Дискретные структуры

осень 2013

Александр Дайняк

www.dainiak.com

Группы

Группа — это множество $\mathbb{G}$ с заданной на нём бинарной ассоциативной операцией $\circ$, такой, что

- $\exists e \in \mathbb{G}: \quad \forall a \in \mathbb{G} \qquad a \circ e = e \circ a = a$
- $\forall a \in \mathbb{G} \quad \exists b \in \mathbb{G}: \qquad a \circ b = b \circ a = e$

Группа — это множество $\mathbb{G}$ с заданной на нём бинарной ассоциативной операцией $\circ$, такой, что

- $\forall a, b \in \mathbb{G} \quad \exists x$ такой, что $a \circ x = b$
- $\forall a, b \in \mathbb{G} \quad \exists x$ такой, что $x \circ a = b$

Смежные классы

Пусть $H \leq \mathbb{G}$. Для любого $a \in \mathbb{G}$ множество

$$a \circ \mathbb{H} \coloneqq \{a \circ b \mid b \in \mathbb{H}\}$$

называется *левым смежным классом элемента* a *по подгруппе* $\mathbb{H}$.

Аналогично, множество

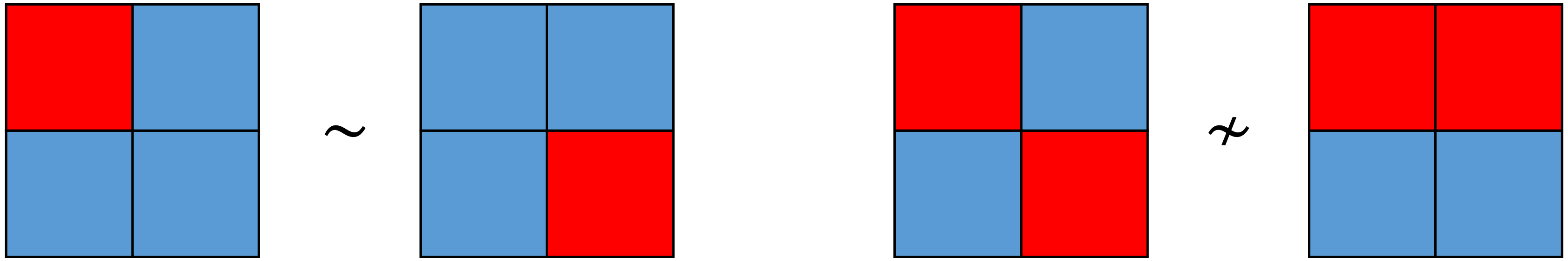
$$\mathbb{H} \circ a \coloneqq \{b \circ a \mid b \in \mathbb{H}\}$$

называется *правым смежным классом*.

(Для абелевых групп соответствующие левые и правые смежные классы совпадают.)

