Дискретные структуры

МФТИ, осень 2013

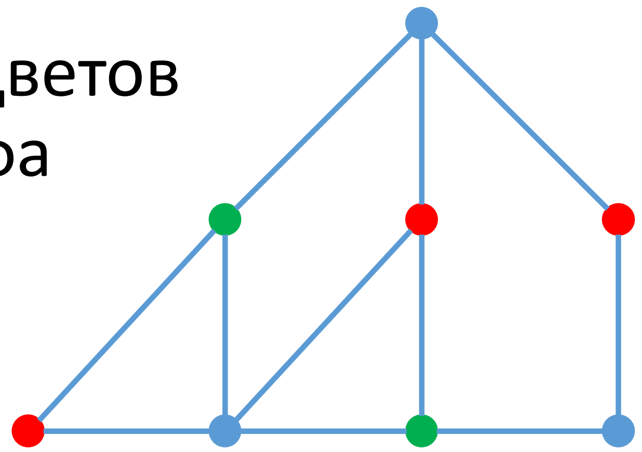
Александр Дайняк

www.dainiak.com

Раскраски вершин и рёбер

- *Раскраска вершин* (мульти)графа G в (не более чем) k цветов — это отображение ϕ из $V(G)$ в некоторое k-элементное множество *цветов*
- Вершинная раскраска ϕ называется *правильной*, если
$$\forall v' \forall v'' \left(v'v'' \in E(G) \Rightarrow \phi(v') \neq \phi(v'')\right)$$

Правильная раскраска вершин графа в k цветов задаёт разбиение множества вершин графа на k независимых множеств.

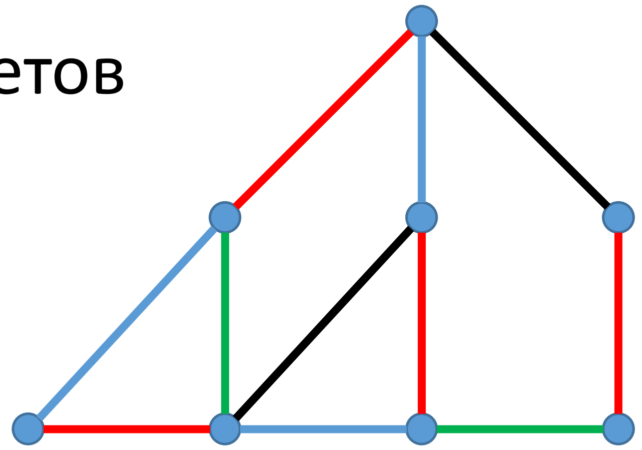


Раскраски вершин и рёбер

- *Раскраска рёбер* (мульти)графа G в (не более чем) k цветов — это отображение ψ из $E(G)$
  в некоторое k-элементное множество
- Рёберная раскраска ψ называется *правильной*, если

$$\forall e' \forall e'' \left(e' \cap e'' \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad \psi(e') \neq \psi(e'') \right)$$

Правильная раскраска рёбер графа в k цветов задаёт разбиение множества рёбер графа на k паросочетаний.



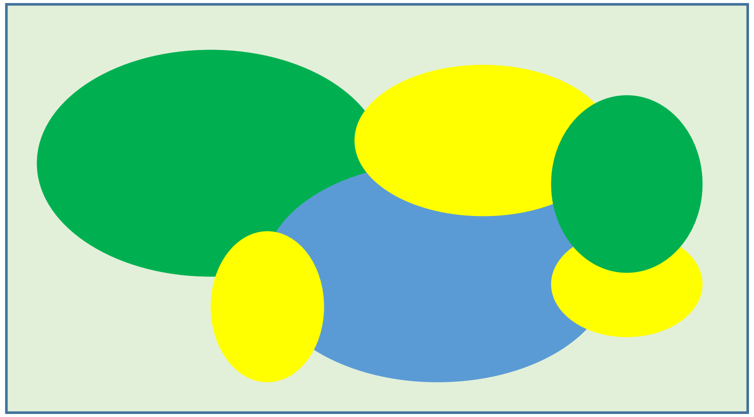
Примеры задач о раскраске

- Сотовый оператор установил в городе свои антенны. Некоторые пары антенн расположены близко друг к другу и вынуждены использовать разные частоты.
  Сколько радиочастот придётся выкупить сотовому оператору у городских властей?
- Лидеры стран G-20 собрались на саммит. Некоторые пары участников хотят побеседовать друг с другом наедине. У каждого участника на одну такую встречу уходит один день.
  Во сколько дней можно уложить саммит?

