Визуализация графов

Задачи по курсу

Computer Science клуб, март 2014

Александр Дайняк, ФИВТ МФТИ

www.dainiak.com

«Резиновая» (барицентрическая) укладка

- Докажите, что существует последовательность трёхсвязных n-вершинных графов $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$, такая, что в любой барицентрической укладке G_n внутри квадрата со стороной 1 найдётся пара вершин на расстоянии $O(2^{-n})$.
- Только ли для трёхсвязных графов резиновая укладка позволяет получить изображение без скрещиваний рёбер? Опишите графы, для которых барицентрический подход даёт укладку без скрещиваний.

Силовые укладки

- Будем говорить, что укладка графа *не содержит напряжённых цепей*, если евклидово расстояние между любой парой вершин укладки равно числу рёбер в кратчайшей цепи между этими вершинами.
  Опишите все графы, допускающие укладку без напряжённых цепей.

Сепараторы в деревьях

- Докажите, что у любого двоичного n-вершинного дерева T есть ребро, удаление которого разрезает T на деревья T_1, T_2, у которых $|T_i| \leq \frac{2}{3}n$.
- Докажите, что у любого дерева T, полная степень вершин в котором не больше d, есть ребро, удаление которого приводит к деревьям размера не больше $\left(1 - \frac{1}{d}\right) \cdot |T|$.
- Докажите, что у любого двоичного дерева T есть вершина, удаление которой приводит к лесу, каждая компонента связности которого имеет размер не больше $\frac{|T|}{2}$.

Укладки деревьев

- Докажите, что если α, β — поддеревья с корнями в двух вершинах *жадного* пути (определение см. в лекции), то
  либо $|\alpha| \le \frac{n}{2}$ и $|\beta| \le \frac{n-|\alpha|}{2}$,
  либо $|\beta| \le \frac{n}{2}$ и $|\alpha| \le \frac{n-|\beta|}{2}$.
- Докажите, что существует линейная по площади h-v-укладка полного бинарного дерева.
- Докажите, что существует линейная по площади h-v-укладка дерева Фибоначчи. (Деревья Фибоначчи определяются рекурсивно: F_1 и F_2 суть одновершинные деревья, а F_k получается присоединением к корню деревьев F_{k-1} и F_{k-2}.)

NP-трудные задачи

- Докажите NP-трудность задачи NAE-3-SAT — аналога задачи NAE-SAT, в которой в каждой скобке ровно 3 литерала.
- Докажите NP-трудность задачи Positive-NAE-SAT — аналога задачи NAE-SAT, в которой все переменные входят без отрицаний (заметьте, что задача Positive-SAT (без требования NAE) полиномиально разрешима).

ЛП-критерий планарности

- Докажите, что определение ЛП-упорядочения корректно. В этом определении мы упорядочиваем рёбра в вершине DFS-дерева так: $\ldots L(e_i)e_iR(e_i) \ldots$ — где порядок обратных рёбер внутри списка $L(e_i)$ определяется через развилки этих рёбер.
  Вопрос: может ли случиться так, что среди $L(e_i)$ найдётся «противоречивая» тройка рёбер b_1, b_2, b_3, которую по правилам нужно будет упорядочить как $b_1 \prec b_2$, $b_2 \prec b_3$, $b_3 \prec b_1$?