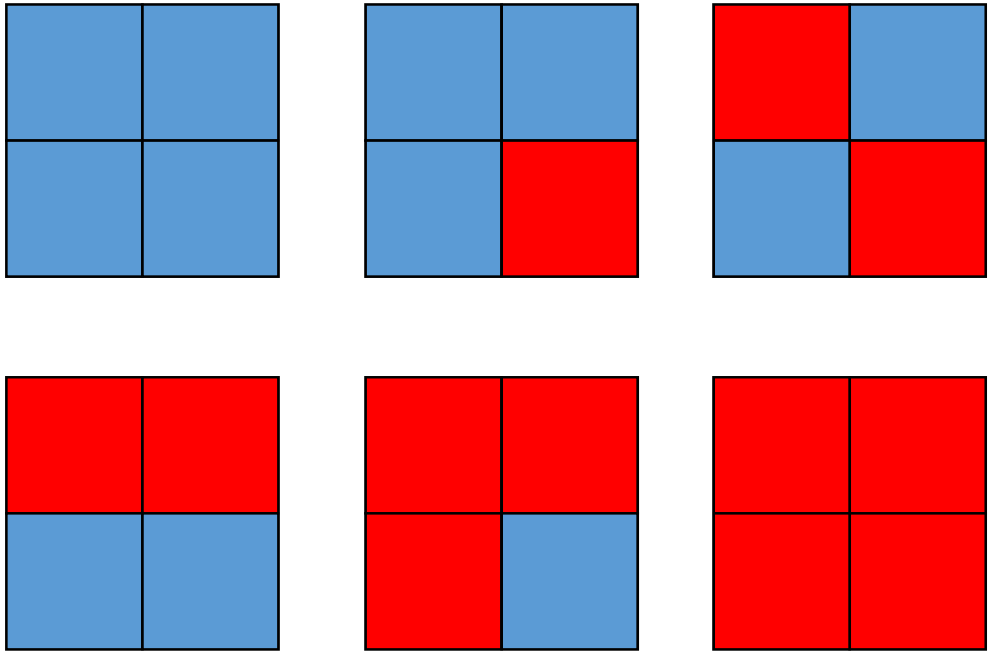
Задача подсчёта числа раскрасок: пример

Сколькими способами можно раскрасить клетки доски 2×2 в красный и синий цвета? Раскраски считаются различными, если одну из другой нельзя получить поворотами доски:



