Визуализация графов

Computer Science клуб, март 2014

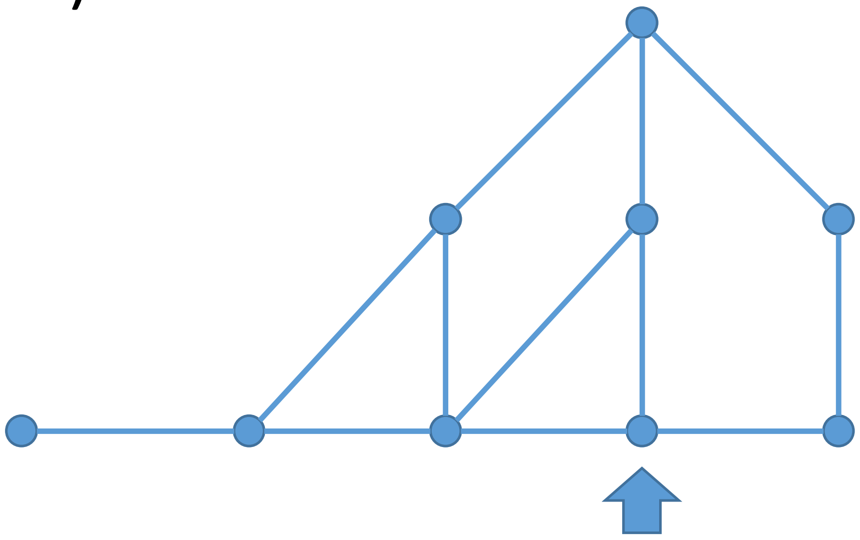
Александр Дайняк, ФИВТ МФТИ

www.dainiak.com

DFS-дерево и обратные рёбра

При поиске в глубину рёбра графа разбиваются на два типа:

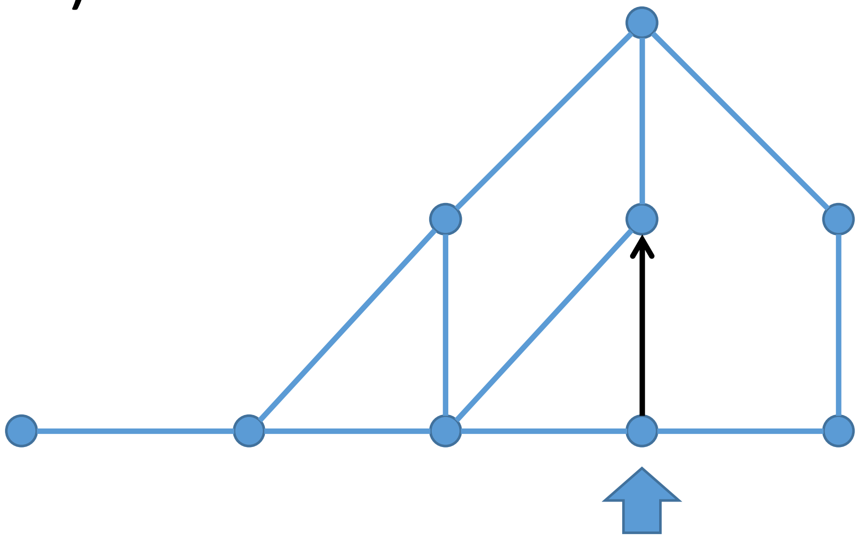
- рёбра DFS-дерева (в «новые» вершины),
- *обратные* рёбра (в пройденные вершины).



