Дискретные структуры

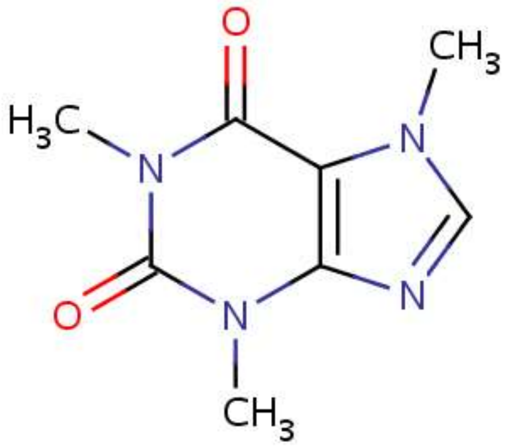
осень 2013

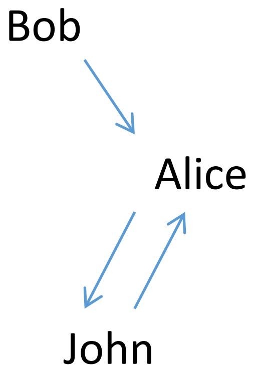
Александр Дайняк

www.dainiak.com

Что такое граф?

- Неформально, граф — набор объектов и связей между парами этих объектов





Что такое граф?

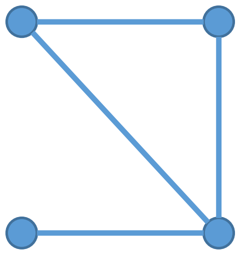
- (Простой) **граф** — это **пара множеств** $(\overset{\text{vertices}}{V}, \overset{\text{edges}}{E})$, где $E \subseteq \binom{V}{2}$.
- Например,
$$V = \{Alice, Bob, John\}$$
$$E = \{\{Bob, Alice\}, \{Alice, John\}\}$$
- V — *вершины* графа, E — *рёбра* графа
- *Ориентированный* граф (*орграф*) — это пара (V, E), где
$$E \subseteq (V \times V) \setminus \{(v, v) \mid v \in V\}$$

Немного терминологии

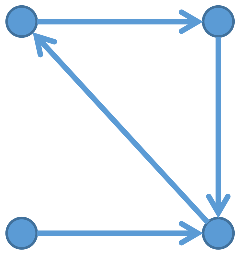
- Множества вершин и рёбер графа G обозначаются $V(G)$ и $E(G)$ соответственно
- Ребро, соединяющее вершины u и v, обозначается через uv
- Если $u, v \in V(G)$ и $uv \in E(G)$, то вершины u и v называются *смежными* (в графе G)
- Вершина, принадлежащая ребру, называется *концом* этого ребра. При этом говорят, что данная вершина и ребро *инцидентны* друг другу

Какие бывают графы

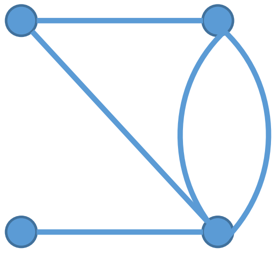
- Если во множестве E есть повторяющиеся пары, то говорят о *мультиграфе*, а сами эти пары называют *кратными* рёбрами/дугами
- Если в E есть пары, оба элемента которых совпадают, то говорят о *псевдографе*, а сами эти пары называют *петлями*



