Дискретные структуры

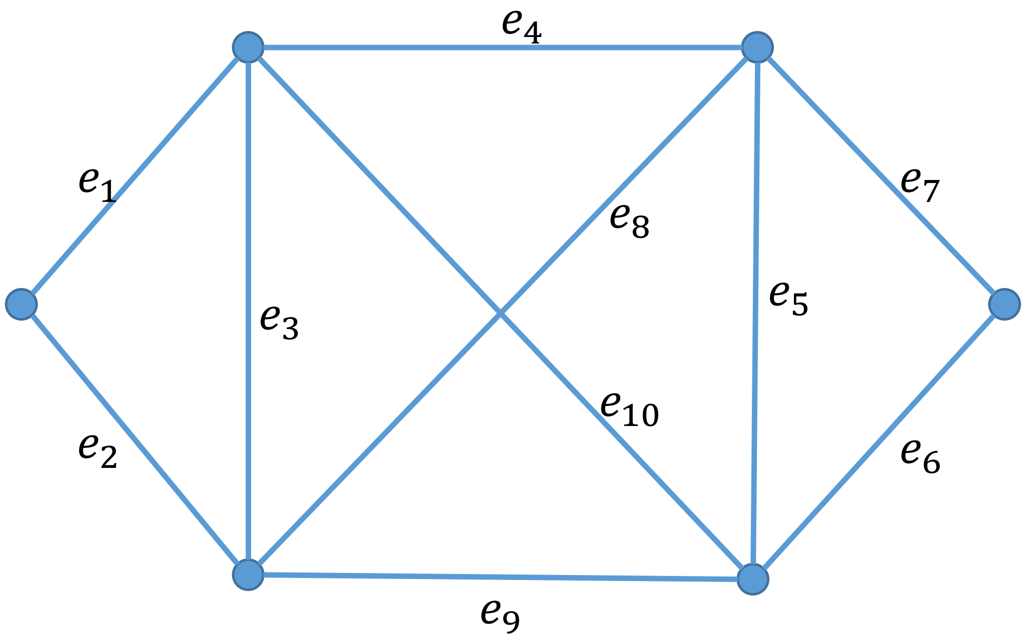
осень 2013

Александр Дайняк

www.dainiak.com

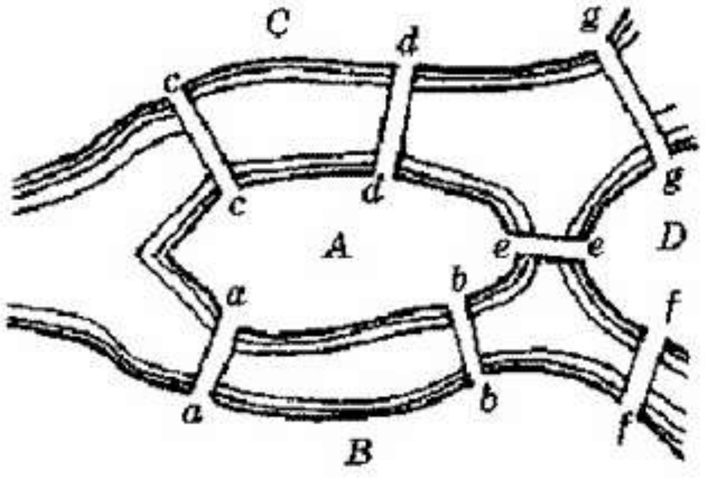
Эйлеровы циклы

- Эйлеров цикл — это цикл, проходящий через каждое ребро графа ровно по одному разу
- *Эйлеров граф* — это граф, в котором есть эйлеров цикл