DFS-дерево и обратные рёбра

При поиске в глубину рёбра графа разбиваются на два типа:

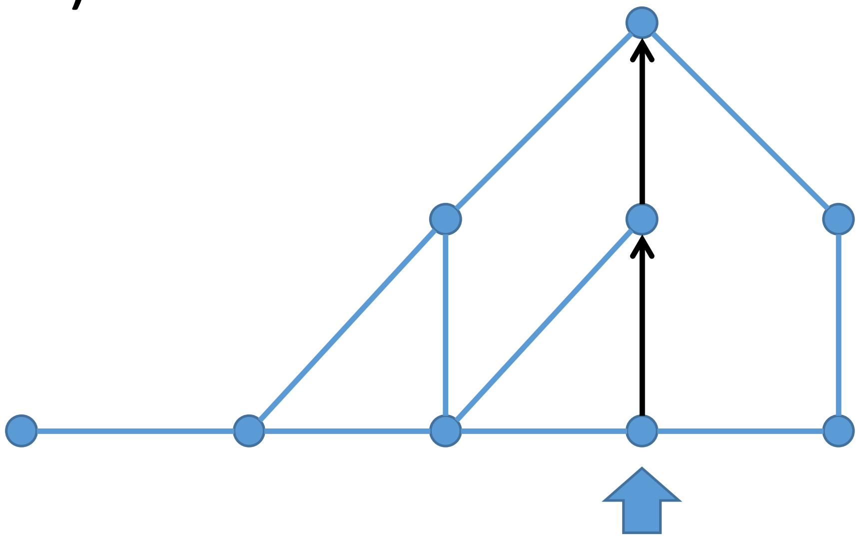
- рёбра DFS-дерева (в «новые» вершины),
- *обратные* рёбра (в пройденные вершины).



DFS-дерево и обратные рёбра

При поиске в глубину рёбра графа разбиваются на два типа:

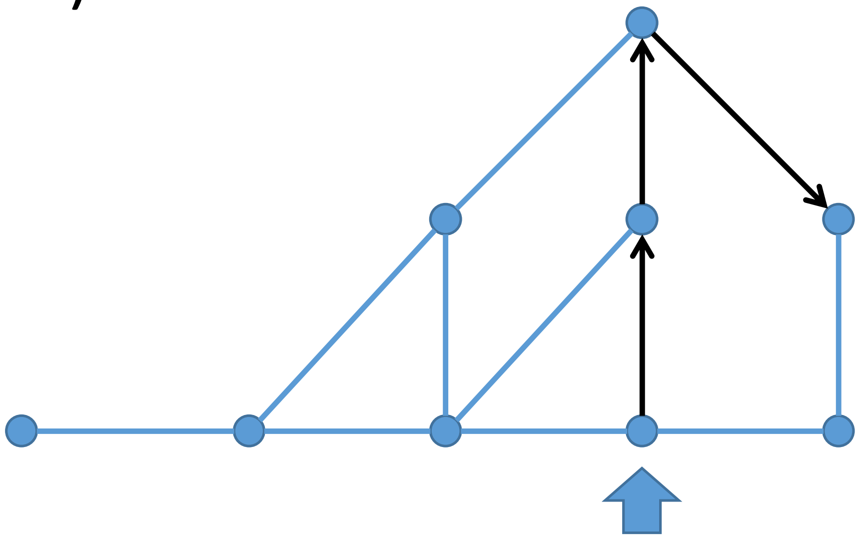
- рёбра DFS-дерева (в «новые» вершины),
- *обратные* рёбра (в пройденные вершины).



DFS-дерево и обратные рёбра

При поиске в глубину рёбра графа разбиваются на два типа:

