Основы теории графов

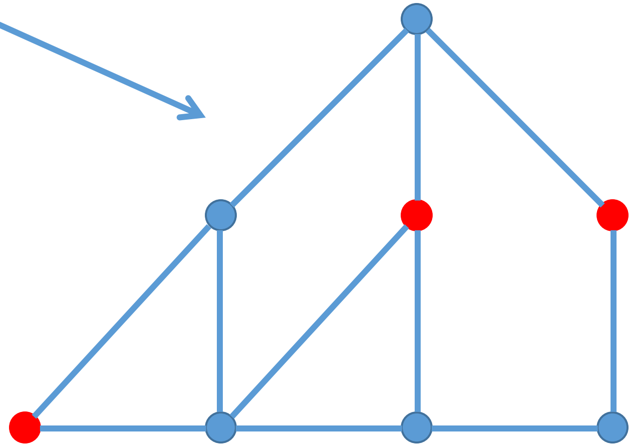
осень 2013

Александр Дайняк

www.dainiak.com

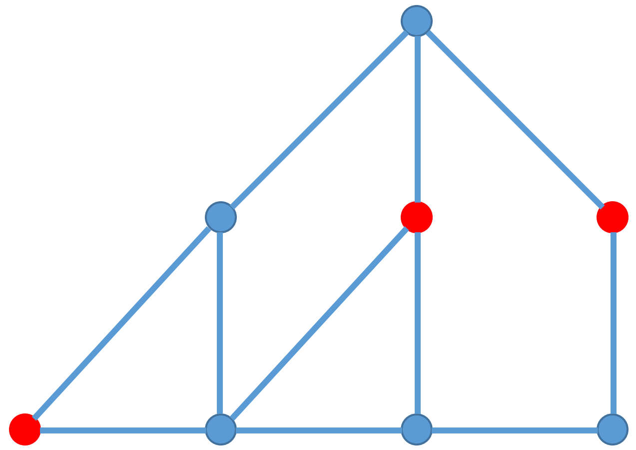
Независимые множества и клики

- *Клика* в графе — это полный подграф
- *Независимое множество* — это подмножество вершин, порождающее пустой подграф



Независимые множества и клики

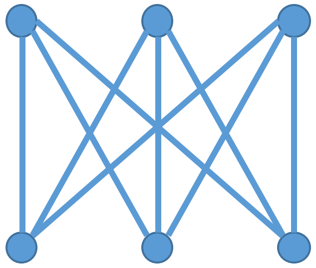
- *Число независимости* $\alpha(G)$ — это размер максимального независимого множества
- *Кликовое число* $\omega(G)$ — это максимальный размер клики в графе



Двудольные графы

- Двудольный граф — это граф, вершины которого можно разбить на два независимых множества
- Полный двудольный граф $K_{m,n}$ — это двудольный граф со всеми возможными рёбрами между долями (m и n — мощности долей)

$K_{3,3}$

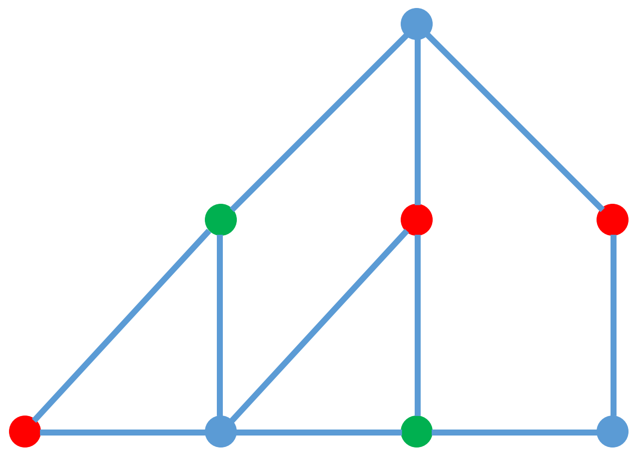


Раскраски вершин и рёбер

- *Раскраска вершин* графа G в k цветов — это отображение $\phi: V(G) \to \{1,2,\dots,k\}$
- Вершинная раскраска ϕ называется *правильной*, если

$$\forall v' \forall v'' \left(v'v'' \in \mathrm{E}(G) \;\Rightarrow\; \phi(v') \neq \phi(v'') \right)$$

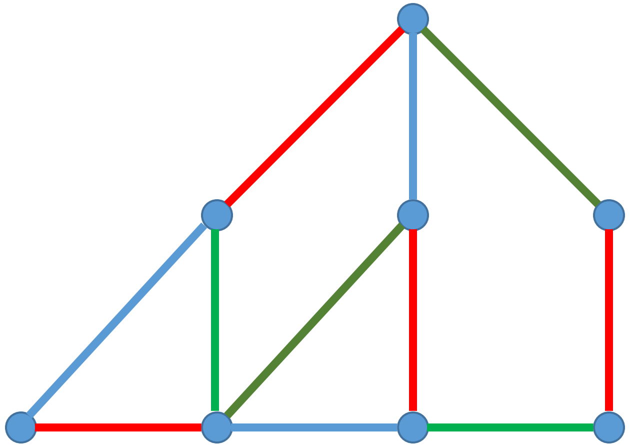
Правильная раскраска вершин графа в k цветов задаёт разбиение множества вершин графа на k независимых множеств.



Раскраски вершин и рёбер

- *Раскраска рёбер* графа G в k цветов — это отображение $\psi\colon E(G) \to \{1,2,\dots,k\}$
- Рёберная раскраска ψ называется *правильной*, если
$$\forall e' \forall e'' \big(e' \cap e'' \neq \emptyset \;\Rightarrow \psi(e') \neq \psi(e'')\big)$$

Правильная раскраска рёбер графа в k цветов задаёт разбиение множества рёбер графа на k паросочетаний.



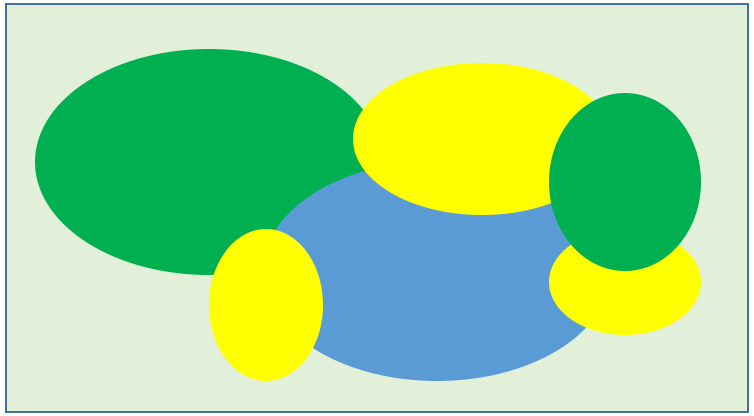
Примеры задач о раскраске

- Сотовый оператор установил в городе свои антенны. Некоторые пары антенн расположены близко друг к другу и вынуждены использовать разные частоты.
  Сколько радиочастот придётся выкупить сотовому оператору у городских властей?
- Лидеры стран G-20 собрались на саммит. Некоторые пары участников хотят побеседовать друг с другом наедине. У каждого участника на одну такую беседу уходит один день.
  Во сколько дней можно уложить саммит?