Задача Эйлера

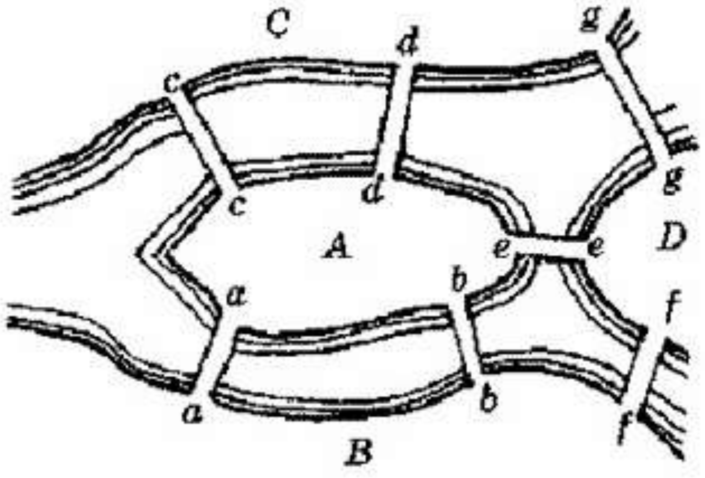
- Можно ли пройти каждый мост Кёнигсберга ровно по одному разу, вернувшись в отправную точку?

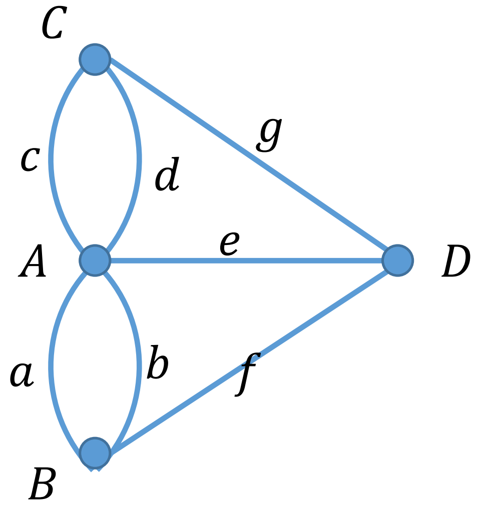


Задача Эйлера

Условия существования эйлерова цикла:

- Граф должен быть связным
- Степени всех вершин должны быть чётными





Значит, по Кёнигсбергу так не погуляешь.

Задача о почтальоне

- Почтальон должен выйти из здания почтового отделения, развезти корреспонденцию по всем улицам города, и вернуться обратно на почту.
- При каких условиях почтальону не придётся дважды проезжать по одной и той же улице?
- Если в «графе улиц» есть эйлеров цикл!

