung.

$$
r(X,Y) := \frac{C(X,Y)}{\sqrt{V(X) \cdot V(Y)}}
$$

$$
r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2\right)}}
$$

Mit dem Betrag und der Richtung des Korrelationskoeffizienten sind Grundsätzlich drei Aussagen möglich:

$r \to +1$	$\Rightarrow$	Daten korrelieren positiv	(*je mehr, desto mehr*)
$r \to 0$	$\Rightarrow$	Daten korrelieren nicht	(*kein Zusammenhang*)
$r \to -1$	$\Rightarrow$	Daten korrelieren negativ	(*je mehr, desto weniger*)



(a) $r = +1$ (b) $r = 0$ (c) $r = -1$

Abbildung 1.3: Extremwerte von Korrelationen im Vergleich.

Bei der Analyse der Korrelation mittels solcher Plots ist Vorsicht geboten, denn diese müssen natürlich nicht so mustergültig sein wie im Bild 1.3 gezeigt. Hierzu eine kleine Merkregel: Bilden die Daten im Plot annähernd eine Gerade mit einer konstanten Steilheit die nicht Null ist, so korrelieren die Daten mit annähernd ± 1 (Vorzeichen entsprechend der Steigung). Ergibt sich im Plot etwas anderes als eine Gerade (etwa ein Kreis, eine Kurve oder mehrere *Wölkchen*) so ist der Korrelationskoeffizient Null anzunehmen.

Berechnung in R In `R` kann der Korrelationskoeffizient mit der Funktion `cor()` berechnet werden.

```
> x <- (runif(n=100)); y <- (rexp(n=100))
> cor(x,y)

[1] 0.09942358
```

Kapitel 2

Kombinatorik

2.1 Logik & Mengenlehre

Die Logik ist ein Teilgebiet der Mathematik und bedgründete das relativ junge Teilgebiet der Mengenlehre (engl. *set theory*). Dass diese beiden Teilgebiete sich sehr ähnlich sind, zeigt sich unter anderem in ihren ähnlichen Notationen.

Die Mengenlehre zeichnet sich insbesondere dadurch aus, dass es eine starke Abstraktion zulässt. Diese Eigenschaft ermöglicht es die Mengenlehre für viele Probleme heranzuziehen. Die Stochastik ist nur eines von diesen.

Aussagelogik		Mengenlehre	
Konjunktion	$A \wedge B$	Schnittmenge	$A \cap B$
Disjunktion	$A \vee B$	Vereinigung	$A \cup B$
Logische Äquivalenz	$A \Leftrightarrow B$	Differenzmenge	$A \setminus B$
Implikation	$A \Rightarrow B$	Symmetrische Differenz	$A \triangle B$
Kontravalenz	$A \veebar B$	Disjunkte Vereinigung	$A \dot\cup B$
Negation	$\bar{A}$	Komplement	A^{C}

Tabelle 2.1: Junktoren der Logik und Operationen der Mengenlehre

2.1.1 Begriffe der Mengenlehre

Grundmenge und Grundraum In der Mengenlehre spricht man von der Grundmenge als die Menge aller möglicher Elemente die in einer Menge erfasst werden können (von Neumann Universum etc). Im Teilgebiet der Stochastik betrachtet man die Elemente die in Mengen erfasst werden können als Eereignisse die eintreten können. Die Gesamtheit all dieser möglichen Ereignisse nennt man Ereignisraum oder Grundmenge, welche stets mit Ω notiert wird. Bei der Betrachtung eines Spiels mit einem Spielwürfel mit sechs Seiten wäre der Grundraum $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und bei einem zweifachen Münzwurf $\Omega = \{KK, KZ, ZK, ZZ\}$ usw.

$$\Omega := \{x|P(x) \neq 0\}$$

Teilmenge Eine Menge A heisst Teilmenge von B, wenn jedes Element aus A ein Element von B ist. Somit kann eine solche Teilmenge A auch die ganze Menge B sein, d.h. es kann $A = B$ gelten.

$$A \subseteq B$$

Echte Teilmenge Eine echte Teilmenge A der Menge B heisst echte Teilmenge, wenn alle Elemente von A in B enthalten sind, aber die Menge B noch Elemente hat, die nicht in A enthalten sind. In diesem Fall ist B auch eine *echte* Obermenge von A und es gilt $A \neq B$.

$$A \subset B$$

Leere Menge Eine leere Menge ist eine Menge welche keinerlei Elemente enthält. Sie wird entweder als $\{\}$ oder $\emptyset$ notiert.

$$A = \{\} = \emptyset$$

Schnittmenge Eine Menge von Elementen die allesamt sowohl in der Menge A als auch in der Menge B vorkommen, wird Schnittmenge dieser Mengen genannt.

$$A \cap B$$

Vereinigungsmenge Die Menge aller Elemente die entweder in der Menge A, in der Menge B oder in beiden Mengen A, B vorkommen, wird als Vereinigungsmenge bezeichnet.

$$A \cup B$$

Gleiche Menge Wenn zwei Mengen die gleichen Elemente enthalten und keine weiteren, so sind diese die gleiche Menge.

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad \forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

Differenzmenge Eine Menge die alle Elemente einer Menge enthält ohne jene die auch in einer weiteren Menge vorkommen, wird als Differenzmenge bezeichnet.

$$A \setminus B$$

Potenzmenge Für eine Menge Ω gibt es die sogenannte Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$, welche alle Teilmengen ω von Ω beschreibt. Eine Potenzmenge ist also per Definition eine Menge, welche nur aus Mengen besteht.

Die Potenzmenge kennt eine Reihe von gebräuchlichen Notationen wobei $\mathcal{P}(\Omega)$ die gängigste ist. Weitere Notationen sind z.B. $\mathfrak{P}(\Omega)$ oder auch $\prod(\Omega)$

$$\mathcal{P}(\Omega) \quad = \quad \{\omega \mid \omega \subseteq \Omega\}$$

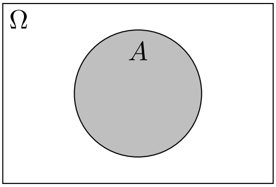
$$\begin{tikzcd}
 & \{x, y, z\} & \\
\{x, y\} \arrow[ur] & \{x, z\} \arrow[u] & \{y, z\} \arrow[ul] \\
\{x\} \arrow[u] \arrow[ur] & \{y\} \arrow[ul] \arrow[ur] & \{z\} \arrow[ul] \arrow[u] \\
 & \{\emptyset\} \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Abbildung 2.1: Potenzmenge von $\{x, y, z\}$ als Hasse-Diagramm

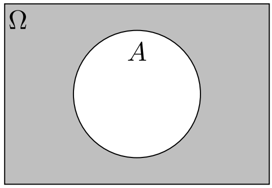
Komplement Eine Menge welche alle Elemente aus einer Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ enthält ohne Elemente einer Menge $A \in \Omega$ heisst Komplement der Menge A und wird als A^{C} notiert[1]. Somit kann ein Komplement als Differenzmenge einer Potenzmenge und einer Menge beschrieben werden.

$$A^{\mathrm{C}} \quad = \quad \Omega \setminus A \quad := \quad \{\omega \in \Omega \mid \omega \notin A\} \in \mathcal{P}(\Omega)$$

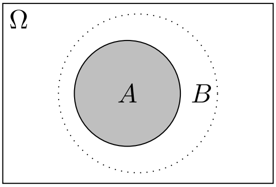
[1]Das Komplement in der Mengenlehre sollte stets als A^{C} notiert werden obwohl oft diverse andere Schreibweisen anzutreffen sind wie z.B. $\bar{A}$.



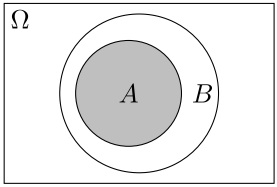
(a) A



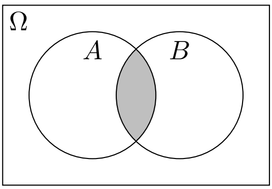
(b) A^{C}



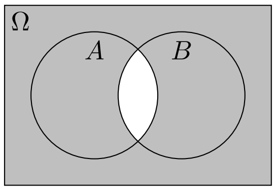
(c) $A \subseteq B$



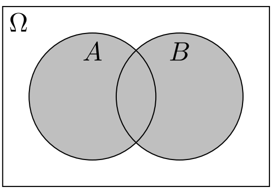
(d) $A \subset B$



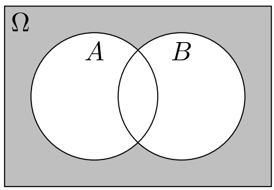
(e) $A \cap B$



(f) $(A \cap B)^{\mathrm{C}}$



(g) $A \cup B$



(h) $(A \cup B)^{\mathrm{C}}$

Abbildung 2.2: Die wichtigsten Operationen der Mengenlehre graphisch erläutert mittels Venn-Diagrammen für $A, B \subset \Omega$.

2.2 Kombinatorik

Im Teilgebiet der Stochastik gibt es einige Regeln die es in der Kombinatorik zu beachten gilt. Insbesondere sind dies die Axiome von Kolmogorov.

2.2.1 Axiome von Kolmogorov

Der russische Mathematiker Andrei Nikolajevitsch Kolmogorov definierte drei Axiome für die Wahrscheinlichkeitstheorie.

1. **Nichtnegativität**
   Jedes Ereignis A aus der Ergebnismenge Ω hat eine reelle Eintrittswahrscheinlichkeit $P(A)$ von $P(A) \geq 0$. Das bedeutet insbesondere, dass es keine negativen Wahrscheinlichkeiten gibt.
   $$P(A) \geq 0 \quad \text{für } A \in \Omega$$
2. **Normiertheit**
   Das sichere Ereignis der Ergebnismenge Ω hat eine Wahrscheinlichkeit von $P(\Omega) = 1$. Dies sagt aus, dass sich immer etwas ereignen wird und dass das unmögliche Ereignis, die Wahrscheinlichkeit $P(\emptyset) = 0$ hat.
   $$P(\Omega) = 1$$
3. **Additivität**
   Die Wahrscheinlichkeit einer Vereinigung disjunkter Ereignisse ist gleich der Summe der einzelnen Wahrscheinlichkeiten. Dies kann als $P(A_1 \dot{\cup} A_2 \dots) = \sum P(A_i)$ formuliert werden und wird als σ-Additivität bezeichnet.
   $$P(A+B) = P(A) + P(B) \quad \text{falls } A \cap B = 0$$

2.2.2 Stochastisch unabhängige Ereignisse

Hat man zwei Ereignisse A, B welche die nachfolgende Definition erfüllen so nennt man diese stochastisch unabhängig.

$$\left.\begin{array}{rcl} P(A|B) & = & P(A) \\ P(B|A) & = & P(B) \end{array}\right\} \Rightarrow P(A) \cdot P(B)$$

Die allgemeingültige mathematische Definition der stochastischen Unabhängigkeit ist etwas umständlich, kann aber einfach erläutert werden und lässt zu, die Unabhängigkeit von beliebig vielen Ereignissen zu prüfen.

Im Falle von drei Ereignissen A, B, C muss zur stochastischen Unabhängigkeit folgendes gelten

$$\begin{aligned}
P(A \cap B) &= P(A) \cdot P(B) \\
P(A \cap C) &= P(A) \cdot P(C) \\
P(B \cap C) &= P(B) \cdot P(C) \\
P(A \cap B \cap C) &= P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)
\end{aligned}$$

Hier lässt sich nun etwas deutlicher erkennen, was die allgemeine stochastische Unabhängigkeit ausmacht. Für eine Anzahl n von Ereignissen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ muss für jede Kombination (sog. relevante Menge) die Bedingung $P(A_x \cap A_y) = P(A_x) \cdot P(A_y)$ gelten, damit diese als stochastisch unabhängig gelten.

Rechenregeln für zwei stochastisch unabhängige Ereignisse

$$\begin{aligned}
P(A) &\leq 1 \\
P(A) &\geq 0 \\
P(\Omega) &= 1 \\
P(A \cup B) &= P(A) + P(B) \quad \text{Falls } A \cap B = 0 \\
P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\
P(A \cap B) &= P(A) \cdot P(B) \\
P(A \cap B \cap C) &= P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \\
P(A^{\mathrm{C}}) &= 1 - P(A)
\end{aligned}$$

2.2.3 Diskrete Wahrscheinlichkeit

$$P(E) = \frac{\text{Anzahl positiver Elementarereignisse für } E}{\text{Anzahl aller möglicher Elementarereignisse}}$$

Hierbei gilt es zu beachten, welche Art von Problem berechnet wird, denn dies beeinflusst die Berechnung (siehe Abschnitt 2.2.4).

2.2.4 Multiplikationsregel

Die Multiplikationsregel (auch *Fundamentalprinzip des Zählens* genannt) besagt, wie die Anzahl möglicher Elementarereignisse berechnet werden kann und unterscheidet dabei zwei Kategorien:

- Variation (Reihenfolge wichtig)
  - Variation ohne Wiederholung
  - Permutation
  - Variation mit Wiederholung
- Kombination (Reihenfolge egal)
  - Kombination ohne Wiederholung
  - Kombination mit Wiederholung

Variation ohne Wiederholung

$$\frac{n!}{k!}$$

3 Studenten setzen sich in ein Auto mit 5 Plätzen. Die Studenten können die Sitze auf $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ Verschiedene Arten belegen.

Permutation

$$n!$$

5 Studenten setzen sich in ein Auto mit 5 Plätzen, d.h. es gibt $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot = 5! = 120$ verschiedene Möglichkeiten.

Variation mit Wiederholung

$$k^n$$

Ein Zahlenschloss hat 4 Zahlenringe mit den Zahlen von 0 bis 9. Somit gibt es $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4 = 10000$ Möglichkeiten.

Kombination ohne Wiederholung Aus einer Lerngruppe von 8 Studenten müssen 3 helfen die Bücher zu tragen. Dies lässt sich als Binomialkoeffizient schreiben

$$\frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

mit $n = 8, k = 3$ und ergibt $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \binom{8}{3} = 56$ Möglichkeiten.

Kombination mit Wiederholung

$$\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\,k!} = \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$$

5 Studenten gehen in die Schule zum lernen und es sind noch drei Räume frei. Sie dürfen sich verteilen wie es ihnen beliebt (leere Räume sind möglich). Somit ergeben sich $\binom{7}{2} = 21$ Möglichkeiten.

2.3 Bedingte Wahrscheinlichkeit

Bei bedingten Wahrscheinlichkeiten kann das Beyes'sche Theorem angewandt werden. Mit Hilfe dieses Theorems kann die Wahrscheinlichkeit, dass A eintritt wenn B eingetreten ist umgekehrt werden zur Formulierung dass B eintritt, gegeben es sei A eingetreten.

2.3.1 Beyes'sche Theorem

Aus dem Beyes'schen Theorem leiten sich die folgenden Aussagen ab.

$$
\begin{aligned}
P_B(A) &= P(A|B) \\
P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)} \\
P(B) &= P(B|A) \cdot P(A) + P(B|A^{\mathrm{C}}) \cdot P(A^{\mathrm{C}}) \\
P(B) &= P(B \cap A) \cdot P(A) + P(B|A^{\mathrm{C}}) \cdot P(A^{\mathrm{C}})
\end{aligned}
$$

2.3.2 Tabelle zur bedingten Wahrscheinlichkeit

Mit dem Beyes'schen Theorem kann eine tabellarische Übersicht von zwei bedingten Ereignissen erstellt werden, welche wiederum mittels der Kolmogorv'schen Axiome bestimmt werden.

		A	$\bar{A}$
		$P(A)$	$P(\bar{A})$
B	$P(B)$	$P(A) \cdot P(B\|A)$	$P(\bar{A}) \cdot P(B\|\bar{A})$
$\bar{B}$	$P(\bar{B})$	$P(A) \cdot P(\bar{B}\|A)$	$P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}\|\bar{A})$

		A	$\bar{A}$
		$P(A) \cdot P(B\|A)$ + $P(A) \cdot P(\bar{B}\|A)$	$P(\bar{A}) \cdot P(B\|\bar{A})$ + $P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}\|\bar{A})$
B	$P(A) \cdot P(B\|A)$ + $P(\bar{A}) \cdot P(B\|\bar{A})$	$P(A) \cdot P(B\|A)$	$P(\bar{A}) \cdot P(B\|\bar{A})$
$\bar{B}$	$P(A) \cdot P(\bar{B}\|A)$ + $P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}\|\bar{A})$	$P(A) \cdot P(\bar{B}\|A)$	$P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}\|\bar{A})$

Abbildung 2.3: Tabelle bedingter Wahrscheinlichkeiten.

