Stochastik

Serie 3

Aufgabe 3.1

Ein radioaktives Nuklid, das beim Zerfall Helium-4-Atomkerne aussendet, wird als *Alphastrahler* bezeichnet. Der vom zerfallenden Atomkern emittierte Helium-4-Atomkern wird *Alphateilchen* genannt. Alphateilchen können zum Beispiel mit einem Zink Sulfid Schirm detektiert werden, wobei Lichtblitze bei der Kollision von Alphateilchen mit dem Schirm entstehen. Die Emission von Alphateilchen von einer radioaktiven Quelle pro Zeiteinheit ist nicht konstant, sondern fluktuiert auf zufällige Art und Weise. Ein typischer Alphastrahler ist Americium 241, ein Zerfallsprodukt von Plutonium-241, das in radioaktiven Abfällen häufig anzutreffen ist. Rauchmelder enthalten kleine Mengen von Americium 241.

In einem Experiment wurde nun die Anzahl Zerfälle von Americium 241 in einem Intervall von 10 Sekunden gemessen. Das Experiment wurde 1207 Mal wiederholt, jedes Mal wurde die Anzahl Zerfälle in 10 Sekunden gemessen. In Tabelle 1 ist in der ersten Spalte die Anzahl Zerfälle aufgeführt, in der zweiten Spalte, wie oft diese Anzahl Zerfälle in den 1207 Experimenten beobachtet worden ist. So sind in 18 der 1207 Experimente 0, 1 oder 2 Alphateilchen detektiert worden. In 28 der 1207 Experimente wurden 3 Alphateilchen detektiert etc.

a) Wie viele Zerfälle wurden im gesamten beobachtet? Nehmen Sie an, dass 18 mal 2 Zerfälle beobachtet wurden und 5 mal 17 Zerfälle.

   R-Hinweis: Benützen Sie

```r
messungen <- rep(...)
sum(...)
```

b) Stellen Sie mit einer geeigneten graphischen Darstellungsmethode die (absoluten) Häufigkeiten für jede Anzahl Zerfälle dar. Beachten Sie in der Darstellung das Intervall für 0-2 und 17+ Zerfälle.

   R-Hinweis: Benützen Sie

```r
hist(..., freq = TRUE)
```

c) Zeichnen Sie die relativen Häufigkeiten für jede Anzahl Zerfälle pro 10 Sekunden auf. Welche graphische Darstellung wählen Sie, um relative Häufigkeiten anzugeben? Wie interpretieren Sie diese relativen Häufigkeiten?

Anzahl Zerfälle	Beobachtet in Anzahl Experimente
0-2	18
3	28
4	56
5	105
6	126
7	146
8	164
9	161
10	123
11	101
12	74
13	53
14	23
15	15
16	9
17+	5

Tabelle 1: Anzahl Zerfälle in 10 Sekunden und Anzahl Experimente (von insgesamt 1207), in denen diese Anzahl Zerfälle beobachtet wurde.

R-Hinweis: Benützen Sie

```
hist(..., freq = FALSE)
```

d) Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit für jede Anzahl Zerfälle und stellen Sie diese in einem Stabdiagramm dar.

R-Hinweis: Benützen Sie

```
plot(..., ..., type = "h", xlab = "Zahl Zerfaelle in 10 Sekunde",
    ylab = "Wahrscheinlichkeit")
```

e) Berechnen Sie das arithmetische Mittel und die empirische Standardabweichung der Daten. Zeichnen Sie diese in die Graphik von Teilaufgabe d) ein und erklären Sie deren Bedeutung.

R-Hinweis: Um Mittelwert und Standardabweichung in die Graphik einzuzeichnen benützen Sie

```
abline(v = messungen.mean, col = "red")
lines(x = c(messungen.mean - messungen.sd, messungen.mean +
    messungen.sd), y = c(..., ...), col = "blue")
```

f) Zeichnen Sie die empirische kumulative Verteilungsfunktion. Erklären Sie die Bedeutung der kumulativen Verteilungsfunktion.

