Визуализация графов

Computer Science клуб, март 2014

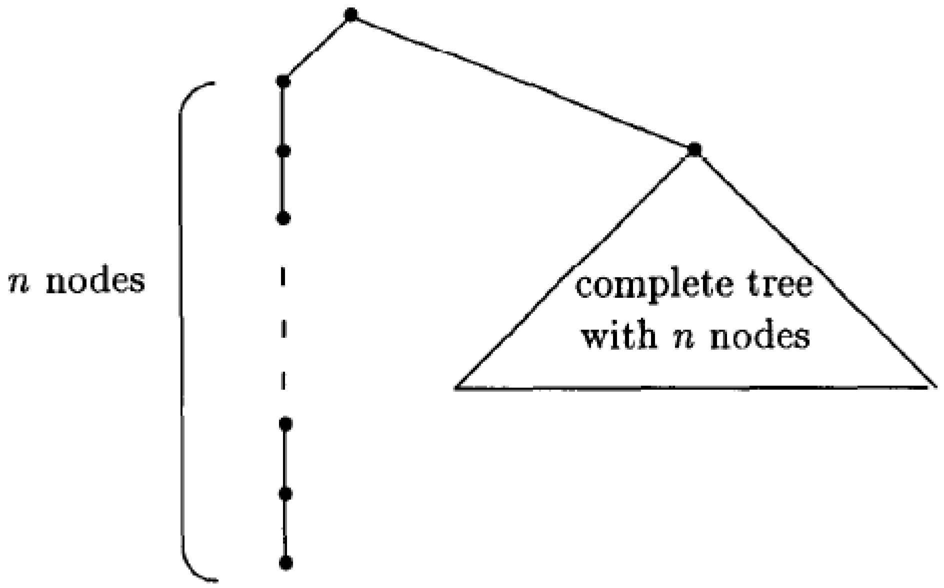
Александр Дайняк, ФИВТ МФТИ

www.dainiak.com

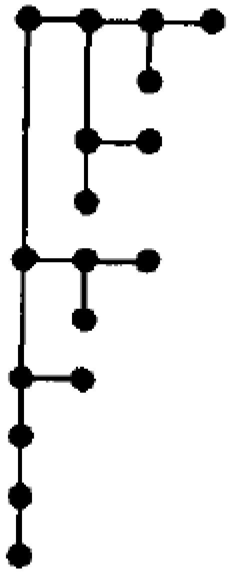
Правила укладки корневых деревьев

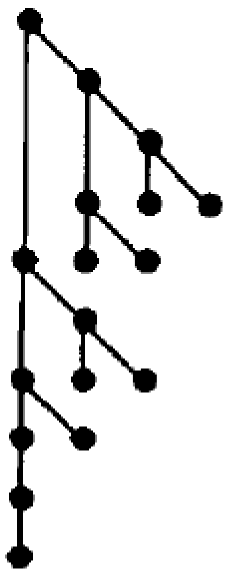
- Отсутствие скрещиваний рёбер (planar)
- Прямолинейность (straight-line)
- Строгая вертикальная монотонность (strictly upward) — y-координаты вершин строго больше чем у их потомков
- Сильное соблюдение порядка потомков (strongly order-preserving):
$$x_{\text{левого ребёнка}} \leq x_{\text{вершины}} \leq x_{\text{правого ребёнка}}$$