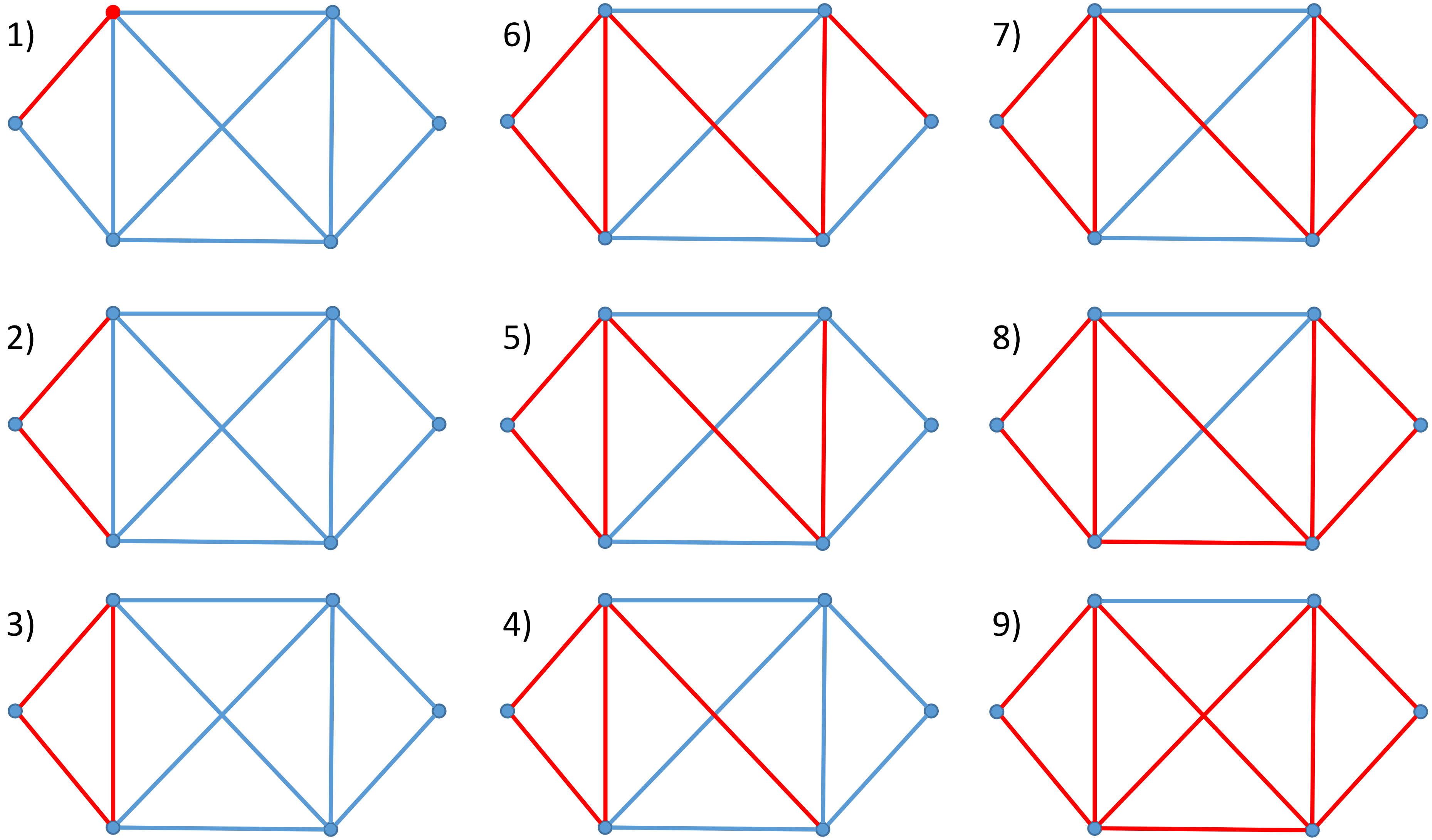
Алгоритм Флёри

Терема Эйлера. Условия связности графа и чётности степеней являются необходимыми и достаточными для эйлеровости графа.

Алгоритм Флёри:

- Стартуем из любой вершины графа.
- На каждом шаге проходим ещё не пройденное ребро и удаляем его из графа
- Идём по мосту только если нет другой возможности
- Если идти стало некуда, значит эйлеров цикл только что построен

Алгоритм Флёри



Алгоритм Флёри

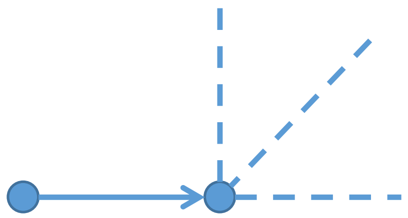
Лемма. В связном графе, степень каждой вершины которого чётна, нет мостов.

Доказательство. Если бы мост был, то компоненты графа, получающегося после удаления моста, имели бы ровно по одной вершине нечётной степени — противоречие.