R-Hinweis: Benützen Sie

```
n <- length(messungen)
plot(sort(messungen), (1:n)/n, type = "s", ylim = c(0,
    1), xlab = "Anzahl Zerfaelle in 10 Sekunden")
```

Aufgabe 3.2

Wo steckt in den folgenden Aussagen der Fehler? Begründen Sie.

a) Bei einer gezinkten Münze wurde festgestellt, dass P(Kopf)= 0.32 und P(Zahl)= 0.73.

b) Die Wahrscheinlichkeit für einen „Sechser" im Zahlenlotto ist $-3 \cdot 10^{-6}$.

c) Bei einer Befragung wurden die Ereignisse

S:	Befragte Person ist schwanger.
M:	Befragte Person ist männlich.

untersucht. Man findet $P(S) = 0.1$, $P(M) = 0.5$ und $P(S \cup M) = 0.7$

Aufgabe 3.3

Bei einem Zufallsexperiment werden zwei Würfel gleichzeitig geworfen. Wir nehmen an, dass sie „fair" sind, d. h. die Augenzahlen 1 bis 6 eines Würfels treten mit gleicher Wahrscheinlichkeit auf.

a) Beschreiben Sie den Ereignisraum in Form von Elementarereignissen.

b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit eines einzelnen Elementarereignisses?

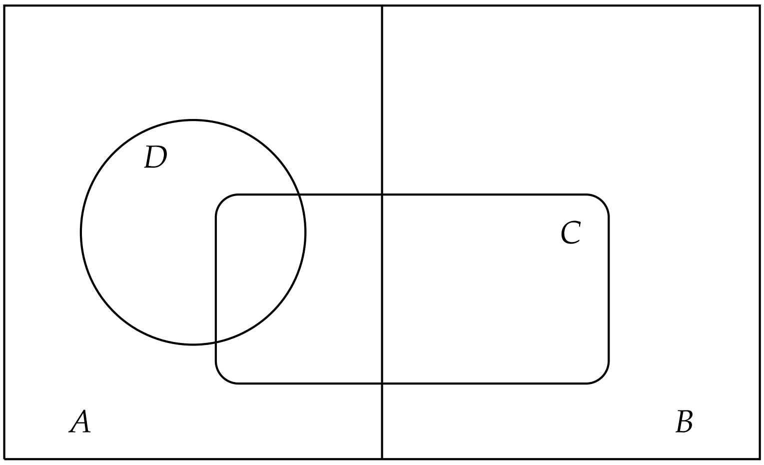
c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis E_1 „Die Augensumme ist 7" eintritt.

d) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis E_2 „Die Augensumme ist kleiner als 4" eintritt.

e) Bestimmen Sie $P(E_3)$ für das Ereignis E_3 „Beide Augenzahlen sind ungerade".

f) Berechnen Sie $P(E_2 \cup E_3)$.

Aufgabe 3.4



a) Die Ereignisse A und B seien disjunkt und $P(B) > 0$ sowie $P(A) > 0$. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(i) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) + P(B) = 1 - P(A)$

(ii) $P(A \cap B) < P(A)$

(iii) $P(A \cup B) > P(A)$.

b) Welche der folgenden Schreibweisen ergeben einen Sinn?

(i) $P(A \cup (B \cap C))$

(ii) $P(A) + P(B)$

(iii) $P(\overline{A}) \cap P(B)$

(iv) $\overline{(P(B))}$.

c) Beschreiben Sie in Worten die folgenden Ausdrücke, und sagen Sie, um was für mathematische Objekte es sich handelt (Zahlen oder Mengen).

(i) $A \cup B$

(ii) $\overline{B} \cap C$

(iii) $P(A)$

(iv) $P((A \cap B \cap C) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}))$

(v) $\emptyset$.

d) Stellen Sie die folgenden Ereignisse im angegebenen Diagramm dar:

(i) $C \cap D$

(ii) $(D \backslash C) \cup (C \cap A)$

(iii) $B \cup D$.

Aufgabe 3.5

Die Ereignisse A und B seien unabhängig mit Wahrscheinlichkeiten $P(A) = 3/4$ und $P(B) = 2/3$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

a) Beide Ereignisse treten ein.

b) Mindestens eines von beiden Ereignissen tritt ein.

c) Höchstens eines von beiden Ereignissen tritt ein.

d) Keines der beiden Ereignisse tritt ein.

e) Genau eines der Ereignisse tritt ein.