Деревья с площадью $\Omega(n \log n)$

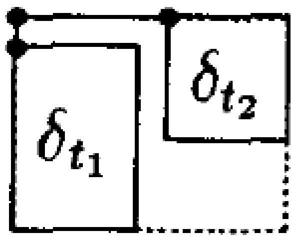


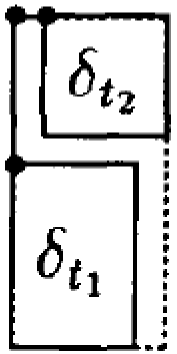
h-v-укладка и её смещение



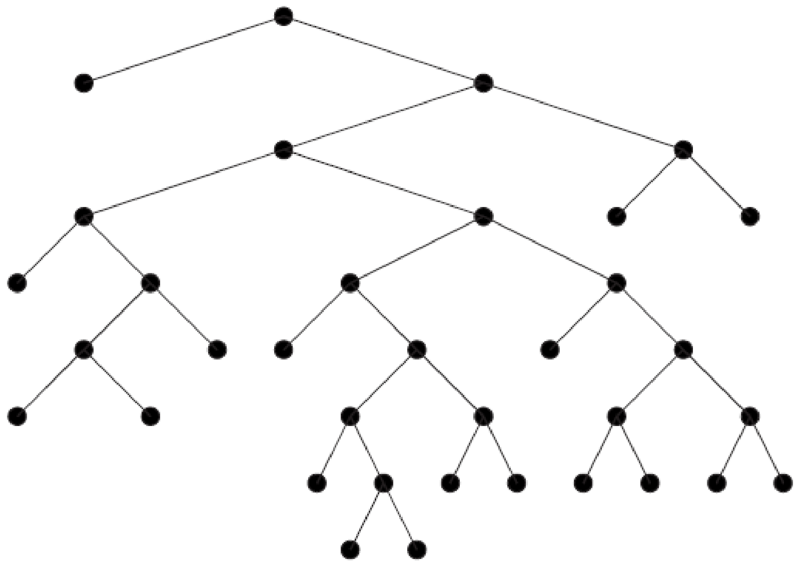


Склейка h-v-дерева из поддеревьев



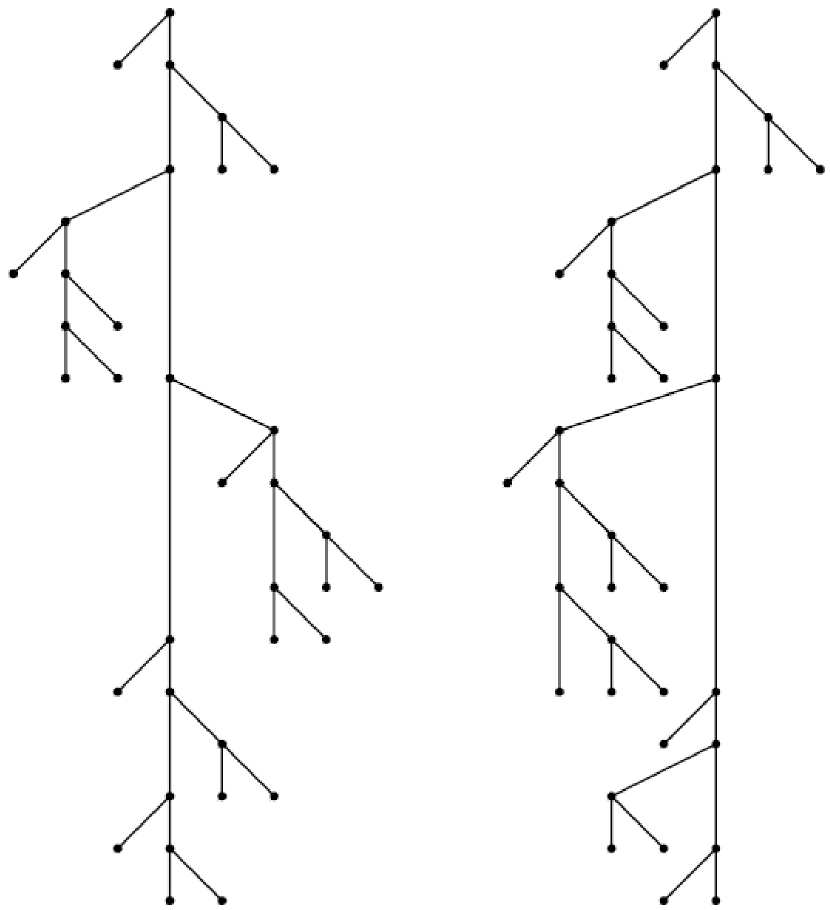


Задача: минимизация площади



$x_{\text{левого ребёнка}} < x_{\text{вершины}} < x_{\text{правого ребёнка}}$

Площадь в общем случае может быть $\Omega(n^2)$



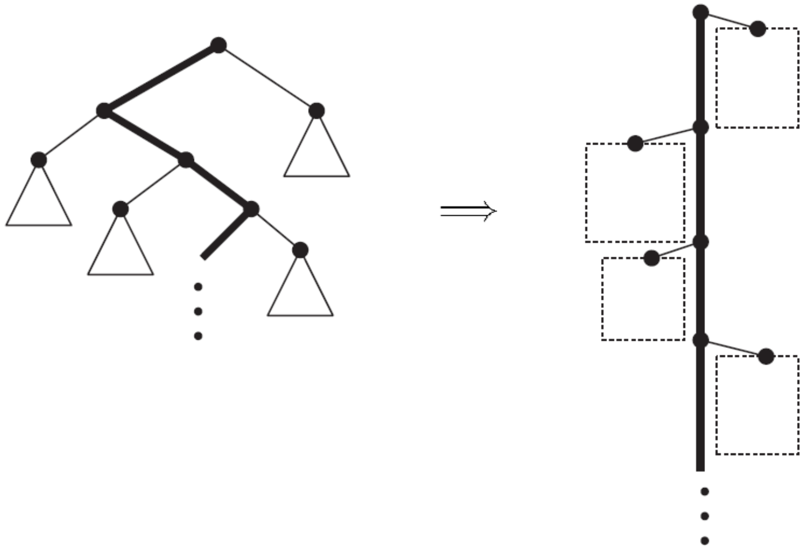
$x_{\text{левого ребёнка}} \leq x_{\text{вершины}} \leq x_{\text{правого ребёнка}}$

