Дискретные структуры

МФТИ, весна 2014

Александр Дайняк

www.dainiak.com

Частично упорядоченные множества

Частично упорядоченное множество — это пара

$$(S, \preccurlyeq)$$

где

- S — произвольное множество (*носитель*),
- $\preccurlyeq$ — отношение частичного порядка.

Отношение $\preccurlyeq$ должно быть

- антисимметричным:

$$\forall a, b \in S \quad (a \preccurlyeq b \land b \preccurlyeq a \quad \Rightarrow \quad a = b)$$

- рефлексивным:

$$\forall a \in S \ \ a \preccurlyeq a$$

- транзитивным:

$$\forall a, b, c \in S \quad (a \preccurlyeq b \land b \preccurlyeq c \quad \Rightarrow \quad a \preccurlyeq c)$$

Частично упорядоченные множества

Примеры ч. у. м.:

- Множества $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ относительно обычного сравнения чисел.
- Множество $\mathbb{N}$ относительно делимости.
- Множество слов в конечном алфавите относительно лексикографического сравнения.
- Булеан (семейство всех подмножеств конечного множества) с отношением вложенности.

Цепи и антицепи

Цепь в ч. у. м. — это последовательность элементов $a_1, \ldots$, где $a_i \preccurlyeq a_{i+1}$ для каждого i.

Антицепь в ч. у. м. — это подмножество попарно несравнимых элементов.

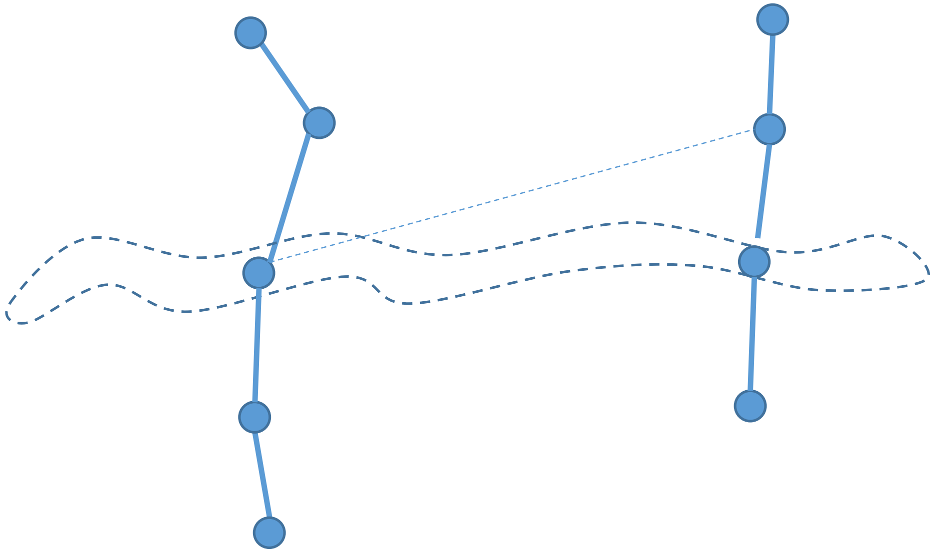
Элемент a *непосредственно предшествует* элементу b, если $a \preccurlyeq b$ и не существует c, такого, что $a \prec c \prec b.$

Элемент *максимальный*, если в ч. у. м. нет элементов, больших него.

Элемент *наибольший*, если он максимальный и сравнимый с любым элементом ч. у. м.

Цепи и антицепи

Так схематично выглядят цепи и антицепи:



Каждая цепь и антицепь имеют не больше одного общего элемента.

Булеан / булев куб

- Булеан конечного множества X — это семейство всех подмножеств X, упорядоченных по вложенности.
- Булев куб — множество двоичных наборов фиксированной длины, упорядоченных по покоординатному сравнению:

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \preccurlyeq (\beta_1, \dots, \beta_n) \quad \Leftrightarrow \quad \forall i \;\; \alpha_i \leq \beta_i$$

Булеан и булев куб *изоморфны*, как частично упорядоченные множества (можно построить биекцию, сохраняющую отношение порядка).

Антицепи в булеане: теорема Л.—Я.—М.

Теорема (Лубелл, Ямамото, Мешалкин).
Пусть $A_1, \dots, A_m$ — антицепь в булеане $2^{\{1,\dots,n\}}$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{m} \binom{n}{|A_i|}^{-1} \leq 1$$

Доказательство теоремы Л.—Я.—М.

