# Дискретные структуры

МФТИ, весна 2014

Александр Дайняк

www.dainiak.com

# $t$-пересекающиеся гиперграфы

Гиперграф — набор непустых подмножеств конечного множества.

Гиперграф $k$-однородный, если мощность каждого ребра равна $k$.

Гиперграф $t$-пересекающийся, если каждые два ребра имеют не менее $t$ общих вершин.

# Дегустационный пример

Пусть нужно сравнить $m$ сортов сыра.

Есть $n$ экспертов.

Чтобы эксперты не съели все запасы сыра, каждый сорт сыра дегустируют не все, а лишь группа из $k$ человек.

— Как сделать так, чтобы для каждой пары сортов сыра было не меньше $t$ экспертов, которые пробовали оба этих сорта?

— Построить $k$-однородный $t$-пересекающийся гиперграф на $n$ вершинах с $m$ рёбрами!

# $1$-пересекающиеся гиперграфы

$1$-пересекающиеся гиперграфы — это те, в которых любая пара рёбер пересекается.

Вопрос: сколько может быть рёбер в $k$-однородном $1$-пересекающемся гиперграфе на $n$ вершинах?

- Если $k > \frac{n}{2}$, то могут быть все $\binom{n}{k}$ рёбер.
- Если $k \leq \frac{n}{2}$, то, по крайней мере, есть конструкция с $\binom{n-1}{k-1}$ рёбрами.
- То, что при $k \leq \frac{n}{2}$ больше рёбер взять не получится — это теорема Э.—К.—Р.

# Доказательство теоремы Эрдёша—Ко—Радо

**Теорема.**

При $k \leq \frac{n}{2}$ число рёбер в $k$-однородном $1$-пересекающемся гиперграфе на $n$ вершинах не превосходит $\binom{n-1}{k-1}$.

*Доказательство:*

Будем считать, что множество вершин $\mathbb{Z}_n$.

Пусть $E$ — множество рёбер $k$-однородного $1$-перескающегося гиперграфа.

Требуется доказать, что $|E| \leq \binom{n-1}{k-1}$.

# Доказательство теоремы Эрдёша—Ко—Радо

Рассмотрим для каждого $s \in \mathbb{Z}_n$ множество

$$A_s := \{s, s+1, \dots, s+k-1\} \subset \mathbb{Z}_n$$

Допустим, что $A_t \in E$ для некоторого $t$.

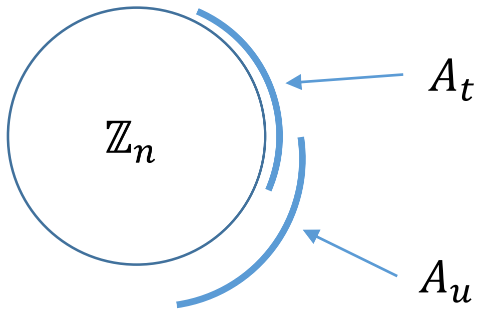
Тогда среди остальных множеств

$$A_0, \dots, A_{t-1}, A_{t+1}, \dots, A_{n-1}$$

в $E$ могут входить только множества вида $A_u$, где

$$u \in \{t-k+1, \quad t-k+2, \quad t-k+3, \quad \dots, \quad t+k-1\}.$$

**Примечание.**
Здесь и далее суммирование по модулю $n$.



# Доказательство теоремы Эрдёша—Ко—Радо

Рассмотрим для каждого $s \in \mathbb{Z}_n$ множество

$$A_s \coloneqq \{s, s+1, \dots, s+k-1\} \subset \mathbb{Z}_n$$

Если какое-то $A_t \in E$, то вместе с ним в $E$ могут входить только такие множества $A_u$, у которых

$$u \in \{t-k+1, \quad t-k+2, \quad t-k+3, \quad \dots, \quad t+k-1\}.$$

Такие множества разбиваются на пары

$$A_{t-k+1}, A_{t+1}; \quad A_{t-k+2}, A_{t+2}; \quad \dots \quad A_{t-1}, A_{t+k-1}$$

Из каждой такой пары в $E$ входит не более одного множества.