Примеры задач о раскраске

Исторически первая задача о раскраске:

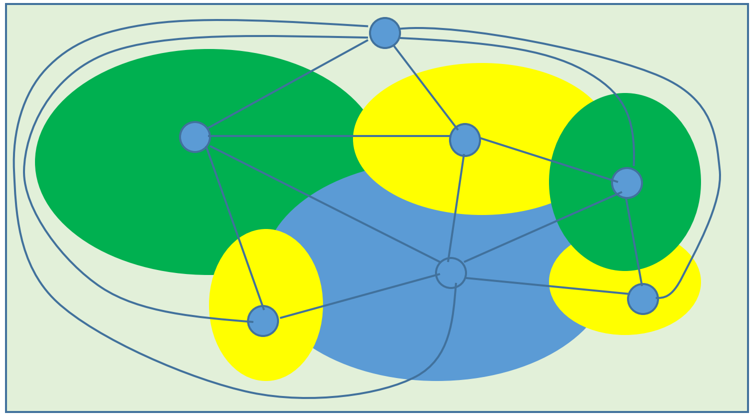
- Сколько цветов достаточно использовать в типографии, чтобы можно было напечатать любую географическую карту (так, чтобы граничащие друг с другом страны не сливались на карте)?



Примеры задач о раскраске

Задачу о раскраске карт можно переформулировать на языке раскрасок, рассмотрев планарный граф, *двойственный* карте:

- Сколькими цветами можно правильно раскрасить любой планарный граф?



Хроматическое число

- *Хроматическое число* $\chi(G)$ — это минимальное число цветов, в которое можно правильно раскрасить вершины графа G.
- *Хроматический индекс* $\chi'(G)$ — это минимальное число цветов, в которое можно правильно раскрасить рёбра графа G.

Рассмотренные ранее «жизненные» задачи сводятся к нахождению хроматического числа или хроматического индекса некоторых графов.

Списочное хроматическое число

Пусть для каждой вершины v графа G указан конечный список $L_v \subseteq \mathbb{N}$ — цвета, в которые разрешается красить v.

Правильная списочная раскраска графа G (для набора списков $\{L_v\}_{v \in V(G)}$) — это отображение $\phi: V(G) \to \mathbb{N}$, которое

- является правильной раскраской в обычном понимании,
- каждая вершина покрашена в цвет из своего списка: $\phi(v) \in L_v$

Списочное хроматическое число

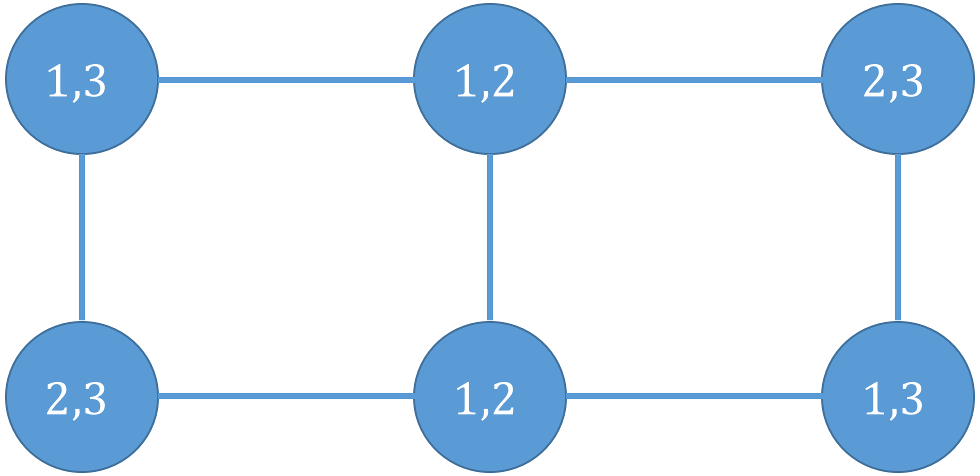
Списочное хроматическое число графа G — это такое минимальное $k,$ что правильная списочная раскраска G существует для *любого* набора списков $\{L_v\}_{v\in V(G)}$, удовлетворяющего условию $\forall v \; |L_v| = k.$

Обозначение: $\chi_l(G).$

Очевидно, $\chi_l(G) \geq \chi(G)$ (поскольку можно взять все списки равными $\{1,2,\dots,k\}$).

Списочное хроматическое число

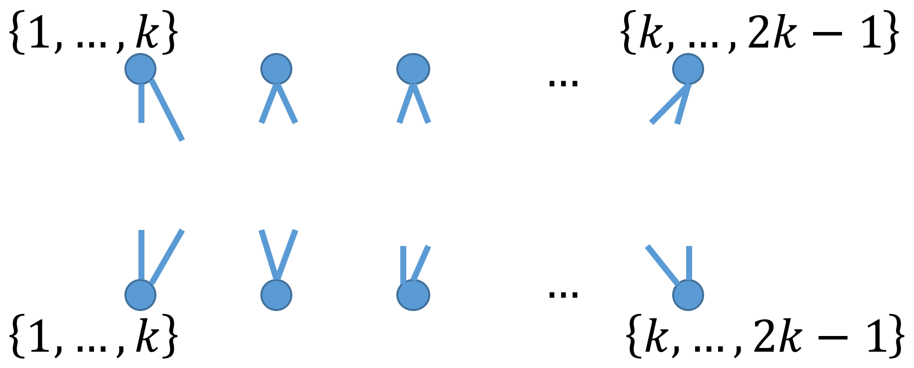
Пример графа G, для которого $\chi_l(G) > \chi(G)$:



Списочное хроматическое число

Теорема. При любом $k \in \mathbb{N}$ существует граф G, для которого $\chi(G) = 2$ и $\chi_l(G) > k$.

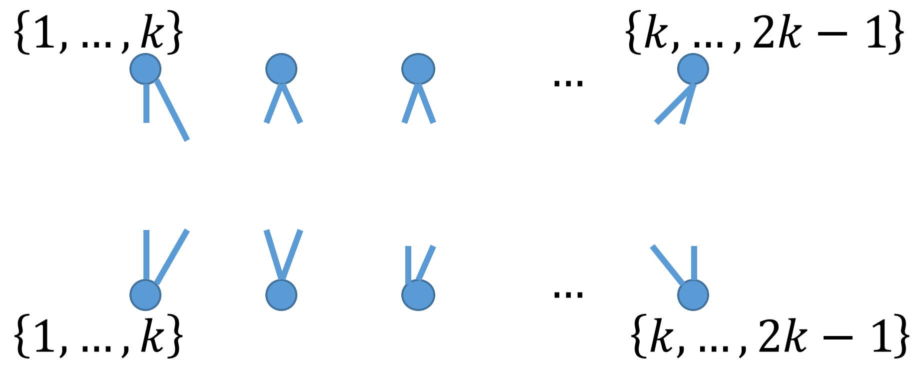
Доказательство:
Рассмотрим полный двудольный граф G, у которого вершинам каждой доли приписаны всевозможные подмножества мощности k множества $\{1,2, \dots, 2k-1\}$:



Списочное хроматическое число

Допустим, что у G есть правильная списочная раскраска в цвета из указанных списков.
Пусть A— множество цветов, использованных при раскраске вершин верхней доли.