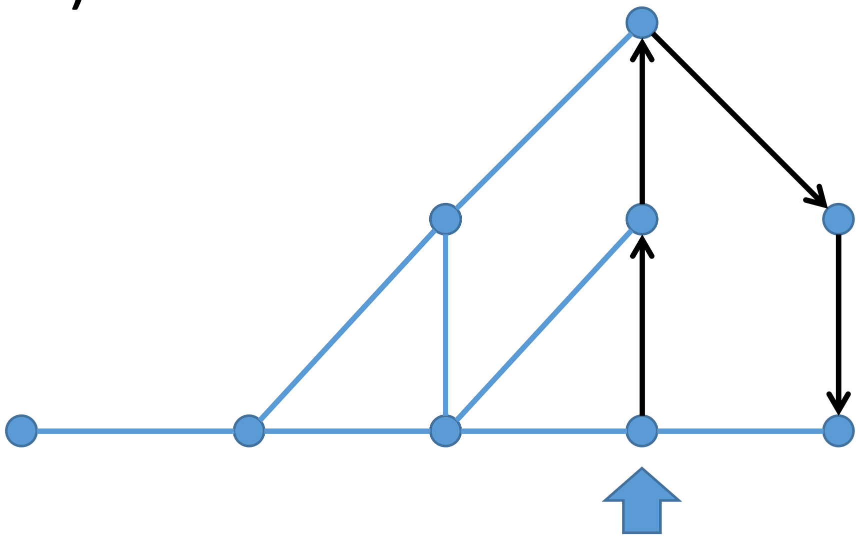
- рёбра DFS-дерева (в «новые» вершины),
- *обратные* рёбра (в пройденные вершины).



DFS-дерево и обратные рёбра

При поиске в глубину рёбра графа разбиваются на два типа:

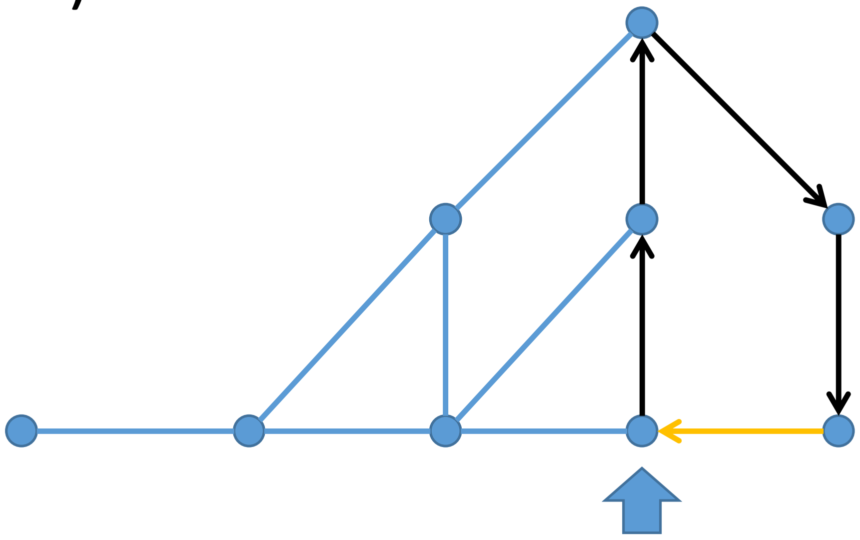
- рёбра DFS-дерева (в «новые» вершины),
- *обратные* рёбра (в пройденные вершины).



DFS-дерево и обратные рёбра

При поиске в глубину рёбра графа разбиваются на два типа:

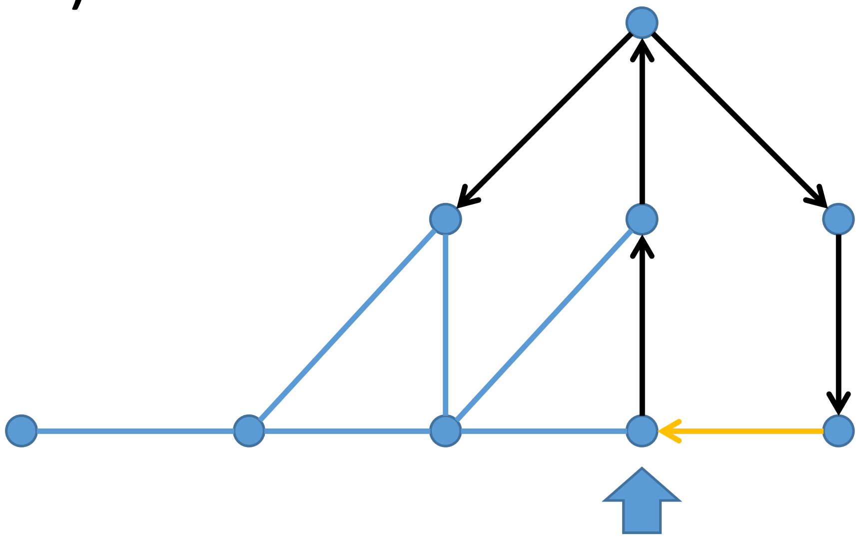
- рёбра DFS-дерева (в «новые» вершины),
- *обратные* рёбра (в пройденные вершины).