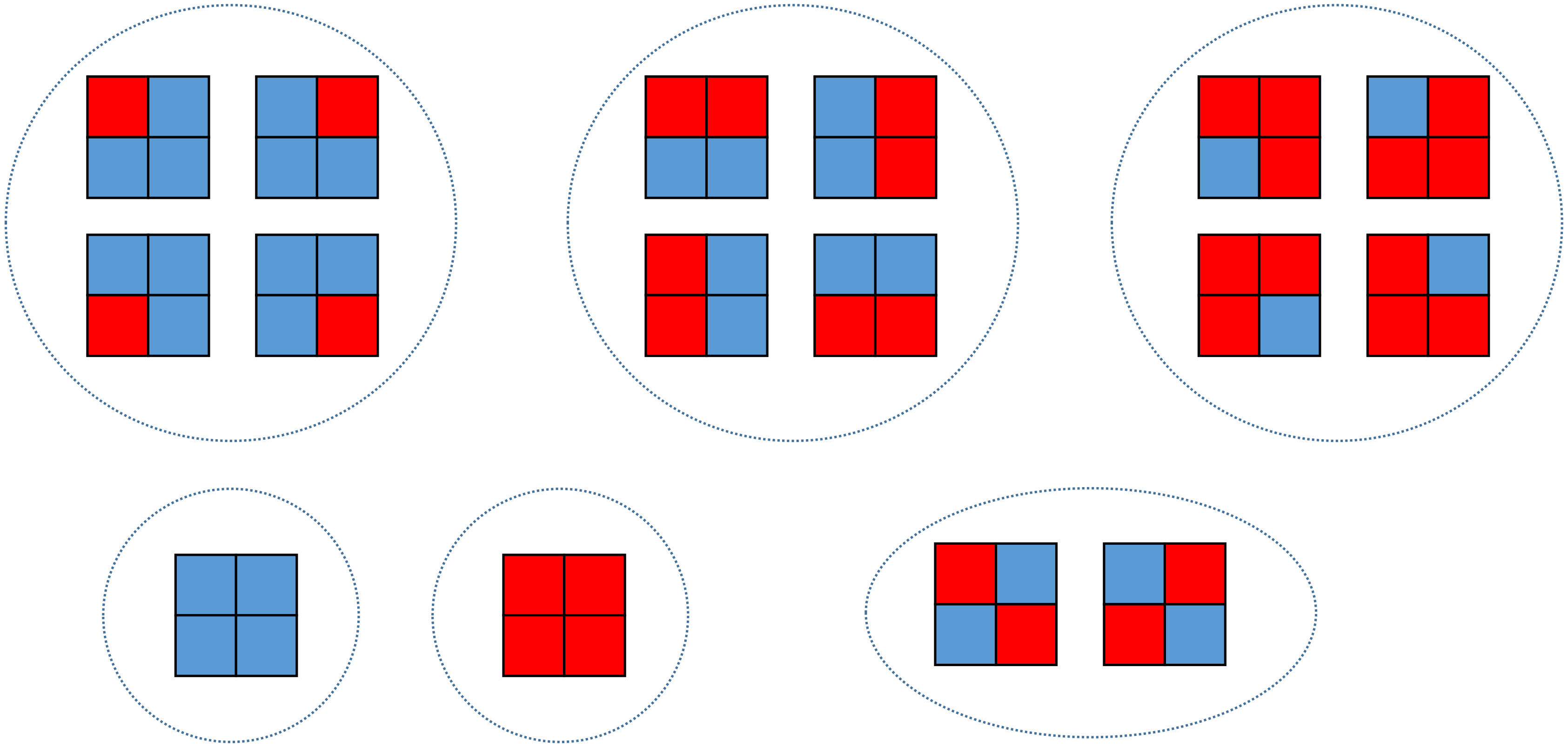
Задача подсчёта числа раскрасок: пример

Сколькими способами можно раскрасить клетчатую доску 2×2 в красный и синий цвета? — Шестью:



Задача подсчёта числа раскрасок: пример

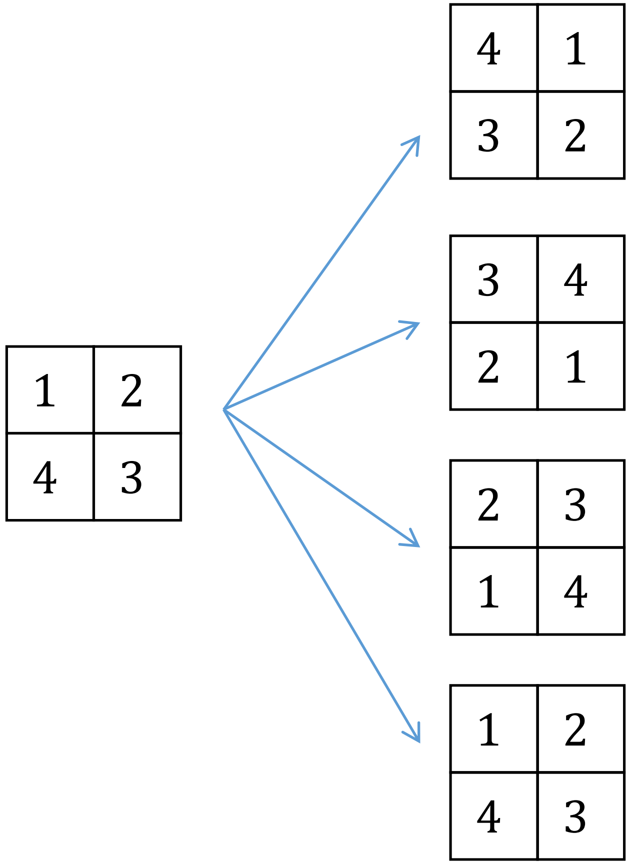
Т.е. множество всех раскрасок разбивается на классы эквивалентности, и нам нужно найти число этих классов.



Задача подсчёта числа раскрасок: общая постановка

- Дана *конфигурация* (клетчатая доска, таблица, многоугольник и т.д.), состоящая из отдельных *частей* (клеток, вершин/рёбер и т.д.)
- Задано множество *цветов*, которые мы можем присваивать частям нашей конфигурации. *Раскраска* конфигурации — это присвоение одного из цветов каждому её элементу.
- Задана *группа перестановок* частей конфигурации. Две раскраски для нас *эквивалентны*, если они совпадают при какой-либо перестановке, принадлежащей группе.
- Нужно найти число классов эквивалентности.

Группа перестановок частей конфигурации из примера



$1 \to 2$
$2 \to 3$
$3 \to 4$
$4 \to 1$

$1 \to 3$
$2 \to 4$
$3 \to 1$
$4 \to 2$

$1 \to 4$
$2 \to 1$
$3 \to 2$
$4 \to 3$

$1 \to 1$
$2 \to 2$
$3 \to 3$
$4 \to 4$

Обозначения и термины

- $\mathbb{G}$ — группа перестановок частей конфигурации
- Col — множество всевозможных раскрасок конфигурации ($|\mathrm{Col}| = \#\text{цветов}^{\#\text{частей}}$)
- Раскраска, переходящая сама в себя при перестановке π, называется *неподвижной* относительно π
- Класс эквивалентности, в который входит раскраска, называется *орбитой* этой раскраски

Лемма Бёрнсайда

Обозначим через $n_{\text{stable}}(\pi)$ число раскрасок, неподвижных относительно π.