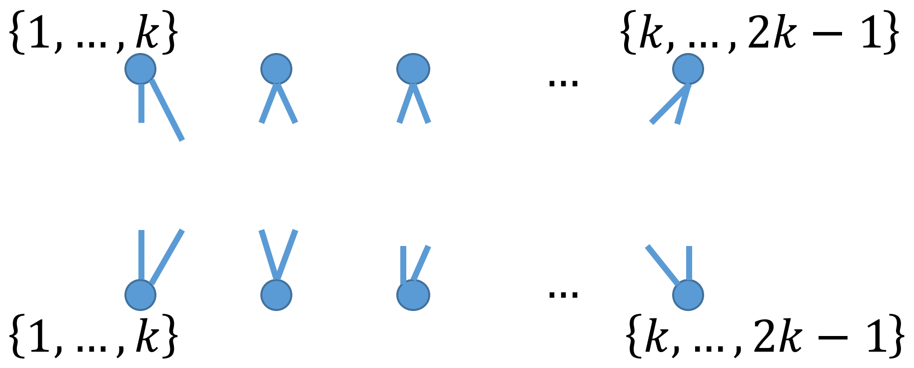
Тогда $|A| \geq k$ (иначе в верхней доле графа G нашёлся бы список, не содержащий ни одного элемента из A).



Списочное хроматическое число

Имеем $|A| \geq k$.

Но тогда в нижней доле графа G есть вершина, список допустимых цветов которой полностью содержится в A. Следовательно, правильную списочную раскраску G для заданных нами списков построить нельзя. То есть $\chi_l(G) > k$.



Оценки хроматического числа

- $\chi(C_{2k}) = 2,\ \chi(C_{2k+1}) = 3$
- $\chi(K_n) = n$
- Если H — подграф G, то $\chi(G) \geq \chi(H)$
- $\chi(G) \geq \omega(G)$
- $\chi(G) \geq \frac{|G|}{\alpha(G)}$, поскольку $|G| \leq \chi(G) \cdot \alpha(G)$

Оценки хроматического числа

Утверждение. Для любого G выполнено

$$\chi(G) \leq \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 + 8 \cdot \|G\|}\right)$$

Доказательство: Пусть $\chi(G) = \chi$.
Существует разбиение $V(G) = V_1 \sqcup \cdots \sqcup V_\chi$, где V_i — независимые множества.
При этом $\forall i \neq j$ между V_i и V_j есть хотя бы одно ребро.

Поэтому $\|G\| \geq \frac{\chi(\chi-1)}{2}$. Решая это неравенство относительно χ, получаем требуемое.

Оценки хроматического числа

Утверждение.
Хроматическое число графа G равно
максимальному из хроматических чисел компонент связности G.

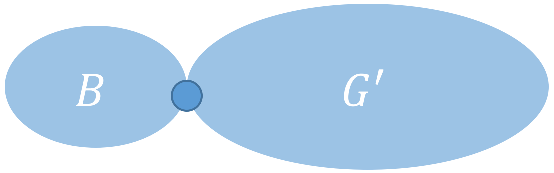
Поэтому в теоремах об оценках хроматических чисел достаточно
рассматривать связные графы.

Оценки хроматического числа

Утверждение.
Хроматическое число связного графа G равно максимальному из хроматических чисел блоков G.

Доказательство: индукция по числу блоков.
Пусть в G более одного блока и утверждение верно для графов с меньшим числом блоков.

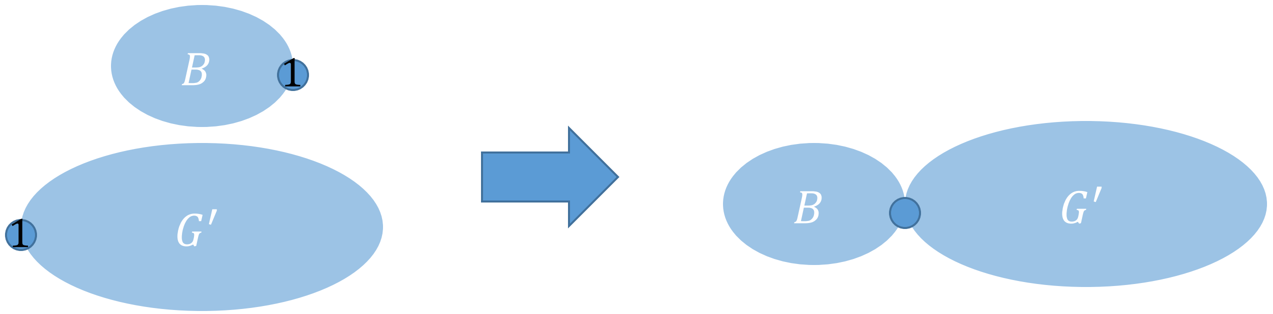
Пусть B — концевой блок в G, а G' — оставшаяся часть G.



Оценки хроматического числа

Блок B «прикреплён» к G' единственной вершиной v. Пусть $k = \max\{\chi(G'), \chi(B)\}$.

Существуют правильные раскраски B и G' в цвета $\{1, \dots, k\}$. Тогда существуют правильные раскраски B и G', в которых вершина v имеет цвет 1. Совместив эти раскраски, получим раскраску всего графа G.



«Жадный» алгоритм раскраски

Упорядочиваем вершины графа: $v_1, \dots, v_{|V|}$.

$\text{for } i \coloneqq 1 \text{ to } |V|:$

$\quad \text{badColors} \coloneqq \{\text{color}(v_j) \mid j < i \text{ и } v_j v_i \in E\}$