Значит, в $E$ не более $(k-1)$ таких $A_u$.

# Доказательство теоремы Эрдёша—Ко—Радо

Итог предыдущих рассуждений мы вывели:
всего в $E$ могут входить не более чем $k$ множеств вида

$$\{s, s+1, \dots, s+k-1\}$$

Эти соображения можно немного обобщить:

Пусть $\sigma$ — фиксированная перестановка на $\mathbb{Z}_n$.

Тогда из множеств вида

$$\{\sigma(s), \sigma(s+1), \dots, \sigma(s+k-1)\}$$

в $E$ может входить тоже не более $k$ штук.

# Доказательство теоремы Эрдёша—Ко—Радо

Рассмотрим перестановку $\sigma$ на $\mathbb{Z}_n$ и элемент $s \in \mathbb{Z}_n$.
Рассмотрим множество

$$A_{s,\sigma} \coloneqq \{\sigma(s), \sigma(s+1), \dots, \sigma(s+k-1)\}.$$

Пусть $X = \{x_1, \dots, x_k\} \subseteq \mathbb{Z}_n$ — любое фиксированное множество.

При фиксированном $s$ количество $\sigma$, таких, что $A_{s,\sigma} = X$, равно

$$k! \cdot (n-k)!$$

# Доказательство теоремы Эрдёша—Ко—Радо

- $A_{s,\sigma} \coloneqq \{\sigma(s), \sigma(s+1), \dots, \sigma(s+k-1)\}$.

Двумя способами посчитаем сумму

$$\sum_{s,\sigma} \mathbb{1}_{A_{s,\sigma} \in E}$$

С одной стороны,

$$\sum_{s,\sigma} \mathbb{1}_{A_{s,\sigma} \in E} = \sum_{s,\sigma} \sum_{e \in E} \mathbb{1}_{A_{s,\sigma} = e} = \sum_{s} \sum_{e \in E} \sum_{\sigma} \mathbb{1}_{A_{s,\sigma} = e} = n \cdot |E| \cdot k! \cdot (n-k)!$$

С другой стороны,

$$\sum_{s,\sigma} \mathbb{1}_{A_{s,\sigma} \in E} = \sum_{\sigma} \sum_{s} \mathbb{1}_{A_{s,\sigma} \in E} \leq \sum_{\sigma} k = n! \cdot k$$

# Доказательство теоремы Эрдёша—Ко—Радо

Итак,

$$n \cdot |E| \cdot k! \cdot (n-k)! = \sum_{s,\sigma} \mathbb{1}_{A_{s,\sigma} \in E} \leq n! \cdot k$$

Отсюда

$$|E| \leq \frac{k}{n} \cdot \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}.$$

# Теорема Альсведе—Хачатряна

Сколько (максимум) рёбер может быть в $t$-пересекающемся $k$-однородном гиперграфе?

Пусть гиперграф на множестве $\{1,2,\dots,n\}$.

«Очевидный претендент» на оптимальность:

$$E \coloneqq \{\ \ A \quad | \quad A \supseteq \{1,\dots,t\} \ \text{ и } \ |A| = k \ \ \}$$

— оказывается не всегда самым лучшим.

Возьмём $r \in \mathbb{N}_0$ и рассмотрим семейство

$$E_{n,k,t,r} \coloneqq \{\ \ A \quad | \quad |A \cap \{1,\dots,t+2r\}| \geq t+r \ \text{ и } \ |A| = k \ \ \}$$

По принципу Дирихле, для любых $A', A'' \in E_{n,k,t,r}$ имеем $|A' \cap A''| \geq t$.

# Теорема Альсведе—Хачатряна

**Теорема. (Р. Альсведе, Л. Хачатрян ’1997)**

Пусть $n, k, t$ таковы, что $2 \leq t \leq k \leq n$ и $t > 2k - n$.