Алгоритм Флёри

Доказательство корректности алгоритма Флёри

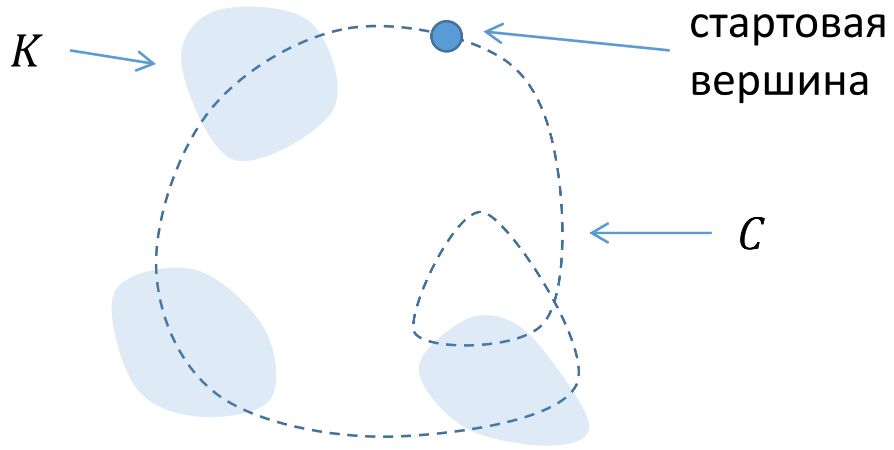
- *Построенный алгоритмом маршрут является циклом.*
  Если мы попали в вершину, из которой больше некуда идти,
  то значит к данному моменту мы удалили из графа нечётное
  число рёбер у этой вершины. Это возможно, только если вершина
  является стартовой.



Алгоритм Флёри

Доказательство корректности алгоритма

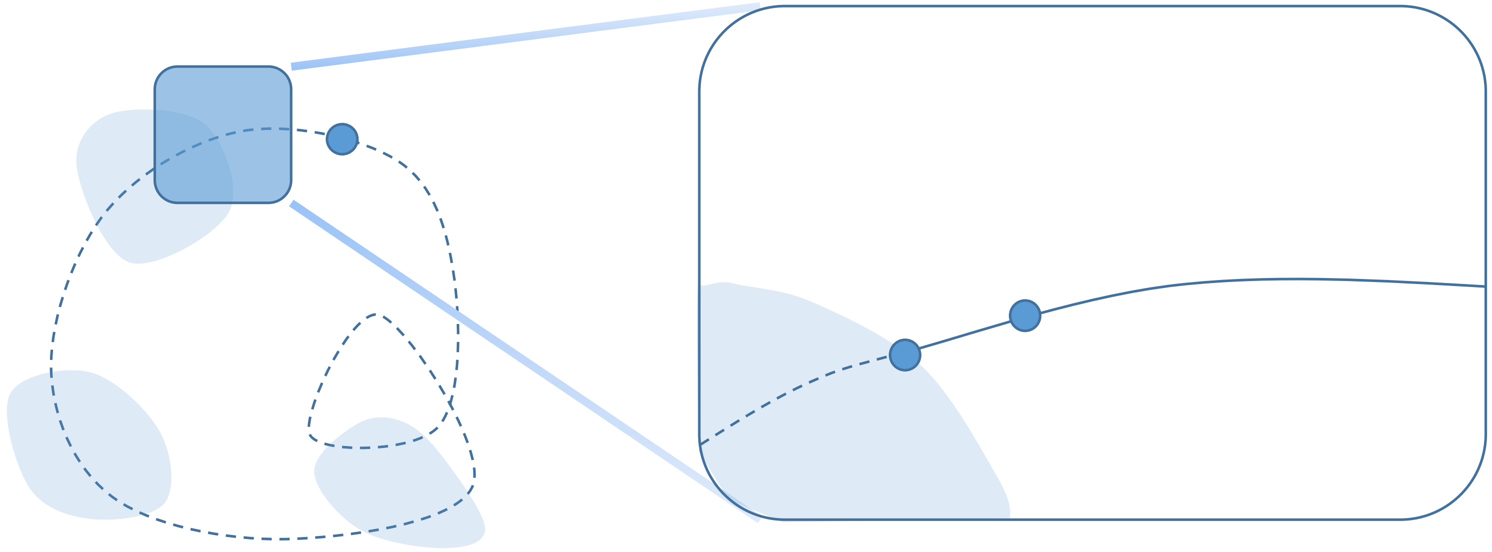
- *Построенный алгоритмом цикл C покрывает все рёбра исходного графа G.*
  Допустим противное. Тогда пусть K —компонента графа $(G - C)$, которую алгоритм посещал последней до возврата в стартовую вершину:



Алгоритм Флёри

Посмотрим, как выглядел граф в момент, когда алгоритм покидал компоненту K.