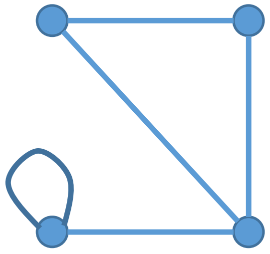
граф



орграф



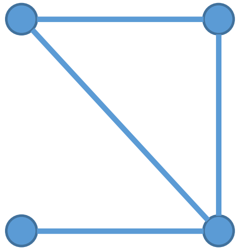
мультиграф



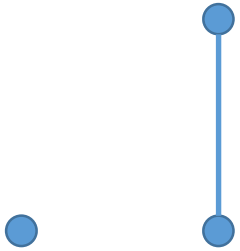
псевдограф

Подграфы

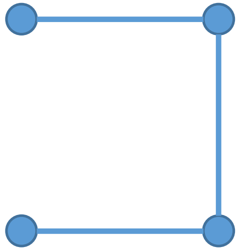
- Пусть $G = (V, E)$ и $G' = (V', E')$ — графы.
- G' является *подграфом* графа G, если $V' \subseteq V$ и $E' \subseteq E$
- G' — *остовный* подграф, если $V' = V$
- G' — *порождённый* подграф графа G, если с каждой парой вершин он содержит и все инцидентные им рёбра:
$$\forall u, v\ (uv \in E \text{ и } u, v \in V') \Rightarrow uv \in E'$$



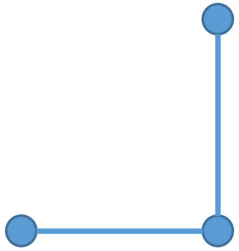
граф



подграф
(не являющийся порождённым)



остовный
подграф



порождённый
подграф

Соседи. Степени вершин

- Любая вершина, смежная с вершиной v, называется *соседом* v
- *Степень* вершины — это количество рёбер, инцидентных этой вершине (в простом графе это равно количеству соседей)
- Степень вершины v обозначается $d(v)$ или $\deg v$
- Граф, в котором степени всех вершин равны k, называется k-*регулярным*

Степени вершин

В ориентированном графе:

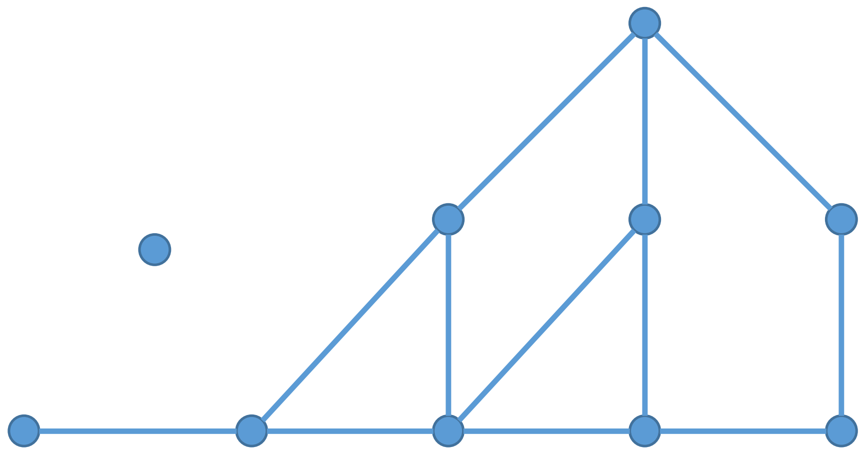
- Число входящих в v дуг обозначается через $d^{-}(v)$, называется *полустепенью захода*
- Число выходящих из v дуг обозначается через $d^{+}(v)$, называется *полустепенью исхода*

При этом

$$d(v) = d^{-}(v) + d^{+}(v)$$

Степени вершин

- *Степень вершины* — это количество инцидентных ей рёбер
- Вершина степени 0 — *изолированная*
- Вершина степени 1 — *висячая* или *лист*
- Вершина степени 2 — *проходная*

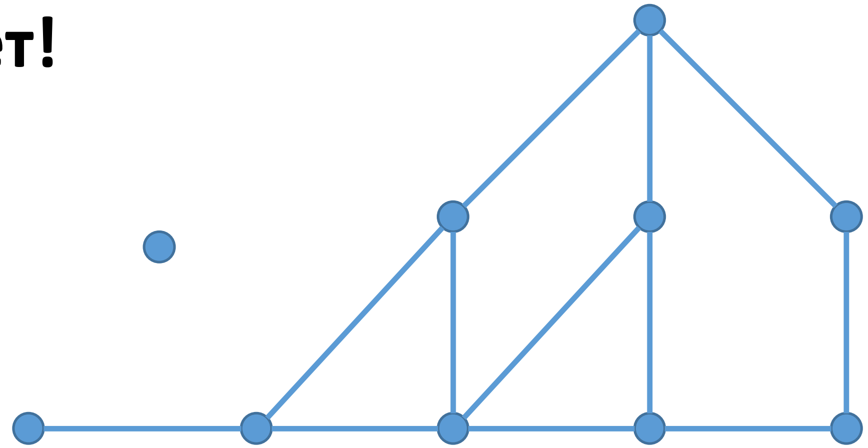


Теорема «о рукопожатиях»