Тогда число рёбер в любом $t$-пересекающемся $k$-однородном гиперграфе не превосходит $\left|E_{n,k,t,r}\right|$, где

$$r = \left\lceil \frac{(t-1)(k-t+1)}{n-2(k-t+1)} - 1 \right\rceil$$

Кроме того, любая оптимальная совокупность изоморфна $E_{n,k,t,r}$ (то есть существует изоморфизм гиперграфов, переводящий эту совокупность в $E_{n,k,t,r}$).

# Неравенство Фишера

**Теорема. (Р.А. Фишер ’1940)**
Пусть для некоторого $t$ в $n$-вершинном (необязательно однородном) гиперграфе любая пара рёбер имеет *ровно* $t$ общих вершин.

Тогда
$$|E| \leq n$$

# Доказательство неравенства Фишера: тривиальные случаи

Случай $t = 0$ очевиден, так что далее предполагаем, что $t > 0$.

Сначала рассмотрим вырожденный случай, когда в гиперграфе есть ребро мощности $t$.

Пусть $A_1, \dots, A_m$ — все рёбра гиперграфа.

Пусть $|A_k| = t$ для некоторого $k$, тогда

$$\forall i \neq k \quad A_k \subset A_i$$

и $(A_i \setminus A_k) \cap \left(A_j \setminus A_k\right) = \emptyset$ при $i \neq j$.

Из этого сразу следует, что

$$m \leq 1 + (n - t) \leq n$$

# Продолжение д-ва неравенства Фишера: идея линейно-алгебраического метода

- Пусть нам надо доказать, что некое множество объектов $\{O_1 \dots O_m\}$ «невелико».
- Сопоставляем каждому $O_i$ элемент $e_i$ какого-то линейного пространства $L$.
- Доказываем, что $e_1, \dots, e_m$ линейно независимы (используя информацию об объектах $O_1, \dots, O_m$).
- Выводим отсюда оценку

$$m \leq \dim L$$

Нетривиальная задача: придумать, что такое $L$ и как задать $\{e_i\}$.

# Продолжение д-ва неравенства Фишера; применение линейно-алгебраического метода

Теперь рассмотрим случай $|A_i| > t$ для всех $i$.

Гиперрёбрам можно однозначно сопоставить их характеристические векторы из $\{0,1\}^n$:

$$\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_m$$

По условию, для любых $i \neq j$ выполнено

$$\langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j \rangle = t$$

Достаточно доказать, что векторы $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_m$ линейно независимы.

Допустим противное: пусть $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_m$ такие, что $\sum_{i=1}^m \lambda_i \boldsymbol{a}_i = 0$ и не все $\lambda_i$ равны нулю.

# Завершение д-ва неравенства Фишера

Пусть вектор $\boldsymbol{a}_i$ отвечает множеству $A_i$.

Имеем

$$0 = \left\langle \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \boldsymbol{a}_i \,, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \boldsymbol{a}_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^2 \langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_i \rangle + \sum_{1 \le i \ne j \le m} \lambda_i \lambda_j \langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j \rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^2 |A_i| + t \cdot \sum_{1 \le i \ne j \le |E|} \lambda_i \lambda_j = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^2 \underbrace{(|A_i| - t)}_{>0} + t \cdot \left( \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \right)^2 > 0$$

—противоречие.

# Гипотеза Кнезера / теорема Ловаса

В какое минимальное число цветов можно раскрасить все $k$-подмножества $n$-множества, так, чтобы любая пара одноцветных подмножеств пересекалась?

- Если $n \leq 2k - 1$, то и одного цвета хватит — принцип Дирихле.
- Если $n \geq 2k$, то достаточно $(n - 2k + 2)$ цветов.

# Гипотеза Кнезера / теорема Ловаса

Пусть наше множество $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$.