Примеры задач о раскраске

Исторически первая задача о раскраске:

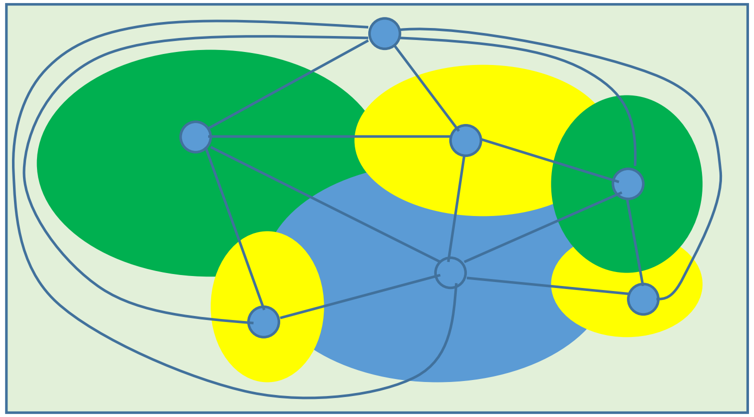
- Сколько цветов достаточно использовать в типографии, чтобы можно было напечатать любую географическую карту (так, чтобы граничащие друг с другом страны не сливались на карте)?



Примеры задач о раскраске

Задачу о раскраске карт можно переформулировать на языке раскрасок, рассмотрев планарный граф, *двойственный* карте:

- Сколькими цветами можно правильно раскрасить любой планарный граф?



Хроматическое число

- *Хроматическое число* $\chi(G)$ — это минимальное число цветов, в которое можно правильно раскрасить вершины графа G.
- *Хроматический индекс* $\chi'(G)$ — это минимальное число цветов, в которое можно правильно раскрасить рёбра графа G.

Рассмотренные ранее «жизненные» задачи сводятся к нахождению хроматического числа или хроматического индекса некоторых графов.

Хроматическое число

Хроматическое число — это минимальное количество независимых множеств, на которое можно разбить множество вершин графа.

Хроматический индекс — это минимальное количество паросочетаний, на которое можно разбить множество рёбер графа.

Нижние оценки хроматического числа

- $\chi(C_{2k}) = 2,\ \chi(C_{2k+1}) = 3$
- $\chi(K_n) = n$
- Если H — подграф G, то $\chi(G) \geq \chi(H)$
- $\chi(G) \geq \omega(G)$
- $\chi(G) \geq \frac{|V(G)|}{\alpha(G)}$, поскольку $|V(G)| \leq \chi(G) \cdot \alpha(G)$

«Жадный» алгоритм раскраски

Упорядочиваем вершины графа: $v_1, \dots, v_{|V|}$.

for $i \coloneqq 1$ to $|V|$:

$\quad \text{badColors} \coloneqq \left\{\text{color}\left(v_j\right) \mid j < i \text{ и } v_j v_i \in E\right\}$

$\quad \text{color}(v_i) \coloneqq \min(\mathbb{N} \setminus \text{badColors})$

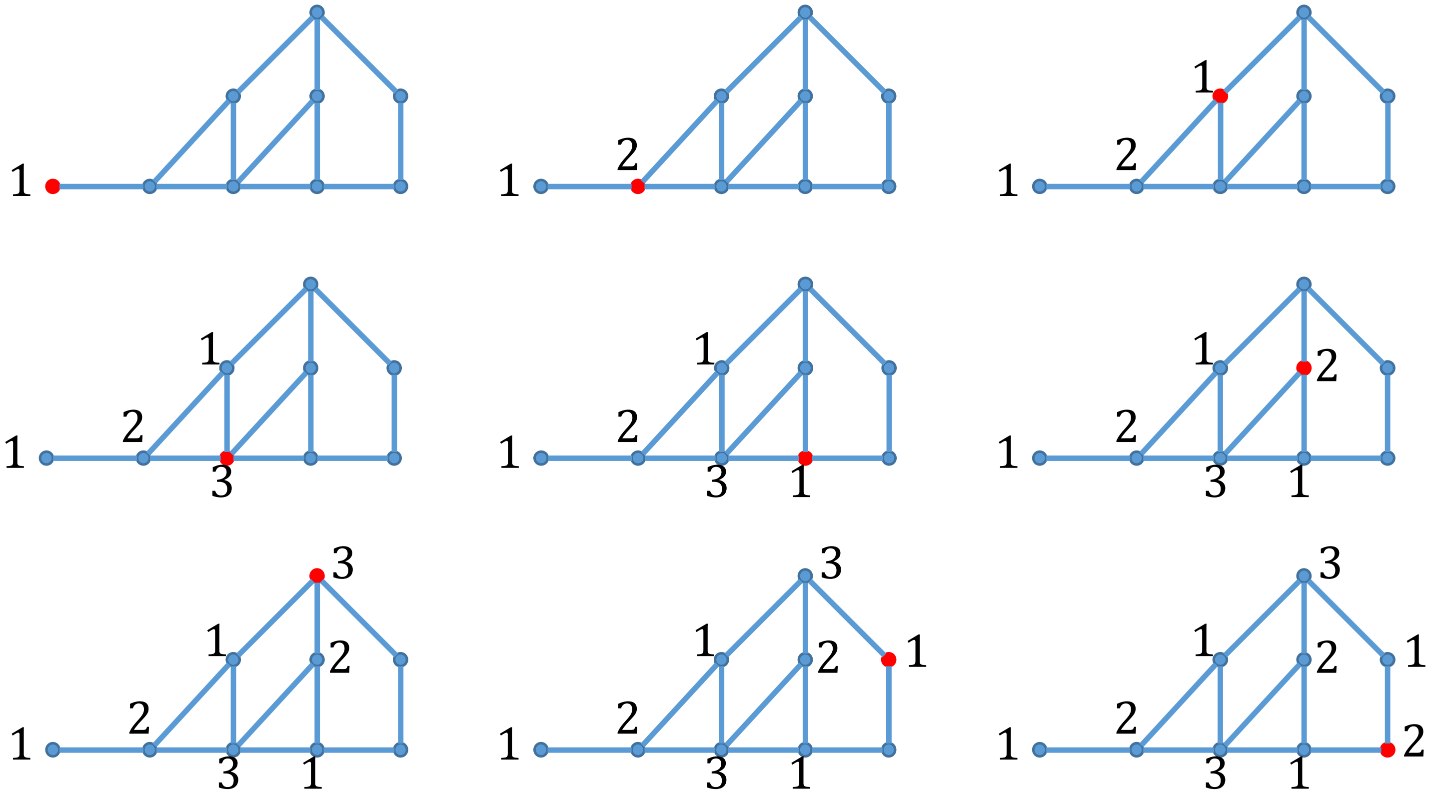
(Т.е. при раскраске очередной вершины используется первый по счёту цвет, отсутствующий среди соседей вершины.)