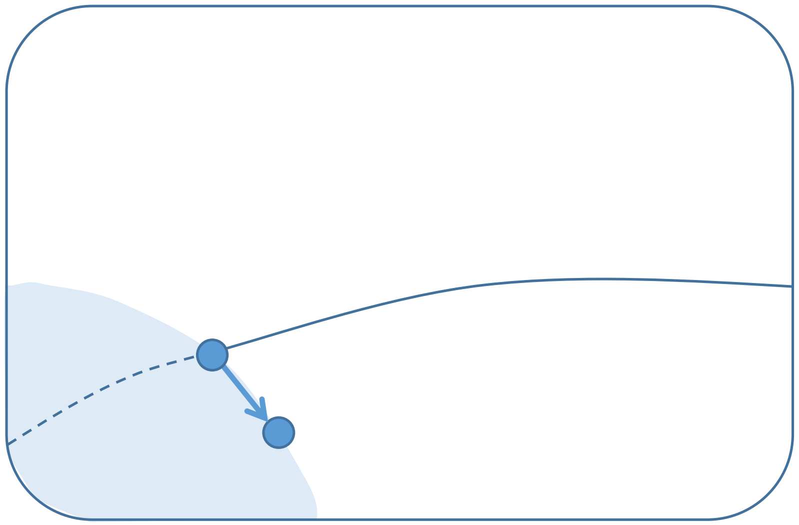
Ребро, по которому алгоритм вышел из K, на тот момент являлось мостом!



Алгоритм Флёри

В то же время алгоритм имел возможность пойти по какому-нибудь ребру в K, а такое ребро мостом не было.

Получаем противоречие с определением алгоритма.



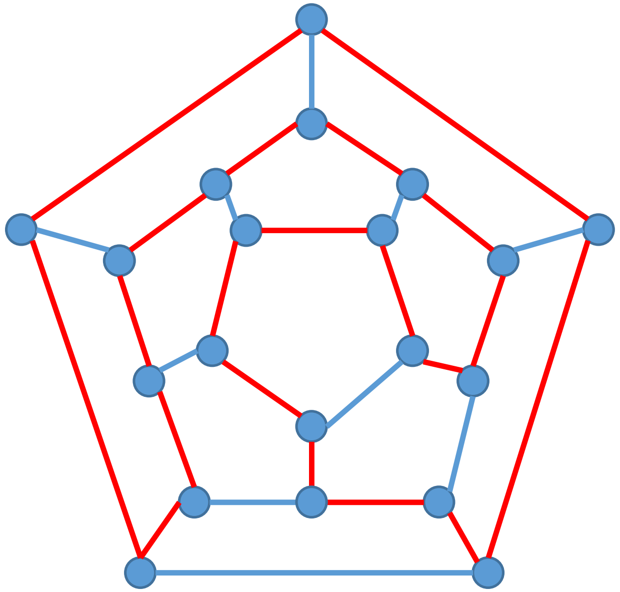
Теорема Эйлера для орграфов

Теорема.
В орграфе существует эйлеров цикл т. и т.т., когда

- орграф сильно связный (из любой вершины можно дойти в любую другую, проходя дуги в правильном направлении),
- $d^+(v) = d^-(v)$ для любой вершины v

Гамильтоновы циклы

- *Гамильтонов цикл* — через каждую вершину графа проходит ровно по одному разу
- *Гамильтонов граф* — граф, в котором есть гамильтонов цикл
- *Гамильтонова цепь* — это цепь, проходящая через каждую вершину графа ровно по одному разу



Гамильтоновы циклы

- В отличие от эйлеровых циклов, пока нет ни хороших критериев гамильтоновости, ни быстрых алгоритмов построения г.ц.
- Есть некоторые достаточные условия существования гамильтоновых циклов
  В основном, утверждения типа «Если граф «достаточно плотный», то в нём есть г.ц.»

Гамильтоновы циклы

Теорема Оре.
Если для любых несмежных $u, v \in V(G)$ выполнено
$$\deg u + \deg v \geq |G|$$
то G гамильтонов.