Aufgabe 3.6

a) Der Einsturz eines Gebäudes in Tokio kann durch zwei voneinander unabhängige Ereignisse verursacht werden.

- E_1: ein grosses Erdbeben
- E_2: ein starker Taifun

Die jährlichen Eintrittswahrscheinlichkeiten dieser beiden Ereignisse sind $P(E_1) = 0.04$ und $P(E_2) = 0.08$. Berechnen Sie die jährliche Einsturzwahrscheinlichkeit des Gebäudes.

b) In einer Alpenregion gibt es 25 sehr hohe Berggipfel. Diese sind das ganze Jahr über mit Schnee bedeckt, und es besteht an jedem Tag die gleiche Wahrscheinlichkeit für das Loslösen einer Lawine. Diese beträgt $1/40$ pro Tag und Berggipfel. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es in dieser Alpenregion an einem Tag zu mindestens zwei Lawinenabgängen kommt?

Annahmen:

- An einem Berggipfel kann sich an einem Tag nur eine Lawine loslösen.
- Die Lawinenabgänge auf verschiedenen Berggipfeln sind voneinander unabhängig.

Aufgabe 3.7

Im Wahrscheinlichkeitsbaum (Abbildung 1) wird für eine zufällig ausgewählte Person zuerst das Merkmal Geschlecht (w = weiblich, m = männlich) und danach das Merkmal Erwerbstätigkeit (E = erwerbstätig, N = nicht erwerbstätig) betrachtet. Aus dem Baum können nun zum Beispiel folgende Wahrscheinlichkeiten herausgelesen werden:

- Wahrscheinlichkeit, dass die Person weiblich ist; $P(w) = 0.514$.

- Wahrscheinlichkeit, dass eine Person erwerbstätig ist, wenn man schon weiss, dass sie männlich ist; $P(E|m) = 0.578$.

	E	N
w	$P(w \cap E) =$	
m		

a) Füllen Sie die obenstehende Tabelle aus:

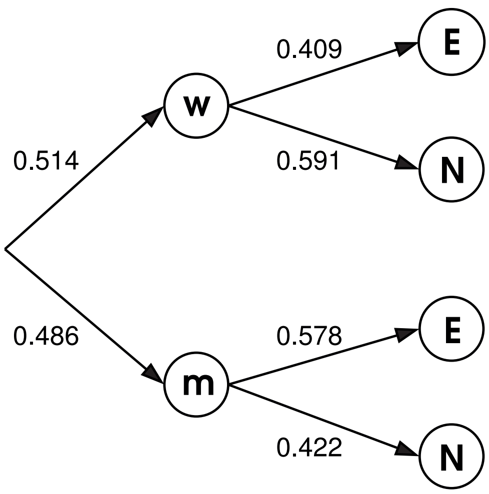


Abbildung 1: Wahrscheinlichkeitsbaum: Geschlecht vor Erwerbstätigkeit.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(w|E)$.

c) Die Reihenfolge der Merkmale wird nun umgekehrt. Dies führt zum invertierten Wahrscheinlichkeitsbaum gemäss Abbildung 2. Berechnen Sie die gesuchten Wahrscheinlichkeiten.