Максимальные цепи в булеане имеют вид:

$$\emptyset \subset C_1 \subset C_2 \subset \cdots \subset C_{n-1} \subset \{1, \ldots, n\},$$

где каждое из множеств C_{i+1} получается из C_i добавление ровно одного элемента.

Всего существует $n!$ максимальных цепей.

Через любое множество A проходит не более

$$|A|!\,(n - |A|)!$$

максимальных цепей.

Доказательство теоремы Л.—Я.—М.

Всего существует $n!$ максимальных цепей.

Через любое A не более $|A|!\,(n-|A|)!$ м.ц.

Пусть $A_1, \dots, A_m$ — произвольная антицепь.

Каждая максимальная цепь проходит не более чем через одно A_i, поэтому

$$\sum_{i=1}^{m} |A_i|!\,(n-|A_i|)! \le n!$$

Теорема Шпернера

Следствие. (Теорема Шпернера)

Максимальная антицепь в булеане $2^{\{1,\dots,n\}}$ имеет мощность $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

Доказательство:

Взяв произвольную антицепь $A_1, \dots, A_m$, имеем

$$1 \geq \sum_{i=1}^{m} \binom{n}{|A_i|}^{-1} \geq \sum_{i=1}^{m} \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}^{-1} = m \cdot \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}^{-1}$$

Отсюда $m \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

Пример антицепи ровно такой мощности:
набор всех $\lfloor n/2 \rfloor$-подмножеств множества $\{1, \dots, n\}$.

Цепи и антицепи

Разложить ч. у. м. на цепи — это значит представить носитель ч. у. м. объединением попарно непересекающихся цепей.

Аналогично определяется для антицепей.

Теорема.

- Минимальное число антицепей, на которое можно разложить ч. у. м., равно максимальному размеру цепи в этом ч. у. м.
- Минимальное число цепей, на которое можно разложить ч. у. м., равно максимальному размеру антицепи в этом ч. у. м. (теор. Дилуорта)

Доказательство соотношения $\min \#\text{антицепей} = \max \text{размер цепи}$

Пусть l — максимальная мощность цепи.

Для каждого $i \in \{1, \dots, l\}$ введём множество S_i.

$a \in S_i$ т. и т. т., когда максимальный размер цепи, растущей из a вниз, равен i.

Очевидно, $S_i \cap S_j = \emptyset$ для каждого i.

Так как S_i —антицепь для каждого i, то

$$S = S_1 \sqcup \cdots \sqcup S_l$$

— искомое разложение на антицепи.

(В другую сторону совсем просто.)

Доказательство соотношения
$\min \#\text{антицепей} = \max \text{размер цепи}$

Докажем теорему индукцией по $|S|$.

Если $|S| \leq 2$, то всё очевидно.

Пусть $|S| > 2$, и для меньших ч. у. м. теорема верна.

Пусть a — произвольный максимальный элемент в S,
и пусть l — максимальный размер антицепи в $S \setminus \{a\}$.

По предположению, $S \setminus \{a\}$ можно разбить на l цепей:

$$S \setminus \{a\} = C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_l$$

Покажем, что либо S можно разбить на l цепей, либо S содержит $(l+1)$-элементную антицепь.

Доказательство соотношения $\min \#\text{цепей} = \max \text{размер антицепи}$

- a — максимальный в S. Есть разложение $S \setminus \{a\} = C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_l$.

Любая l-элементная антицепь в $S \setminus \{a\}$ содержит *ровно* по одному элементу из каждой цепи C_i.

Назовём элемент *хорошим*, если существует l-элементная антицепь в $S \setminus \{a\}$, в которую он входит.

На каждой из цепей $C_1, \dots, C_l$ есть хотя бы по одному хорошему элементу.

Для каждого i положим $a_i \coloneqq \max\{x \in C_i \mid x \text{ хороший}\}$.

Тогда $\{a_1, \dots, a_l\}$ — антицепь.

Доказательство соотношения $\min \#\text{цепей} = \max \text{размер антицепи}$

- a — максимальный в S. Есть разложение $S \setminus \{a\} = C_1 \sqcup \dots \sqcup C_l$.
- Для каждого i определили $a_i \coloneqq \max\{x \in C_i \mid x \text{ хороший}\}$.
- $\{a_1, \dots, a_l\}$ — антицепь.