Доказательство: от противного.

Пусть G негамильтонов. Б.о.о. будем считать, что в G есть гамильтонова *цепь*.

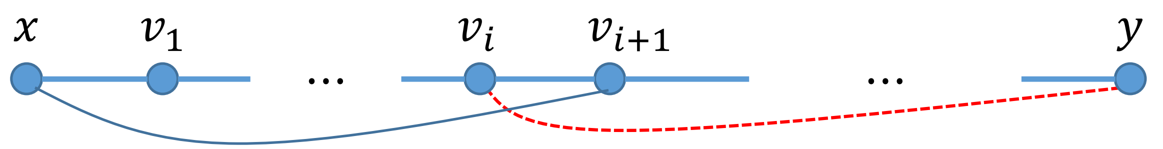
(Можно подобавлять рёбра в G, пока она не появится. Степени вершин при этом могут только увеличиться.)

Гамильтоновы циклы

Пусть x и y — концы гамильтоновой цепи,
а $v_1, \dots, v_{n-2}$ — внутренние вершины цепи.

Т. к. в G нет гамильтонова цикла, то

$$\forall i \quad \left(v_{i+1}x \in E(G) \quad \Rightarrow \quad v_i y \notin E(G)\right)$$



Отсюда $\deg y \leq n - 1 - \deg x$.

Значит, $\deg x + \deg y < n$, то есть для графа G условия Оре нарушены.

Универсальные последовательности

- Универсальная двоичная последовательность порядка n — это такая последовательность, в которой в качестве подслов встречаются всевозможные двоичные слова длины n
- Пример универсальной последовательности порядка 2:

$$01001011$$

- С существованием проблем нет: последовательность длины $n \cdot 2^n$ всегда есть. Но это не предел мечтаний, есть короче:

$$00110$$

Универсальные последовательности

- Насколько короткой может быть универсальная последовательность порядка n? Не меньше, чем $2^n + n - 1$:

$$a_1 a_2 a_3 \dots \dots \dots \dots a_{2^n} \dots a_{2^n+n-1}$$

Разные слова должны начинаться с разных позиций

Последнее слово начинается с позиции 2^n и заканчивается в позиции $2^n + n - 1$

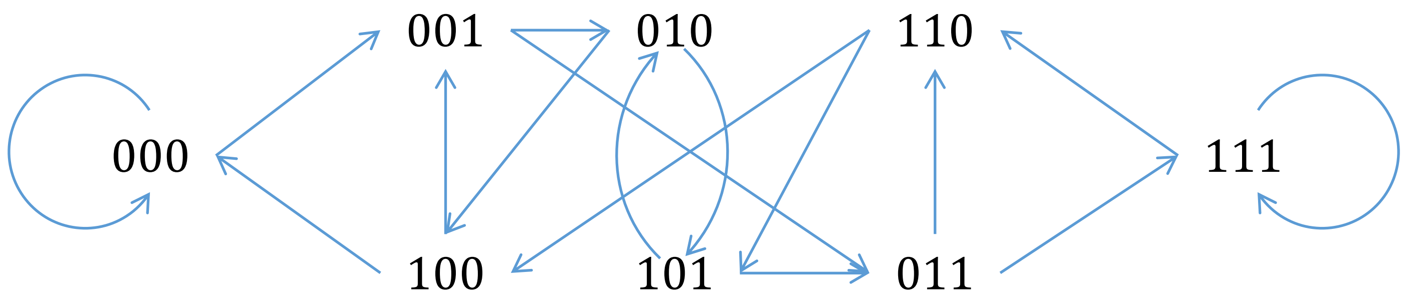
- Оказывается, $2^n + n - 1$ всегда достижимо.
- Такие универсальные последовательности минимальной длины называются последовательностями Де Брёйна

Графы Де Брёйна

Граф Де Брёйна порядка n:

- V — все двоичные слова длины $(n-1)$
- E — множество всех пар вида (aw, wb),
  где w — слово длины $(n-2)$, а a и b — символы.