«Жадный» алгоритм раскраски

for $i \coloneqq 1$ to $|V|$:

  $\text{badColors} \coloneqq \{\text{color}(v_j) \mid j < i \text{ и } v_j v_i \in E\}$

  $\text{color}(v_i) \coloneqq \min(\mathbb{N} \setminus \text{badColors})$



«Жадный» алгоритм раскраски

for $i \coloneqq 1$ to $|V|$:

$\quad \text{badColors} \coloneqq \left\{\text{color}\left(v_j\right) \mid j < i \text{ и } v_j v_i \in E\right\}$

$\quad \text{color}(v_i) \coloneqq \min(\mathbb{N} \setminus \text{badColors})$

Утверждение.
При любом упорядочении вершин графа указанный алгоритм строит правильную раскраску в не более чем $\left(1 + \Delta(G)\right)$ цветов.
(Т.к. всегда выполнено $|\text{badColors}| \leq \Delta(G)$.)

«Жадный» алгоритм раскраски

Утверждение-упражнение.
Качество раскраски, построенной алгоритмом, сильно зависит от упорядочения вершин:

Всегда существует упорядочение, при котором алгоритм использует ровно $\chi(G)$ цветов.

Для любого k можно предъявить *двудольный* граф G и такое упорядочение его вершин, что раскраска, построенная алгоритмом, будет задействовать более k цветов.

Теорема Брукса

Теорема (без доказательства). (R. L. Brooks)
Пусть граф G

- связен,
- не является полным,
- не является циклом нечётной длины.

Тогда
$$\chi(G) \leq \Delta(G)$$

О нижних оценках χ

- Нижняя оценка $\chi(G)$ через $\alpha(G)$ оказывается во многих случаях гораздо лучше, чем оценка через $\omega(G)$
- $\chi(G)$ в общем случае никак нельзя оценить снизу через $\Delta(G)$. Например, для $K_{n,n}$ имеем $\Delta\left(K_{n,n}\right) = n,$ но $\chi\left(K_{n,n}\right) = 2.$

Оценки хроматического индекса

- $\chi'(C_{2k}) = 2,\ \chi'(C_{2k+1}) = 3$
- Если H — подграф G, то $\chi'(G) \geq \chi'(H)$
- $\chi'(G) \geq \Delta(G)$
- $\chi'(G) \geq \frac{|E(G)|}{\alpha'(G)}$, где $\alpha'(G)$ — размер наибольшего паросочетания в G

Теорема Визинга

Теорема (без доказательства). (В. Г. Визинг)
Для любого G выполнено неравенство
$$\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$$

На заметку

- Жадный алгоритм: простой, иногда даёт хороший результат, но может и не повезти
- $\chi(G)$ — есть оценка сверху через $\Delta(G)$, нет общей оценки снизу
  $\chi'(G)$ — есть оценки сверху и снизу через $\Delta(G)$
- Оценка $\chi(G)$ через $\alpha(G)$ часто лучше, чем через $\omega(G)$

Укладки графов

Укладкой графа на поверхности называется сопоставление

- вершинам графа — точек поверхности
- рёбрам графа — гладких кривых без самопересечений

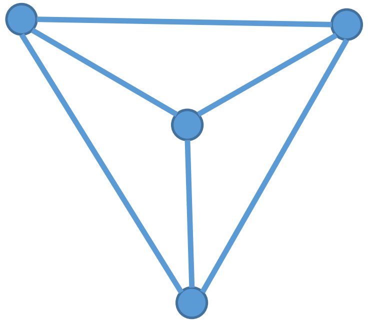
так, чтобы

- для любого ребра xy концы соответствующей кривой совпадали с точками, сопоставленными вершинам x и y,
- кривые, соответствующие рёбрам, не пересекались (за исключением, быть может, своих концов).