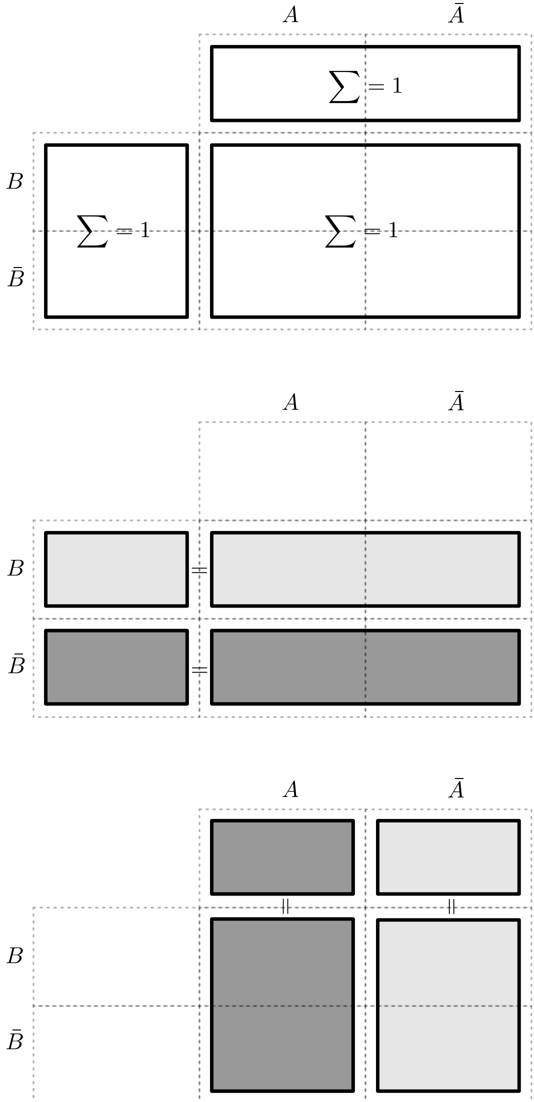


Abbildung 2.4: Hinweise zur Tabelle bedingter Wahrscheinlichkeiten.

Kapitel 3

Diskrete Verteilungen

Diskrete Verteilungen beschreiben Probleme, welche Ergebnisse aus $\mathbb{N}$ liefern und binär sind.

Binär Binär bedeutet, dass ein Ereignis zwei Werte annehmen kann. Bekannte Beispiele binärer Probleme sind

- Gewinnlose (*Gewinn, Zonk*)
- Münzwurf (*Kopf, Zahl*)
- Telefon (*klingelt, klingelt nicht*)

Viele nicht-binäre Probleme können aber leicht in binäre gewandelt werden. Beispielsweise liefert ein Sensor analoge Signale, diese sind $\notin \mathbb{N}$ noch sind diese binär. Dennoch kann man das Signal binär untersuchen mit der Fragestellung „*Ist der Wert grösser als xy?*“. Diese Frage kann semantisch nur mit *Ja* und *Nein* beantwortet werden und beschreibt somit ein binäres Problem. Die Zahl der Antworten kann wiederum nur $\in \mathbb{N}$ sein. Somit sind die Bedingungen für ein binäres Problem gegeben.

3.1 Hypergeometrische Verteilung

Die hypergeometrische Verteilung entspricht dem Urnenmodell:

- Urne hat r rote (postive) und s schwarze (negative) Kugeln

  $$r, s \in \mathbb{N}$$

- Die Menge der roten als auch der schwarzen Kugeln ist fix

  $$r, s \neq \infty$$

- Ein erzieltes Ergebnis reduziert die entsprechende Menge (*Ziehen ohne Zurücklegen*)

  $$r \to R - 1$$

3.1.1 Verteilungsfunktion

$$X \sim Hyp(n, r, s)$$

n	Anzahl Ziehungen
r	Anzhal roter Kugeln (positive Ereignisse)
s	Anzahl blauer Kugeln (negative Ereignisse)
N	Anzahl Kugeln in der Urne ($N = r + s$)

$$P(X = k) = \frac{\binom{r}{k} \cdot \binom{s}{n-k}}{\binom{r+s}{n}} = \frac{\binom{r}{k} \cdot \binom{N-r}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

3.1.2 Erwartungswert

$$E(X) = n \cdot \frac{r}{N}, \qquad X \sim Hyp(n, r, s)$$

3.1.3 Varianz

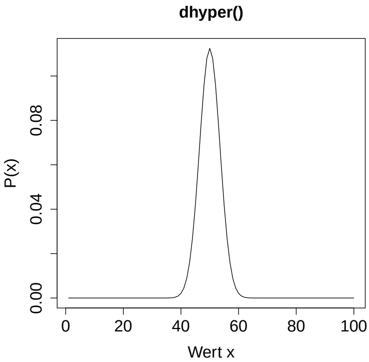
$$Var(X) = n \cdot \frac{r}{N} \cdot \left(1 - \frac{r}{N}\right) \cdot \frac{N-n}{N-1}, \qquad X \sim Hyp(n, r, s)$$

3.1.4 Verwendung in R

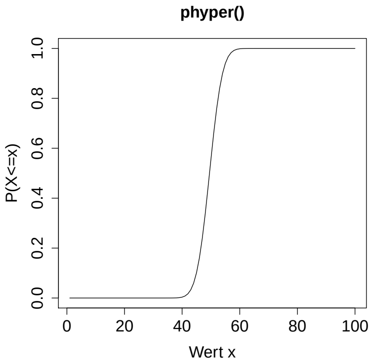
`R` stellt grundsätzlich vier Funktionen für die hypergeometrische Verteilung zur Verfügung.

- `dhyper()` (*Wahrscheinlichkeitsverteilung*)
- `phyper()` (*kumulative Wahrscheinlichkeit*)
- `qhyper()` (*Verteilung der Quantile*)
- `rhyper()` (*Zufallszahlen*)

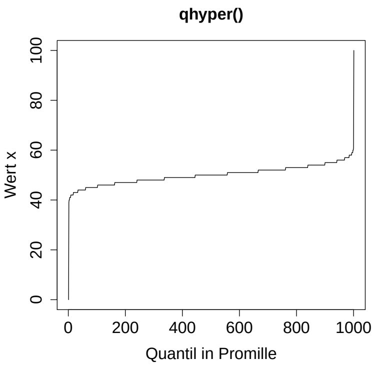
Die Abbildung 3.1 zeigt jeweils einen Plot zu den gegebenen Funktionen aus `R`. Für weitere Informationen zu Plots siehe Kapitel 6.7.



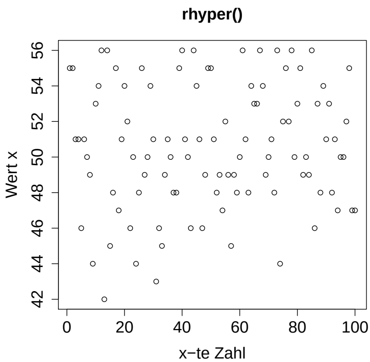
(a) Wahrscheinlichkeitsverteilung



(b) kumulative Wahrscheinlichkeit



(c) Quantile



(d) Zufallszahlen

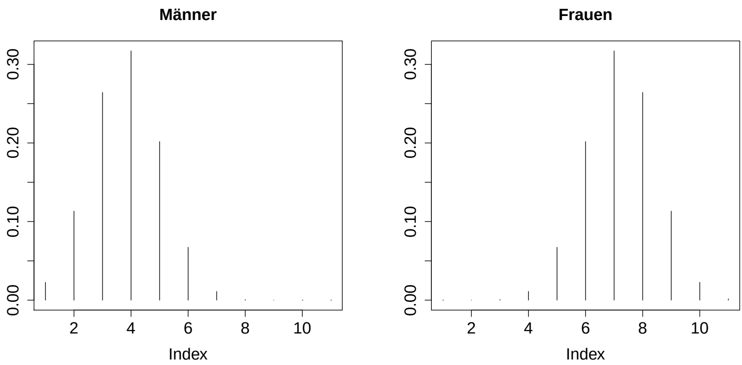
Abbildung 3.1: Hypergeometrische Verteilung ($m = 100, n = 100, k = 100$)

3.1.5 Beispiel einer hypogeometrischen Verteilung

Ein Beispiel aus dem Alltag ist die Teambildung im Mannschaftssport. Ein Turnverein hat 9 männliche und 17 weibliche Mitglieder. Für ein Fussballmatch gegen einen anderen Verein muss nun ein Team mit 11 Mitgliedern gebildet werden. Wie wahrscheinlich ist es, dass das Team aus einer bestimmten Anzahl Männern oder Frauen besteht?

Berechnung in R

```
> man <- 9; women <- 17; player <- 11
> boys <- dhyper(x=c(1:player), m=man, n=women,
   k=player)
> girls <- dhyper(x=(1:player), m=women, n=man,
   k=player)
> plot(boys, type='h')
> plot(girls, type='h')
```



(a) $P(x)$ der Männer im Team (b) $P(x)$ der Frauen im Team

Abbildung 3.2: Teambildung nach Geschlecht

Die Plots aus der Abbildung 3.2 zeigen, dass es mit der höchsten Wahrscheinlichkeit 4 Männer und 7 Frauen im Team hat, was die gewünschte Anzahl von Spielern ergibt für das Team $(4 + 7 = 11)$.

3.2 Binomialverteilung

Die Binomialverteilung ist eine Verteilung, welche bei binären Problemen auftritt wobei ein erzieltes Ergebnis nicht die weiteren Ergebnisse beeinflusst. Sie ist somit ein Grenzfall der hypergeometrischen Verteilung (nämlich dann, wenn es sehr viele rote und schwarze Kugeln gibt).

$$\lim_{r,s\to\infty} Hyp(n,r,s) \quad \Rightarrow \quad Bin(n,p)$$

3.2.1 Verteilungsfunktion

$$X \sim Bin(n,p)$$

n	Anzahl Versuche
p	Trefferwahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} P(X=x) &= \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x} \\ &= \frac{n!}{x!\,(n-x)!} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x} \end{aligned}$$

3.2.2 Addition

Mit dem Additionsgesetz für stochastisch unabhängige Zufallsvariablen können auch binomiaverteilte Zufallsvariablen, welche die gleiche Eintrittswahrscheinlichkeit p haben, zusammengefasst werden.

$$\left.\begin{aligned} X &\sim Bin(n_1,p) \\ Y &\sim Bin(n_2,p) \end{aligned}\right\} \Rightarrow (X+Y) \sim Bin((n_1+n_2),p)$$

3.2.3 Erwartungswert

$$E(X) = n \cdot p, \qquad X \sim Bin(n,p)$$

3.2.4 Varianz

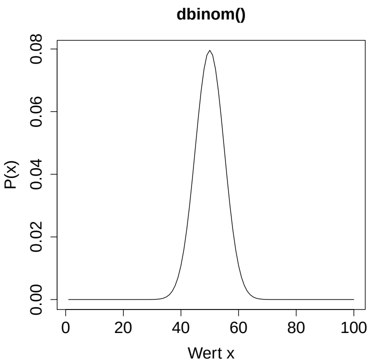
$$Var(X) = n \cdot p \cdot (1 - p), \qquad X \sim Bin(n, p)$$

3.2.5 Verwendung in R

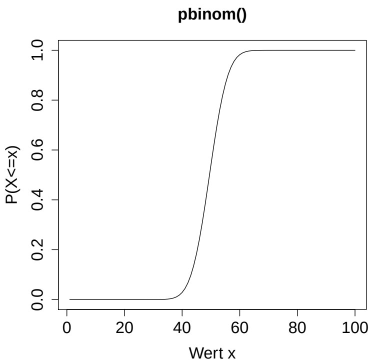
`R` stellt grundsätzlich vier Funktionen für die Binomialverteilung zur Verfügung.

- `dbinom()` (*Wahrscheinlichkeitsverteilung*)
- `pbinom()` (*kumulative Wahrscheinlichkeit*)
- `qbinom()` (*Verteilung der Quantile*)
- `rbinom()` (*Zufallszahlen*)

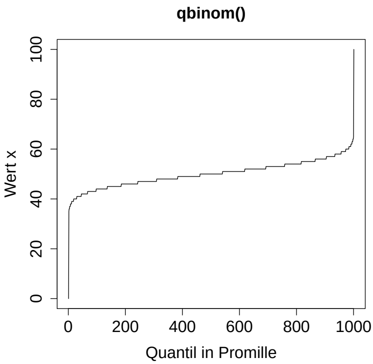
Die Abbildung 3.3 zeigt jeweils einen Plot zu den gegebenen Funktionen aus `R`. Für weitere Informationen zu Plots siehe Kapitel 6.7.



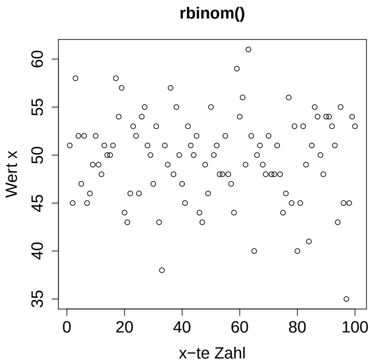
(a) Wahrscheinlichkeitsverteilung



(b) kumulative Wahrscheinlichkeit



(c) Quantile



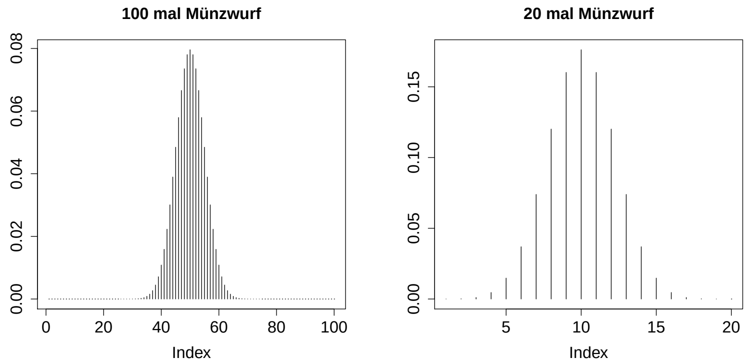
(d) Zufallszahlen

Abbildung 3.3: Binomialverteilung ($n = 100, p = 0.5$)

3.2.6 Beispiel einer binomialen Verteilung

Jemand sagt Ihnen, dass er von 100 Münzwürfen 80 mal Kopf erhielt. Sie antworten spontan, dass Sie ihm 15 Treffer von 20 Versuchen ja noch geglaubt hätten aber nicht 80 von 100. Wie wahrscheinlich sind aber diese beiden Ergebnisse wenn Kopf und Zahl jeweils gleichwahrscheinliche Ergebnisse sind?

```
> plot(dbinom(x=c(1:100), size=100, prob=0.5),
   type='h')
> plot(dbinom(x=c(1:20), size=20, prob=0.5),
   type='h')
```



(a) Verteilung für 100 Versuche (b) Verteilung für 20 Versuche

Abbildung 3.4: Wahrscheinlichkeitsverteilung beim Münzwurf

3.3 Poissonverteilung

Die Poissonverteilung ist eine Verteilung welche Ereignisse innerhalb eines Intervalls beschreibt. Dieses Intervall kann eine beliebige skalare Grösse beschreiben wie Zeit, Länge oder Temperatur (Griffiths 2009, S. 307).

Die Poissonverteilung ist ein Spezialfall der Binomialverteilung wenn die Anzahl Versuche n gross und die Trefferwahrscheinlichkeit p klein wird. Der Parameter λ der Poissonverteilung ist definiert durch die Parameter einer Binomialverteilung (Henze 2012, S. 197).

$$\lambda := n \cdot p_n, \qquad Bin(n, p_n),\ n \geq 1$$

$$Bin(n,p) \xrightarrow{(n \to \infty) \wedge (p \to 0)} Pois(\lambda)$$

Die Poissonverteilung beschreibt somit die Auftretenshäufigkeit innerhalb eines Intervalls. Der Parameter λ beschreibt sowohl den Erwartungswert als auch die Steuung. Dies definiert das spezielle Verhalten dieser Verteilung, denn je höher der Wert von λ ist, desto flacher wird die Verteilung (siehe Abbildung 3.5).

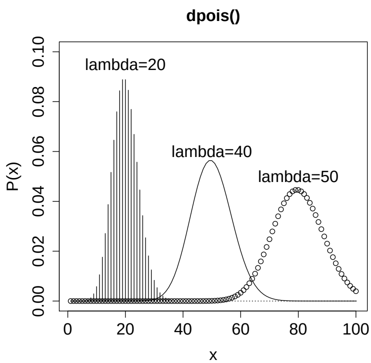


Abbildung 3.5: Poissonverteilung für verschiedene λ

3.3.1 Verteilungsfunktion

Die Verteilungsfunktion der Poissonverteilung ist definiert durch den Erwartungswert λ und die Anzahl der eintretenden Ereignisse x.

$$X \sim Pois(\lambda)$$

λ Erwartungswert

$$P(X = x) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!}$$

3.3.2 Addition

Mit dem Additionsgesetz für stochastisch unabhängige Zufallsvariablen können auch poissonverteilte Zufallsvariablen zusammengefasst werden.

$$\left.\begin{array}{l} X \sim Pois(\mu_1) \\ \\ Y \sim Pois(\mu_2) \end{array}\right\} \Rightarrow (X + Y) \sim Pois(\mu_1 + \mu_2)$$

3.3.3 Erwartungswert

Der Erwartungswert der Poissonverteilung ist direkt ein Parameter der Verteilungsfunktion selbst, nämlich λ.

$$E(X) = \lambda = Var(X)$$

3.3.4 Varianz

Die Varianz einer Poissonverteilung ist wie der Erwartungswert durch den Parameter λ der Verteilungsfunktion gegeben.