$\quad \text{color}(v_i) \coloneqq \min(\mathbb{N} \setminus \text{badColors})$

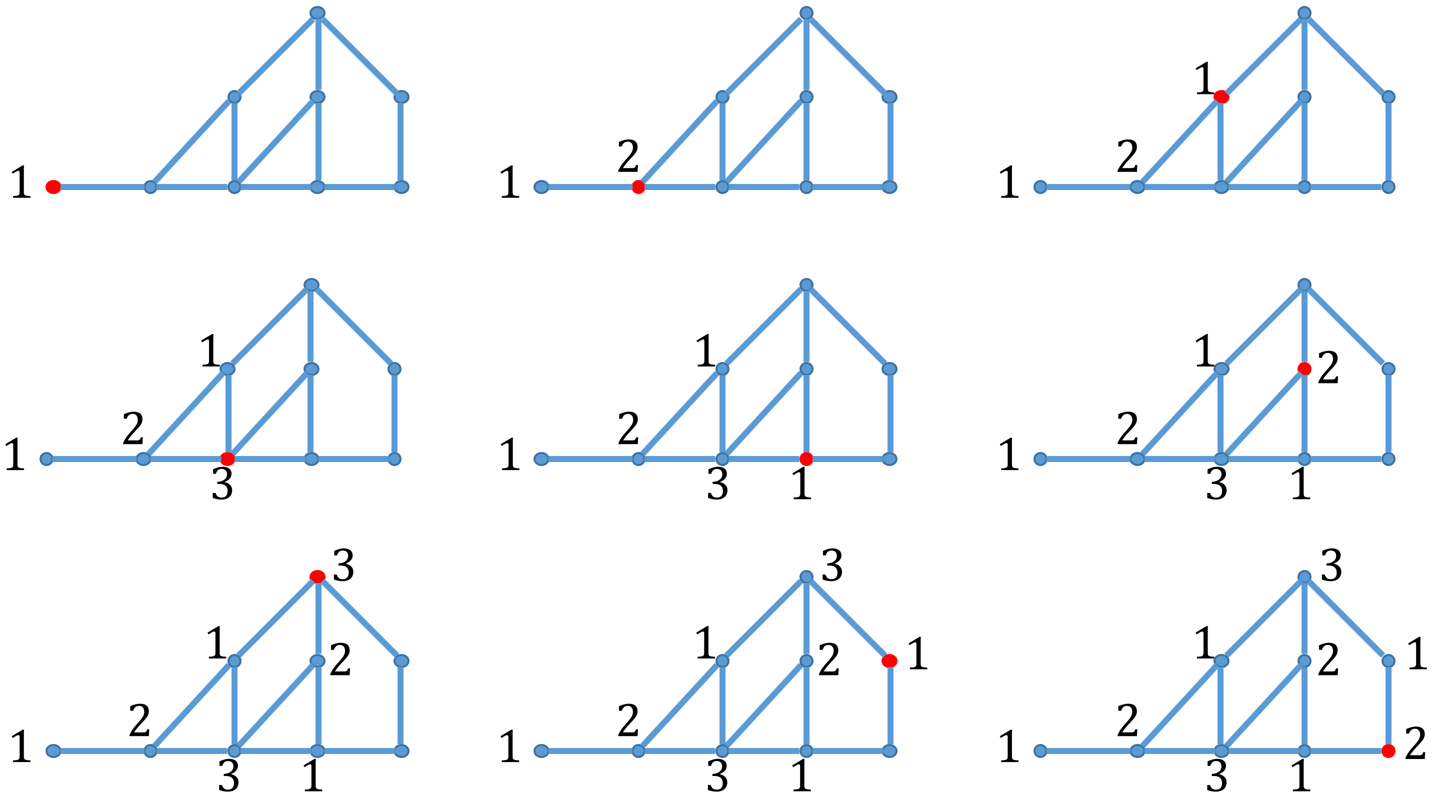
(Т.е. при раскраске очередной вершины используется первый по счёту цвет, отсутствующий среди соседей вершины.)

«Жадный» алгоритм раскраски

for $i \coloneqq 1$ to $|V|$:

  $\text{badColors} \coloneqq \{\text{color}(v_j) \mid j < i \text{ и } v_j v_i \in E\}$

  $\text{color}(v_i) \coloneqq \min(\mathbb{N} \setminus \text{badColors})$



«Жадный» алгоритм раскраски

$\text{for } i \coloneqq 1 \text{ to } |V|:$

$\quad \text{badColors} \coloneqq \{\text{color}(v_j) \mid j < i \text{ и } v_j v_i \in E\}$

$\quad \text{color}(v_i) \coloneqq \min(\mathbb{N} \setminus \text{badColors})$

Утверждение.
При любом упорядочении вершин графа указанный алгоритм строит правильную раскраску в не более чем $(1 + \Delta(G))$ цветов.
(Т.к. всегда выполнено $|\text{badColors}| \leq \Delta(G)$.)

«Жадный» алгоритм раскраски

Утверждение-упражнение.
Качество раскраски, построенной алгоритмом, сильно зависит от упорядочения вершин:

Всегда существует упорядочение, при котором алгоритм использует ровно $\chi(G)$ цветов.

Для любого k можно предъявить *двудольный* граф G и такое упорядочение его вершин, что раскраска, построенная алгоритмом, будет задействовать более k цветов.

«Жадный» алгоритм списочной раскраски

Пусть каждой вершине v присвоен список допустимых цветов L_v.

Тогда алгоритм выглядит так:

for $i \coloneqq 1$ to $|V|$:

  badColors $\coloneqq \left\{\mathrm{color}\left(v_j\right) \mid j < i \text{ и } v_j v_i \in E\right\}$

  if $L_v \subseteq$ badColors:

    error

  else:

    $\mathrm{color}(v_i) \coloneqq \min(L_v \setminus \mathrm{badColors})$

Оценка списочного хроматического числа

Теорема.
Для любого графа G выполнено неравенство

$$\chi_l(G) \leq 1 + \max_{H \subseteq G} \delta(H)\,.$$

Доказательство. Достаточно запустить жадный алгоритм на графе G, упорядочив вершины так:

- $v_{|G|}$ — любая из вершин минимальной степени в G
- $v_{|G|-1}$ — любая из вершин минимальной степени в $\left(G - \{v_{|G|}\}\right)$
- $v_{|G|-2}$ — любая из вершин минимальной степени в $\big(G -$

Оценка списочного хроматического числа

Теорема. Для любого графа G выполнено

$$\chi_l(G) \leq 1 + \max_{H \subseteq G} \delta(H)$$

Следствие 1. Для любого графа G имеем

$$\chi_l(G) \leq 1 + \Delta(G)$$

Следствие 2. Для любого связного нерегулярного графа G выполнено неравенство

$$\chi_l(G) \leq \Delta(G)$$

(из нерегулярности G получаем $\delta(G) \leq \Delta(G) - 1$,
а связность G влечёт $\delta(H) \leq \Delta(G) - 1$ для любого порождённого подграфа H, отличного от G)

Теорема Брукса

Теорема Брукса. (R. L. Brooks ’1941)
Для любого связного, не полного графа G, имеющего $\Delta(G) \geq 3$, выполнено неравенство

$$\chi(G) \leq \Delta(G)$$

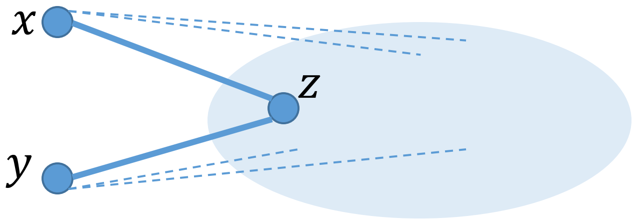
Доказательство (L. Lovász ’1975):
Если G не регулярный, то $\chi_l(G) \leq \Delta(G)$, так что достаточно доказать теорему для регулярных графов.

Также б.о.о. можно считать G двусвязным.

Доказательство теоремы Брукса: специальная тройка вершин

Далее считаем G двусвязным, не полным, k-регулярным графом ($k \geq 3$).