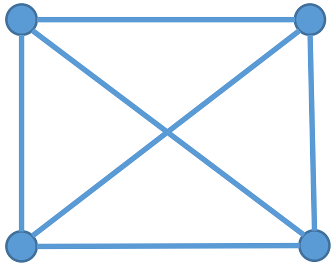
Укладки графов

Пример укладок на плоскости:

- Укладка графа K_4:

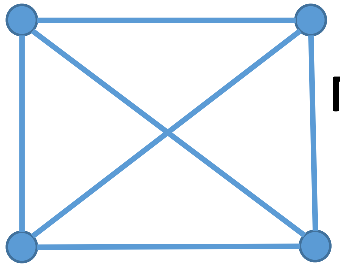


- Изображение графа K_4, не являющееся укладкой:



Планарные графы

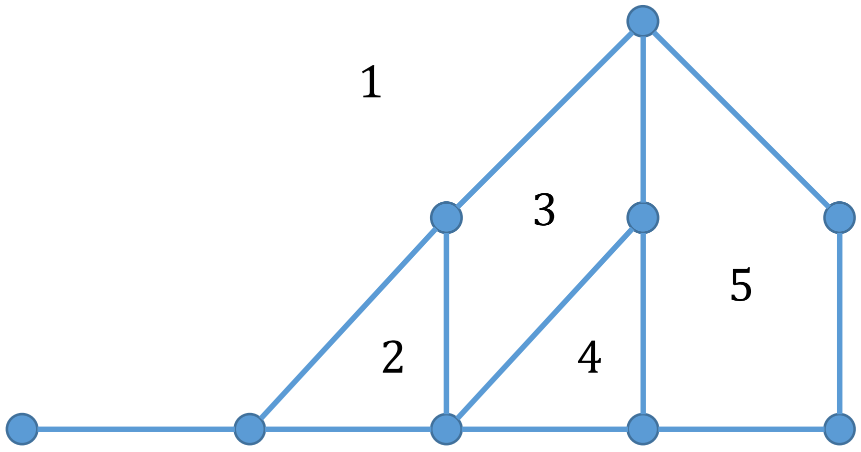
Планарный граф — это граф, для которого существует плоская укладка.

Например, граф  планарный

Планарные графы

Грань укладки — это область поверхности, отделяемая укладкой.

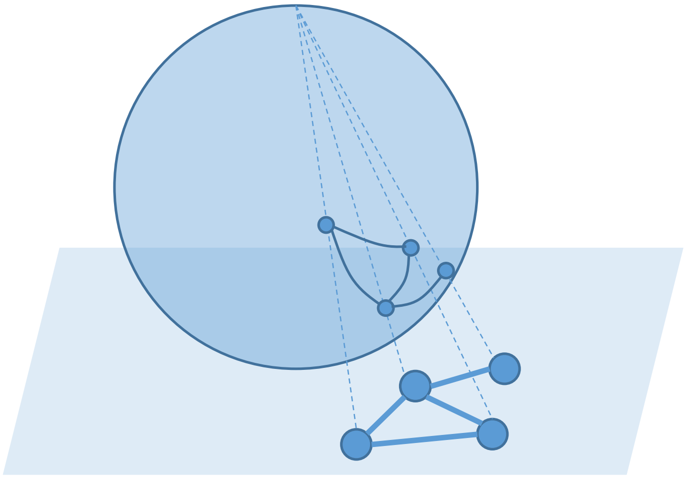
Пример:



Планарные графы на сферах

Утверждение. Граф планарен т. и т.т., когда его можно уложить на сфере.

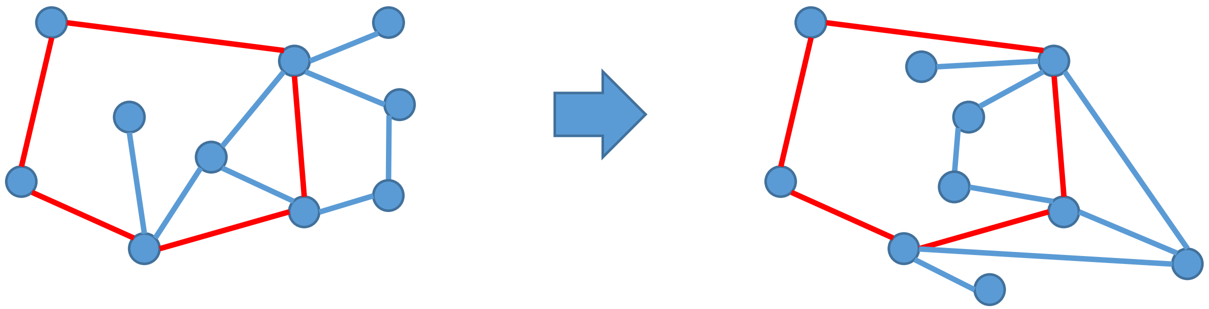
Идея доказательства.
Используем стереографическую проекцию. Единственное требование —
чтобы центр проекции
не совпадал с вершиной
графа и не лежал на ребре.