DFS-дерево и обратные рёбра

При поиске в глубину рёбра графа разбиваются на два типа:

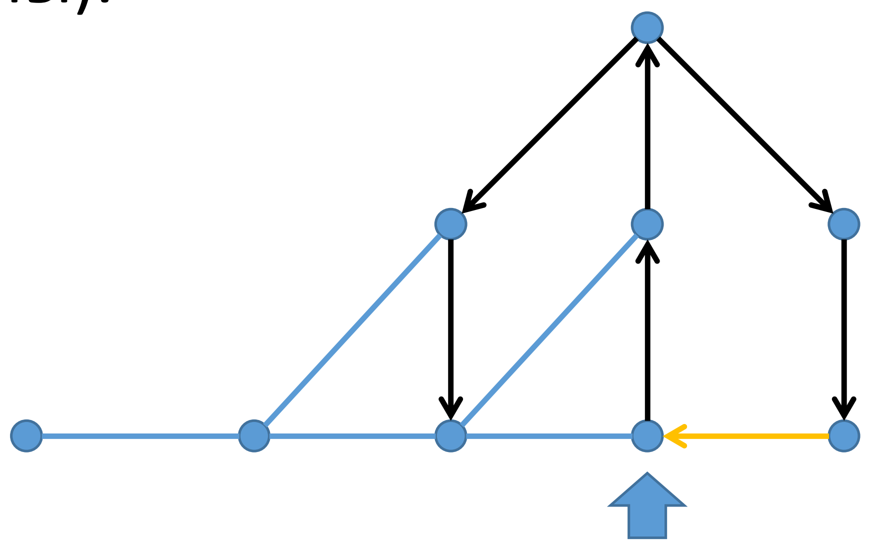
- рёбра DFS-дерева (в «новые» вершины),
- *обратные* рёбра (в пройденные вершины).



DFS-дерево и обратные рёбра

При поиске в глубину рёбра графа разбиваются на два типа:

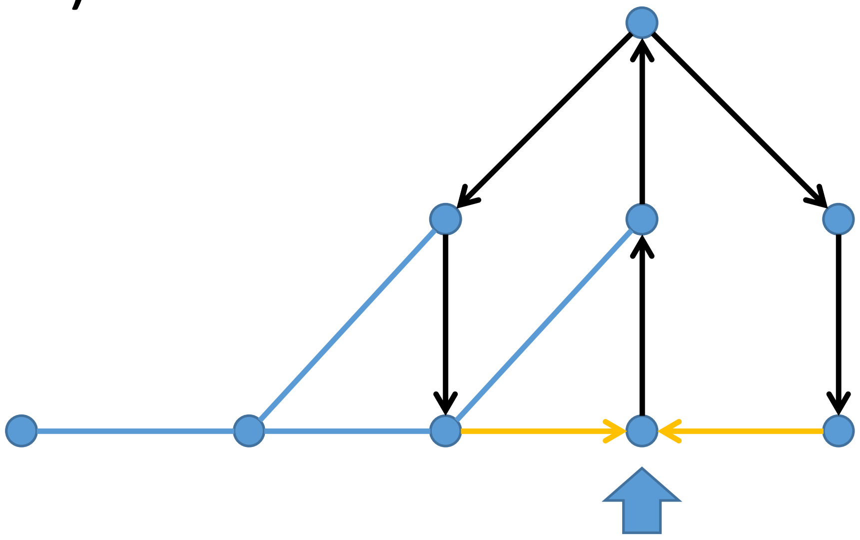
- рёбра DFS-дерева (в «новые» вершины),
- *обратные* рёбра (в пройденные вершины).