Лемма (Коши—Фробениуса—)Бёрнсайда.
Число различных орбит равняется

$$\frac{1}{|G|} \cdot \sum_{\pi \in G} n_{\text{stable}}(\pi)$$

Доказательство леммы Бёрнсайда: двойной подсчёт

Для раскраски c и перестановки $\pi \in \mathbb{G}$ положим

$$\mathbb{1}_{\pi,c} := \begin{cases} 1, \text{если } c \text{ неподвижна относительно } \pi \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$$

Имеем

$$\sum_{\substack{\pi\in\mathbb{G} \\ c\in\mathrm{Col}}} \mathbb{1}_{\pi,c} = \sum_{\pi\in\mathbb{G}} \sum_{c\in\mathrm{Col}} \mathbb{1}_{\pi,c} = \sum_{\pi\in\mathbb{G}} n_{\mathrm{stable}}(\pi)$$

Пусть $\mathrm{Col}_1, \dots, \mathrm{Col}_m$ — различные орбиты. Тогда

$$\sum_{\substack{\pi\in\mathbb{G} \\ c\in\mathrm{Col}}} \mathbb{1}_{\pi,c} = \sum_{c\in\mathrm{Col}} \sum_{\pi\in\mathbb{G}} \mathbb{1}_{\pi,c} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{c\in\mathrm{Col}_i} \sum_{\pi\in\mathbb{G}} \mathbb{1}_{\pi,c}$$

Доказательство леммы Бёрнсайда: двойной подсчёт

Пусть $\mathrm{Col}_1, \dots, \mathrm{Col}_m$ — различные орбиты.

Мы вывели:

$$\sum_{\pi \in \mathbb{G}} n_{\text{stable}}(\pi) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{c \in \mathrm{Col}_i} \sum_{\pi \in \mathbb{G}} \mathbb{1}_{\pi,c}$$

Достаточно доказать, что для каждого $i \in \{1, \dots, m\}$

$$\sum_{c \in \mathrm{Col}_i} \sum_{\pi \in \mathbb{G}} \mathbb{1}_{\pi,c} = |\mathbb{G}|$$

Тогда получится

$$\sum_{\pi \in \mathbb{G}} n_{\text{stable}}(\pi) = m \cdot |\mathbb{G}| \quad \Rightarrow \quad m = \frac{1}{|\mathbb{G}|} \cdot \sum_{\pi \in \mathbb{G}} n_{\text{stable}}(\pi)$$

Доказательство леммы Бёрнсайда: подгруппы-стабилизаторы

Пусть Col_i — произвольная орбита.

Пусть $\mathrm{Col}_i = \{c_1, \ldots, c_r\}$.

Положим

$$G_{c_1} \coloneqq \{\pi \in \mathbb{G} \mid \pi \text{ переводит } c_1 \text{ саму в себя}\}$$

Можно проверить, что $\mathbb{G}_{c_1}$ — подгруппа в $\mathbb{G}$. Она называется *стабилизатором* раскраски c_1.

Докажем, что смежные классы по G_{c_1} имеют вид

$$\{\sigma \in G \mid \sigma \text{ переводит } c_1 \text{ в } c_j\}$$

Доказательство леммы Бёрнсайда: смежные классы стабилизаторов

$$\mathrm{Col}_i = \{c_1, \dots, c_r\}$$

$$\mathbb{G}_{c_1} \coloneqq \{\pi \in \mathbb{G} \mid \pi \text{ переводит } c_1 \text{ саму в себя}\}$$

Пусть $\pi' \in \mathbb{G}$ — произвольная перестановка, переводящая c_1 в c_j. Докажем, что

$$\mathbb{G}_{c_1}\pi' = \left\{\sigma \in \mathbb{G} \mid \sigma \text{ переводит } c_1 \text{ в } c_j\right\}$$

Сначала докажем включение $\subseteq$.

Пусть $\pi \in \mathbb{G}_{c_1}$. Тогда перестановка $\pi\pi'$ сначала действует как π (т.е. оставляет c_1 неподвижной), а затем как π', переводит в c_j.