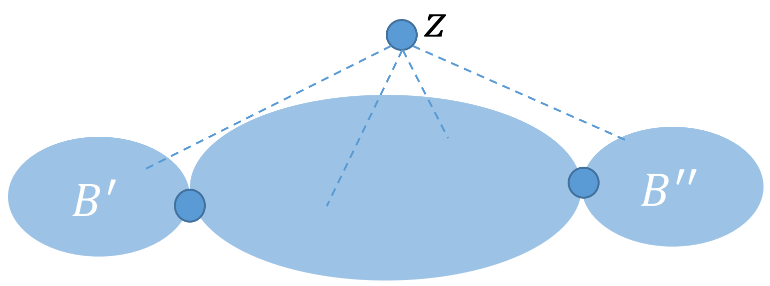
Докажем, что в G можно выбрать такую тройку вершин x, y, z, что $xz, yz \in E(G)$, $xy \notin E(G)$, и граф $(G - \{x, y\})$ связный:



Доказательство теоремы Брукса: специальная тройка вершин

Если G трёхсвязен, то z выберем произвольно, а в качестве x и y возьмём любые две несмежные вершины из $N(v)$ (такие найдутся, т.к. G регулярный и не полный).

Если G не трёхсвязный, то в качестве z возьмём такую вершину, что граф $(G - z)$ *не* двусвязный. Пусть B' и B'' — любая пара концевых блоков в $(G - z)$.

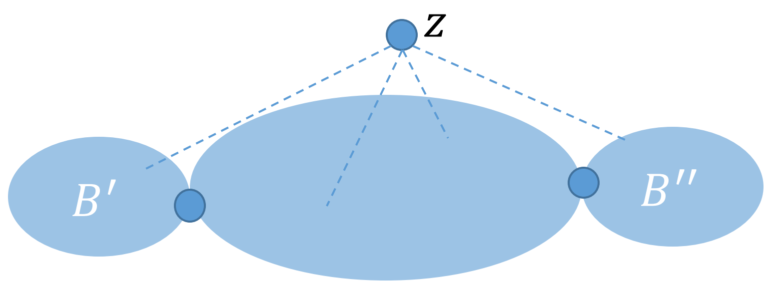


Доказательство теоремы Брукса: специальная тройка вершин

Пусть B' и B'' «прикрепляются» к оставшейся части графа $(G - z)$ точками сочленения u' и u'' соответственно.

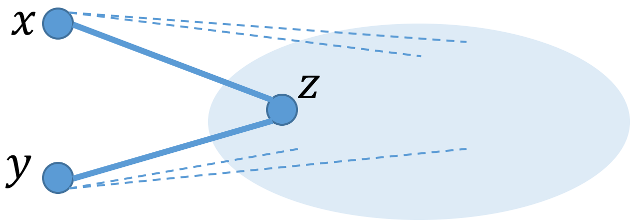
В блоке B' найдётся вершина x, отличная от u' и смежная с z (иначе u' была бы точкой сочленения в G). Аналогично, в B'' есть вершина y, отличная от u'' и смежная с z.

Тройка x, y, z — искомая.



Доказательство теоремы Брукса: аккуратная нумерация вершин

Итак, в G найдётся «специальная» тройка x, y, z.



Обозначим $n \coloneqq |G|$. Положим $v_1 \coloneqq x, v_2 \coloneqq y$.

Граф $(G - \{x, y\})$ связный, поэтому можно занумеровать его вершины $v_3, \dots, v_n$ так, что $v_n = z$ и

$$\forall i < n \quad \exists j > i: \quad v_i v_j \in E(G).$$

(Например, обходом графа в ширину из вершины z.)

Доказательство теоремы Брукса: жадный алгоритм на аккуратной нумерации вершин

Множество $V(G) \setminus \{x, y\}$ занумеровано $v_3, v_4, \dots, v_n$ так, что $v_n = z$ и $\forall i < n \quad \exists j > i: \quad v_i v_j \in E(G)$.

Запустим на G жадный алгоритм раскраски.

- Вершины v_1, v_2 окрасятся в цвет 1.
- Пусть окрашивается вершина $v_i, 3 \le i \le n-1$.
  Так как v_i смежна хотя бы с одной из вершин $\{v_{i+1}, \dots, v_n\}$, то v_i смежна не более чем с $(k-1)$ вершинами из множества $\{v_1, \dots, v_{i-1}\}$. Значит, v_i будет окрашена в цвет $\le k$.
- Наконец, у v_n степень k, но заведомо есть пара соседей, окрашенных одним цветом. Поэтому v_n получит цвет $\le k$.

Обобщения и усиления теоремы Брукса

- **Теорема (B. Reed ’1999).**
  Если $\Delta(G)$ достаточно велико и $\omega(G) < \Delta(G)$, то $\chi(G) \leq \Delta(G) - 1$.

- Существуют линейные по времени алгоритмы раскраски графов в $\Delta(G)$ цветов.

- **Теорема (В.Г. Визинг ’1976)**
  Для связного, не полного графа, не являющегося циклом,
  $$\chi_l(G) \leq \Delta(G)$$

Оценка $\chi_l(G)$ сверху через $\chi(G)$

Теорема.
Для любого графа G выполнено неравенство
$$\chi_l(G) \leq \lceil \chi(G) \cdot \ln|G| \rceil$$

Докажем эту теорему с помощью *вероятностного метода*.

Оценка $\chi_l(G)$ сверху через $\chi(G)$

Доказательство теоремы:

Пусть G — произвольный граф, и $\chi(G) = \chi$.

Пусть $V_1 \sqcup \cdots \sqcup V_\chi$ — разбиение $V(G)$ на независимые множества.

Пусть для каждой $v \in V(G)$ задан список допустимых цветов L_v, где $|L_v| = \lceil \chi \ln|G| \rceil$.

Покажем, что можно правильно раскрасить G в цвета из списков.

Оценка $\chi_l(G)$ сверху через $\chi(G)$

Положим $L := \bigcup_{v \in V(G)} L_v$.

Построим множества $\widehat{L}_1, \dots, \widehat{L}_\chi$ по правилу:

- Для каждого элемента $l \in L$ подбрасываем χ-гранную кость, и «кладём» l в то из множеств $\widehat{L}_1, \dots, \widehat{L}_\chi$, номер которого выпал.

Получаем *случайное разбиение*:

$$L = \widehat{L}_1 \sqcup \cdots \sqcup \widehat{L}_\chi$$

Оценка $\chi_l(G)$ сверху через $\chi(G)$

Пусть $v \in V_i$ — фиксированная вершина.

Вероятность того, что $L_v \cap \hat{L}_i = \emptyset$, равна

$$\left(\frac{\chi-1}{\chi}\right)^{|L_v|} \leq \left(1 - \frac{1}{\chi}\right)^{\chi \cdot \ln|G|} < e^{-\ln|G|} = \frac{1}{|G|}$$

Вероятность того, что *хотя бы для одной* вершины окажется $L_v \cap \hat{L}_i = \emptyset$, не превосходит

$$\sum_{v \in V(G)} \left(\frac{\chi-1}{\chi}\right)^{|L_v|} < \sum_{v \in V(G)} \frac{1}{|G|} = 1$$

Оценка $\chi_l(G)$ сверху через $\chi(G)$

Итак, с *положительной* вероятностью при *случайном* разбиении $L = \hat{L}_1 \sqcup \dots \sqcup \hat{L}_\chi$ для всех $i = 1, \dots, \chi$ и для всех вершин $v \in V_i$ имеем

$$L_v \cap \hat{L}_i \neq \emptyset$$

Значит, *существует* разбиение с такими свойствами. Зафиксируем его.