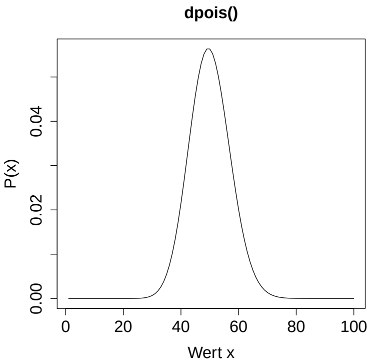
$$Var(X) = \lambda = E(X)$$

3.3.5 Verwendung in R

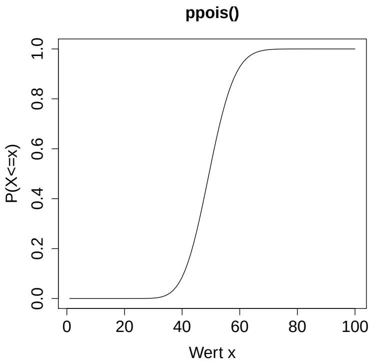
`R` stellt grundsätzlich vier Funktionen für die Poissonverteilung zur Verfügung.

- `dpois()` (*Wahrscheinlichkeitsverteilung*)

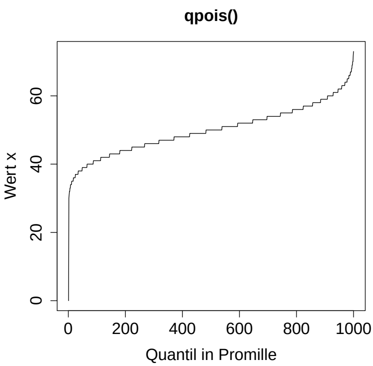
- `pois()` (*kumulative Wahrscheinlichkeit*)
- `qpois()` (*Verteilung der Quantile*)
- `rpois()` (*Zufallszahlen*)



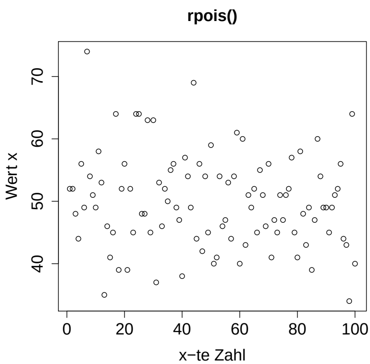
(a) Wahrscheinlichkeitsverteilung



(b) kumulative Wahrscheinlichkeit



(c) Quantile



(d) Zufallszahlen

Abbildung 3.6: Poissonverteilung ($\lambda = 50$)

3.3.6 Beispiel einer Poissonverteilung

Beispiel 1 - Pixelfehler Ein Mikrocontroller steuert ein Display an mit 320x240 Pixel. Damit möglichst schnelle Bildfolgen erzielt werden, haben sich die Programmierer bis an die Grenzen der Senderate und leicht darüber bewegt. Sie stellen nämlich fest, dass im Schnitt pro Bild (320x240 Pixel) ca. 12 Pixelfehler vorkommen.

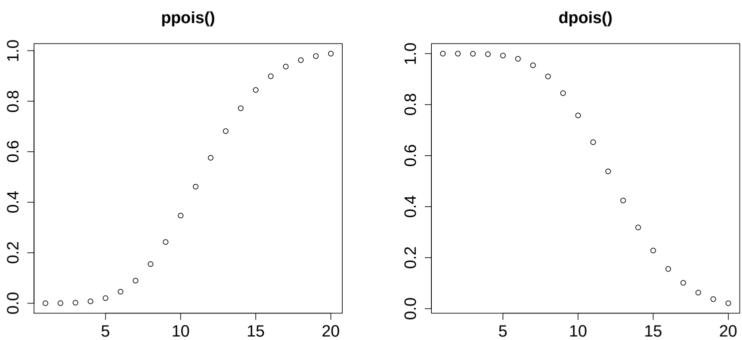
Die Programmierer besprechen die Lage und einer meint: „*Rechnen wir doch mal die Wahrscheinlichkeit für höchstens einen Fehler aus und für mindestens 16, was unsere Schmerzgrenze sein soll.*“

```
> eps <- 12 # error per screen
> # probability of at most 1 error per screen
> ppois(q=1, lambda=eps)

[1] 7.987476e-05

> # probability of at least 16 errors per screen
> 1-ppois(q=(16-1), lambda=eps)

[1] 0.1555843
```



(a) Punktwahrscheinlichkeit (b) 1−kummulative Wahrsch.

Abbildung 3.7: Wahrscheinlichkeiten von Pixelfehlern pro Bild

Beispiel 2 — Requests pro Woche Ein Team hat ein Embedded System entwickelt, welches Solarbetrieben an einem entlegenem Ort Geodaten sammelt und diese über einen auf dem Embedded System implementierten Webserver zur Verfügung stellt. Jedes Wochenende geht eine Gruppe von Studenten hin und prüft das System, macht Resets und flasht Updates.

Das Entwicklerteam erfährt am Montagmorgen, dass im letzten Update ein Bug drin ist. Dieser verursacht nach einer gewissen Anzahl an Requests einen Buffer Overflow, welcher das System zum Absturz bringt. Die Entwickler schätzen, dass schon nach ca. 15 Requests das dedizierte Embedded System abstürzen sollte.

Nun müssen die Entwickler sich entscheiden ob sie bis zum nächsten Wochenende abwarten können um dem Bugfix zu flashen oder ob sie noch vor dem Wochenende losziehen müssen. Sie sehen sich die alten Logfiles an und bemerken, dass im Schnitt ca. zwei der kritischen Requests pro Tag stattfinden.

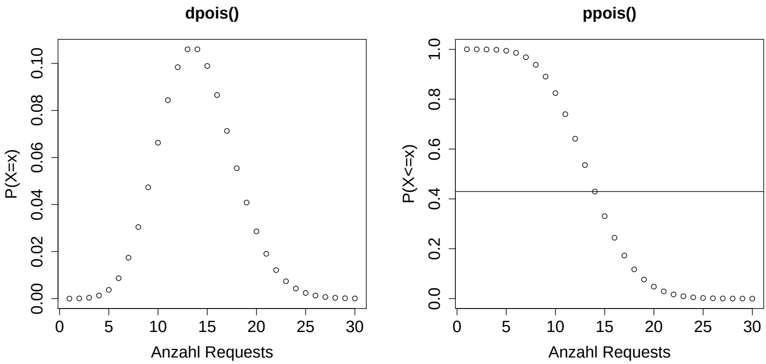
Die Entwickler kennen mit diesen Informationen alles was sie brauchen um die Frage korrekt aufzustellen: „*Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass bis zum Wochenende mehr als 15 Requests eintreffen?*“

```
> hpd <- 2 # hits per day
> hpw <- hpd*7 # hits per week
> # probability of at least 15 hits in one week
> 1-ppois(q=(15-1), lambda=hpw)

[1] 0.4295633
```

Die Analyse mit `R` hat ergeben, dass die Wahrscheinlichkeit von mindestens 15 Requests bei ca. 0.43 liegt (1−kummulative Verteilung, siehe Plot aus Abbildung 3.8).

Die Entwickler lehnen sich also vorerst mal zurück mit dem Argument, dass die Wahrscheinlichkeit von mehr als 15 Request bis zum Wochenende weniger als 50% beträgt. Das seien ja schlechtere Chancen als bein Münzwurf…



(a) Punktwahrscheinlichkeit (b) 1−kummulative Wahrsch.

Abbildung 3.8: Wahrscheinlichkeiten von Requests pro Woche

3.4 Erwartungswert

Der Erwartungswert einer diskreten Verteilung gibt jene Zahl an, welche die Zufallsvariable im *Mittel* annimmt. Sie beschreibt quasi den mittleren Wert der Verteilung.

Für diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen gilt, dass der Erwartungswert der Summe von Produkten aus Wahrscheinlichkeit und Wert der Zufallsvariable entspricht.

$$\mu = E(X) = \sum x \cdot P(X = x)$$

$P(X = x)$ bedeutet *Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable* X *genau* x *ist.*

3.4.1 Additivität von Erwartungswerten

Erwartungswerte stochastisch unabhängiger Zufallsvariablen lassen sich addieren

$$E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2)$$

als auch subtrahieren

$$E(X_1 - X_2) = E(X_1) - E(X_2)$$

3.5 Varianz

Die Varianz einer Wahrscheinlichkeitsverteilung gibt ein Mass an für die Streuung der Warscheinlichkeiten um den Erwartungswert.

Die Varianz wird analog zum Erwartungswert ermittelt, wobei der Wert der Zufallsvariable x ersetzt wird durch das Quadrat der Abweichung von Zufallsvariable und Erwartungswert $(x - \mu)^2$

$$\begin{aligned} Var(X) &= E(X - \mu)^2 \\ Var(X) &= \sum \left((x - \mu)^2 \cdot P(X = x)\right) \end{aligned}$$

3.5.1 Additivität von Varianzen

Ähnlich wie Erwartungswerte lassen sich auch Varianzen addieren

$$Var(X_1 + X_2) = Var(X_1) + Var(X_2)$$

und auch subtrahieren. Bei der Subtraktion gilt es zu beachten, dass die eigentliche Rechnung, eine Addition darstellt (Griffiths 2009, S. 231).

$$Var(X_1 - X_2) = Var(X_1) + Var(X_2)$$

3.6 Lineare Transformation

Die lineare Transformation beschreibt die lineare Änderung der Verteilung einer Zufallsvariablen, wobei die Verteilung im eigentlichen Sinne beibehalten wird, jedoch Erwartungswert und Varianz sich verändern. Die Transformation wird linear genannt, wenn die Änderung mittels eines Polynoms vom Grad 1 beschrieben wird.

$$Y = a \cdot X + b$$

Begrifflich kann die oben gezeigte lineare Transformation weiter unterteilt werden in

- Nullpunkttransformation $(+b)$
- Einheitentransformation $(a \cdot X)$

Die lineare Transformation kann direkt auf den Erwartungswert und die Varianz übertragen werden.

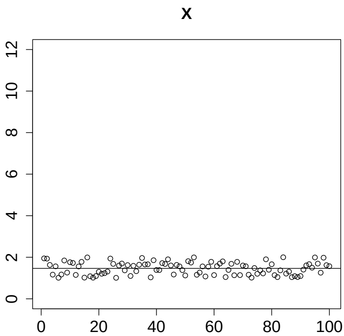
$$E(Y) = E(a \cdot X + b) = a \cdot E(X) + b$$

Bei der Transformation der Varianz gilt es zu beachten, dass die Nullpunkttransformation hinfällig ist und die Einheitentransformation quadratisch wirkt.

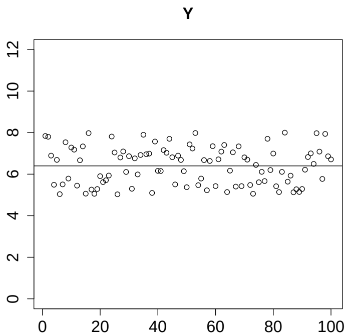
$$Var(Y) = Var(a \cdot X + b) = a^2 \cdot Var(X)$$

Der mathematische Hintergrund für diese Berechnung der Varianz liegt in der sog. *linearität des Integrals*, welche im eigentlichen besagt, dass konstante Faktoren vor das Integral genommen werden können und Summen separierbar sind.

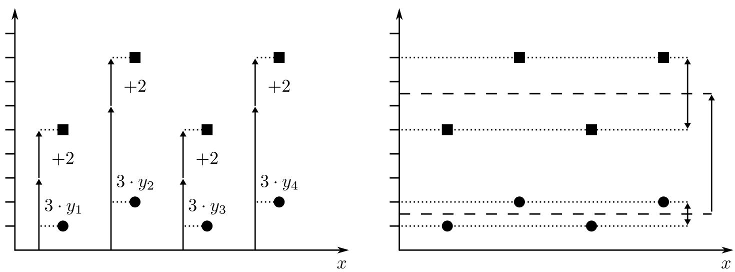
Einfacher ist allerdings die graphische Erklärung. Die Abbildung 3.9 zeigt auf, dass die Multiplikation mit a sich auf die Steuung auswirkt, nicht aber die Addition von b. Wenn alle Punkte um den selben Wert in die selbe Richtung verschoben werden, so ändert dies nicht deren Steuung.



(a) Zufallsvariable X



(b) Zufallsvariable $Y = 3 \cdot X + 2$



(c) Graphische Analyse der Transformation

Abbildung 3.9: Lineare Transformation $Y = 3 \cdot X + 2$

3.7 Standardabweichung

Die Standardabweichung einer Wahrscheinlichkeitsverteilung ist wie die Varianz ein Mass für die Streuung. Sie wird anhand der Varianz ermittelt mit dem Zusammenhang, dass die Standardabweichung der Quadratwurzel der Varianz entspricht.

$$\begin{aligned}\sigma &= \sqrt{Var(X)} \\ \sigma &= \sqrt{E(X-\mu)^2} \\ \sigma &= \sqrt{\sum\left((x-\mu)^2 \cdot P(X=x)\right)}\end{aligned}$$

3.8 Zusammenfassung

Diskrete Verteilungen kommen bei Problemen vor die immer Ergebnisse aus $\mathbb{N}$ liefern. Von diesen gibt es drei elementare Verteilungen.

- Hypergeometrische Verteilung (*Ziehen ohne Zurücklegen*)
- Binomialverteilung (*Münzwurf*)
- Poissonverteilung (*nach oben offen*)

Diese drei Verteilung stehen in einem engen Verhältnis, denn die Binomialverteilung ist ein Spezialfall der Hypergeometrischen Verteilung und die Poissonverteilung ist ein Spezialfall der Binomialverteilung. Dies zeigt sich in der Reduktion der Parameter.

$$\begin{array}{ccccc} Hyp(n,r,s) & \xrightarrow{n,s\to\infty} & Bin(n,p) & \xrightarrow{n,p_n\to\lambda} & Pois(\lambda) \\ \text{3 Parameter} & & \text{2 Parameter} & & \text{1 Parameter} \end{array}$$

Um jeweils die richtige Verteilung zu wählen, kann man folgende Merkregeln beachten.

Hypergeometrisch Jedes Ereignis (Treffer oder Niete) verändert den Grundraum.

Binomial Jedes Ereignis hat die gleiche Wahrscheinlichkeit. Diese Verteilung ist zu wählen, wenn man wissen möchte, wie viele Treffer für eine bestimmte Anzahl Versuche eintreten.

Poisson Man hat eine Erwartung von der Anzahl eintretender Ereignisse (Treffer) und möchte wissen, wie viele Treffer in einem bestimmten Intervall eintreten.

3.8.1 Erwartungswert und Varianz

Verteilung	$E(X)$	$Var(X)$
$X \sim Hyp(n,r,s)$	$n \cdot \left(\frac{r}{N}\right)$	$n \cdot \left(\frac{r}{N}\right)\left(1-\frac{r}{N}\right)\left(\frac{(N)-n}{(N)-1}\right)$
$X \sim Bin(n,p)$	$n \cdot p$	$n \cdot p \cdot (1-p)$
$X \sim Pois(\lambda)$	λ	λ

3.8.2 Berechnungen in R

$X \sim Hyp(n,r,s)$

	genau A	`dhyper(x=A,...)`
	höchstens A	`phyper(q=A,...)`
	mindestens A	`1-phyper(q=A-1,...)`
	A zufällige	`rhyper(n=A...)`

$X \sim Bin(n,p)$

	genau A	`dbinom(x=A,...)`
	höchstens A	`pbinom(q=A,...)`
	mindestens A	`1-pbinom(q=A-1,...)`
	A zufällige	`rbinom(n=A...)`

$X \sim Pois(\lambda)$

	genau A	`dpois(x=A,...)`
	höchstens A	`ppois(q=A,...)`
	mindestens A	`1-ppois(q=A-1,...)`
	A zufällige	`rpois(n=A...)`

Kapitel 4

Stetige Verteilungen

Stetige und absolut stetige Verteilungen beschreibebn Probleme, welche Ergebnisse aus $\mathbb{R}$ liefern.

Stetig Die Eigenschaft der Stetigkeit ist so definiert, dass die Punktwahrscheinlichkeit einer Zufallsvariable X Null ergibt und x auch wirklich jeden Wert aus $\mathbb{R}$ annehmen kann.

$$P(X = x) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}$$

Absolute Stetigkeit Als absolut stetig werden Funktionen beschrieben die integrierbar sind.

4.1 Dichtefunktion

Die Dichtefunktion $f(x)$ ist definiert als die Ableitung der kummulativen Verteilungsfunktion $F(x)$.

$$\int f(x) := F(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad f(x) = \frac{d}{dx}F(x) = F'(x)$$

Mit der Dichte lässt sich eine Aussage darüber treffen, wie die Wahrscheinlichkeit ist, dass eine Zufallsvariable X einen Wert in einem bestimmten Intervall $[a, b]$ annimmt (siehe Grafik 4.1).