Циклы в планарных графах

Утверждение. Пусть в некоторой укладке планарного графа внутри некоторого цикла C лежит множество рёбер E_{int}, а снаружи множество рёбер E_{ext}. Тогда существует и укладка этого графа, в которой внутри C лежат рёбра E_{ext}, а снаружи рёбра E_{int}.

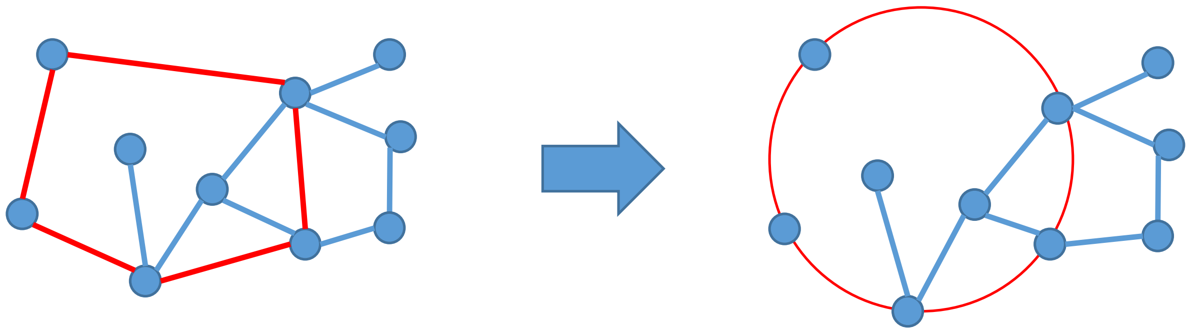
Пример:



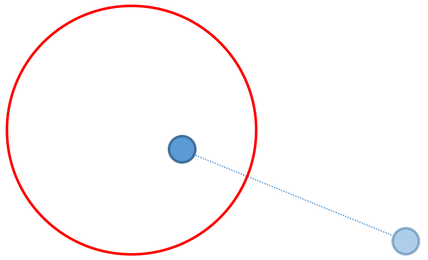
Циклы в планарных графах

Идея доказательства.

Сначала деформируем изображение графа, так, чтобы изображение цикла C стало окружностью, и при этом через центр окружности не проходили никакие рёбра.



Затем выполняем инверсию плоскости относительно этой окружности.



Циклы в планарных графах

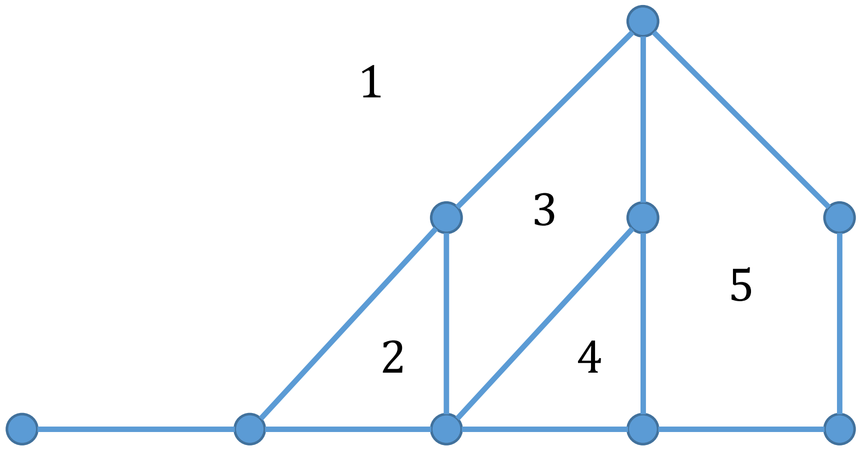
Утверждение. Пусть в некоторой укладке планарного графа внутри некоторого цикла C лежит множество рёбер E_{int}, а снаружи множество рёбер E_{ext}. Тогда существует и укладка этого графа, в которой внутри C лежат рёбра E_{ext}, а снаружи рёбра E_{int}.

Следствие. Если некоторый цикл графа ограничивает грань в некоторой укладке, то существует укладка, в которой этот цикл ограничивает внешнюю грань.

Формула Эйлера

Формула Эйлера.
Для любого связного планарного графа

$$\#\text{вершин} - \#\text{рёбер} + \#\text{граней} = 2$$



Формула Эйлера

Формула Эйлера.
Для любого связного планарного графа

$$\#\text{вершин} - \#\text{рёбер} + \#\text{граней} = 2$$

Доказательство:

<u>индукция по величине $(\#\text{рёбер} - \#\text{вершин})$</u>

Если $(\#\text{рёбер} - \#\text{вершин}) = -1$, то наш граф является деревом и грань в его укладке ровно одна.