Если $\{a, a_1, \dots, a_l\}$ — антицепь, то утверждение нашей теоремы справедливо для S, т.к. есть разложение на $(l + 1)$ цепей:

$$S = \{a\} \sqcup C_1 \sqcup \dots \sqcup C_l$$

Доказательство соотношения $\min \#\text{цепей} = \max \text{размер антицепи}$

- a — максимальный в S. Есть разложение $S \setminus \{a\} = C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_l$.
- Для каждого i определили $a_i \coloneqq \max\{x \in C_i \mid x \text{ хороший}\}$.
- $\{a_1, \dots, a_l\}$ — антицепь.

Если $\{a, a_1, \dots, a_l\}$ — не антицепь, то $a_k \prec a$ для некоторого k.

Рассмотрим тогда цепь $K \coloneqq \{x \in C_k \mid x \preccurlyeq a_k\} \cup \{a\}$.

Заметим, что в $S \setminus K$ уже нет l-элементных антицепей.

Тогда, по предположению, $S \setminus K$ разложимо на $(l-1)$ цепей.
Добавив к ним K, получим разложение S на l цепей.

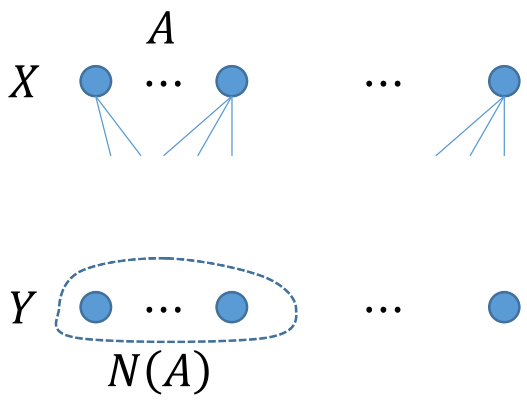
Вывод теоремы Холла из теоремы Дилуорта

Теорема Холла. Пусть дан двудольный граф G с долями X и Y. Условие

$$\forall A \subseteq X \quad |N(A)| \geq |A|$$

является необходимым *и достаточным* для существования паросочетания, покрывающего все вершины из X.

(Нетривиально только д-во достаточности.)



Вывод теоремы Холла из теоремы Дилуорта

Пусть выполнено условие $\forall A \subseteq X \quad |N(A)| \geq |A|$.

Построим ч. у. м. на множестве $S \coloneqq X \cup Y$, определив порядок так:

$$a \succ b \quad \Leftrightarrow \quad (a \in X) \wedge (b \in Y) \wedge \big(\{a, b\} \in E(G)\big)$$

Покажем, что в этом ч. у. м. нет антицепей мощности больше $|Y|$.

Пусть антицепь имеет вид $T = T_X \cup T_Y$, где $T_X \subseteq X$ и $T_Y \subseteq Y$.

Тогда $N(T_X) \cap T_Y = \emptyset$, и поэтому

$$|T| = |T_X| + |T_Y| \leq |N(T_X)| + |T_Y| \leq |Y|$$

Вывод теоремы Холла из теоремы Дилуорта

Построили ч. у. м. на множестве $S \coloneqq X \cup Y$, определив порядок так:

$$a \succ b \quad \Leftrightarrow \quad a \in X \wedge b \in Y \wedge \{a, b\} \in E(G)$$

Мы показали, что при выполнении условий Холла мощность любой антицепи не больше $|Y|$.

По теореме Дилуорта, S можно разложить на $|Y|$ непересекающихся цепей.

В каждой из этих цепей либо один, либо два элемента.
Те из цепей, в которых по два элемента, образуют паросочетание.

Обращение Мёбиуса на ч. у. м.

Будем рассматривать только те ч. у. м., в которых $\forall b$ есть лишь конечное число элементов a таких, что $a \preccurlyeq b$.

Функция Мёбиуса на ч. у. м. определяется только на парах сравнимых элементов:

$$\mu(a,b) \coloneqq \begin{cases} 1, & \text{если } a = b \\ -\sum\limits_{c:\, a \preccurlyeq c \prec b} \mu(a,c), & \text{если } a \prec b \end{cases}$$

Обращение Мёбиуса на ч. у. м.