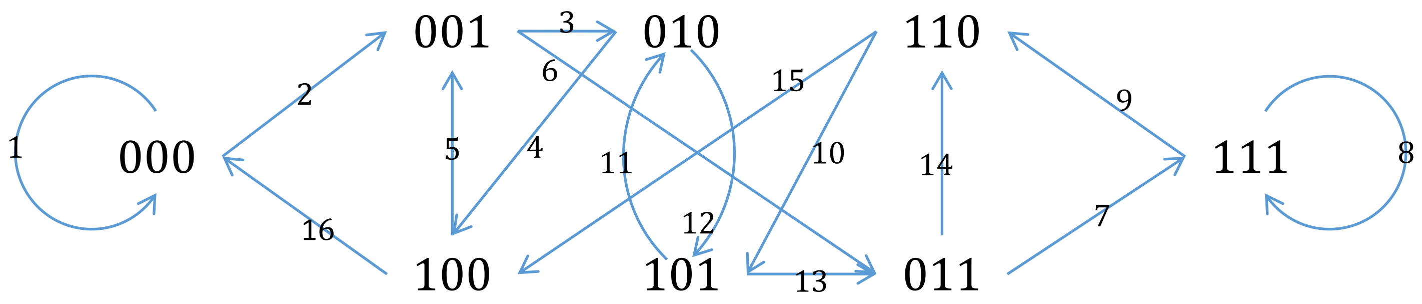
Пример графа Де Брёйна порядка 4:



Графы Де Брёйна

Утверждение.

Эйлеров цикл в графе Де Брёйна порождает последовательность Де Брёйна.



Соответствующая последовательность:

$$000010011110101100 0$$

На заметку

- Переход к «максимальному» графу полезен при доказательстве теорем, поскольку придаёт графу дополнительные свойства
- Эйлеровы и гамильтоновы циклы — похожие определения, но принципиально разная сложность
- Графы могут возникать из негеометрических комбинаторных задач и успешно использоваться при их решении

Задача Турана

- Пусть у нас есть пустой граф $G \coloneqq \overline{K}_n$.
- Будем добавлять в G рёбра по одному.
- На каком шаге в графе G точно появится треугольник? А клика на k вершинах?

Иными словами,

- *Сколько рёбер должно быть* в графе на n вершинах, чтобы он *наверняка содержал* клику на k вершинах?
- *Как много рёбер может быть* в графе на n вершинах, *не содержащем* клику на k вершинах?

Задача Турана

Задача Турана — типичный пример задачи из *экстремальной теории графов*.

Общая постановка экстремальных задач обычно такая:

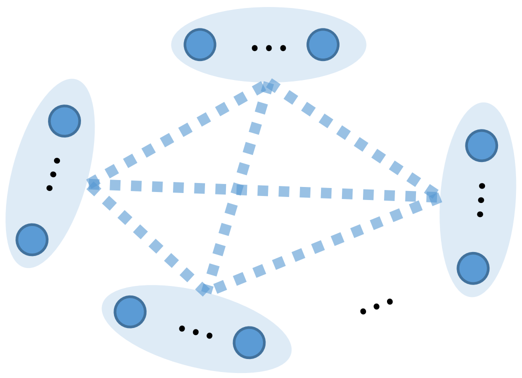
- Как много/мало рёбер/вершин/… может быть в графе, имеющем заданные свойства?
- Как «выглядят» графы, на которых достигаются экстремумы?

Теорема Турана

Теорема. (Turán ’1941 — читается «Ту́ран»**)**
Пусть G — граф на n вершинах, и $\omega(G) \leq k$. И пусть G имеет наибольшее число рёбер среди всех графов с указанными свойствами.

Тогда G является *полным* k*-дольным графом*, в котором мощности любых двух долей отличаются *не более чем на* 1.

Такие графы называются *графами Турана*.



Доказательство теоремы Турана: доказываем, что граф полный многодольный

Докажем, что G полный k-дольный.

Очевидно, что $\omega(G) = k$ (иначе в G можно было бы добавить произвольное ребро, сохранив неравенство $\omega(G) \leq k$).