Задача: минимизация площади

T. M. Chan ’2002. Достаточно площади $O\left(n \cdot \sqrt{\log n} \cdot 2^{\sqrt{2 \log n}}\right)$.

A. Garg, A. Rusu ’2003. Площадь $\Theta(n \log n)$.

Обе теоремы используют *path-based approach*.

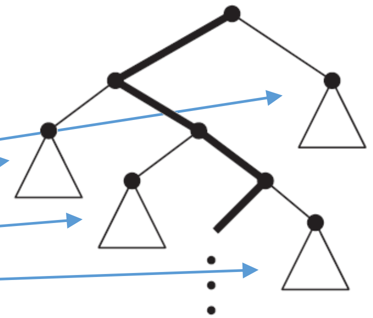


Жадный путь $(v_0, v_1, \ldots)$

Полагаем $T_0 \coloneqq T$ (исходное дерево).

Пусть v_i, L_i, R_i — корень и левое/правое поддеревья T_i.

Тогда $T_{i+1} \coloneqq \text{максимальное из } L_i, R_i$.



Поддеревья пути — это поддеревья,
корни которых суть сёстры вершин пути.

Выбор хорошего «направляющего пути»

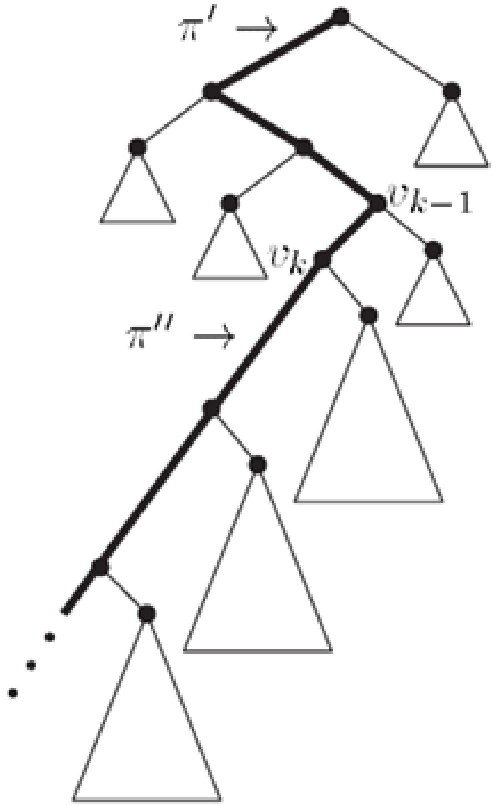
Пусть m — параметр (выберем позже).

Пусть v_k — сама нижняя из вершин жадного пути, для которой $|T_k| \geq n - m$.

Пусть v_k — левый потомок v_{k-1}.

π' — часть *жадного* пути до v_k.

π'' — *самый левый* путь в дереве от v_k до листа.



Получение рекуррентной оценки

Пусть уже построены поддеревья для всех вершин из пути $\pi' \cup \pi''$.

Пусть α и β — самые широкие укладки для левых и правых поддеревьев для вершин π'.