- В любом графе сумма степеней всех вершин равна удвоенному количеству рёбер:

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2 \cdot |E(G)|$$

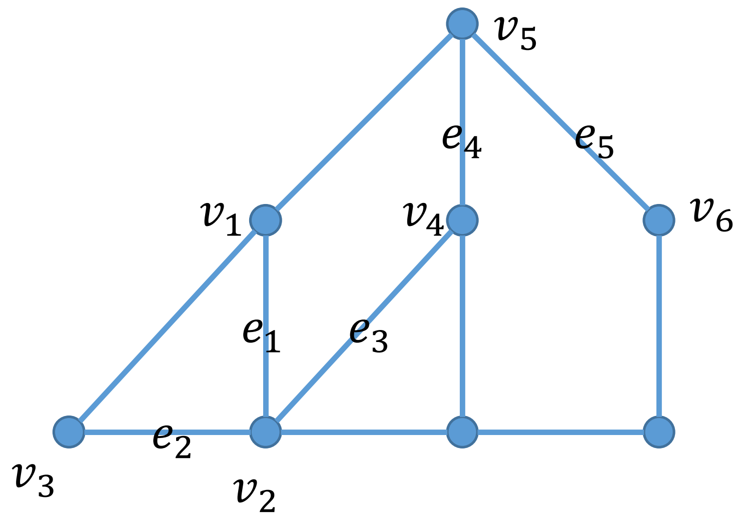
Доказательство: **двойной подсчёт!**



Маршруты

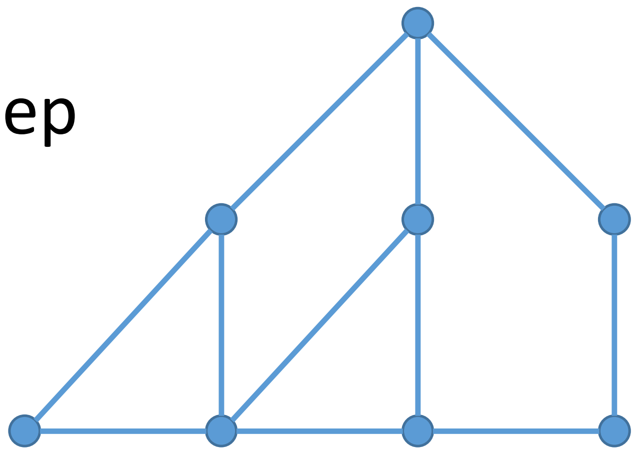
- *Маршрут* — последовательность вершин и рёбер графа (начало и конец — в вершинах), в которой последовательные элементы инцидентны друг другу