Далее докажем, что для любых $u, v, w \in V(G)$ если $uv, vw \notin E(G)$, то $uw \notin E(G)$.

Допустим, это не так, и нашлись u, v, w, такие, что $uv, vw \notin E(G)$ и $uw \in E(G)$. Покажем, что тогда число рёбер в G можно увеличить.

Доказательство теоремы Турана: доказываем, что граф полный многодольный

Допустим, что $uv, vw \notin E(G)$ и $uw \in E(G)$.

Случай 1: $d(v) < d(u)$.
Тогда рассмотрим граф G', для которого

$$E(G') \coloneqq E(G - v) \cup \{vx \mid x \in N(u) \text{ в } G\}$$

В G' по-прежнему нет клик размера $(k+1)$, при этом
$\|G'\| = \|G\| - d(v) + d(u) > \|G\|$,
— противоречие с максимальностью $\|G\|$.

Доказательство теоремы Турана: доказываем, что граф полный многодольный

Случай 2: $d(v) < d(w)$ — аналогичен *случаю 1*.
Случай 3: $d(v) \geq d(u)$ и $d(v) \geq d(w)$.
Тогда рассмотрим граф G', для которого

$$E(G') \coloneqq E(G - \{u, w\}) \cup \{ux, wx \mid x \in N(v) \text{ в } G\}$$

В G' по-прежнему нет клик размера $(k + 1)$, а рёбер строго больше, чем в G:

$$\|G'\| = \|G\| - (d(u) + d(w) - 1) + 2d(v) > \|G\|$$

Доказательство теоремы Турана: доказываем, что граф полный многодольный

Мы доказали транзитивность несмежности:
для любых $u, v, w \in \mathrm{V}(G)$ если $uv, vw \notin E(G)$, то $uw \notin E(G)$.

Также несмежность рефлексивна и симметрична — значит, это отношение эквивалентности!

Множество вершин графа разбивается на классы эквивалентности (независимые множества). При этом вершины из различных классов неэквивалентны (то есть смежны).

Это и значит, что наш граф полный многодольный.

Очевидно, что долей ровно k.

Доказательство теоремы Турана: «почти-равномощность» долей

Осталось доказать «почти-равномощность» долей графа G.

Положим $n_i \coloneqq |V_i|$. Имеем

$$\|G\| = \sum_{1\le i<j\le k} n_i n_j = \frac{1}{2}\Big(\left(\sum n_i\right)^2 - \sum n_i^2\Big)$$

Следовательно, чтобы величина $\|G\|$ была максимальной, нужно, чтобы сумма $\sum_i n_i^2$ была минимальна при ограничении $\sum_i n_i = |G|$.

Покажем, что $\left|n_i - n_j\right| \le 1$ для любых i и j.

Доказательство теоремы Турана: «почти-равномощность» долей

Покажем, что $|n_i - n_j| \le 1$ для любых i и j.

Допустим, что это не так: например, $n_1 - n_2 \geq 2$.

Тогда рассмотрим набор чисел $n_1', \dots, n_k'$, где $n_1' \coloneqq n_1 - 1$, $n_2' \coloneqq n_2 + 1$, и $n_i' \coloneqq n_i$ при $i > 2$.

Имеем

$$\sum n_i^2 - \sum (n_i')^2 = n_1^2 + n_2^2 - (n_1 - 1)^2 - (n_2 + 1)^2 = \\ = 2(n_1 - n_2 - 1) > 0,$$

что противоречит максимальности $\|G\|$.

Теорема Эрдёша—Стоуна

Можно обобщить вопрос Турана с клик на произвольные подграфы:

- Каково максимальное число рёбер в графе на n вершинах, не содержащем заданного подграфа H?
  Обозначим это число $ex_H(n)$.

Теорема (Erdős, Stone, Simonovits ’1946, 1966)
Для любого фиксированного H при $n \to \infty$

$$\frac{ex_H(n)}{n(n-1)/2} \to \frac{\chi(H)-2}{\chi(H)-1}$$