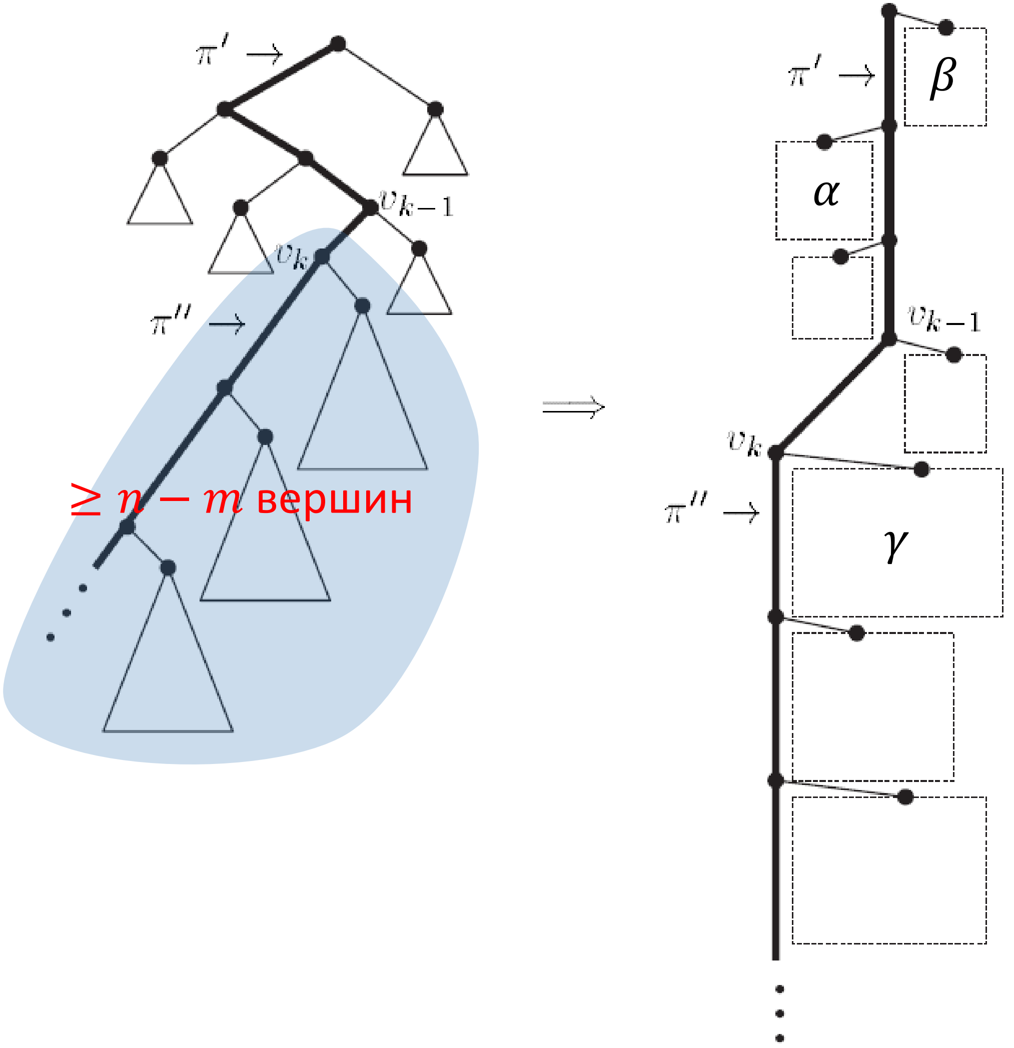
Пусть γ — самая широкая укладка для вершин из π''.

Имеем

$$W(T) \leq \max\{W(\alpha) + W(\beta) + 2, \quad 1 + W(\gamma)\}.$$

Т.к. $|\alpha| \leq m$, $|\beta| \leq m$ и $|\gamma| \leq n - m$, то

$$W(n) \leq \max\{2 \cdot W(m) + 2, \quad 1 + W(n-m)\}.$$



Избавление от $\max$

Получили неравенство

$$W(n) \le \max\{2 \cdot W(m) + 2, \quad 1 + W(n-m)\}.$$

Рекурсивно применяя это неравенство, получим

$$W(n) \le \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{k \text{ раз}} + W(n - km),$$

где k наибольшее такое, что $W(n - km) \ge 2 \cdot W(m) + 1$.

Тогда

$$W(n) \le k + 2 \cdot W(m) + 2 \le 2 \cdot W(m) + O(n/m).$$

Немного матана…

Получается, что для любых n и m, где $m \leq n$, выполнено

$$W(n) \leq 2 \cdot W(m) + O(n/m)$$

Обозначим $f(x) \coloneqq W\left(2^{(\log x)^2/2}\right)$.

Положив $m \coloneqq 2^{(\log x)^2/2 - \log x}$, получаем

$$f(x) \leq 2 \cdot W\left(2^{(\log x)^2/2 - \log x}\right) + O(x) \leq 2 \cdot W\left(2^{(\log x - 1)^2/2}\right) + O(x) =$$

$$= 2 \cdot f(x/2) + O(x).$$

Завершение доказательства

Обозначив $f(x) \coloneqq W\left(2^{(\log x)^2/2}\right)$, получили

$$f(x) \leq 2 \cdot f(x/2) + O(x).$$

Отсюда

$$f(x) = O(x \log x).$$

Обозначив $x \coloneqq 2^{\sqrt{2\log n}}$, получаем

$$W(n) = O\left(2^{\sqrt{2\log n}} \cdot \sqrt{\log n}\right).$$

Общая площадь укладки не больше, чем

$$W(n) \cdot n = O\left(n \cdot \sqrt{\log n} \cdot 2^{\sqrt{2\log n}}\right).$$