Доказательство леммы Бёрнсайда: смежные классы стабилизаторов

$$\mathrm{Col}_i = \{c_1, \dots, c_r\}$$

$$\mathbb{G}_{c_1} \coloneqq \{\pi \in \mathbb{G} \mid \pi \text{ переводит } c_1 \text{ саму в себя}\}$$

Пусть $\pi' \in \mathbb{G}$ — произвольная перестановка, переводящая c_1 в c_j.
Доказываем, что

$$\mathbb{G}_{c_1}\pi' = \left\{\sigma \in \mathbb{G} \mid \sigma \text{ переводит } c_1 \text{ в } c_j\right\}$$

Теперь докажем включение в обратную сторону.

Пусть $\sigma \in \mathbb{G}$ и σ переводит c_1 в c_j.

Тогда $\sigma(\pi')^{-1}$ переводит c_1 саму в себя, то есть $\sigma(\pi')^{-1} \in \mathbb{G}_{c_1}$.
Отсюда $\sigma \in \mathbb{G}_{c_1}\pi'$.

Доказательство леммы Бёрнсайда: смежные классы стабилизаторов

$$\mathrm{Col}_i = \{c_1, \dots, c_r\}$$
$$G_{c_1} := \{\pi \in \mathbb{G} \mid \pi \text{ переводит } c_1 \text{ саму в себя}\}$$

Мы доказали, что множества

$$\left\{\sigma \in \mathbb{G} \mid \sigma \text{ переводит } c_1 \text{ в } c_j\right\}$$

суть смежные классы $\mathbb{G}_{c_1}$.

Отсюда получаем

$$\#\left\{\sigma \in \mathbb{G} \mid \sigma \text{ переводит } c_1 \text{ в } c_j\right\} = \left|\mathbb{G}_{c_1}\right|$$

для каждого $j \in \{1, \dots, r\}$.

Отсюда следует, что $|\mathrm{Col}_i| \cdot \left|\mathbb{G}_{c_1}\right| = |\mathbb{G}|$.

Доказательство леммы Бёрнсайда: завершение

Из доказанного следует, что для любой орбиты Col_i и любой раскраски $c \in \mathrm{Col}_i$ выполнено

$$\#\{\pi \in \mathbb{G} \mid \pi \text{ переводит } c \text{ саму в себя}\} = \frac{|\mathbb{G}|}{|\mathrm{Col}_i|}$$

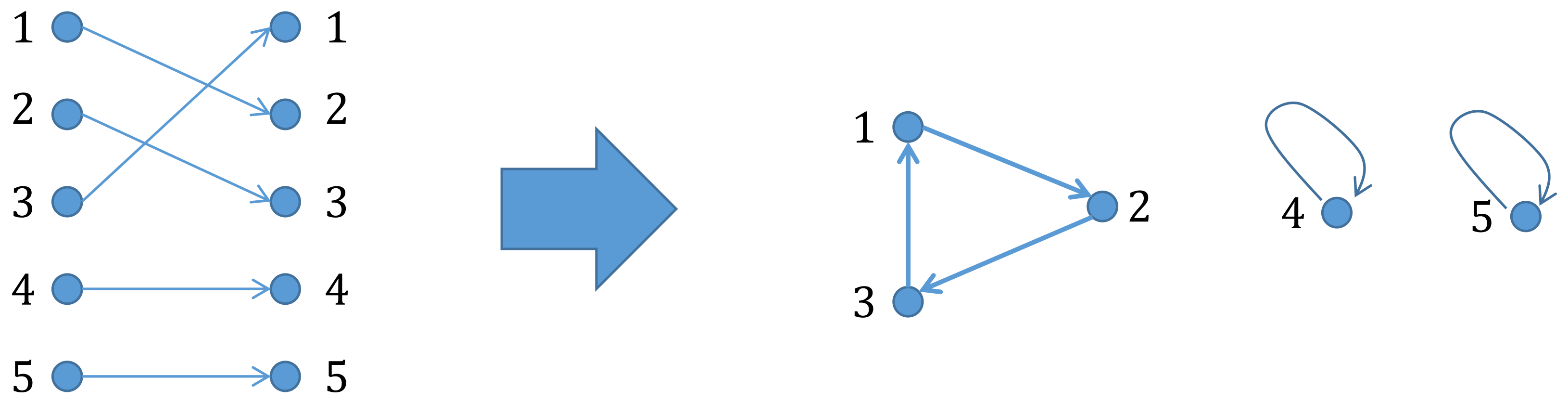
Отсюда

$$\sum_{c \in \mathrm{Col}_i} \sum_{\pi \in \mathbb{G}} \mathbb{1}_{\pi,c} = \sum_{c \in \mathrm{Col}_i} \frac{|\mathbb{G}|}{|\mathrm{Col}_i|} = |\mathbb{G}|$$