Теорема (Об обращении Мёбиуса на ч. у. м.).
Пусть для каждого x функция f выражается через g по формуле

$$f(x) = \sum_{y \leqslant x} g(y)\,.$$

Тогда справедлива формула

$$g(x) = \sum_{y \leqslant x} f(y) \cdot \mu(y, x)\,.$$

Лемма о функции Мёбиуса

$$\mu(a,b) \coloneqq \begin{cases} 1, & \text{если } a = b \\ -\sum\limits_{c\colon a \preccurlyeq c \prec b} \mu(a,c), & \text{если } a \prec b \end{cases}$$

Лемма. При любых z, x таких, что $z \preccurlyeq x$, выполнено

$$\sum_{y\colon z \preccurlyeq y \preccurlyeq x} \mu(y,x) \quad = \quad \mathbb{1}_{z=x}$$

Доказательство: поведём индукцию по величине

$$\tau(z,x) \coloneqq \max\{\#\text{ элементов в цепях вида } z \preccurlyeq \cdots \preccurlyeq x\}.$$

Если $z = x$, то

$$\sum_{y\colon z \preccurlyeq y \preccurlyeq x} \mu(y,x) = \mu(x,x) = 1$$

Лемма о функции Мёбиуса

$$\mu(a,b) \coloneqq \begin{cases} 1, & \text{если } a = b \\ -\sum\limits_{c:\, a \preccurlyeq c \prec b} \mu(a,c), & \text{если } a \prec b \end{cases}$$

Лемма. При любых z, x таких, что $z \preccurlyeq x$, выполнено

$$\sum_{y:\, z \preccurlyeq y \preccurlyeq x} \mu(y,x) \quad = \quad \mathbb{1}_{z=x}$$

Доказательство:
Индукция по $\tau(z,x) \coloneqq \max\{\#\,\textit{элементов в цепях вида}\ z \preccurlyeq \cdots \preccurlyeq x\}$.

Пусть теперь $z \prec x$.
Если $\tau(z,x) = 2$, т. е. z непосредственно предшествует x, то

$$\sum_{y:\, z \preccurlyeq y \preccurlyeq x} \mu(y,x) = \mu(z,x) + \mu(x,x) = \big(-\mu(z,z)\big) + \mu(x,x) = 0$$

Далее будем считать, что $\tau(z,x) \geq 3$.

Продолжение д-ва леммы о функции Мёбиуса

$$\mu(a,b) \coloneqq \begin{cases} 1, & \text{если } a = b \\ -\sum\limits_{c:\, a \preccurlyeq c \prec b} \mu(a,c), & \text{если } a \prec b \end{cases}$$

Пусть $\tau(z,x) \geq 3$. Тогда

$$\sum_{y:\, z \preccurlyeq y \preccurlyeq x} \mu(y,x) = \mu(x,x) + \sum_{y:\, z \preccurlyeq y \prec x} \left(- \sum_{u:\, y \preccurlyeq u \prec x} \mu(y,u) \right) =$$

$$= 1 - \sum_{y,u:\, z \preccurlyeq y \preccurlyeq u \prec x} \mu(y,u) = 1 - \sum_{u:\, z \preccurlyeq u \prec x} \sum_{y:\, z \preccurlyeq y \preccurlyeq u} \mu(y,u) =$$

$$= 1 - \mu(z,z) - \sum_{u:\, z \prec u \prec x} \underbrace{\sum_{y:\, z \preccurlyeq y \preccurlyeq u} \mu(y,u)}_{\mathbb{1}_{z=u}} = 0$$

Доказательство формулы обращения Мёбиуса

$$\sum_{y:\, y \leqslant x} f(y) \cdot \mu(y,x) = \sum_{y:\, y \leqslant x} \left(\sum_{z:\, z \leqslant y} g(z) \right) \mu(y,x) = \sum_{y:\, y \leqslant x} \left(\sum_{z:\, z \leqslant y} g(z)\mu(y,x) \right) =$$

$$= \sum_{y,z:\, z \leqslant y \leqslant x} g(z)\mu(y,x) = \sum_{z:\, z \leqslant x} \sum_{y:\, z \leqslant y \leqslant x} g(z)\mu(y,x) = \sum_{z:\, z \leqslant x} g(z) \sum_{y:\, z \leqslant y \leqslant x} \mu(y,x) =$$

$$= \sum_{z:\, z \leqslant x} g(z) \cdot \mathbb{1}_{z=x} = g(x)$$

Вывод арифметической теоремы из общей теоремы об обращении

«Теоретико-числовая» функция Мёбиуса:

$$\hat{\mu}(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 1 \\ 0, & \text{если } \exists p \text{ т. что } p^2 | n \\ (-1)^s, & \text{если } n = p_1 \cdot \ldots \cdot p_s \end{cases}$$

«Теоретико-числовая» теорема об обращении:

Если для каждого n

$$f(n) = \sum_{k|n} g(k)\,,$$

то для каждого m

$$g(m) = \sum_{l|m} f(l) \cdot \hat{\mu}(m/l)\,.$$

Вывод арифметической теоремы из общей теоремы об обращении

Рассмотрим ч. у. м. натуральных чисел, с отношением делимости в качестве частичного порядка.