Теперь для каждого i и каждой вершины $v \in V_i$ выберем цвет этой вершины из (непустого!) множества $L_v \cap \hat{L}_i$.

Оценка $\chi_l(G)$ сверху через $\chi(G)$

Для каждого i и каждой вершины $v \in V_i$ выберем цвет v из множества $L_v \cap \hat{L}_i$.

Так как этот цвет из L_v, то он допустимый для данной вершины v.

При этом если вершины v' и v'' смежны в G, то они принадлежат разным множествам V_i и V_j, а значит их цвета будут выбраны из непересекающихся множеств $\hat{L}_i$ и $\hat{L}_j$.

Оценка $\chi_l(G)$ снизу через $\delta(G)$

Теорема (N. Alon ’2000)

Для любого G при всех достаточно больших $\delta(G)$ выполнено

$$\chi_l(G) \geq \frac{1}{4} \cdot \log_2 \delta(G)$$

Доказательство:

Пусть $s := \left\lfloor \frac{1}{4} \cdot \log_2 \delta \right\rfloor$, и пусть $\mathcal{L} := \{1,2, \dots, s^2\}$.

Построим множество $B \subseteq V(G)$ по правилу:

- Каждая вершина G берётся в B с вероятностью $1/\sqrt{\delta}$.
- Список допустимых цветов для $u \in B$ выбирается равновероятно среди всех s-подмножеств в $\mathcal{L}$.

Оценка $\chi_l(G)$ снизу через $\delta(G)$: находим много «сложных» вершин

- $s \coloneqq \left\lfloor \frac{1}{4} \cdot \log_2 \delta(G) \right\rfloor$, $\mathcal{L} \coloneqq \{1,2,\dots,s^2\}$.
- Каждая вершина G берётся в B с вероятностью $1/\sqrt{\delta}$.
- Для $u \in B$ список L_u — случайное s-подмножество в $\mathcal{L}$.

Вершина $v \in V(G) \setminus B$ *сложная*, если для любого $L \subset \mathcal{L}$, такого, что $|L| \geq s^2/2$, найдётся $u \in N(v) \cap B$, такая, что $L_u \subseteq L$.

Для фиксированной $v \in V(G)$ имеем

$$\Pr\{v \text{ не сложная}\} \leq \frac{1}{\sqrt{\delta}} + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\delta}}\right)\binom{s^2}{s^2/2} \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\delta}} \cdot \frac{\binom{s^2/2}{s}}{\binom{s^2}{s}}\right)^{\delta}$$

Оценка $\chi_l(G)$ снизу через $\delta(G)$: находим много «сложных» вершин

В силу неравенства $(1-x) \geq 4^{-x}$ при $x \leq 1/2$, получаем

$$\frac{\binom{s^2/2}{s}}{\binom{s^2}{s}} = \prod_{k=0}^{s-1} \frac{s^2/2-k}{s^2-k} = 2^{-s} \cdot \prod_{k=0}^{s-1} \left(1 - \frac{k}{s^2-k}\right) \geq 2^{-s} \cdot 2^{\sum_{k=0}^{s-1} \frac{-2k}{s^2-k}}$$

$$\geq 2^{-s} \cdot 2^{\sum_{k=0}^{s-1} \frac{-2k}{s^2-s}} = 2^{-s-1}$$

Оценка $\chi_l(G)$ снизу через $\delta(G)$: находим много «сложных» вершин

$$\frac{\binom{s^2/2}{s}}{\binom{s^2}{s}} \geq 2^{-s-1}$$

Поэтому, пользуясь неравенством $(1-x) \leq e^{-x}$, получаем

$$\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\delta}} \cdot \frac{\binom{s^2/2}{s}}{\binom{s^2}{s}}\right)^{\delta} \leq \left(1 - 2^{-s-1} \cdot \delta^{-1/2}\right)^{\delta} < e^{-\delta^{1/2} 2^{-s-1}} \leq e^{-\delta^{1/4}/2}$$

Отсюда

$$\Pr\{v \text{ не сложная}\} < \frac{1}{\sqrt{\delta}} + e^{s^2} \cdot e^{-\delta^{1/4}/2} < \frac{1}{\sqrt{\delta}} + e^{\left(\frac{\log_2 \delta}{4}\right)^2 - \frac{\delta^{1/4}}{2}} < \frac{1}{4}$$

Оценка $\chi_l(G)$ снизу через $\delta(G)$: находим много «сложных» вершин

Для любой фиксированной $v \in V(G)$ выполнено неравенство

$$\Pr\{v \text{ не сложная}\} < 1/4$$

Отсюда

$$\mathbb{E}\ \#\text{несложных вершин} < |G|/4$$

По неравенству Маркова,

$$\Pr\{\text{менее половины вершин графа сложные}\} < 1/2$$

Оценка $\chi_l(G)$ снизу через $\delta(G)$

Каждая вершина попадает в B с вероятностью $1/\sqrt{\delta}$.

Отсюда $\mathbb{E}|B| = |G|/\sqrt{\delta}$ и по неравенству Маркова,

$$\Pr\left\{|B| > 2 \cdot |G|/\sqrt{\delta}\right\} < \frac{1}{2}$$

Значит, с вероятностью > 0 выполнены два условия:

- более половины вершин графа сложные,
- $|B| < 2 \cdot |G|/\sqrt{\delta}$

Зафиксируем такие B, множество списков цветов для вершин B,
и множество сложных вершин A, где $|A| \geq |G|/2$.

Оценка $\chi_l(G)$ снизу через $\delta(G)$

Зафиксируем до самого конца доказательства теоремы такие $A, B \subseteq V(G)$ и $\{L_u\}_{u \in B}$, для которых

- $|A| \geq |G|/2$
- $|B| \leq 2 \cdot |G|/\sqrt{\delta}$
- Для любой $v \in A$ и для любого $L \subset \mathcal{L}$, такого, что $|L| \geq s^2/2$, найдётся $u \in N(v) \cap B$, такая, что $L_u \subseteq L$.

Теперь *случайно выберем* для каждой $v \in A$ список L_v равновероятно среди всех s-подмножеств в $\mathcal{L}$.

Покажем, что с положительной вероятностью граф $G|_{A \cup B}$ не может быть правильно раскрашен в цвета из списков.

Оценка $\chi_l(G)$ снизу через $\delta(G)$

- $|A| \geq |G|/2, \quad |B| \leq 2 \cdot |G|/\sqrt{\delta}$
- $\forall v \in A$ и $\forall L \subset \mathcal{L}$ если $|L| \geq s^2/2$, то $\exists u \in N(v) \cap B: \quad L_u \subseteq L$.

Зафиксируем временно произвольные допустимые цвета вершин из B.

Пусть $v \in A$ и пусть $L_{N(v)}$ — множество всех цветов, встречающихся у соседей v в B.

Так как v сложная, то для любого $L \subset \mathcal{L}$, такого, что $|L| \geq s^2/2$, имеем $L_{N(v)} \cap L \neq \emptyset$. Отсюда $\left|L_{N(v)}\right| \geq s^2/2$.