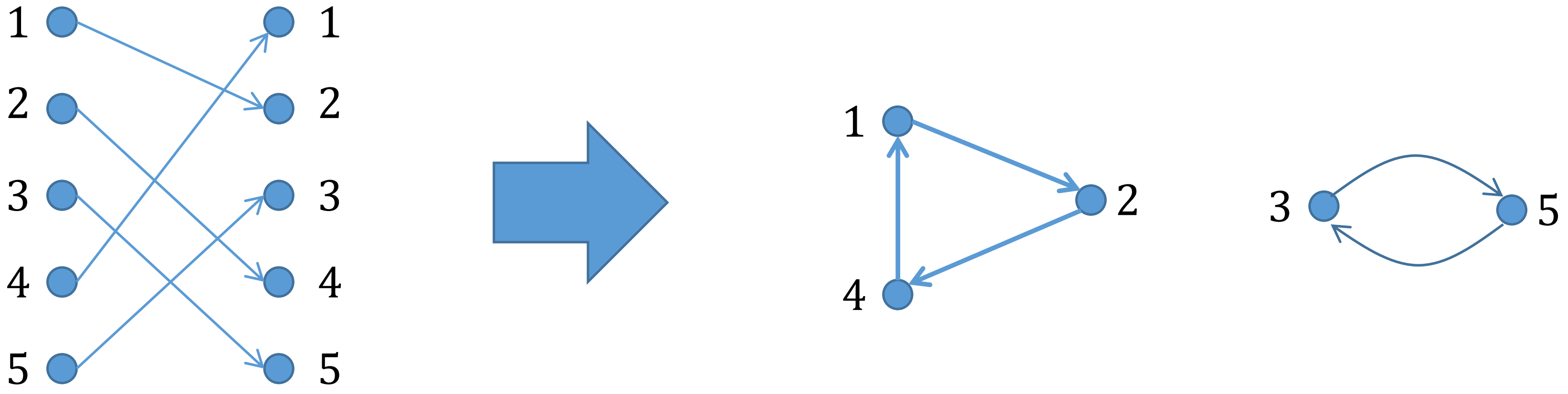
что и требовалось.

Лемма Бёрнсайда доказана.