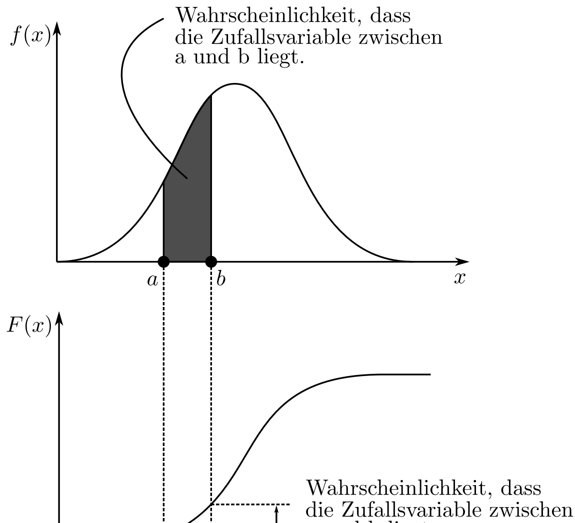


Abbildung 4.1: Dichtefunktion $f(x)$ und kummulative Verteilungsfunktion $F(x)$ in der Gegenüberstellung.

Mit der Definition der Dichtefunktion $f(x)$ lassen sich mehrere Gesetzmässigkeiten herleiten:

- Die Dichte in einem Punkt a ist Null.

$$f(x) = 0 \qquad \lim_{a_1 \to a_0} \left(\int_{a_0}^{a_1} f(x)\, dx \right) = 0$$

- Das Integral einer Dichtefunktion über einem Intervall $[a, b]$ ist gleich der Differenz der kummulativen Wahrscheinlichkeiten von a und b (siehe Grafik 4.1).

$$\int_a^b f(X)\,dx = F(b) - F(a)$$

- Das Integral der Dichtefunktion über dem Intervall $[-\infty, +\infty]$ ist genau 1 (siehe Axiome von Kolmogorov, Normiertheit). Dies bedeutet, dass die kummulative Verteilungsfunktion für grosse x gegen 1 strebt und für kleine gegen 0.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

$$F(x) \xrightarrow{x\to+\infty} 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$$

$$F(x) \xrightarrow{x\to-\infty} 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$$

4.1.1 Erwartungswert

Der Erwartungswert einer stetigen Verteilung mit der Dichte $f(x)$ und der Funktion g(x) ist allgemein definiert als

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f(x)\,dx$$

Falls die Funktion $g(x)$ mit einer Variable gleichgesetzt werden kann, also $g(x) = x$ gilt, dann kann der Erwartungswert auch berechnet werden als

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\,dx, \qquad x = g(x)$$

4.1.2 Varianz

$$\begin{aligned} Var(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 \cdot f(x)\,dx \\ &= E(X - E(X))^2 \\ &= E(X^2) - E(X)^2 \end{aligned}$$

4.1.3 Standardabweichung

Die Standardabweichung wird wie bei den diskreten Verteilungen duch die Wurzel aus der Varianz ermittelt.

$$\sigma_x = \sqrt{Var(X)}$$

4.1.4 Quantile

Ein Quantil $q(\alpha)$ markiert (in %) die x-Stelle einer Dichtefunktion $f(x)$, bei welcher der angegebene Anteil α darunter liegt.

$$q(\alpha), \qquad \alpha = \{x \mid 0 < x < 1 \land x \in \mathbb{R}\}$$

$$P(X \leq q(\alpha)) = \alpha$$

$$F(q(\alpha)) = \alpha \qquad \Leftrightarrow \qquad F^{-1}(\alpha) = q(\alpha)$$

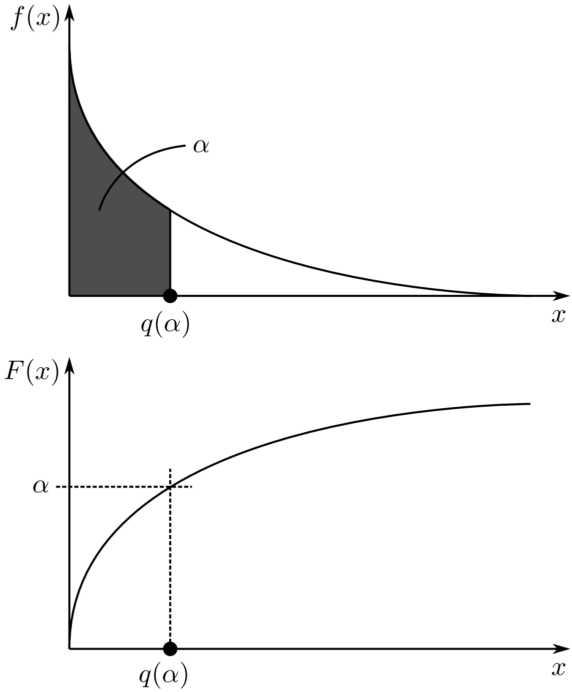


Abbildung 4.2: Quantil einer Dichtefunktion.

4.2 Uniforme Verteilung

Die uniforme Verteilung (auch *Gleichverteilung*) ist eine Verteilung, deren Wahrscheinlichkeit nur in einem bestimmten Intervall $[a, b]$ ungleich Null ist. Die Dichte $f(x)$ innerhalb des Intervalls $[a, b]$ ist konstant und ausserhalb davon gleich Null. Zusammenfassend kann man sagen, dass die uniforme Verteilung eine konstante Dichte hat.

$$f(x) = \text{konstant} = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{falls} \quad a < x < b \\ 0 & \text{falls} \quad (x < a) \vee (x > b) \end{cases}$$

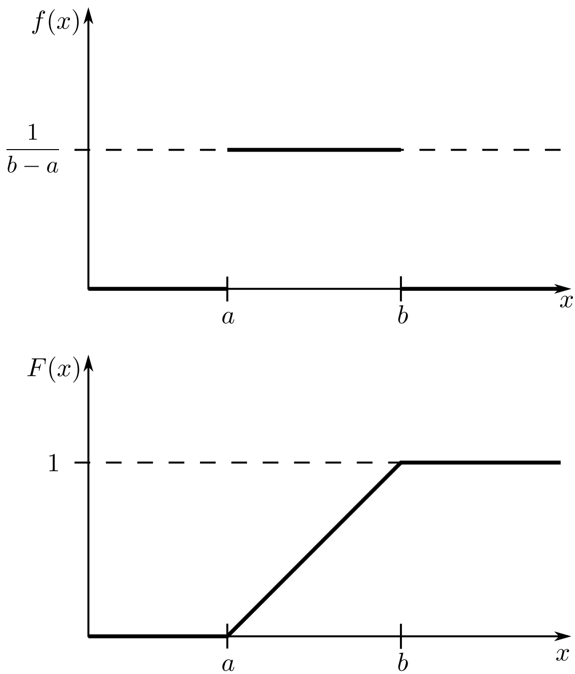


Abbildung 4.3: Uniforme Dichte $f(x)$ und Verteilung $F(x)$.

4.2.1 Verteilungsfunktion

Die Verteilungsfunktion der uniformen Verteilung beschreibt grundsätlich eine Gerade und wenn das Intervall $[a, b] \neq [-\infty, +\infty]$ ist, so ist diese Bereichsweise definiert.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{falls} \quad a < x < b \\ 1 & \text{falls} \quad b < x \end{cases}$$

4.2.2 Erwartungswert

Da die Dichtefunktion der uniformen Verteilung konstant ist, kann der Erwartungswert sehr einfach berechnet werden.

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

Die Werte a, b können auch als Minimal- bzw. Maximalwerte betrachtet werden.

$$E(X) = \frac{\min + \max}{2}$$

4.2.3 Varianz

Analog zum Erwartungswert ist auch die Berechnung der Varianz einer uniformen Verteilung relativ einfach.

$$Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Wie auch beim Erwartungswert, können die Intervallgrenzen $[a, b]$ als Mininal- und Maximalwerte betrachtet werden.

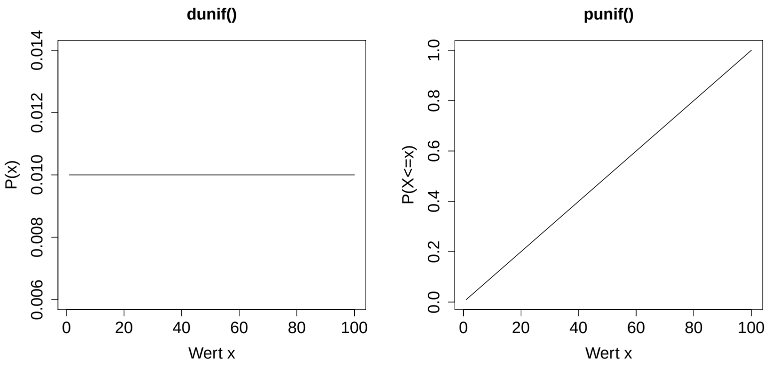
$$Var(X) = \frac{(\max - \min)^2}{12}$$

4.2.4 Verwendung in R

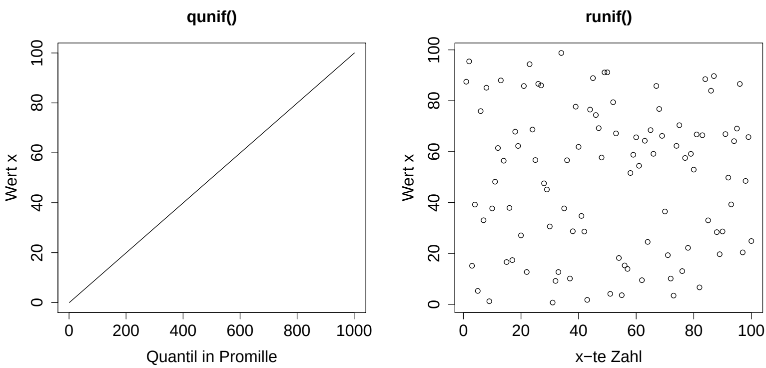
`R` stellt grundsätzlich vier Funktionen für die uniforme Verteilung zur Verfügung.

- `dunif()` (*Wahrscheinlichkeitsverteilung*)
- `punif()` (*kumulative Wahrscheinlichkeit*)
- `qunif()` (*Verteilung der Quantile*)
- `runif()` (*Zufallszahlen*)

Die Abbildung 4.4 zeigt jeweils einen Plot zu den gegebenen Funktionen aus `R`. Für weitere Informationen zu Plots siehe Kapitel 6.7.



(a) Wahrscheinlichkeitsverteilung (b) kumulative Wahrscheinlichkeit



(c) Quantile (d) Zufallszahlen

Abbildung 4.4: Uniforme Verteilung ($n = 100, min = 0, max = 100$)

4.2.5 Beispiel einer uniformen Verteilung

Benutzt man einen ADC (engl. *Analog to Digital Converter*) zur Erfassung elektronischer Messgrössen als digitale Werte, so *quantifziert* dieser die Messung und es entsteht ein Messfehler. Ist die zu erfassende Grösse viel grösser als die kleinstmögliche Auflösung des ADC, so ist dieser Fehler uniform verteilt (Horowitz und Hill 2008, S. 615). Typische Fehler beim Messverfahren werden oft vom Hersteller für den jeweiligen ADC angegeben (siehe Anhang B.1).

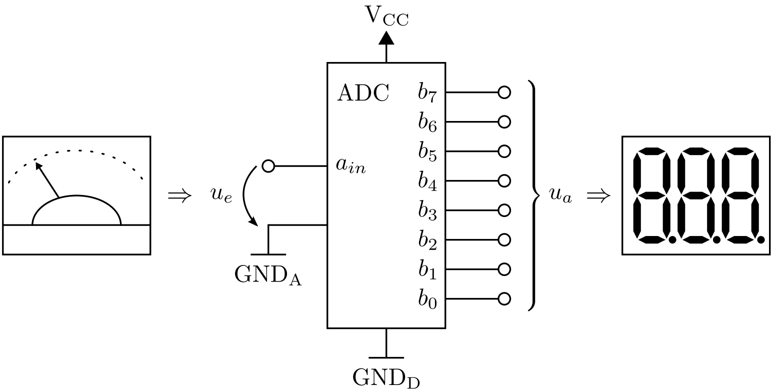


Abbildung 4.5: Analog-to-Digital Converter, 8 Bit.

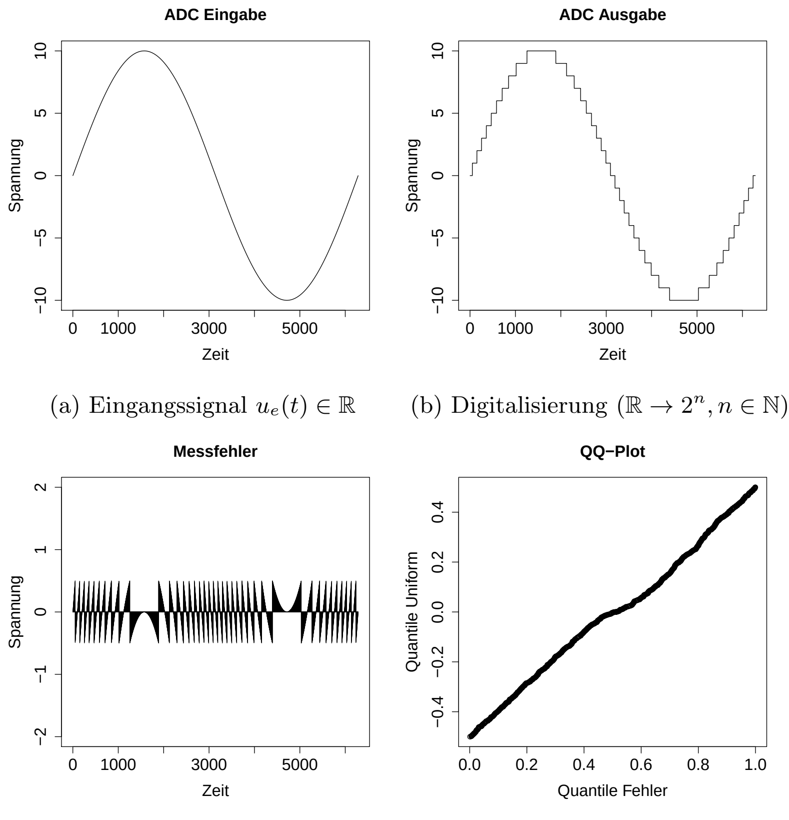
```
> f1 <- 10*sin(x=seq(0, 2*pi, 0.001))
> adc.in  <- (f1)
> adc.out <- round(x=adc.in, digits=0)
> error   <- (adc.in - adc.out)
> m <-mean(error)
> s <-sd(error)
> m

[1] -0.0001592544

> s

[1] 0.27766
```

Mit Hilfe von R lässt sich dieses Beispiel relativ leicht rechnen und plotten. Die Plots aus der Abbildung 4.6 zeigen, dass die Quantifizireung des Eingangsignals einen uniformen Fehler verusrsacht. Die Grafik 4.6d zeigt den Beweis für die uniforme Verteilung anhand eines Quantilenvergleichs mit einer ideal uniform verteilten Datenreihe.



(a) Eingangssignal $u_e(t) \in \mathbb{R}$

(b) Digitalisierung $(\mathbb{R} \to 2^n, n \in \mathbb{N})$

(c) Fehler $u_a(t)$

(d) Quantilenvergleich mit $\mathcal{U}(a, b)$

Abbildung 4.6: Quantifizierungfehler eines ADC.

4.3 Normalverteilung

Die Normalverteilung (auch *Gauss-Verteilung* bzw. *Gauss'sche Glockenkurve*) ist eine bedeutende stetige Verteilung für sämtliche Bereiche der Natur- und Ingenieurwissenschaften. Der sog. *Zentrale Grenzwertsatz* macht sie zu einer der wichtigsten Verteilungen überhaupt (Henze 2012, S. 297).

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}$$

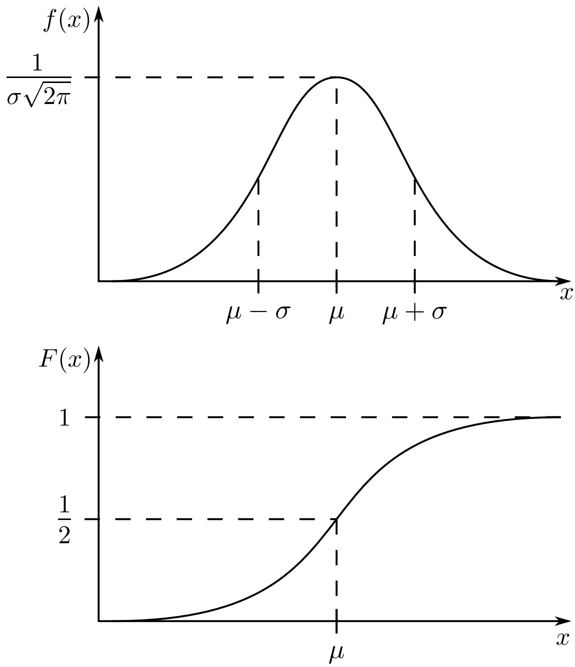


Abbildung 4.7: Normalverteilung

Der Zentrale Grenzwertsatz besagt, dass ein Stichprobenmittelwert $\overline{x}$ für grosse Stichproben annähernd normalverteilt ist mit $\overline{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

wobei der kritische Stichprobenumfang bei ca. 30 Stichproben liegt (Griffiths 2009, S. 481).

Die Interpretation der Normalverteilung $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ ist sehr anschaulich durch deren Parameter. Der Mittelwert μ zeigt das Zentrum der *Glockenkurve* an, wo auch die Wahrscheinlichkeit am höchsten ist. Die Varianz zeigt an, wie flach die *Glockenkurve* ist.