Поэтому

$$\Pr\{\text{можно выбрать цвет для } v \text{ из } L_v\} \leq 1 - \frac{\binom{s^2/2}{s}}{\binom{s^2}{s}} \leq 1 - 2^{-s-1}$$

Оценка $\chi_l(G)$ снизу через $\delta(G)$

- $|A| \geq |G|/2, \quad |B| \leq 2 \cdot |G|/\sqrt{\delta}$
- $\forall v \in A$ и $\forall L \subset \mathcal{L}$ если $|L| \geq s^2/2$, то $\exists u \in N(v) \cap B\colon \;\; L_u \subseteq L$.

При *фиксированной* раскраске вершин из B для любой $v \in A$

$$\Pr\{\text{можно выбрать цвет для } v \text{ из } L_v\} \leq 1 - 2^{-s-1}$$

Отсюда при *фиксированной* раскраске вершин из B имеем

$$\Pr\{\exists\text{докраска для } A\} \leq (1 - 2^{-s-1})^{|G|/2} \leq e^{-|G| \cdot 2^{-s-2}}$$

Значит,

$$\Pr\{\exists\text{раскраска } B \text{ такая, что } \exists\text{докраска для } A\} \leq s^{|B|} \cdot e^{-|G| \cdot 2^{-s-2}}$$

$$\leq e^{\left(2 \cdot |G|/\sqrt{\delta}\right) \cdot \ln s} \cdot e^{-|G| \cdot 2^{-s-2}} < e^{|G| \cdot \left(\frac{2 \ln \ln \delta}{\sqrt{\delta}} - \delta^{1/4}/4\right)} < 1$$

Оценки хроматического индекса

- $\chi'(C_{2k}) = 2,\ \chi'(C_{2k+1}) = 3$
- Если H — подграф G, то $\chi'(G) \geq \chi'(H)$
- $\chi'(G) \geq \Delta(G)$
- $\chi'(G) \geq \frac{\|G\|}{\alpha'(G)}$, где $\alpha'(G)$ — размер наибольшего паросочетания в G

Теоремы Визинга и Кёнига

Теорема. (В.Г. Визинг ’1964)

$$\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1 \quad \text{для любого } G.$$

Теорема. (D. Kőnig ’1916)

$$\chi'(G) = \Delta(G) \quad \text{для любого } \textit{двудольного } G.$$

Полезные определения

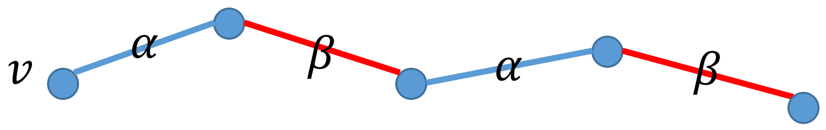
Вместо «правильная рёберная раскраска графа» будем говорить просто «*раскраска*».

Будем говорить, что цвет α *присутствует в вершине* $v \in V(G)$, если некоторое инцидентное v ребро имеет цвет α.

Будем говорить, что цвет α *отсутствует в* v,
если α в v не присутствует.

Чередующиеся α/β-цепи

Если в раскраске графа цвет α присутствует в v, а β отсутствует в v, то однозначно определена *максимальная* цепь, начинающаяся в v, рёбра которой имеют цвета α и β попеременно:



Такую цепь будем называть α/β*-цепью из* v.

Если в раскраске цвета рёбер любой α/β-цепи поменять друг с другом, раскраска останется правильной.

Доказательство теоремы Кёнига

Теорема. (D. Kőnig’1916)
$\chi'(G) = \Delta(G)$ для любого двудольного G.

Доказательство: индукция по $\|G\|$.
Пусть G — двудольный граф, $\|G\| > 1$.
Пусть xy — произвольное ребро в G.

По предположению, найдётся раскраска ψ рёбер графа $G' = (G - xy)$ в $\Delta(G)$ цветов.

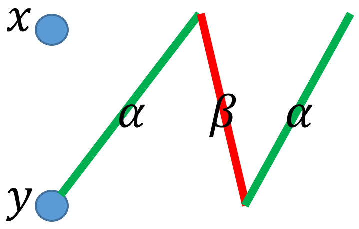
Т.к. $d_{G'}(x) < \Delta(G)$, то в раскраске ψ в вершине x отсутствует некоторый цвет α.
Если α отсутствует и в y, то покрасим xy в цвет α, тем самым получим раскраску G.

Доказательство теоремы Кёнига

В раскраске ψ в вершине x отсутствует некоторый цвета α.

Если α присутствует в y, рассмотрим цвет β, отсутствующий в y и рассмотрим α/β-цепь из y в графе G'.

Эта цепь не содержит x в силу двудольности G:



Поменяв на этой цепи цвета α и β местами, получим раскраску G', в которой цвет α отсутствует в x и y.
И теперь можно покрасить ребро xy в цвет α.

Доказательство теоремы Визинга

Теорема Визинга. (В.Г. Визинг ’1964)

$$\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1 \quad \text{для любого } G.$$

Доказательство: индукция по $\|G\|$.
Если $\|G\| = 0$, то утверждение очевидно.

Пусть $\|G\| > 0$ и теорема выполнена для всех графов, число рёбер в которых меньше $\|G\|$.

По предположению, для любого $e \in E(G)$ рёбра графа $(G - e)$ можно правильно раскрасить в цвета $\{1, \dots, \Delta + 1\}$, где $\Delta = \Delta(G)$.

При этом в каждой вершине будет отсутствовать хотя бы один из цветов $1, \dots, \Delta + 1$.

Доказательство теоремы Визинга

Докажем от противного, что у G есть раскраска.

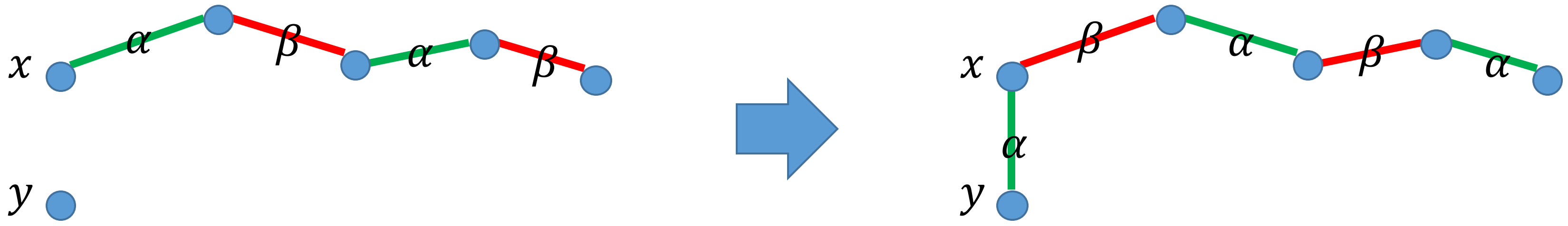
Допустим, что это не так.