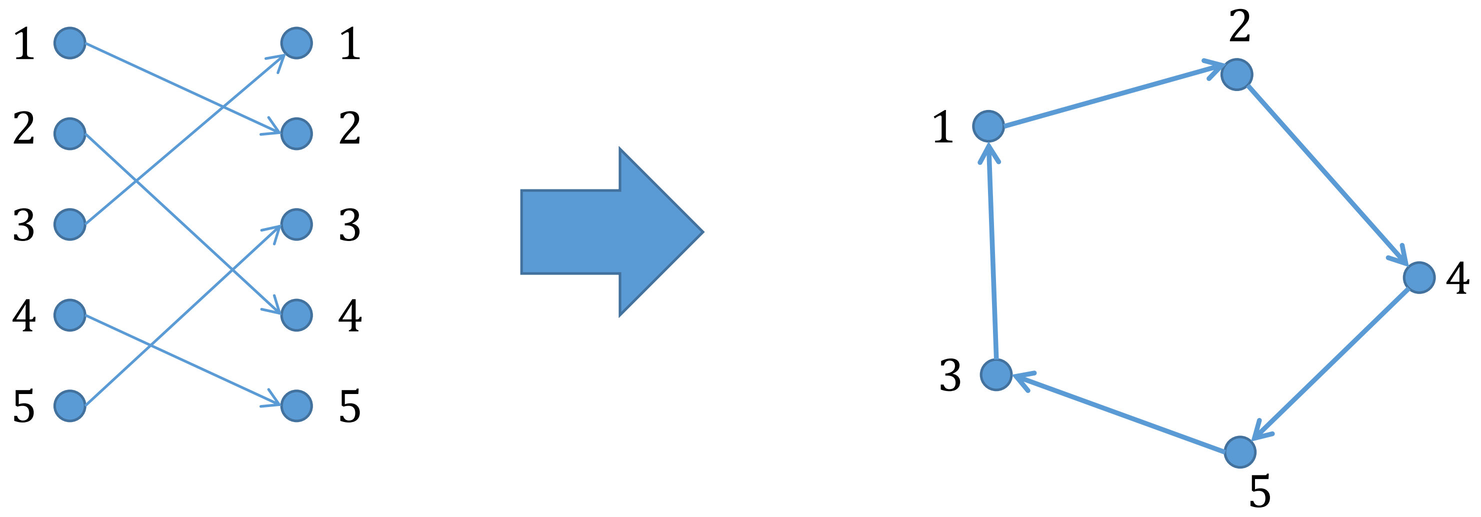
Циклы в перестановках: примеры



Циклы в перестановках: примеры



Циклы в перестановках: примеры



Связь циклов в перестановках с числом неподвижных раскрасок

Утверждение.
Количество раскрасок, неподвижных относительно перестановки π, и использующих не более l цветов, равно $l^{\#\text{ циклов в }\pi}$.

Доказательство:
Раскраска неподвижна относительно перестановки т.и т.т., когда части конфигурации, входящие в один и тот же цикл перестановки, окрашены одинаково.

Теорема Редфилда—Пойи (J.H. Redfield, G. Pólya)

Теорема Редфилда—Пойи. Число различных орбит раскрасок конфигурации в (не более чем) l цветов равно

$$\frac{1}{|\mathbb{G}|} \cdot \sum_{\pi \in \mathbb{G}} l^{\#\text{циклов в } \pi}$$

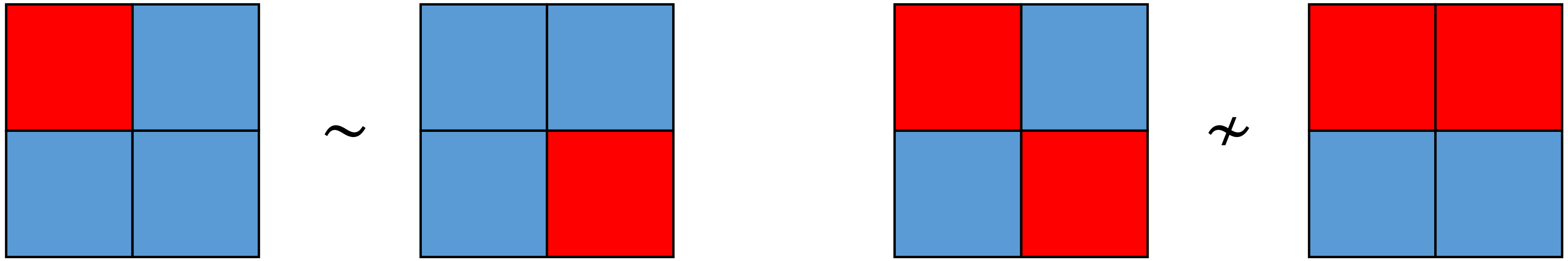
(*Доказательство:* достаточно применить лемму Бёрнсайда и предыдущее утверждение.)

Следствие.
Если в конфигурации n частей, то количество орбит раскрасок в не более чем l цветов при $l \to \infty$ асимптотически равно