Если $n \geq 2k$, то достаточно $(n - 2k + 2)$ цветов:

- Покрасим цветом «1» все $k$-подмножества, содержащие $x_1$.
- Покрасим цветом «2» все ещё не покрашенные $k$-подмножества, содержащие $x_2$.
- Покрасим цветом «3» все ещё не покрашенные $k$-подмножества, содержащие $x_3$.
- …
- Покрасим в цвет $(n - 2k + 1)$ все ещё не покрашенные $k$-подмножества, содержащие $x_{n-2k+1}$.
- Покрасим в цвет $(n - 2k + 2)$ все до сих пор не покрашенные $k$-подмножества.

# Гипотеза Кнезера / теорема Ловаса

Оказывается, по числу цветов рассмотренная выше конструкция оптимальна:

**Теорема. (Ловас’1978 / гипотеза: Кнезер’1955)**

Пусть $n - 2k + 1 > 0$.
Тогда если все $k$-подмножества $n$-множества раскрасить не более чем $(n - 2k + 1)$ цветами, то найдётся пара непересекающихся подмножеств одного цвета.

# Гипотеза Кнезера / теорема Ловаса

**Теорема Борсука—Улама. (Без док-ва.)**

Пусть сфера в $d$-мерном пространстве покрыта $d$ множествами, каждое из которых открыто либо замкнуто.

Тогда хотя бы одно из этих множеств содержит пару диаметрально противоположных точек сферы.

# Доказательство гипотезы Кнезера (по версии Дж. Е. Грина)

Пусть $n > 2k - 1$ и пусть все $k$-подмножества в $\{x_1, \dots, x_n\}$ раскрашены в $(n - 2k + 1)$ цветов.

Покажем, что найдётся пара непересекающихся одноцветных подмножеств.

Положим $d \coloneqq n - 2k + 2$.

Будем считать, что $x_1, \dots, x_n$ — точки на сфере в $\mathbb{R}^d$, и что никакие $d$ точек не лежат в одной гиперплоскости, проходящей через центр сферы (назовём это *условием общего положения*).

# Доказательство гипотезы Кнезера

$d \coloneqq n - 2k + 2,$ и $x_1, \dots, x_n$ — точки на сфере в $\mathbb{R}^d$, никакие $d$ точек не лежат в одной гиперплоскости, проходящей через центр сферы.

Покроем сферу множествами $A_1, \dots, A_d$.
Для каждого $c = 1, 2, \dots, n - 2k + 1$ пусть

- $A_c$ — это все такие точки сферы $x'$, что открытая полусфера с эпицентром в $x'$ содержит хотя бы одно подмножество $\{x_{j_1}, \dots, x_{j_k}\}$ покрашенное в цвет $c$.

Во множество $A_{n-2k+2}$ включим все точки, не попавшие ни в одно из предыдущих $A_c$.

# Доказательство гипотезы Кнезера

Можно проверить, что множества $A_1, \dots, A_{n-2k+1}$ открытые, а $A_{n-2k+2}$ замкнутое.

По теореме Борсука—Улама, одно из множеств $A_1, \dots, A_{n-2k+2}$ содержит д.п. точки сферы.

Пусть в $A_{n-2k+2}$ есть д.п. точки $x'$ и $x''$.

Каждая из полусфер с эпицентрами в $x'$ и $x''$ содержит не больше $(k-1)$ точек из $\{x_1, \dots, x_n\}$.

Тогда вне этих полусфер попадает не меньше

$$n - 2(k-1) = d$$

точек — противоречие с условием общего положения.

# Доказательство гипотезы Кнезера

Хотя бы одно из множеств $A_1, \dots, A_{n-2k+2}$ содержит диаметрально противоположные точки сферы.
Мы проверили, что это точно не множество $A_{n-2k+2}$.

Значит, для некоторого $c \in \{1, 2, \dots, n-2k+1\}$ во множестве $A_c$ есть д.п. точки $x'$ и $x''$.

Каждая из полусфер с эпицентрами в $x'$ и $x''$ содержит хотя бы по одному подмножеству вида $\{x_{j_1}, \dots, x_{j_k}\}$ цвета $c$.

Осталось заметить, что эти подмножества не могут пересекаться (т.к. сами полусферы не пересекаются).