Ein Spezialfall der Normalverteilung ist die sog. *standardisierte Normalverteilung*, welche einen Erwartungswert $\mu = 0$ und eine Varianz $\sigma^2 = 1$ hat. Mittels dieser lassen sich Ergebnisse beliebig transformieren (Henze 2012, S. 298).

4.3.1 Verteilungsfunktion

4.3.2 Erwartungswert

Der Erwartungswert einer Normalverteilung beschreibt jene Stelle x bei der die *Glockenkurve* am höchsten ist. Dieser Wert ist zugleich auch ein Parameter der Dichtefunktion der Normalverteilung.

$$E(X) = \mu$$

4.3.3 Varianz

Die Varianz einer Normalverteilung ist wie der Erwartungswert μ gleich ein Parameter der Dichtefunktion und beschreibt wie flach die *Glockenkurve* ist.

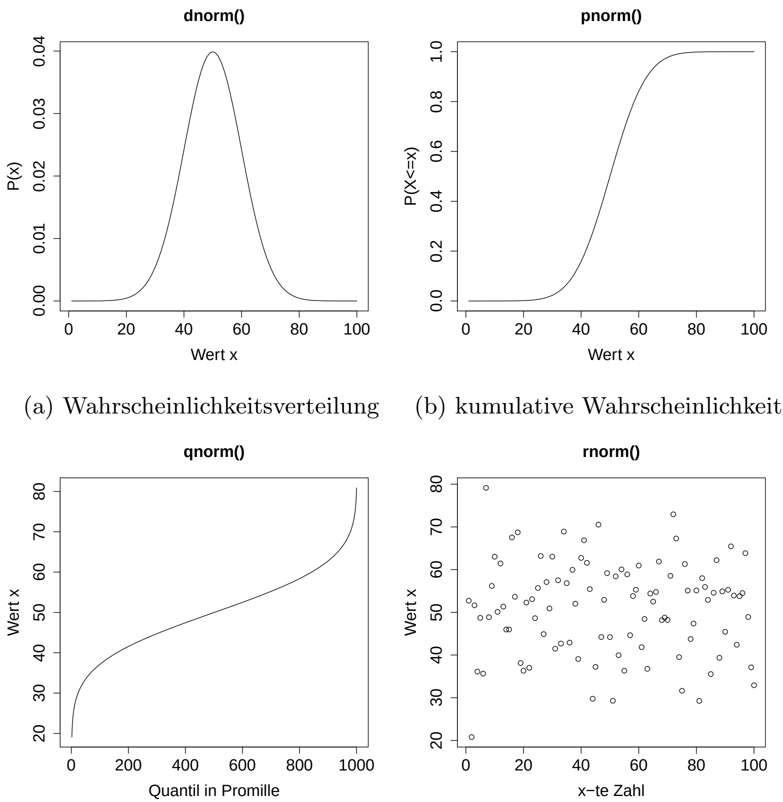
$$Var(X) = \sigma^2$$

4.3.4 Verwendung in R

`R` stellt grundsätzlich vier Funktionen für die Normalverteilung zur Verfügung.

- `dnorm()` (*Wahrscheinlichkeitsverteilung*)
- `pnorm()` (*kumulative Wahrscheinlichkeit*)
- `qnorm()` (*Verteilung der Quantile*)
- `rnorm()` (*Zufallszahlen*)

Die Abbildung 4.8 zeigt jeweils einen Plot zu den gegebenen Funktionen aus `R`. Für weitere Informationen zu Plots siehe Kapitel 6.7.



(a) Wahrscheinlichkeitsverteilung (b) kumulative Wahrscheinlichkeit

(c) Quantile (d) Zufallszahlen

Abbildung 4.8: Normalverteilung ($\mu = 50, \sigma^2 = 10$)

4.3.5 Beispiel einer Normalverteilung

Bei digitalen Übertragungen entsteht durch diverse Umwelteinflüsse ein sog. *Jitter*. Dieser beschreibt ein variieren der Taktzeiten einer Übertragung. Ein Teil des gesamten Jitters bildet der sogenannte *zufällige Jitter* welcher Normalverteilt ist. D.h. die zeitliche Grenze eines Zyklus folgt einer bestimmten Verteilung, wobei die Ränder dieser Grenzen normalverteilt abweichen.

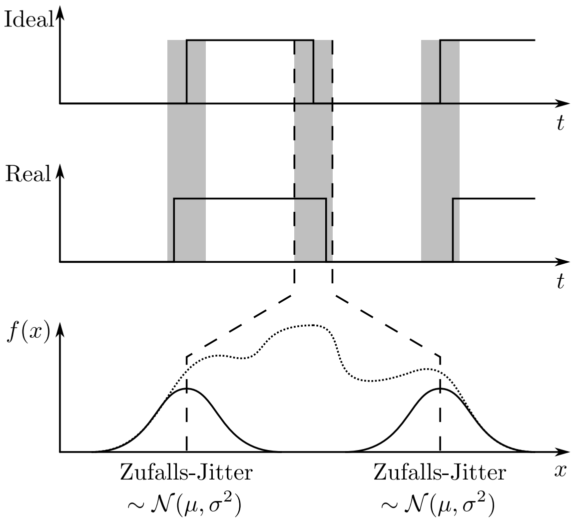


Abbildung 4.9: Zufalls-Jitter

In vielen Anwendung von Mikrocontrollern wird dieser Jitter ausführlich beschrieben (siehe Anhang B).

4.4 Exponentialverteilung

Die Exponentialverteilung (auch *negative Exponentialverteilung*) ist eine stetige Verteilung welche angewandt wird um die Zeit beschreiben, welche zwischen Ereignissen verstreicht. Dies gilt für Ereignisse welche kontinuierlich, unabhängig und mit konstanter Rate (λ) eintreten.

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} & \text{falls} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{falls} \quad x < 0 \end{cases}$$

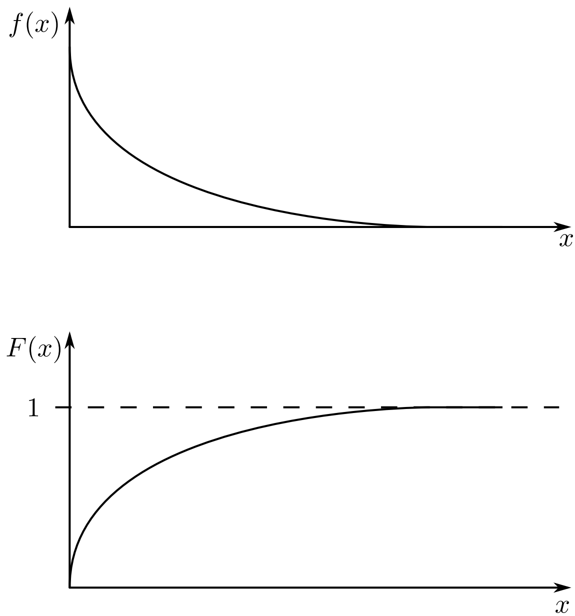


Abbildung 4.10: Exponentialverteilung

Eine wichtige Eigenschaft der Exponentialverteilung ist die sog. *Gedächtnislosigkeit* (Henze 2012, S. 296). Diese besagt, dass die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ab einem Zeitpunkt t innerhalb des Intervalls $[a, b]$ nicht dadurch beeinflusst wird, ob und wann das letzte Ereignis eingetreten ist.

4.4.1 Verteilungsfunktion

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda \cdot x} & \text{falls} \quad x \geq 0 \\ \\ 0 & \text{falls} \quad x < 0 \end{cases}$$

4.4.2 Erwartungswert

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

4.4.3 Varianz

$$Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

4.4.4 Standardabweichung

Die Standardabweichung der Exponentialverteilung entspricht dem Erwartungswert.

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{Var(X)} = E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

4.4.5 Transformation

Die Verteilung $X \sim Exp(\lambda)$ mit beliebigem $\lambda \in \mathbb{R}$ kann aus der Grundform $X \sim Exp(1)$ transformeirt werden, denn die Änderung des Parameters bewirkt lediglich eine Skalenänderung (Henze 2012, S. 296). Hierfür wird die Grundform mit dem reziproken Wert des Parameters multipliziert.

$$X \sim Exp(1) \Rightarrow \frac{1}{\lambda} \cdot X \sim Exp(\lambda)$$

4.4.6 Zusammenhang mit uniformer Verteilung

Die Exponentialverteilung hat einen direkten Zusammenhang mit der uniformen Verteilung innerhalb des Intervalls $[0, 1]$ mit $x \rightarrow -\frac{1}{\lambda} \cdot \log(1-x)$ und somit

$$X \sim \mathcal{U}(0, 1) \Rightarrow -\frac{1}{\lambda} \cdot \log(1 - X) \sim Exp(\lambda)$$

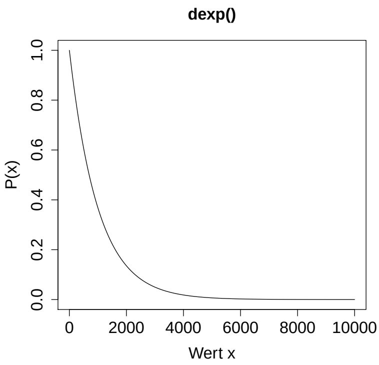
Mit diesem Zusammenhang lässt sich aus einer uniform verteilten Zufallszahl eine Exponentialverteilte Zufallszahl erzeugen (Henze 2012, S. 297).

4.4.7 Verwendung in R

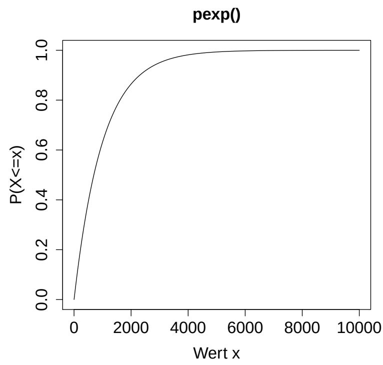
`R` stellt grundsätzlich vier Funktionen für die Exponentialverteilung zur Verfügung.

- `dexp()` (*Wahrscheinlichkeitsverteilung*)
- `pexp()` (*kumulative Wahrscheinlichkeit*)
- `qexp()` (*Verteilung der Quantile*)
- `rexp()` (*Zufallszahlen*)

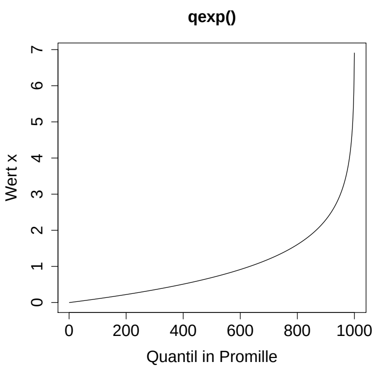
Die Abbildung 4.11 zeigt jeweils einen Plot zu den gegebenen Funktionen aus `R`. Für weitere Informationen zu Plots siehe Kapitel 6.7.



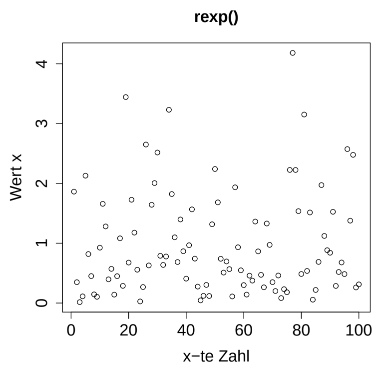
(a) Wahrscheinlichkeitsverteilung



(b) kumulative Wahrscheinlichkeit



(c) Quantile



(d) Zufallszahlen

Abbildung 4.11: Exponentialverteilung

4.4.8 Beispiel einer Exponentialverteilung

Beispiel 1 - Gerätedefekt Die Entwickler eines Sicherheitssystems möchten eine Gerätekomponente einkaufen, statt diese selber zu entwicklen. Die favorisierte Komponente hat laut Hersteller eine Ausfallrate von ca. 0.2% pro Tag bei Dauerbetrieb.

Die Entwickler müssen nun folgende Frage beantworten für Ihren Entwicklungsbericht: „*Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die eingekaufte Komponente mindestens ein Jahr im Dauerbetrieb arbeitet?*“

```
> dpd <- 0.002 # rate of defects per day
> ttd <- 1/dpd # time till defect
> ttd

[1] 500

> 1-pexp(q=365, rate=dpd)

[1] 0.481909
```

Beispiel 2 - Reboot Der Administrator der Telefondatenbank der Firma Umbrella Corp. soll ein Update der Software machen. Hierzu muss der Service kurz abgestellt werden. Für den Reboot und das aufsarten des Service benötigt der Administrator ca. 2 Minuten.

Er überlegt sich nun, ob er den Reboot jetzt während den regulären Arbeitszeiten machen oder bis nach Feierabend warten soll. Da er nicht sonderlich lust hat so lange im Betrieb zu sein, entschliesst er sich die sache mal zu rechnen. Hierzu sieht er sich die Logfiles des Dienstes an und bemerkt, dass ca. 15 Requests pro Stunde an den Dienst gehen. Also fragt er sich nun: „*Wie wahrscheinlich ist es, dass ich innerhalb von zwei Minuten ab den Zeitpunkt x einen Request erhalte?*“

```
> rph <- 15 # requests per hour
> rt <- (1/30) # time for reboot and service
   start in hours
> pexp(q=rt, rate=rph)

[1] 0.3934693
```

Bei Berechnungen von Exponentialverteilten Wahrscheinlichkeiten ist die sog. *Gedächtnislosigkeit* der Verteilung zu beachten. Für das obige Beispiel heisst dies, dass die Wahrscheinlichkeit eines Requests innert der nächsten x Minuten nicht davon beieinflusst wird, ob gerade eben ein Request stattfand oder nicht.

4.5 Zusammenfassung

Uniforme Verteilung

$$X \sim \mathcal{U}(a,b)$$

$$\begin{aligned} F(X) &= \frac{x-a}{b-a} \\ f(x) &= \frac{1}{b-a} \\ D_f &= a < x < b \\ E(X) &= \frac{a+b}{2} \\ Var(X) &= \frac{(b-a)^2}{12} \end{aligned}$$

Normalverteilung

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

$$\begin{aligned} F(X) &= \frac{x-a}{b-a} \\ f(x) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)} \\ D_f &= x \in \mathbb{R} \\ E(X) &= \mu \\ Var(X) &= \sigma^2 \end{aligned}$$

Exponentialverteilung

$$X \sim Exp(\lambda)$$

$$\begin{aligned} F(X) &= F(X) = \frac{x-a}{b-a} \\ f(x) &= \lambda \cdot e^{(-\lambda x)} \\ D_f &= x > 0 \\ E(X) &= \frac{a+b}{2} \\ Var(X) &= \frac{(b-a)^2}{12} \end{aligned}$$

4.5.1 Berechnungen in R

$X \sim \mathcal{U}(a, b)$

genau A	`dunif(x=A,...)`
höchstens A	`punif(q=A,...)`
mindestens A	`1-punif(q=A-1,...)`
A zufällige	`runif(n=A...)`

$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

genau A	`dnorm(x=A,...)`
höchstens A	`pnorm(q=A,...)`
mindestens A	`1-pnorm(q=A-1,...)`
A zufällige	`rnorm(n=A...)`

$X \sim Exp(\lambda)$

genau A	`dexp(x=A,...)`
höchstens A	`pexp(q=A,...)`
mindestens A	`1-pexp(q=A-1,...)`
A zufällige	`rexp(n=A...)`

Kapitel 5

Statistischer Test

Statistische Tests oder auch *Hypothesentests* werden angewandt um gemachte Beobachtungen mit einer statistischen Verteilung zu vergleichen.

Die Durchführung und Qualität eines solchen Tests hängt von vielen Faktoren ab und kennt auch einige Methoden zur Überprüfung und Bewertung der getroffenen Entscheidungen.

5.1 Vorgehen

Bei der Durchführung eines Hypothesentests kann stets nach folgendem Ablauf vorgegangen werden.

1. Modellwahl
   Mit welcher Verteilung sollen die Daten verglichen werden?

2. Nullhypothese formuleiren
   Welche Hypothese soll mittels der Daten verworfen werden?

3. Alternativhypothese
   Welche Hypothese soll der Test bekräftigen?

4. Teststatistik erstellen
   Teststatistik aus dem gewählten Modell und der Nullhypothese erstellen.

5. Signifikanzniveau wählen
   Mit welcher Signifikanz soll der Test durchgeführt werden?

6. Verwerfungsbereich berechnen
   Aus der Teststatistik und dem gewählten Signifikanzniveau wird der Verwerfungsbereich berechnet (oder einfach der P-Wert verwendet).

7. Testentscheid
   Daten werden mit dem berechneten Verwerfungsbereich (oder dem P-Wert) verglichen und basierend darauf ein Entscheid gefällt

5.2 Konfidenzintervall

Das Konfidenzintervall (auch *Vertrauensintervall* oder *Mutungsintervall*) beschreibt einen Bereich einer Verteilung. Liegen Beobachtungen innerhalb dieses Bereiches, so vertraut man auf deren Gültigkeit. Im Umfeld von statistischen Tests wird alles ausserhalb des Konfidenzintervalls als Verwerfungsbereich benannt.