Тогда для любого ребра $xy \in E(G)$ в раскраске графа $(G - xy)$ никакой цвет не может отсутствовать в x и y одновременно (иначе ребро xy можно окрасить в этот цвет и получить раскраску G).

Доказательство теоремы Визинга

Также, если цвет β отсутствует в x, а цвет α отсутствует в y, то α/β-цепь из x заканчивается в вершине y.

Иначе мы могли бы поменять цвета на α/β-цепи местами и покрасить xy в цвет α:



Доказательство теоремы Визинга

Пусть x — произвольная вершина графа G, и пусть y_0 — любой сосед x.

По предположению индукции, существует раскраска ψ_0 графа $G_0 = G - xy_0$.

Пусть $y_0, y_1, \dots, y_k$ — максимальная последовательность соседей x, обладающая свойством: «при всех $i = 1, \dots, k$ цвет $\psi_0(xy_i)$ отсутствует в вершине y_{i-1}».

Доказательство теоремы Визинга: последовательность специальных раскрасок

Пусть $y_0, y_1, \dots, y_k$ — максимальная последовательность соседей x, обладающая свойством: «при всех $i = 1, \dots, k$ цвет $\psi_0(xy_i)$ отсутствует в вершине y_{i-1}».

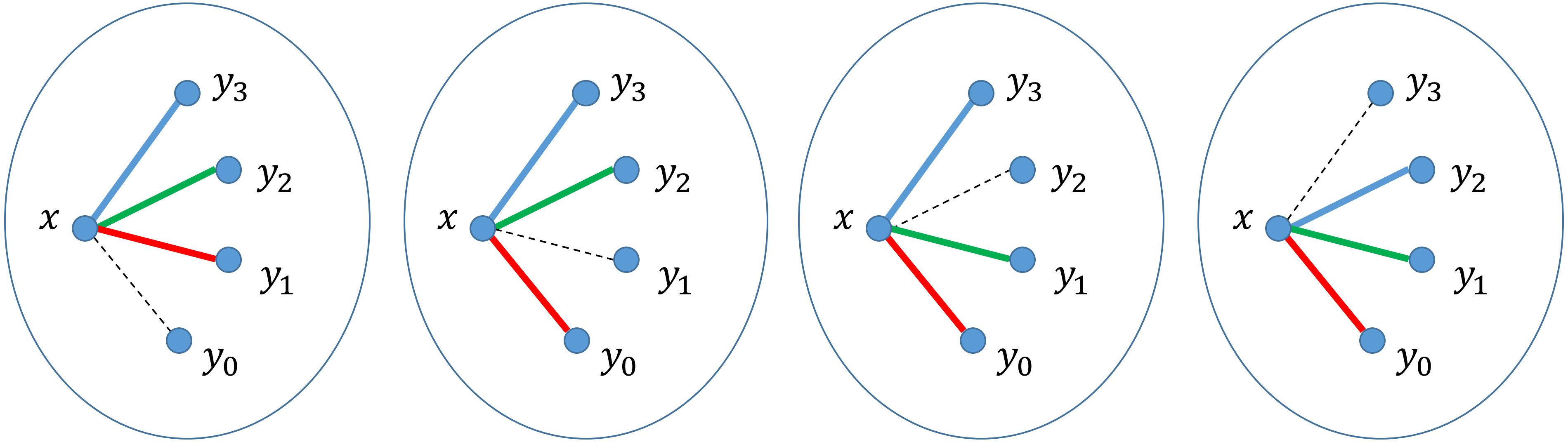
По раскраске ψ_0 графа G_0 можно построить раскраски ψ_i графов $G_i = (G - xy_i)$ по правилу:

$$\psi_i(e) = \begin{cases} \psi_0(xy_{j+1}), \text{если } e = xy_j \text{ и } j < i \\ \psi_0(e) \quad \text{для остальных рёбер} \end{cases}$$

Доказательство теоремы Визинга: последовательность специальных раскрасок

$$\psi_i(e) = \begin{cases} \psi_0(xy_{j+1}), \text{если } e = xy_j \text{ и } j < i \\ \psi_0(e) \quad \text{для остальных рёбер} \end{cases}$$

ψ_0 — раскраска G_0: ψ_1 — раскраска G_1: ψ_2 — раскраска G_2: ψ_3 — раскраска G_3:



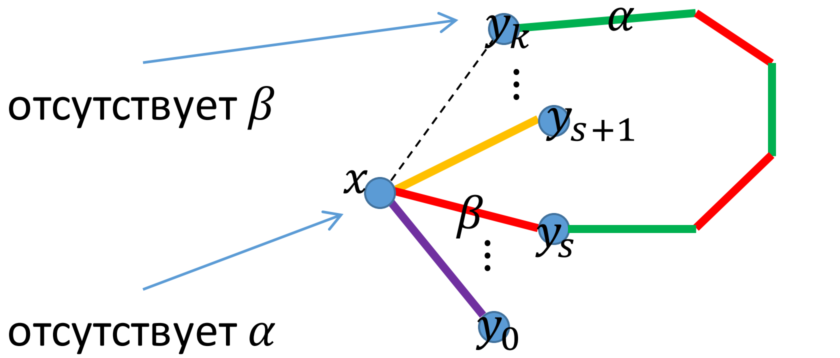
Цвета, отсутствующие в x в раскраске ψ_0, будут отсутствовать и в раскраске ψ_i. То же верно и для вершин $y_i, \ldots, y_k$.

Доказательство теоремы Визинга: вывод противоречия

Пусть α и β — какие-нибудь цвета, отсутствующие соответственно в x и y_k в раскраске ψ_0 (а значит, и в любой ψ_i).

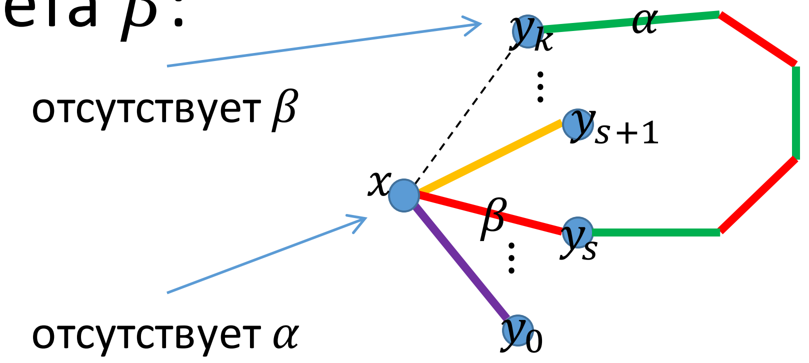
Тогда в раскраске ψ_k графа G_k α/β-цепь из y_k заканчивается в вершине x на ребре цвета β.

Из максимальности последовательности $y_0, y_1, \dots, y_k$ следует, что найдётся индекс $s \in \{0, \dots, k-1\}$, для которого $\psi_k(xy_s) = \beta$.



Доказательство теоремы Визинга: вывод противоречия

В раскраске ψ_k графа G_k α/β-цепь из y_k заканчивается в вершине x на ребре xy_s цвета β:



Но тогда в раскраске ψ_s графа G_s α/β-цепь из y_s заканчивается в вершине y_k, не доходя до x. Противоречие.