Пример маршрута:
$v_1 e_1 v_2 e_2 v_3 e_2 v_2 e_3 v_4 e_4 v_5 e_5 v_6$



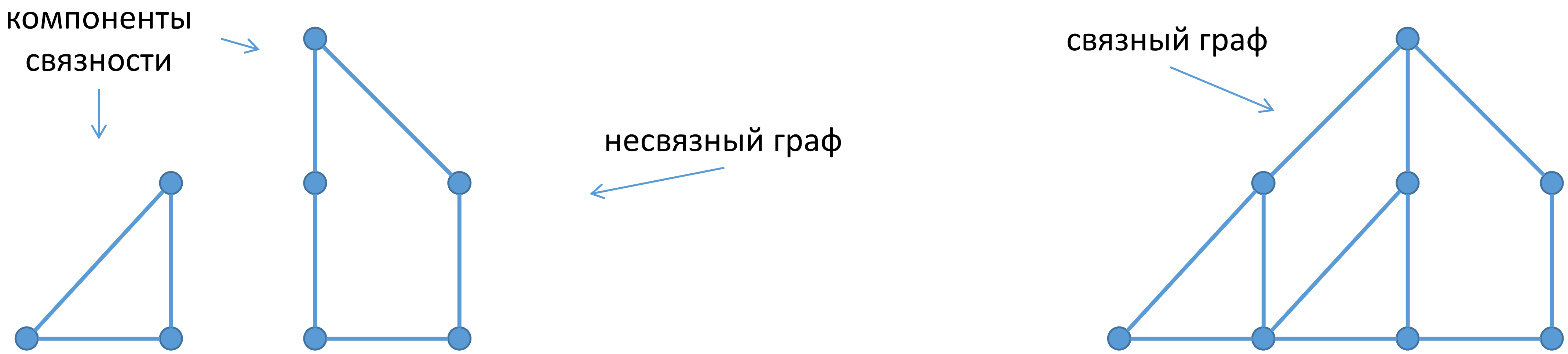
Пути, цепи и циклы

- *Цикл* — это замкнутый маршрут (т.е. начало совпадает с концом) без повторяющихся рёбер
- *Простой цикл* — это цикл без повторяющихся вершин
- *Путь* — это незамкнутый маршрут без повторений рёбер
- *Цепь* — путь без повторяющихся вершин
- *Длина* цикла/цепи — это количество рёбер



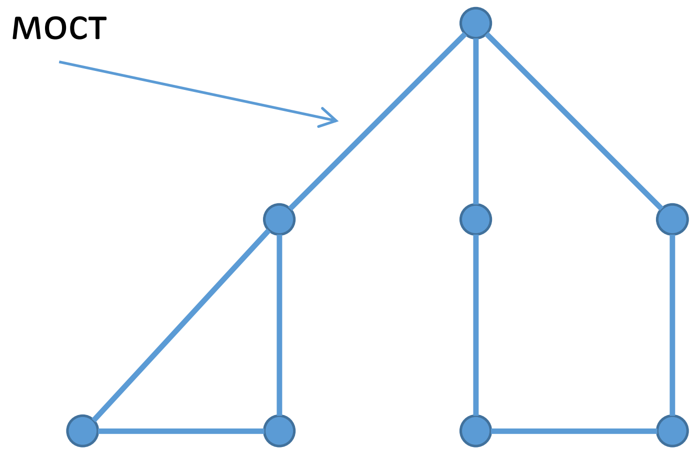
Связность

- *Связный граф* — это граф, в котором между любыми двумя вершинами существует путь
- *Компонента связности* графа — это его максимальный связный подграф



Связность

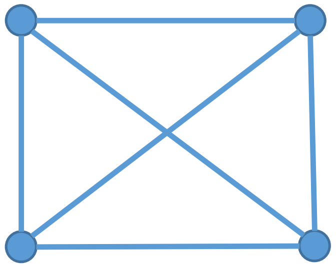
- *Мост* — это ребро, удаление которого приводит к графу с бо́льшим числом компонент связности
- *Точка сочленения* — вершина, удаление которой приводит к графу с бо́льшим числом компонент связности



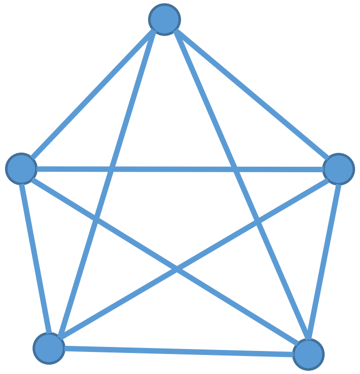
Полные и пустые графы

- *Полный граф* на n вершинах K_n — это граф, в котором есть все возможные рёбра (сколько?)