Die Intervallgrenzen werden durch kummulative Wahrscheinlichkeitswerte bzw. Quantile gebildet, welche durch die gewählte Genaugkeit bestimmt werden. Die Intervallgrenzen werden oft auch mittels

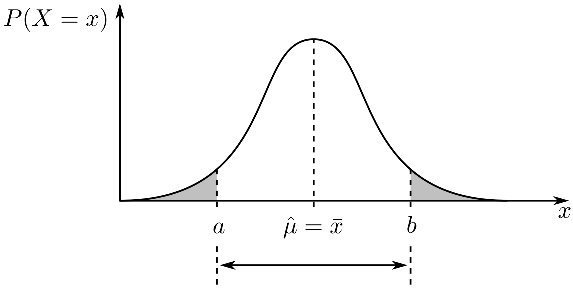


Abbildung 5.1: Konfidenzintervall

des sog. Signifikanzniveaus α beschrieben, was nichts weiter ist als die Differenz aus 1 und der Genauigkeit g.

$$P(a \leq \mu \leq b) = g \qquad 0 \leq g \leq 1, \quad \alpha = 1 - g$$

$$a = q\left(\frac{1-g}{2}\right) = q\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$b = q\left(1 - \frac{1-g}{2}\right) = q\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

Die Grenzen des Intervalls müssen nicht zwingend symmetrisch liegen, denn es kann auch ein sog. einseitiger Test erfolgen. Bei einem einseitigen Test gibt es nur einen geschlossenen Verwerfungsbereich welcher passenderweise mit dem Signifikanzniveau beschrieben wird.

5.3 P-Wert

Der P-Wert (engl. *p-Value*) ist ein Wert, welcher die kummulative Wahrscheinlichkeit abbildet vom Punkt der Beobachtung aufwärts. D.h. der P-Wert beschreibt die Wahrscheinlichkeit die gemachte Beobachtung oder extremere Beobachtungen zu erhalten.

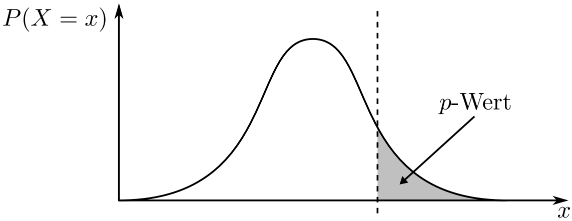


Abbildung 5.2: P-Wert graphisch dargestellt

5.3.1 Interpretation

Der P-Wert eignet sich um das Berechnen des Verwerfungsbereiches auszulassen, denn man kann anhand des P-Wertes und des Signifikanzniveaus direkt den Entscheid für einen einseitigen Test fällen.

$$p\text{-Wert} > (1-\alpha) \quad \Rightarrow \quad \text{Hypothese nicht verwerfen}$$

$$p\text{-Wert} < (1-\alpha) \quad \Rightarrow \quad \text{Hypothese verwerfen}$$

5.4 Fehler

Die Ausführung eines statistischen Tests bzw. eines Hypothesentests bedingt, dass ein Entscheid gefällt wird über die Nullhypothese. Diese kann entweder beibehalten oder verworfen werden. Jede der gemachten Entscheidungen kann dabei zwei Auswirkungen aufweisen welche in der Tabelle 5.1 dargestellt sind.

Entscheidung	H_0 ist wahr	H_0 ist falsch
H_0 beibehalten	korrekt	Fehler 2. Art
H_0 verworfen	Fehler 1. Art	korrekt

Tabelle 5.1: Wirkungstabelle von Hypothesentests

Unabhängig von den Ursachen eines falschen Entscheides muss dieser berücksichtigt werden. Die zwei auftretenden Fehler werden als Fehler 1. bzw. Fehler 2. Art bezeichnet.

5.4.1 Fehler 1. Art

Der Fehler 1. Art tritt ein, wenn die Nullhypothese verworfen wird, obwohl sie wahr ist.

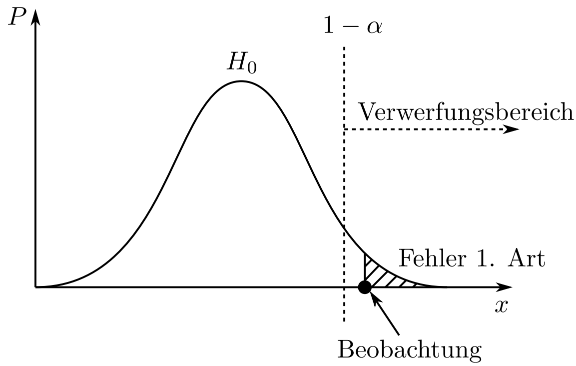


Abbildung 5.3: Fehler 1. Art

Er beschreibt die Summe aller Wahrscheinlichkeiten die extremer als die gemachte Beobachtung sind (siehe P-Wert, Kapitel 5.3). Der Fehler 1. Art ist somit limitiert auf den Wert des Signifikanzniveaus α, denn wenn der Wert für den Fehler 1. Art grösser wäre, so müsste er ausserhalb des Verwerfungsbereiches liegen und die die Hypothese konnte gar nicht verworfen werden.

5.4.2 Fehler 2. Art

Der Fehler 2. Art tritt ein, wenn die Nullhypothese nicht verworfen wird, obwohl sie falsch ist bzw. die Alternative wahr ist.

Um den Fehler 2. Art zu berechnen, muss eine alternative Verteilung explizit (quantitativ) gegeben sein oder angenommen werden. Eine Relation der Verteilungen ($p_a > p_0$, $p_a < p_0$, $p_a \neq p_0$), welche

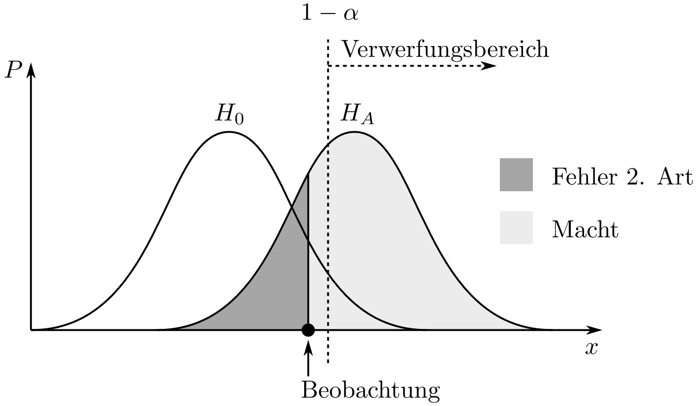


Abbildung 5.4: Fehler 2. Art

häufig für Hypothesentests angewendet werden, reicht somit nicht aus für die Berechnung.

5.4.3 Macht

Die sog. Macht gibt Auskunft darüber, wie Aussagekräftig die gemachte Annahme ist. Der Fehler 2. Art ist die Summe aller Wahrscheinlichkeiten der alternativen Verteilung, welche weniger extrem als die gemachte Beobachtung sind. Die Macht entspricht somit der Differenz von 1 und dem Fehler 2. Art.

$$\text{Macht} = 1 - P(\text{Fehler 2. Art})$$

5.5 Modellauswahl

Die richtige Modellauswahl ist bei der Durchführung eines statistischen Tests von entscheidender Bedeutung. Eine einfache Entscheidungsvorschrift ist in der Grafik 5.5 gegeben.

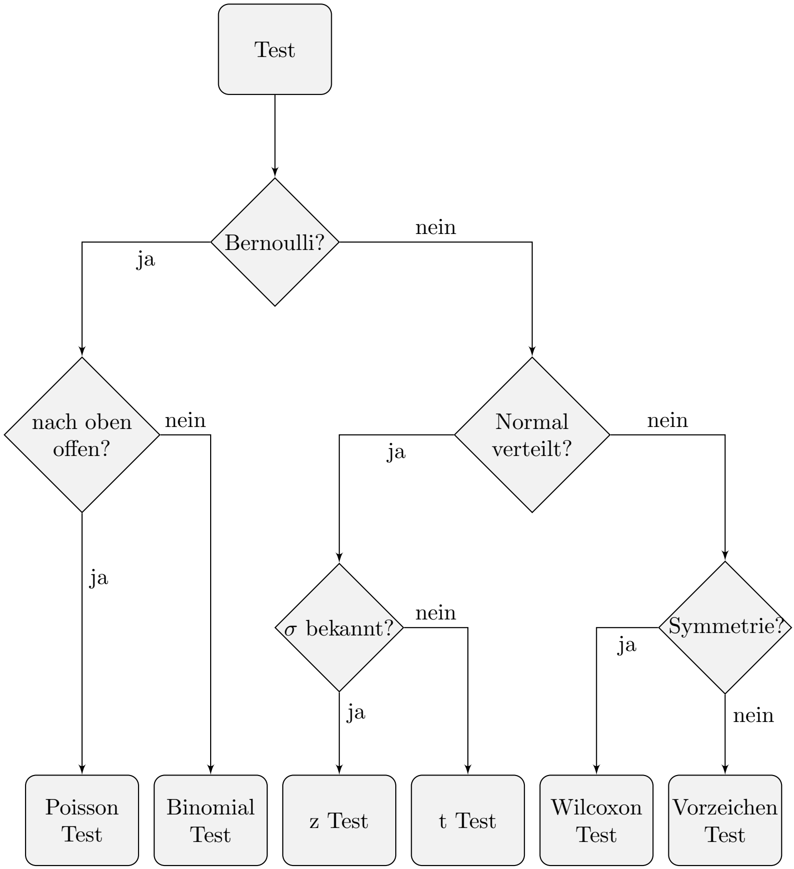


Abbildung 5.5: Vorschrift zur Modellauswahl als Flussdiagramm

5.5.1 Entscheidungshilfen

Bernoulli? Beschreiben die Daten eine Reihe von unabhängigen Bernullientscheiden (binär)?

Typisches Beispiele: Münzwurf, Würfelspiel.

nach oben offen? Sind die Daten solche, welche keine (theoretische) obere Grenze kennen?

Typische Beispiele: Anzahl Anrufe eines CallCenters, Anzahl Requests auf einen Server .

Normal verteilt? Lassen sich die Daten als Noralverteilung betrachten (z.B. mittels eines QQ-Norm Plots)?

Typische Beispiele: Körpergrössen einer grossen Personengruppe, Abfüllmengen, Bauteilwerte (z.B. Widerstandwert).

σ **bekannt?** Ist die Standardabweichung σ bekannt?

Symmetrie? Sind die Daten symmetrisch um einen Punkt x verteilt?

5.6 Binomial-Test

Der Binomial-Test ist immer dann anzuwenden, wenn eine Binomialverteilung vorliegt. Dieser Test kann ein- oder zweiseitig durchgeführt werden, d.h. das Signifikanzniveau wird entweder von unten, oben oder geteilt auf beide Seiten gesetzt (nur symmetrisch wenn auch die Verteilung symmetrisch ist).

5.6.1 Formales Vorgehen

Modell	$X \sim Bin(n,p)$
Nullhypothese	$H_0 : p_0 = \mu_0$
Alternativhypothese	$H_A : p_A > p_0 = \mu_0$ $H_A : p_A \neq p_0 = \mu_0$ $H_A : p_A < p_0 = \mu_0$
Teststatistik	$X : P(X = x \mid H_0) = \binom{n}{x} {p_0}^x (1 - p_0)^{n-x}$
Signifikanzniveau	α
Verwerfungsbereich	
beidseitig	$K_b = \left(\left[0, q\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right] \cup \left[q\left(\frac{\alpha}{2}\right), 1\right]\right)$
links	$K_l = ([0, a = q(\alpha)])$
rechts	$K_r = ([q(\alpha), 1])$
Testentscheid	
$X \in K$	Nullhypothese wird verworfen
$X \notin K$	Nullhypothese wird beibehalten

Tabelle 5.2: Formales Vorgehen des Binomial-Test

5.6.2 `binom.test()`

In R lässt sich ein Binomial-Test mit der Funktion `test.binom()` ausführen. Hierbei gilt es die Parameter zu beachten.

```
> hits <- 39 # number of successes
> trials <- 215 # number of trials
> prob <- 0.15 # hypothesized probability of
  success
> binom.test(x=hits, n=trials, p=prob,
  alternative="less", conf.level=0.95)

     Exact binomial test

data:  hits and trials
number of successes = 39, number of trials =
  215, p-value = 0.9142
alternative hypothesis: true probability of
  success is less than 0.15
95 percent confidence interval:
 0.000000 0.230171
sample estimates:
probability of success
             0.1813953
```

5.7 Poisson-Test

5.8 z-Test

5.9 t-Test

5.10 Wilcoxon-Test

5.11 Vorzeichen-Test

Kapitel 6

R Grundlagen

`R` ist eine multiparadigmatische Programmiersprache für die Statistik und wird als Teil des GNU-Projektes entwickelt. Die Besonderheit von R liegt in der Implementation vieler Algorithmen und Analysen der Statistik aber auch von vielseitigen Möglichkeiten des Plottens. Diese Stärken und die Tatsache, dass `R` freie Software ist, haben es zu einem beliebten Tool in Wissenschaft und Industrie gemacht.

Informationen finden

Dieses Kapitel soll eine kurze Zusammenfassung der wichtigsten Funktionen in `R` liefern. Möchte man spezifische und detaillierte Informationen so kann man diese mittels `help()` erhalten.

Wieiterführende Literatur ist dem Literaturverzeichnis zu entnehmen.

6.1 Hilfe

`R` bietet für jede Funktion eine Art Manpage an. Diese kann in der Konsole mittels `help(name-der-Funktion)` aufgerufen werden.

6.2 Packages installieren

Der Funktionsumfang von `R` kann erweitert werden mit der Installation von `packages` mittels `install.packages("name-des-pakets")`.

Um ein `package` zu laden kann `require(name-des-pakets)` angewandt werden.

6.3 Vektoren & Matrizen

6.3.1 Vektoren definieren

Vektor mit beliebigen Inhalt

```
> x <- c(1, 3, 2, 8, 3, 6, 10, 7)
> x

[1]  1  3  2  8  3  6 10  7
```

Vektor mit Intervall 1

```
> x <- c(6:14)
> x

[1]  6  7  8  9 10 11 12 13 14
```

Vektor mit beliebigem Intevall

```
> x <- seq(from=1, to=10, by=2)
> x

[1] 1 3 5 7 9

> y <- seq(1, 10, 2)
> y

[1] 1 3 5 7 9
```

Vektor repetieren

```
> x <- c(1:5)
> y <- rep(x, 3)
> x

[1] 1 2 3 4 5

> y

 [1] 1 2 3 4 5 1 2 3 4 5 1 2 3 4 5
```

6.3.2 Matrizen definieren

Matrix Spaltenweise definieren

```
> a <- seq(1, 9, 1); m <- matrix(a, 3)
> m

     [,1] [,2] [,3]
[1,]    1    4    7
[2,]    2    5    8
[3,]    3    6    9
```

Matrix Reihenweise definieren

```
> a <- seq(1, 9, 1)
> m <- matrix(a, 3, byrow=TRUE)
> m
```

```
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    1    2    3
[2,]    4    5    6
[3,]    7    8    9
```

6.3.3 Spezielle Matrizenfunktionen

Transponierung

```
> a <- seq(1, 8, 1)
> m <- matrix(a, 2)
> n <- t(m)
> m

     [,1] [,2] [,3] [,4]
[1,]    1    3    5    7
[2,]    2    4    6    8

> n

     [,1] [,2]
[1,]    1    2
[2,]    3    4
[3,]    5    6
[4,]    7    8
```

Erweiterung

```
> a <- matrix(c(1:3), nrow=3, ncol=1)
> b <- matrix(c(4:9), nrow=3, ncol=2)
> a

     [,1]
[1,]    1
[2,]    2
[3,]    3

> b
```

```
     [,1] [,2]
[1,]    4    7
[2,]    5    8
[3,]    6    9
```

```
> m <- cbind(a, b)
> m
```

```
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    1    4    7
[2,]    2    5    8
[3,]    3    6    9
```

Vektorisieren

```
> m <- matrix(c(1:9), nrow=3, ncol=3)
> v <- c(m)
> m
```

```
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    1    4    7
[2,]    2    5    8
[3,]    3    6    9
```

```
> v
```

```
[1] 1 2 3 4 5 6 7 8 9
```

6.4 Arithmetik

Einfache Summen und Produkte

```
> a=15; b=3
> a+b; a*b; a-b; a/b
```

```
[1] 18

[1] 45

[1] 12

[1] 5
```

Operationen auf Vektoren

```
> a <- 1:10; b <- 2
> c <- b*a
> a
```

```
 [1]  1  2  3  4  5  6  7  8  9 10
```

```
> c
```

```
 [1]  2  4  6  8 10 12 14 16 18 20
```

Operationen auf Matrizen

```
> a <- seq(1, 9, 1); b <- 2
> m <- matrix(a, 3); n <- m*b
> m
```

```
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    1    4    7
[2,]    2    5    8
[3,]    3    6    9
```

```
> n
```

```
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    2    8   14
[2,]    4   10   16
[3,]    6   12   18
```