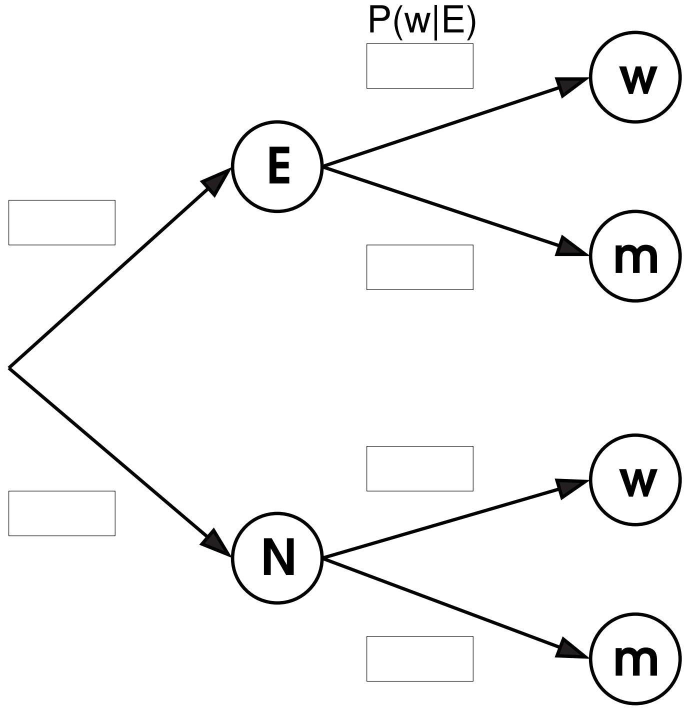


Abbildung 2: Wahrscheinlichkeitsbaum: Erwerbstätigkeit vor Geschlecht.

Aufgabe 3.8

Die Rauchsensoren in einer Fabrik melden ein Feuer mit Wahrscheinlichkeit 0.95. An einem Tag ohne Brand geben sie mit Wahrscheinlichkeit 0.01 falschen Alarm. Pro Jahr rechnet man mit einem Brand.

a) Die Alarmanlage meldet Feuer. Mit welcher Wahrscheinlichkeit brennt es tatsächlich?

b) In einer Nacht ist es ruhig (kein Alarm). Mit welcher Wahrscheinlichkeit brennt es tatsächlich nicht?

Aufgabe 3.9

Wir untersuchen die Erfolgswahrscheinlichkeit bei einer Zulassungsprüfung an der Universität Berkeley im Jahr 1973.

Die beobachteten relativen Häufigkeiten interpretieren wir als Wahrscheinlichkeiten. Betrachten Sie folgende Ereignisse:

Abt.	Männer		Frauen		Gesamt	
	Bewerber	Zugelassene	Bewerberinnen	Zugelassene	Bewerber/innen	Zugelassene
I	825	511	108	89	933	600
II	373	22	341	24	714	46
Ges.	1198	533	449	113	1647	646

$A =$ Bewerber (männlich)
$A^c =$ Bewerberin (weiblich)
$B =$ Bewerber/in bewirbt sich beim Departement I
$B^c =$ Bewerber/in bewirbt sich beim Departement II
$C =$ Bewerber/in wird zugelassen
$C^c =$ Bewerber/in wird abgelehnt

a) Berechnen Sie aus obiger Tabelle die folgenden Wahrscheinlichkeiten, und erklären Sie, was diese in Worten bedeuten. (Annahmen: Bewerber/in wird zufällig ausgewählt, jede/r mit gleicher Wahrscheinlichkeit).

   i) $P[A]$ und $P[A^c]$

   ii) $P[B|A]$ und $P[B|A^c]$

   iii) $P[A \cap C]$ und $P[A^c \cap C]$

b) Berechnen Sie aufgrund der Resultate in a) und mit Hilfe des Gesetzes der totalen Wahrscheinlichkeit und Bayes Theorem die folgenden Wahrscheinlichkeiten. Was bedeuten sie in Worten?

   i) $P[B]$ und $P[C]$

   ii) $P[A \cap B]$ und $P[A^c \cap B]$

   iii) $P[C|A]$ und $P[C|A^c]$

c) Wir nehmen an, dass Frauen und Männer gleich gut qualifiziert sind. Spricht dann das Resultat in b) iii) dafür, dass eines der beiden Geschlechter bei der Zulassung benachteiligt wird?

d) Aus der Tabelle ergeben sich folgende Wahrscheinlichkeiten

$$\begin{aligned}
P[C|(A \cap B)] &= 0.62 \\
P[C|(A^c \cap B)] &= 0.82 \\
P[C|(A \cap B^c)] &= 0.059 \\
P[C|(A^c \cap B^c)] &= 0.070
\end{aligned}$$

Was bedeuten diese Wahrscheinlichkeiten in Worten? Untersuchen Sie wiederum die Auswirkung des Geschlechts auf die Zulassung, und vergleichen Sie mit dem Resultat in c).

e) Berechnen Sie $P[C|B]$ und $P[C|B^c]$ aus der Tabelle. Was bedeuten diese Wahrscheinlichkeiten in Worten? Verwenden Sie zusätzlich die Resultate aus a) ii), um den Widerspruch zwischen c) und d) aufzulösen.