K_4



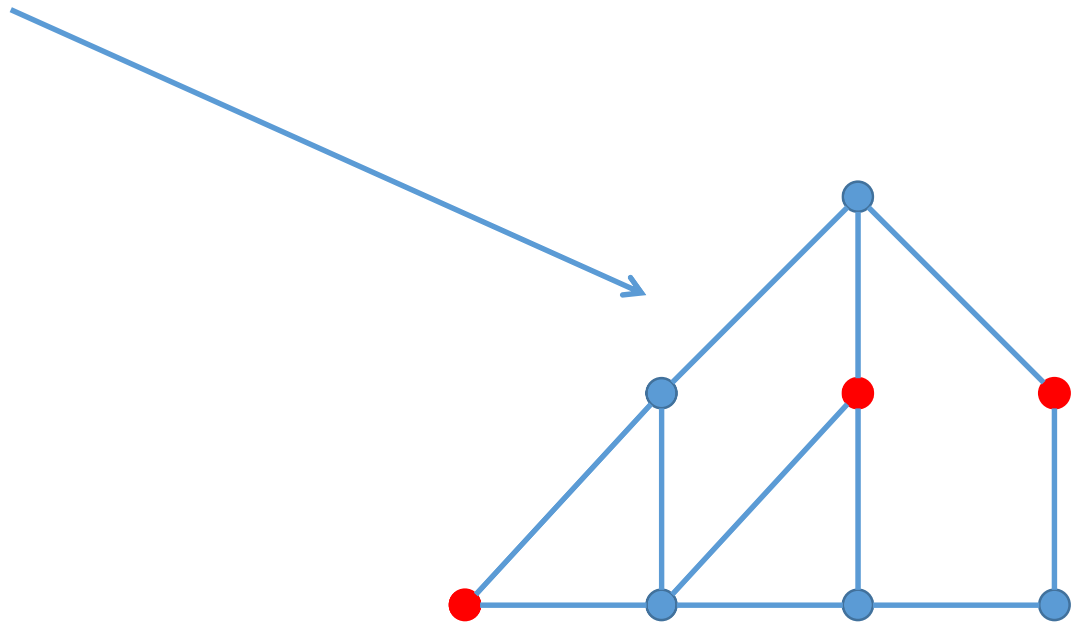
K_5



- *Пустой граф* — в котором нет ни одного ребра

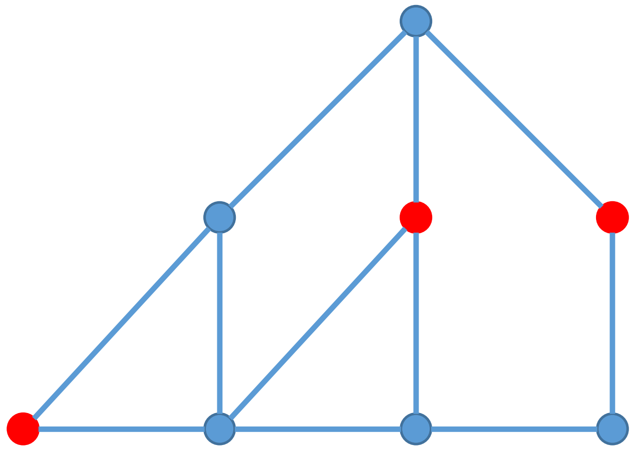
Независимые множества и клики

- *Клика* в графе — это полный подграф
- *Независимое множество* — это подмножество вершин, порождающее пустой подграф



Независимые множества и клики

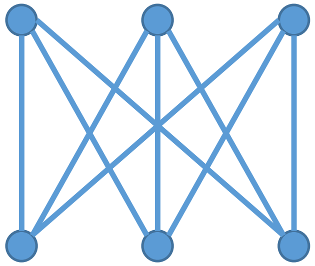
- *Число независимости* $\alpha(G)$ — это размер максимального независимого множества
- *Кликовое число* $\omega(G)$ — это максимальный размер клики в графе