6.5 Spezielle Berechnungen

Binomialkoeffizient

```
> choose(7,2)
```

```
[1] 21
```

Fakultät

```
> factorial(5)
```

```
[1] 120
```

6.6 Kombinationen

6.6.1 Kombinationen von Vektoren

Hat man mehrere Vektoren, von denen man jede mögliche Kombination möchte, so kann die Funktion `expand.grid()` angewendet werden. So kann beispielsweise eine Wahrheistabelle erstellt werden.

```
> bit1 <- c(0,1)
> bit2 <- c(0,1)
> bit3 <- c(0,1)
> expand.grid(bit1, bit2, bit3)

  Var1 Var2 Var3
1    0    0    0
2    1    0    0
3    0    1    0
4    1    1    0
5    0    0    1
6    1    0    1
7    0    1    1
8    1    1    1

> eyes <- c("blue", "brown", "green")
> gender <- c("male", "female")
> expand.grid(eyes, gender)

   Var1   Var2
1  blue   male
2 brown   male
3 green   male
4  blue female
5 brown female
6 green female
```

6.6.2 Kombinationen eines Vektors

Braucht man die möglochen Kombinationen innerhalb eines Vektors, so kann die Funktion `combn()` benutzt werden.

```
> # install.packages("combinat")
> # require(combinat)
> seats <- c("driver", "codriver", "guest")
> passengers <- 2
> combn(seats, passengers)
```

```
     [,1]       [,2]     [,3]
[1,] "driver"   "driver" "codriver"
[2,] "codriver" "guest"  "guest"
```

Möchte man nur die Anzahl der möglichen Kombinationen wissen, so kann man dies mit dem Binomialkoeffizienten `choose()` berechnen.

```
> seats <- 3
> passengers <- 2
> choose(seats, passengers)
```

```
[1] 3
```

6.7 Plots

6.7.1 Gewöhnlicher Plot

Um einen gewöhnlichen Plot zu erstellen kann `plot()` verwendet werden.

```
> x <- c(1:20)
> y <- (runif(n=20))
> plot(x, y)
```

Linien plotten

Möchte man einen Plot ergänzen mit Linien kann nach `plot()` noch `abline()` benutzt werden.

```
> x <- c(1:20)
> y <- (runif(n=20))
> plot(x, y)
> abline(h=mean(y))
```

Segmente plotten

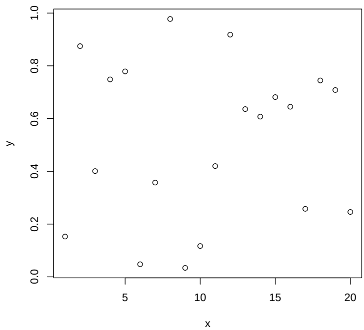
Möchte man beispielsweise die Abweichung von Daten und Mittelwert zeigen, kann `segments()` benutzt werden. Dieses ist in der Lage mehrere Liniensegmente zu einem Plot hinzuzufügen.

```
> x <- c(1:20)
> y <- (runif(n=20))
> plot(x, y)
> abline(h=mean(y))
> segments(x0=x, y0=mean(y), x1=x, y1=y)
```

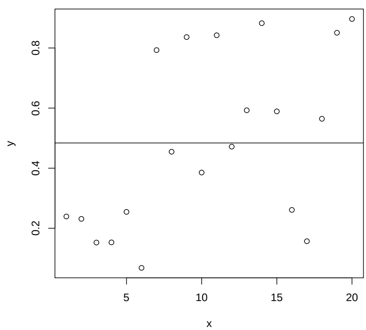
Flächen plotten

Möchte man Rechtecke oder Flächen in einen Plot einfügen so kann man `rect()` benutzen. Im folgenden ein Beispiel zur Darstellung der Varianz.

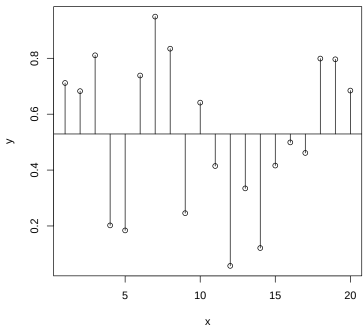
```
> x <- c(1:20)
> y <- (runif(n=20, min=3, max=7))
> plot(x, y, ylim=c(0, 10))
> abline(h=mean(y))
> diff <- sqrt((y-mean(y))^2)
> rect(xleft=x, xright=(x+diff), ybottom=mean(y)
   , ytop=y, col='gray')
```



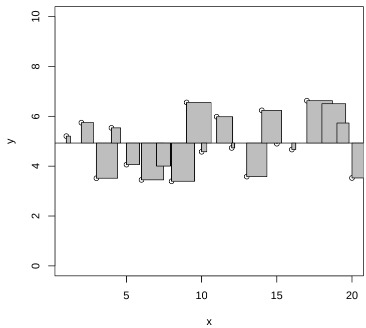
(a) Gewöhnlicher Plot mit `plot()`



(b) Linie mit `abline()`



(c) Segmente mit `segments()`



(d) Flächen mit `rect()`

6.7.2 Boxplot

Ein Boxplot zeigt sehr viele Informationen zur Statistik einer Datenreihe in einem Plot auf. Insbesondere sind dies

- extrem *grosse* Beobachtungen
- die grösste *normale* Beobachtung
- oberes Quartil (75% Quantil)
- Median (50% Quantil)
- unteres Quartil (25% Quantil)
- die kleinste *normale* Beobachtung
- extrem *kleine* Beobachtungen

Die Abbildung 6.1 zeigt einen Boxplot welches alle oben genannten Merkmale gut sichtbat enthält.

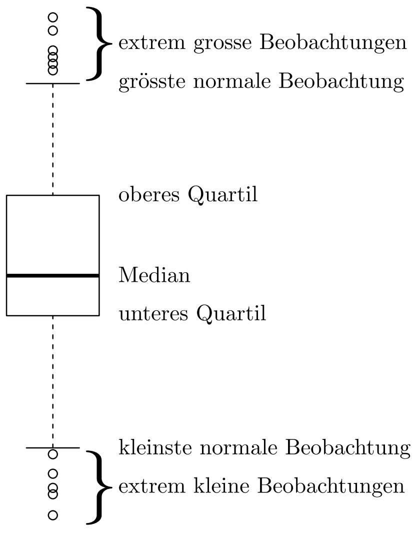
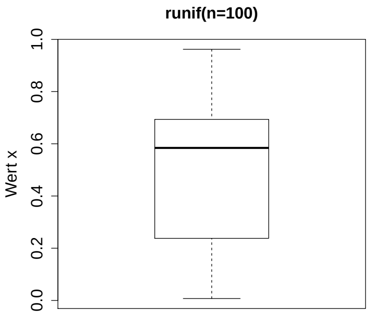


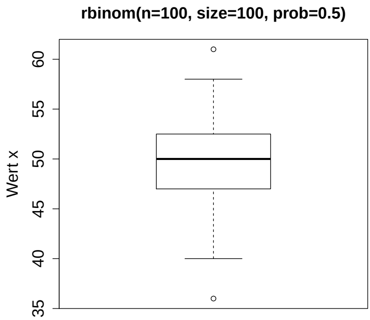
Abbildung 6.1: Analyse eines Boxplots

Mit solch einem Plot lässt sich die Verteilung einer Datenreihe sehr schnell graphisch erfassen ohne dabei zu rechnen oder etwas interpretieren zu müssen. Jede Verteilung hat ihre spezielle Charakteristik die sich im Boxplot erkennen lässt.

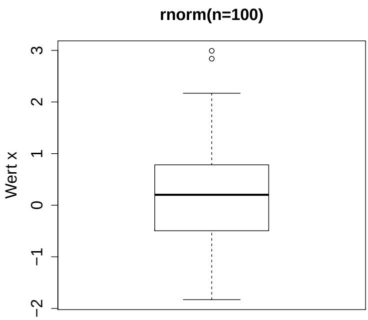
- Die uniforme Verteilung hat in etwa gleich grosse Bereiche der Quartile, ist somit symetrisch und geht über den ganzen Bereich und hat somit keine Ausreisser (Extremweerte).
- Die binomiale Verteilung hat enger beieinander liegende 25% Quantile und kann Ausreisser haben.
- Die normale Verteilung ist der binomialen sehr ähnlich.
- Exponentiale Verteilungen haben unsymetrische Quantile und grundsätzlich Ausreisser.



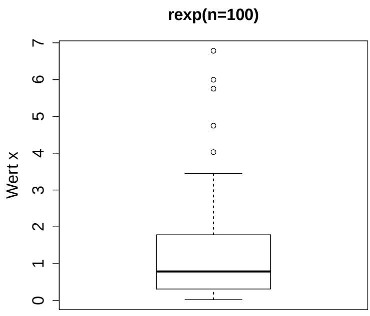
(a) Uniforme Verteilung



(b) Binomiale Verteilung



(c) Normale Verteilung



(d) Exponential Verteilung

Abbildung 6.2: Boxplots verschiedener Verteilungen

6.8 Daten benutzen

`R` kennt neben einfachen Variablen, Vektoren und Matrizen auch sog. *Data Frames*. Diese sind den Matrizen ähnlich mit dem Unterschied, dass man in einem solchen Data Frame verschiedene Typen ablegen kann (Zahlen, Buchstaben etc.) während Matrizen nur numerische Inhalte haben können.

6.8.1 Daten zusammenstellen

Ein Data Frame kann mit der Funktion `data.frame()` erstellt werden.

```
> a <- c(1.67, 1.82, 1.76, 1.94)
> b <- c("m", "f", "f", "m")
> c <- c(12, 19, 23, 17)
> team <- data.frame(a, b, c)
> team

     a b  c
1 1.67 m 12
2 1.82 f 19
3 1.76 f 23
4 1.94 m 17
```

Daten benennen

Möchte man das Data Frame um sog. *header* erweitern, so kann man die Funktion `colnames()` nutuzen

```
> a <- c(1.67, 1.82, 1.76, 1.94)
> b <- c("m", "f", "f", "m")
> c <- c(12, 19, 23, 17)
> team <- data.frame(a, b, c)
> colnames(team) <- c("Height", "Sex", "Age")
> team

  Height Sex Age
1   1.67   m  12
2   1.82   f  19
```

```
3    1.76    f   23
4    1.94    m   17
```

Es ist aber auch möglich das komplette Data Frame mit Labels zu versehen mit der Funktion `dimnames()`. Hierzu muss aber eine *list* als Parameter übergeben werden welche je einen Vektor für Spalten und Reihen hat.

```
> a <- c(1.67, 1.82, 1.76, 1.94)
> b <- c("m", "f", "f", "m")
> c <- c(12, 19, 23, 17)
> team <- data.frame(a, b, c)
> columns <- c("Babbage", "Lovelace",
+          "Noether", "Shannon")
> rows <- c("Height", "Sex", "Age")
> dimnames(team) <- list(columns, rows)
> team
```

```
         Height Sex Age
Babbage    1.67   m  12
Lovelace   1.82   f  19
Noether    1.76   f  23
Shannon    1.94   m  17
```

Daten faktorisieren

Bei der Erstellung von Data Frames ist es sinnvoll für typisierte Daten die Funktion `factor()` zu nutzen, denn diese ermöglicht es Datenreihen zu *faktorisieren.*

Beispielsweise hat man einen Datensatz bei dem das Geschlecht verzeichnet ist. Das Geschlecht kann zwei Werte annehmen, sog. *Levels.*

```
> a <- c(1.67, 1.82, 1.76, 1.94, 1.86, 1.78)
> b <- factor(c("m", "f", "f", "m", "f", "m"))
> c <- c(12, 19, 23, 17, 20, 24)
> team <- data.frame(a, b, c)
> colnames(team) <- c("Alter", "Hoehe", "
  Geschlecht")
> team
```

```
  Alter Hoehe Geschlecht
1  1.67     m         12
2  1.82     f         19
3  1.76     f         23
4  1.94     m         17
5  1.86     f         20
6  1.78     m         24
```

```
> b
```

```
[1] m f f m f m
Levels: f m
```

6.8.2 Daten von URL einbinden

Steht ein Datensatz als Tabelle auf einer Webseite zur Verfügung, so kann man diese mit der Funktion `read.table()` einbinden.

Hierbei gilt es zu beachten, dass die Formatierung berücksichtigt werden muss. Bispielsweise ob die Daten kommasepariert (`sep`) sind oder ob die Daten je einen Titel (`header`) haben.

```
> url <- "http://data.princeton.edu/wws509/
   datasets/effort.dat"
> data <- read.table(url, header=TRUE)
> data
```

```
               setting effort change
Bolivia             46      0      1
Brazil              74      0     10
Chile               89     16     29
Colombia            77     16     25
CostaRica           84     21     29
Cuba                89     15     40
DominicanRep        68     14     21
Ecuador             70      6      0
ElSalvador          60     13     13
Guatemala           55      9      4
Haiti               35      3      0
Honduras            51      7      7
```

```
Jamaica                87      23      21
Mexico                 83       4       9
Nicaragua              68       0       7
Panama                 84      19      22
Paraguay               74       3       6
Peru                   73       0       2
TrinidadTobago         84      15      29
Venezuela              91       7      11
```

6.8.3 Daten verarbeiten

Um Daten eines Data Frame zu bearbeiten kann genau wie bei Matrizen vorgegenagen werden. Für die effiziente Bearbeitung ganzer Reihen oder Spalten gibt es neben den iterativen Methoden mit Schlaufen noch den funktionalen Ansatz mittels der `apply()` Funktionen von denen es drei verschiedene gibt.

- `apply()`
- `lapply()`
- `sapply()`

Allen gemeinsam ist, dass diese eben funktional sind, d.h. man kann nur Funktionen auf etwas anwenden. Beispielsweise um Datenwerte um eine Dekade zu vergrössern müsste man eine Funktion definieren die dies bewerkstelligt.

```
> a <- 13.5
> decadeUp <- function(x) {x*10}
> b <- decadeUp(a)
> b

[1] 135
```

Im Folgenden sind die einzelnen Funktionen nochmals mit kurzen Beispielen erläutert.

`apply()`

Die Funktion `apply()` ermöglicht es, eine Funktion auf alle Elemente eines Arrays oder eines Data Frames anzuwenden.

```
> age <- c(11, 24, 33, 17)
> weight <- c(53, 79, 68, 86)
> height <- c(1.39, 1.82, 1.67, 1.87)
> team <- data.frame(age, weight, height)
> team

  age weight height
1  11     53   1.39
2  24     79   1.82
3  33     68   1.67
4  17     86   1.87

> # die Hoehe vom Meter in Centimeter wandeln
> toCentimeter <- function(x) {x*100}
> team[3] <- apply(team[3], MARGIN=2, FUN=
   toCentimeter)
> team

  age weight height
1  11     53    139
2  24     79    182
3  33     68    167
4  17     86    187
```

`lapply()`

`sapply()`

6.9 Funktionen definieren

In `R` könnn eigene Funktionenen definiert werden. Dies ermöglicht effizienteren und allgemein besseren Code. Zudem muss es angewendet werden, wenn etwas die Funktionalen Elemente der Programmiersprache `R` genutzt werden sollen.