Формула Эйлера

Индуктивный переход:

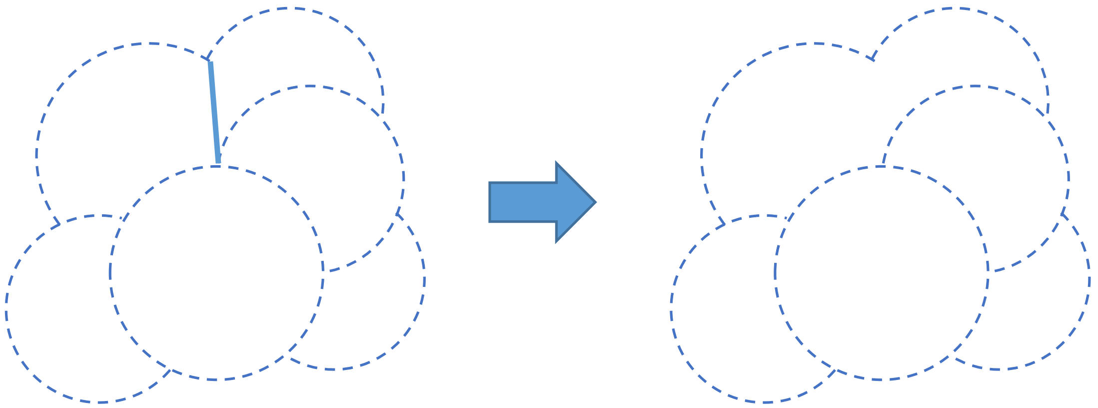
Если $(\#\text{рёбер} - \#\text{вершин}) = t \geq 0$, то в нашем графе G есть цикл. Удаление любого ребра из этого цикла приводит к связному графу G', для которого

$$(\#\text{рёбер в } G' - \#\text{вершин в } G') = t - 1$$

и

$$\#\text{граней в } G' = \#\text{граней в } G - 1$$

(т.к. удаление ребра из G привело к «слиянию» двух граней).



Формула Эйлера

Итак,

$$(\#\text{рёбер в } G - \#\text{вершин в } G) = t$$
$$(\#\text{рёбер в } G' - \#\text{вершин в } G') = t - 1$$
$$\#\text{граней в } G' = \#\text{граней в } G - 1$$

По предположению индукции, для G' имеем

$$\#\text{вершин в } G' - \#\text{рёбер в } G' + \#\text{граней в } G' = 2$$

Отсюда

$$(\#\text{вершин в } G - \#\text{рёбер в } G) + 1 + (\#\text{граней в } G - 1) = 2,$$

что и требовалось.

Рёбра и грани

Утверждение.

Для любого планарного графа, в котором минимальная длина циклов равна t, выполнено неравенство

$$\#\text{рёбер} \geq \frac{t}{2} \cdot \#\text{граней}$$

Доказательство:

Для i-й грани рассмотрим величину n_i — количество рёбер, отделяющих её от других граней. Тогда

$$\sum_i n_i \geq t \cdot \#\text{граней}$$

При этом в сумме слева каждое ребро графа посчитано максимум дважды.

Число рёбер в планарных графах

Утверждение.
Если в планарном графе минимальная длина циклов равняется t, то

$$\#\text{рёбер} \leq \frac{t}{t-2} \cdot (\#\text{вершин} - 2)$$

Доказательство. Считаем, что граф связен.
Из формулы Эйлера и предыдущего утверждения получаем:

$$2 = \#\text{вершин} - \#\text{рёбер} + \#\text{граней} \leq$$
$$\leq \#\text{вершин} - \#\text{рёбер} + \frac{2}{t} \cdot \#\text{рёбер}$$

Отсюда легко следует доказываемое неравенство.

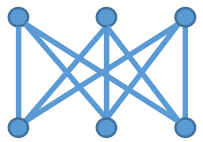
Непланарные графы

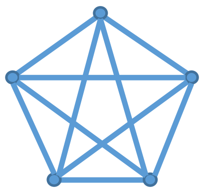
Утверждение.
Если в планарном графе минимальная длина циклов равняется t, то

$$\#\text{рёбер} \le \frac{t}{t-2} \cdot (\#\text{вершин} - 2)$$

Следствие. Графы K_5 и $K_{3,3}$ непланарны.

Доказательство:
В графе K_5 всего 5 вершин и 10 рёбер, так что неравенство не выполнено даже при $t = 3$.
В графе $K_{3,3}$ нет циклов длины меньше четырёх, при этом 6 вершин и 9 рёбер, поэтому и для него неравенство не выполняется.