Двудольные графы

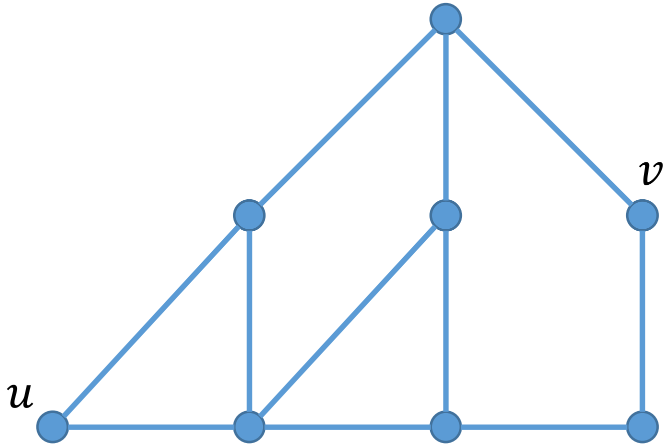
- *Двудольный* граф — это граф, вершины которого можно разбить на два независимых множества
- *Полный двудольный* граф $K_{m,n}$ — это двудольный граф со всеми возможными рёбрами между долями (m и n — мощности долей)

$K_{3,3}$



Расстояния в графе

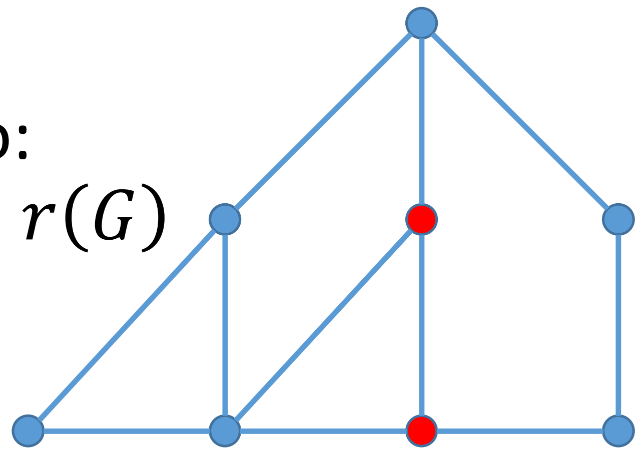
- *Расстояние между парой вершин* u, v — это длина кратчайшей цепи, соединяющей эти вершины. Обозначение: $d(u, v)$
- Диаметр графа — это максимальное из расстояний между парами вершин. Обозначение:
$$\operatorname{diam}(G) = \max_{u,v} d(u, v)$$
- *Диаметральная цепь* — это цепь, соединяющая пару вершин, расстояние между которыми равно диаметру



$d(G) = d(u, v) = 3$

Расстояния в графе

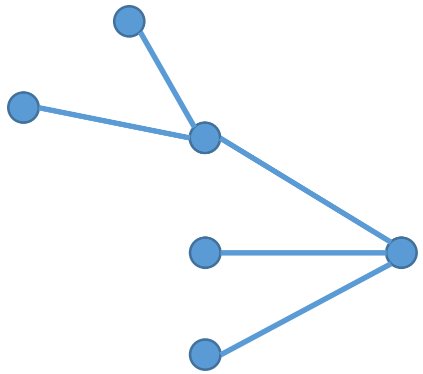
- *Эксцентриситет* вершины v — это величина
$$\max_u d(u, v)$$
- *Центр* графа — это вершина, имеющая минимальный эксцентриситет (центров у графа может быть много)
- *Радиус* графа — это эксцентриситет центра
Обозначение: $r(G)$
- Для любого связного графа G выполнено:
$$r(G) \leq \mathrm{diam}(G) \leq 2 \cdot r(G)$$