6.9.1 Einfache Funktionen

```
> square <- function(x) {x^2}
> square(5)

[1] 25
```

6.9.2 Mehrparametrige Funktionen

```
> volume <- function(a, b, c) {a*b*c}
> volume(2, 3, 5)

[1] 30
```

6.9.3 Default Parameter

```
> weeklyWorkTime <- function(days=5, hours=8) {
   days*hours}
> weeklyWorkTime()

[1] 40

> weeklyWorkTime(3, 8)

[1] 24
```

6.9.4 return()-Funktion

```
> hypotenuse <- function(a=1, b=1) {
+        c <- sqrt((a^2)+(b^2))
+        return(c)
+   }
> hypotenuse()

[1] 1.414214
```

Anhang

Anhang A

Periodensystem

1 I A	2 II A	3 III B	4 IV B	5 V B	6 VI B	7 VII B	8	9 VIII B
1 1,008* **H** Wasserstoff								
3 6,94* **Li** Lithium	4 9,012 **Be** Beryllium							
11 22,99 **Na** Natrium	12 24,31* **Mg** Magnesium							
19 39,10 **K** Kalium	20 40,08 **Ca** Calcium	21 44,96 **Sc** Scandium	22 47,87 **Ti** Titan	23 50,94 **V** Vanadium	24 52,00 **Cr** Chrom	25 54,94 **Mn** Mangan	26 55,85 **Fe** Eisen	27 58,93 **Co** Cobalt
37 85,47 **Rb** Rubidium	38 87,62 **Sr** Strontium	39 88,91 **Y** Yttrium	40 91,22 **Zr** Zirconium	41 92,91 **Nb** Niob	42 95,96* **Mo** Molybdän	43 [98] **Tc** Technetium	44 101,1 **Ru** Ruthenium	45 102,9 **Rh** Rhodium
55 132,9 **Cs** Caesium	56 137,3 **Ba** Barium	57–71	72 178,5 **Hf** Hafnium	73 180,9 **Ta** Tantal	74 183,8 **W** Wolfram	75 186,2 **Re** Rhenium	76 190,2 **Os** Osmium	77 192,2 **Ir** Iridium
87 [223] **Fr** Francium	88 [226] **Ra** Radium	89–103	104 [267] **Rf** Rutherfordium	105 [268] **Db** Dubnium	106 [269] **Sg** Seaborgium	107 [270] **Bh** Bohrium	108 [269] **Hs** Hassium	109 [278] **Mt** Meitnerium
			57 138,9 **La** Lanthan	58 140,1 **Ce** Cer	59 140,9 **Pr** Praseodym	60 144,2 **Nd** Neodym	61 [145] **Pm** Promethium	62 150,4 **Sm** Samarium
			89 [227] **Ac** Actinium	90 232,0 **Th** Thorium	91 231,0 **Pa** Protactinium	92 238,0 **U** Uran	93 [237] **Np** Neptunium	94 [244] **Pu** Plutonium

*H: [1,00784, 1,00811]
Li: [6,938, 6,997]
B: [10,806, 10,821]
C: [12,0096, 12,0116]
N: [14,00643, 14,00728]
O: [15,99903, 15,99977]
Mg: [24,304, 24,307]
Si: [26,084, 26,086]
S: [32,059, 32,076]
Cl: [35,446, 35,457]
Br: [79,901, 79,907]
Tl: [204,382, 204,385]
Zn: 65,38(2)
Se: 78,96(3)
Mo: 95,96(2)

10	11	12	13	14	15	16	17	18
								VIII A
								2 4,003 **He** Helium
			III A	IV A	V A	VI A	VII A	
			5 10,81* **B** Bor	6 12,01* **C** Kohlenstoff	7 14,01* **N** Stickstoff	8 16,00* **O** Sauerstoff	9 19,00 **F** Fluor	10 20,18 **Ne** Neon
	I B	II B	13 26,98 **Al** Aluminium	14 28,09* **Si** Silicium	15 30,97 **P** Phosphor	16 32,06* **S** Schwefel	17 35,45* **Cl** Chlor	18 39,95 **Ar** Argon
28 58,69 **Ni** Nickel	29 63,55 **Cu** Kupfer	30 65,38* **Zn** Zink	31 69,72 **Ga** Gallium	32 72,63 **Ge** Germanium	33 74,92 **As** Arsen	34 78,96* **Se** Selen	35 79,90* **Br** Brom	36 83,80 **Kr** Krypton
46 106,4 **Pd** Palladium	47 107,9 **Ag** Silber	48 112,4 **Cd** Cadmium	49 114,8 **In** Indium	50 118,7 **Sn** Zinn	51 121,8 **Sb** Antimon	52 127,6 **Te** Tellur	53 126,9 **I** Iod	54 131,3 **Xe** Xenon
78 195,1 **Pt** Platin	79 197,0 **Au** Gold	80 200,6 **Hg** Quecksilber	81 204,4* **Tl** Thallium	82 207,2 **Pb** Blei	83 209,0 **Bi** Bismut	84 [209] **Po** Polonium	85 [210] **At** Astat	86 [222] **Rn** Radon
110 [281] **Ds** Darmstadtium	111 [281] **Rg** Roentgenium	112 [285] **Cn** Copernicium	113 [286] **Uut** Ununtrium	114 [289] **Fl** Flerovium	115 [288] **Uup** Ununpentium	116 [293] **Lv** Livermorium	117 [294] **Uus** Ununseptium	118 [294] **Uuo** Ununoctium

63 152,0 **Eu** Europium	64 157,3 **Gd** Gadolinium	65 158,9 **Tb** Terbium	66 162,5 **Dy** Dysprosium	67 164,9 **Ho** Holmium	68 167,3 **Er** Erbium	69 168,9 **Tm** Thulium	70 173,1 **Yb** Ytterbium	71 175,0 **Lu** Lutetium
95 [243] **Am** Americium	96 [247] **Cm** Curium	97 [247] **Bk** Berkelium	98 [251] **Cf** Californium	99 [252] **Es** Einsteinium	100 [257] **Fm** Fermium	101 [258] **Md** Mendelevium	102 [259] **No** Nobelium	103 [262] **Lr** Lawrencium

Anhang B

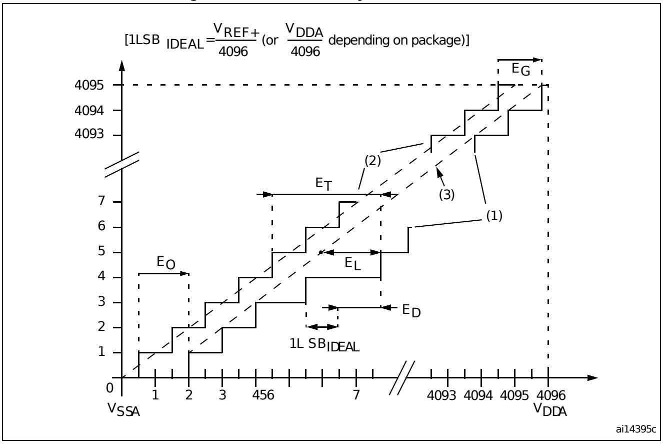
STM32F21xx

Der Mikrocontroller STM32F21xx ist ein repräsentatives Modell von Mikrocontrollern, welche heutzutage für Embedded Systems benutzt werden im Bereich der Steuereungs- und Retgelungstechnik. Die typischen Merkmale solcher Mikrocontroller sind

- 32-Bit Busbreite
- RISC-Architektur (aktuell z.B. ARM-Cores mit Thumb2)
- diverse interne Peripheriecontroller (UART, SPI, I^2C, Ethernet)
- DMA (Direct Memory Access)
- ADC (Analog to Digital Converter)
- Pipelining (Sprungvorhersagen)
- Single Cycle Multiplication

B.1 ADC Genauigkeit

Figure 49. ADC accuracy characteristics



1. Example of an actual transfer curve.
2. Ideal transfer curve.
3. End point correlation line.
4. E_T = Total Unadjusted Error: maximum deviation between the actual and the ideal transfer curves.
   EO = Offset Error: deviation between the first actual transition and the first ideal one.
   EG = Gain Error: deviation between the last ideal transition and the last actual one.
   ED = Differential Linearity Error: maximum deviation between actual steps and the ideal one.
   EL = Integral Linearity Error: maximum deviation between any actual transition and the end point correlation line.

B.2 Jitter PLL

Table 33. Main PLL characteristics (continued)

Symbol	Parameter	Conditions		Min	Typ	Max	Unit
Jitter(3)	Cycle-to-cycle jitter	System clock 120 MHz	RMS	-	25	-	ps
			peak to peak	-	±150	-	
	Period Jitter		RMS	-	15	-	
			peak to peak	-	±200	-	
	Main clock output (MCO) for RMII Ethernet	Cycle to cycle at 50 MHz on 1000 samples		-	32	-	
	Main clock output (MCO) for MII Ethernet	Cycle to cycle at 25 MHz on 1000 samples		-	40	-	
	Bit Time CAN jitter	Cycle to cycle at 1 MHz on 1000 samples		-	330	-	
$I_{DD(PLL)}$(4)	PLL power consumption on VDD	VCO freq = 192 MHz VCO freq = 432 MHz		0.15 0.45	-	0.40 0.75	mA
$I_{DDA(PLL)}$(4)	PLL power consumption on VDDA	VCO freq = 192 MHz VCO freq = 432 MHz		0.30 0.55	-	0.40 0.85	mA

1. Take care of using the appropriate division factor M to obtain the specified PLL input clock values. The M factor is shared between PLL and PLLI2S.
2. Guaranteed by design, not tested in production.
3. The use of 2 PLLs in parallel could degraded the Jitter up to +30%.
4. Based on characterization, not tested in production.

Table 34. PLLI2S (audio PLL) characteristics

Symbol	Parameter	Conditions	Min	Typ	Max	Unit
f_{PLLI2S_IN}	PLLI2S input clock(1)		0.95(2)	1	2.10(2)	MHz
f_{PLLI2S_OUT}	PLLI2S multiplier output clock		-	-	216	MHz
f_{VCO_OUT}	PLLI2S VCO output		192	-	432	MHz
t_{LOCK}	PLLI2S lock time	VCO freq = 192 MHz	75	-	200	µs
		VCO freq = 432 MHz	100	-	300	

B.3 Jitter Audio-PLL

Table 34. PLLI2S (audio PLL) characteristics (continued)

Symbol	Parameter	Conditions		Min	Typ	Max	Unit
Jitter[3]	Master I2S clock jitter	Cycle to cycle at 12.288 MHz on 48KHz period, N=432, R=5	RMS	-	90	-	
			peak to peak	-	±280	-	ps
		Average frequency of 12.288 MHz N=432, R=5 on 1000 samples		-	90	-	ps
	WS I2S clock jitter	Cycle to cycle at 48 KHz on 1000 samples		-	400	-	ps
$I_{DD(PLLI2S)}$[4]	PLLI2S power consumption on V_{DD}	VCO freq = 192 MHz VCO freq = 432 MHz		0.15 0.45	-	0.40 0.75	mA
$I_{DDA(PLLI2S)}$[4]	PLLI2S power consumption on V_{DDA}	VCO freq = 192 MHz VCO freq = 432 MHz		0.30 0.55	-	0.40 0.85	mA

1. Take care of using the appropriate division factor M to have the specified PLL input clock values.
2. Guaranteed by design, not tested in production.
3. Value given with main PLL running.
4. Based on characterization, not tested in production.

Literatur

Adler, Joseph (2012). *R in a Nutshell.* 2. Aufl. 1005 Gravestein Highway North, Sebastopol, CA 95472: O'Reilly Media, Inc. ISBN: 978-1-449-31208-4.

Birbaumer, Mirko, Peter Scheiblechner und Sandro Schmid (2013). *Stochastik — Vorlesungsskript HSLU.* Beruhend auf dem Skript *Statistik für Biologie und Pharmazeutische Wissenschaften* vom Markus Kalisch, Peter Bühlmann und Hansruedi Künsch.

Dalgaard, Peter (2008). *Introductory Statistics with R.* Berlin: Springer Verlag. ISBN: 978-0-387-79053-4.

Gandrud, Christopher (2013). *Reproducible Research with R and RStudio.* 6000 Broken Sound Parkway NW, Boca Raton: CRC Press. ISBN: 978-1-4665-7284-3.

Griffiths, Dawn (2009). *Statistik von Kopf bis Fuss — Ein Buch zum Mitmachen und Verstehen.* Köln: O'Reilly Verlag GmbH & Co. KG. ISBN: 978-3-89721-891-8.

Henze, Norbert (2012). *Stochastik für Einsteiger — Eine Einführung in die faszinierende Welt des Zufalls.* 9. Aufl. Berlin: Vieweg+Tuebner Verlag, Springer Fachmedien. ISBN: 978-3-8348-1845-4.

Horowitz, Paul und Winfield Hill (2008). *The Art of Electronics.* 22. Aufl. Cambridge: University Press. ISBN: 978-0-521-37095-0.

Team-FOSA u. a. (2013). *Formelsammlung Mathematik.* HS13. Horw: FOSA.

Abbildungsverzeichnis

Glossar

A

Abstraktion
Vereinfachung auf Wesentliches. xii, 20

Additivität
Bezeichnung für das zweite Axiom von Kolmogorov. Dieses besagt, dass die Wahrscheinlichkeiten sich ausschliessender Ereignisse addieren lassen. xii, 24

Arithmetisches Mittel
Quotient aus der Summe aller Elemente und Anzahl Elemente. xii, 10, 12

Axiome von Kolmogorov
Der russische Mathematiker Andrei N. Kolmogorov formulierte die drei grundlegenden Axiome der Wahrscheinlichkeitstheorie; Nichtnegativität, Normiertheit, Additivität. xii, 24, 53

B

Beyes'sche Theorem
Das Beye'sche Theorem ist vom Mathematiker Thomas Beyes formulierter Satz, welcher die Berechnung bedingter Wahrscheinlichkeiten beschreibt. xii, 27

Binaer
Binär heisst wörtlich „paarweise" und beschreibt meist ein Zahlensysten (*Binärsystem*, *Dualsystem*) oder einen Zahlenraum der genau zwei Werte kennt. xii, 31, *siehe* Bit

Binomialkoeffizient
Eine mathematische Formulierung und Funktion zur Ermittlung möglicher Kombinationen see. xii, 27

Bit
Das Bit ist eine Einheit aus der Informationstheorie welche den kleinstmöglichen Informationsgehalt beschreibt welcher durch die Wahl aus zwei gleichwahrscheinlichen Möglichkeiten beschreibt (oft *1 oder 0* bzw. *wahr oder falsch*). xii, *siehe* Binär

Buffer Overflow
Ein *Pufferüberlauf* ist ein Fehler in der Speicherallozierung von Computersystem welcher durch Fehler in der ausgeführten Software verursacht wird. xii, 44

D

Differenzmenge
Menge von Elementen einer Menge ohne jene Elemente, welche auch in einer weiteren Menge enthalten sind. xii, 22

Durchschnitt
Durchschnitt ist eine Kurzform für das *arithmetische Mittel*. xii, 10

E

Echte Teilmenge
Menge von Elementen die alle Teil einer anderen Menge sind, diese aber noch weitere Elemente enthält, d.h. die Mengen sind nicht gleich. xii, 21

Embedded System
Ein *eingebettetes System* beschreibt eine spezifische Hardwareimplementierung innerhalb einer Applikation (Gerät, nicht Software) welche sich auf auf ein Mikrocontroller stütz. xii, 44, *siehe* Mikrocontroller

Ereignisraum
Die Menge aller möglichen Ereignisse (oft mit Ω notiert). xii, 20

G

Gleiche Menge
Eine Menge deren Inhalt identisch ist mit dem Inhalt einer anderen Menge. xii, 21

K

Kolmogorov
Bekannter russischer Mathemathiker, welche die Grundlegenden Axiome der Wahrscheinlichkeitstheorie formulierte. xii, 24, *siehe* Axiome von Kolmogorov

Kombination
Eine spezielle Methode des Zählens. Sie wird angewandt zur Bestimmung von möglichen Ereignissen see. xii, 26

Komplement
Differenzmenge einer Potenzmenge und einer Menge aus derselben Potenzenge. xii, 22

Korrelation
Zusammenhang verschiedener Variablen. xii, 16

Korrelationskoeffizient
Ein (prozentuales) Mass für den Zusammenhang verschiedener Variablen. xii, 16

Kovarianz
Mass der Ähnlichkeit von Datenreihen. xii, 15

L

Leere Menge
Eine Menge die keinerlei Elemente enthält. xii, 21

M

Median
Das 50%-Quantil. xii, 11

Mengenlehre
Ein Teilgebiet der Mathematik welches aus der Logik hervorgeht. In der Stochastik findet die Mengenlehre insbesondere in der Kombinatorik Verwendung. xii, 20

Mikrocontroller
Ein dediziertes Computersystem welches auf einem gemainsamen Chip implementiert ist (meist inklusive Peripherie und Speicher). xii, 43

Mittel
Mittel ist eine Kurzform für das *arithmetische Mittel*. xii, 10

Multiplikationsregel
Eine Regel die Anwendung findet zur Bestimmung möglicher Ereignisse (Variation, Permutation, Kombination). xii, 26

N

Nichtnegativität
Bezeichnung für das erste Axiom von Kolmogorov. Dieses besagt, dass es [...] keine negativen Wahrscheinlichkeiten gibt. xii, 24

Normiertheit
Bezeichnung für das zweite Axiom von Kolmogorov. Dieses besagt, dass der Grundraum Ω eine Wahrscheinlichkeit von $P(\Omega) = 1$ hat und sich stets etwas ereignet ($P(\emptyset) = 0$). xii, 24, 53

P

Permutation
Ein Spezialfall der Variation bei welcher alle Ereignisse stattfinden. xii, 26, *siehe* Variation

Pixel
Ein Anglizismus für *Bildpunkt*. xii, 43

Potenzmenge
Eine Menge aus allen Teilmengen einer anderen Menge. xii, 22

Q

Quantil
Prozentuale Grenze innerhalb einer Datenreihe. xii, 10, 11

Quartil
Ein spezielles Quantil welches ein Vielfaches vom 25%-Quantil ist. xii, 11

S

Schnittmenge
Menge von Elementen, die alle in mehreren Mengen enthalten sind. xii, 21

Standardabweichung
Mass der (linearen) Abweichung von Dantenpunkten und arithmetischem Mittel einer Datenreihe, d.h. die Quadratwurzel der Varianz. xii, 14

Stochastische Unabhängigkeit
Ereignisse welche sich gegenseitig nicht beeinflussen nennt man stochastisch unabhängig. xii, 24, 25

T

Teilmenge
Menge von Elementen die alle Teil einer anderen Menge sind. xii, 21

U

Urnenmodell
Ein bekanntes Modell für Verteilungen welches das *Ziehen ohne Zurücklegen* abbildet. xii, 32

V

Varianz
Mass der (quadratischen) Abweichung von Datenpunkten und artihmetischem Mittel einer Datenreihe, d.h. das Quadrat der Standardabweichung. xii, 12

Variation
Eine spezielle Methode des Zählens. Sie wird angewandt zur Bestimmung von möglichen Ereignissen. xii, 26, *siehe* Multiplikationsregel

Vereinigungsmenge
Menge der Elemente die in mindestens einer anderen Menge vorkommen. xii, 21