Непланарные графы

Утверждение.
Если в планарном графе минимальная длина циклов равняется t, то

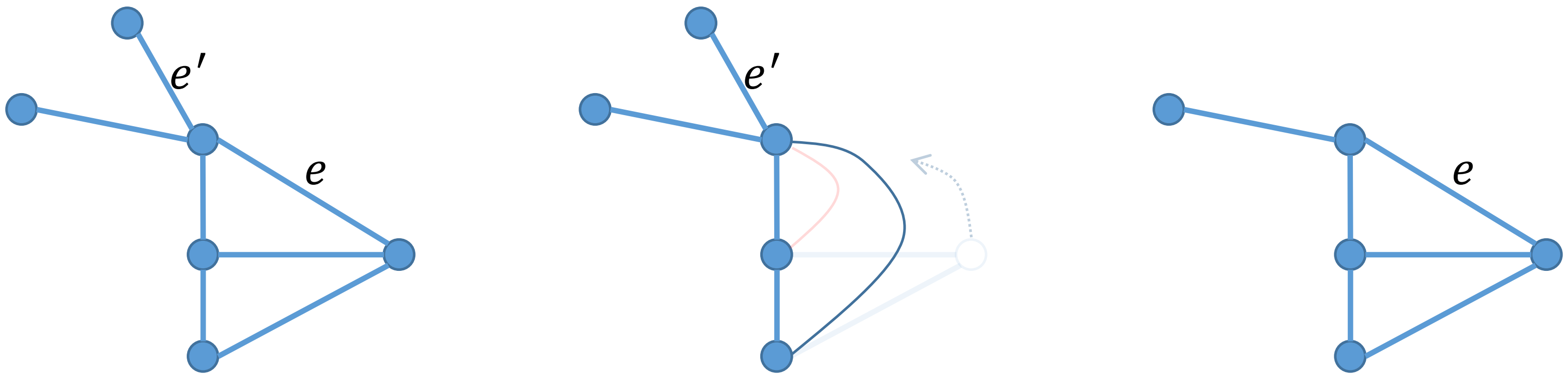
$$\#\text{рёбер} \leq \frac{t}{t-2} \cdot (\#\text{вершин} - 2)$$

Следствие. В любом планарном графе на n $(n \geq 3)$ вершинах число рёбер не превосходит $(3n - 6)$.

Стягивание рёбер

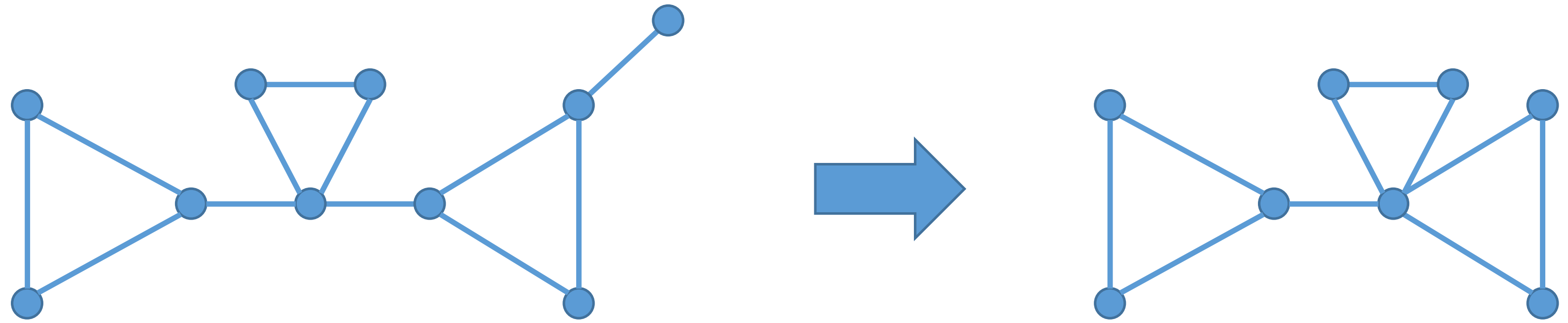
Стягивание ребра e в графе G — это операция, результатом которой является граф G/e, получаемый из G удалением e и отождествлением его концов. Если при этом образуются кратные рёбра, оставляем из них только одно.

G $\quad$ G/e $\quad$ G/e'

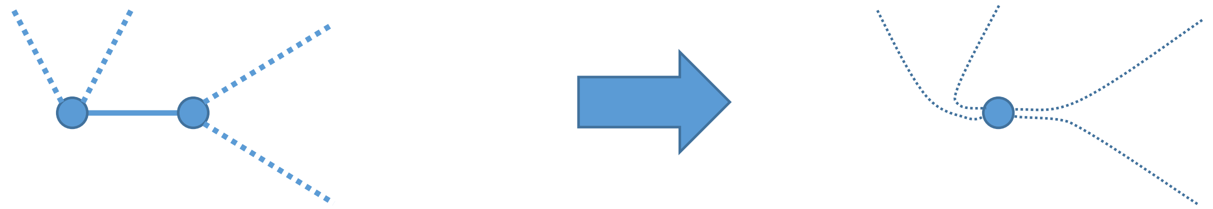


Стягивание рёбер

- Граф G является *стягиваемым к графу* G', если G' можно получить из G, применив некоторое количество раз операцию стягивания ребра