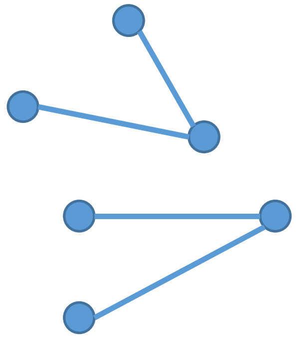
Деревья

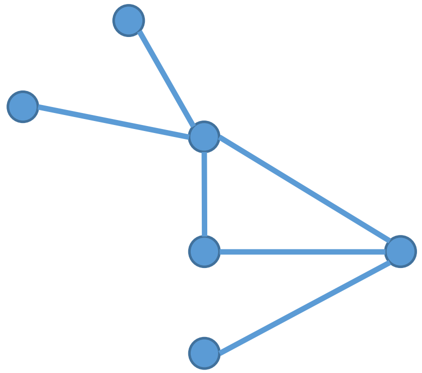
- *Дерево* — это связный граф без циклов

- Это дерево:



- А это не деревья:





Деревья

Два простейших свойства:

- В любом дереве, имеющем более одной вершины, существует не меньше двух *листьев* (висячих вершин)
(если это не так, то, «гуляя» по дереву, найдём цикл)

- В любом дереве
$$\#\text{вершин} = 1 + \#\text{рёбер}$$
(индукция по числу вершин, индуктивный переход — «отстриганием» листа)

Деревья

Эквивалентные определения дерева (упражнение!):

1. **связный граф без циклов**
2. связный граф, при удалении любого ребра становящийся несвязным
3. граф без циклов, в котором при добавлении любого ребра появляется цикл
4. граф, в котором между любой парой вершин существует единственный путь
5. связный граф, в котором $\#\text{вершин} = 1 + \#\text{рёбер}$
6. граф без циклов, в котором $\#\text{вершин} = 1 + \#\text{рёбер}$

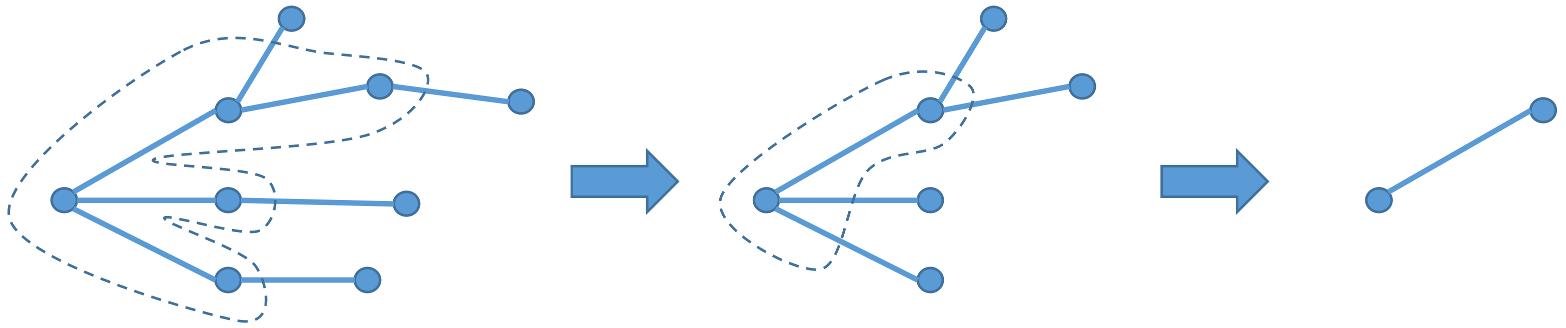
Расстояния в деревьях

- В дереве любой конец диаметральной цепи является листом
- В дереве ровно один центр, если диаметр дерева кратен 2, и ровно два центра иначе. Причём, если центра два, то они соседи.
- В любом дереве T

$$r(T) = \left\lceil \frac{1}{2} \cdot \mathrm{diam}(T) \right\rceil$$

Расстояния в деревьях

- Докажем, что в дереве один или два центра.
- Пусть дано произвольное T.
- «Обстрижём» T: удалим из T все листья.
- Получим новое дерево T', в котором центры останутся теми же, что и в T



На заметку

- Метод двойного подсчёта
- Индукция в теории графов возможна по самым разным параметрам
- У одного объекта может быть много разных определений, разными определениями удобно пользоваться в разных контекстах