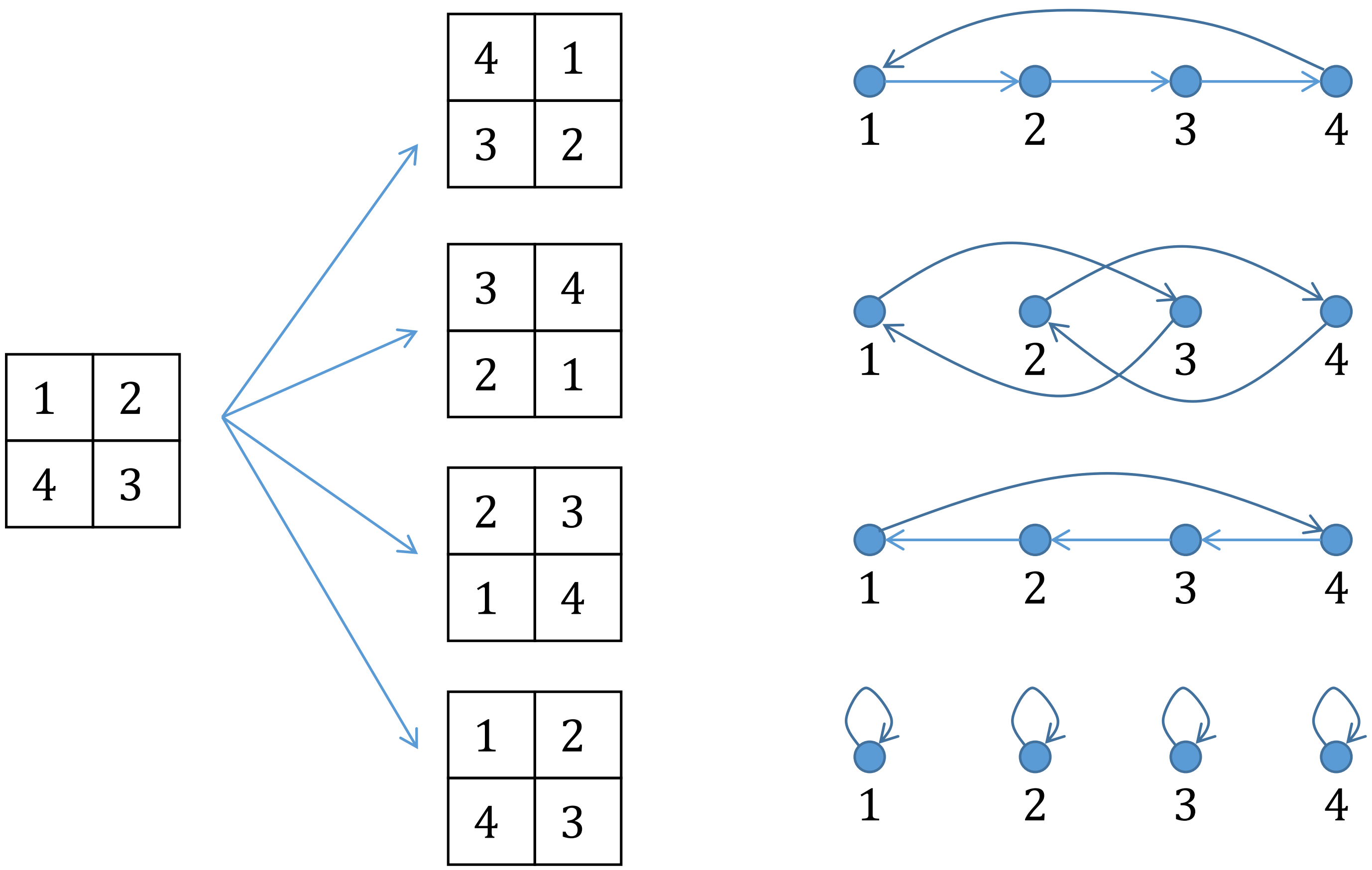
$$\frac{l^n}{|\mathbb{G}|}$$

Пример применения теоремы Редфилда—Пойи

Сколькими способами можно раскрасить доску 2×2 в цвета из множества $\{1, \dots, l\}$, если раскраски, переходящие друг в друга при вращении квадрата, считаются одинаковыми?



Пример применения теоремы Редфилда—Пойи



Пример применения теоремы Редфилда—Пойи

Теорема Редфилда—Пойи. Число различных орбит раскрасок конфигурации в (не более чем) l цветов равно

$$\frac{1}{|\mathbb{G}|} \cdot \sum_{\pi \in \mathbb{G}} l^{\#\text{циклов в } \pi}$$

У нас 1 перестановка с четырьмя циклами, 2 перестановки с одним циклом и 1 перестановка с двумя циклами. Применив теорему Редфилда—Пойи, получаем

$$\#\text{раскрасок} = \frac{l^4 + l^2 + 2l}{4} \sim \frac{l^4}{4}$$