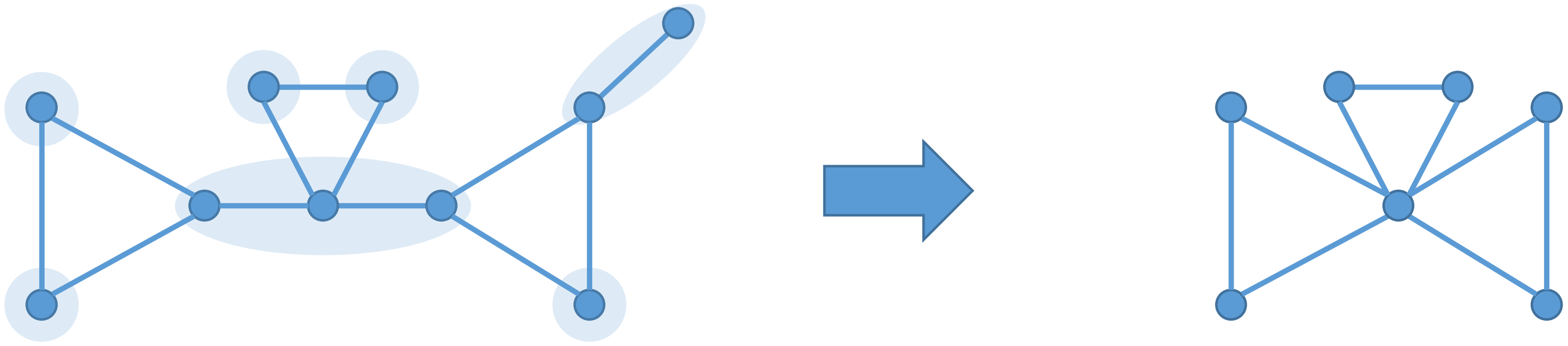


- Если граф G планарен, то и граф G' планарен:



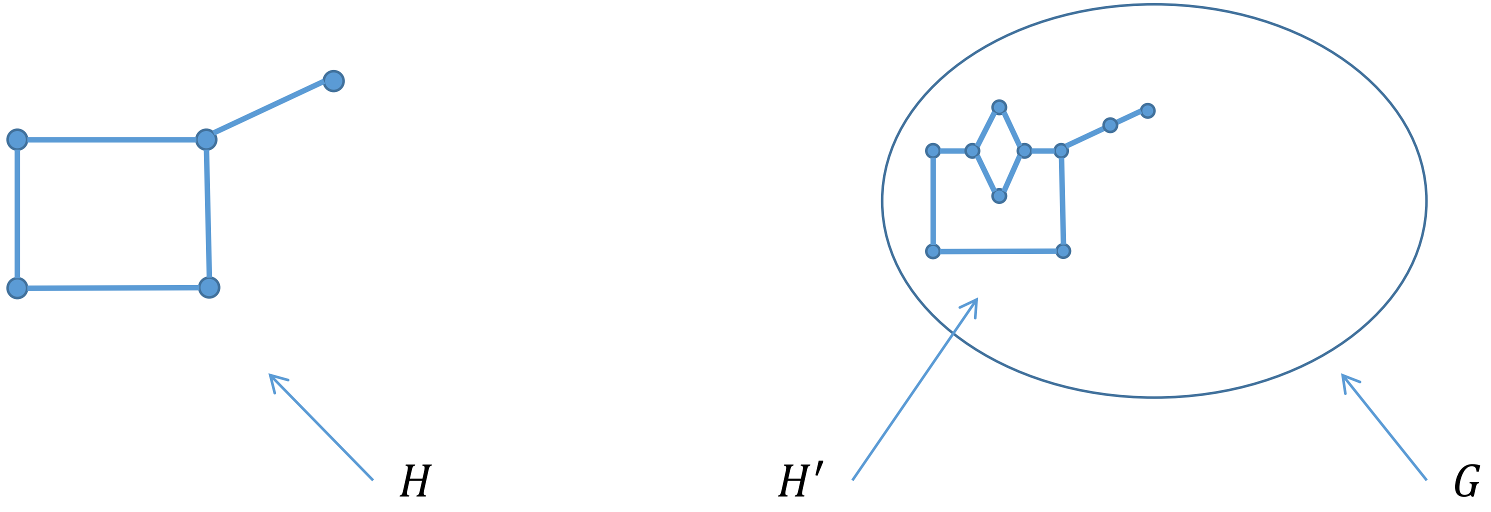
Стягивание рёбер

- Граф G является стягиваемым к графу G', если вершины графа G можно разбить на связные множества, каждое из которых соответствует одной вершине графа G', и при этом $(u, v) \in E(G')$, если между соответствующими множествами в G есть ребро.



Миноры

- Граф H является *минором* графа G, если в G есть подграф H', который можно стянуть к H



Планарные графы и миноры

- Если G планарен и G' — подграф графа G,
  то и G' также планарен

(поскольку любая укладка графа G содержит некоторую укладку графа G')

- Аналогично, любой минор планарного графа также планарен
- Следовательно, если у графа есть непланарный минор,
  то и сам граф непланарен

Планарные графы и миноры

Критерий Вагнера (без доказательства).

Граф планарен *тогда и только тогда*, когда K_5 и $K_{3,3}$ не являются его минорами.

Необходимость очевидна:

- Если у графа есть непланарный минор, то и сам граф непланарен
- Графы K_5 и $K_{3,3}$ непланарны

Достаточность — без доказательства.