Докажем индукцией по x/y соотношение $\mu(y, x) = \hat{\mu}(x/y)$.

- $\mu(x, x) = 1 = \hat{\mu}(x/x)$
- Пусть $y|x$ и $y < x$. Тогда $x = y \cdot p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ для некоторых простых p_i и положительных α_i.
  Выполним индуктивный переход…

Вывод арифметической теоремы из общей теоремы об обращении

- $x = y \cdot p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ для некоторых простых p_i и положительных α_i.

$$\mu(y,x) = -\sum_{z:\, y|z \text{ и } z|x \text{ и } z<x} \mu(y,z) = -\sum_{z:\, y|z \text{ и } z|x \text{ и } z<x} \hat{\mu}(z/y) =$$

$$= -\sum_{\substack{\beta_1 \le \alpha_1, \dots, \beta_k \le \alpha_k \\ (\beta_1,\dots,\beta_k) \ne (\alpha_1,\dots,\alpha_k)}} \hat{\mu}\left(p_1^{\beta_1} \dots p_k^{\beta_k}\right) =$$

$$= -\sum_{\substack{\beta_1,\dots,\beta_k \in \{0,1\}^k \\ (\beta_1,\dots,\beta_k) \ne (\alpha_1,\dots,\alpha_k)}} \hat{\mu}\left(p_1^{\beta_1} \dots p_k^{\beta_k}\right)$$

Вывод арифметической теоремы из общей теоремы об обращении

- $x = y \cdot p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ для некоторых простых p_i и положительных α_i. Имеем

$$\mu(y, x) = -\sum_{\substack{\beta_1,\dots,\beta_k \in \{0,1\}^k \\ (\beta_1,\dots,\beta_k) \neq (\alpha_1,\dots,\alpha_k)}} \hat{\mu}\left(p_1^{\beta_1} \dots p_k^{\beta_k}\right)$$

- Если $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 1$, то

$$\mu(y, x) = -\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} \cdot (-1)^i = (-1)^k = \hat{\mu}(x/y)$$

- Если же некоторое $\alpha_i > 1$, то

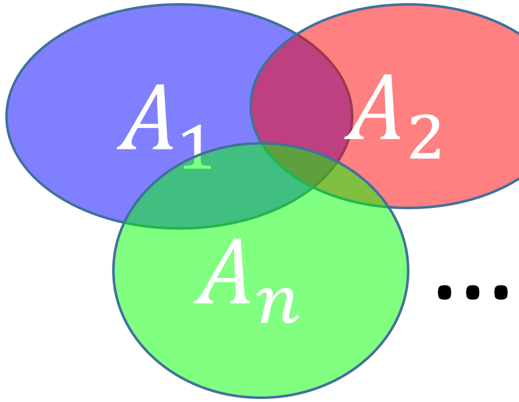
$$\mu(y, x) = -\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot (-1)^i = 0 = \hat{\mu}(x/y)$$

Функция Мёбиуса на булеане

- Вычислим функцию Мёбиуса для ч. у. м. $\left(2^{\{1,\dots,n\}}, \subseteq\right)$.
- Докажем индукцией по $|B|$, что $\forall A, B$ таких, что $A \subseteq B$,
$$\mu(A,B) = (-1)^{|B|-|A|} = (-1)^{|B\setminus A|}.$$
- База очевидна.
- Индуктивный переход:
$$\mu(A,B) = -\sum_{C:\ A\subseteq C\subset B} \mu(A,C) = -\sum_{C:\ A\subseteq C\subset B} (-1)^{|C|-|A|} =$$
$$= -\sum_{k=0}^{|B|-|A|-1} \binom{|B|-|A|}{k} (-1)^k = (-1)^{|B|-|A|}$$

Формула включения-исключения следует из формулы обращения

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + \dots + |A_n| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \dots - |A_{n-1} \cap A_n| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \dots + (-1)^k \cdot \left|A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}\right| + \dots + (-1)^n \cdot |A_1 \cap \dots \cap A_n|$$



Упражнение. Вывести формулу в.-и., используя обращение Мёбиуса на булеане.