DFS-дерево и обратные рёбра

При поиске в глубину рёбра графа разбиваются на два типа:

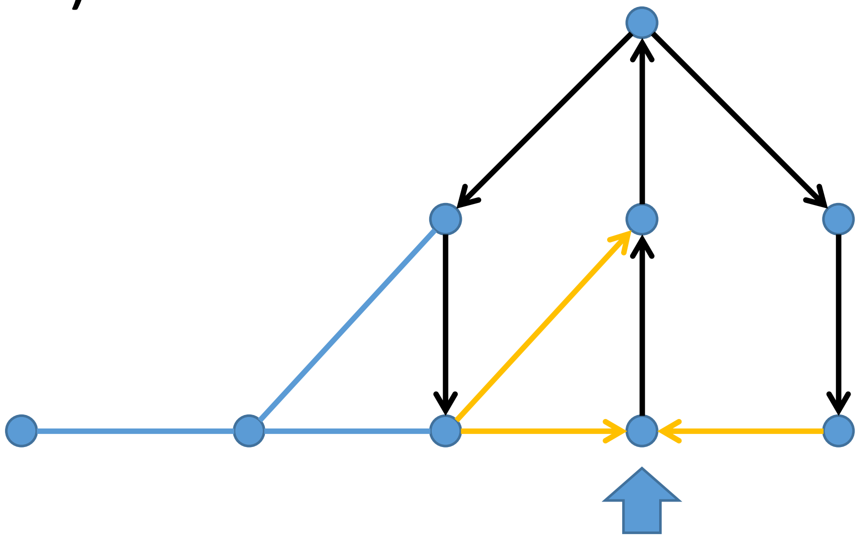
- рёбра DFS-дерева (в «новые» вершины),
- *обратные* рёбра (в пройденные вершины).



DFS-дерево и обратные рёбра

При поиске в глубину рёбра графа разбиваются на два типа:

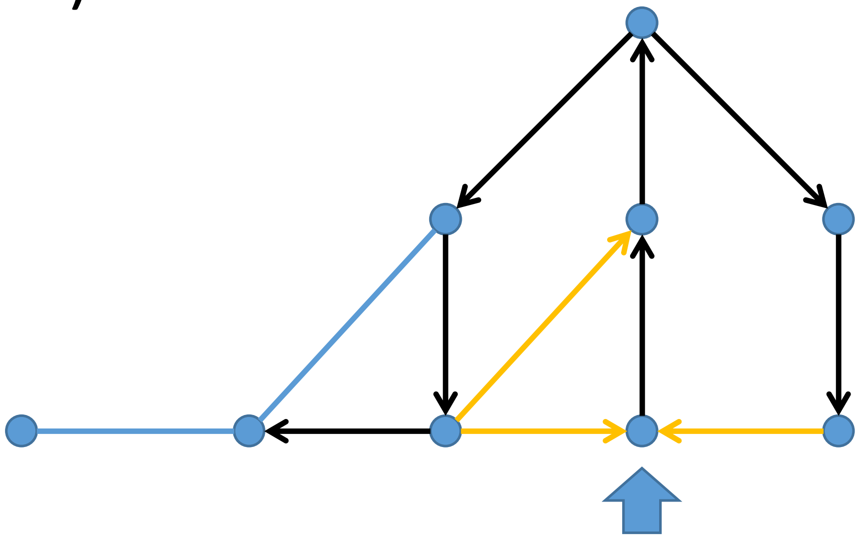
- рёбра DFS-дерева (в «новые» вершины),
- *обратные* рёбра (в пройденные вершины).



DFS-дерево и обратные рёбра

При поиске в глубину рёбра графа разбиваются на два типа:

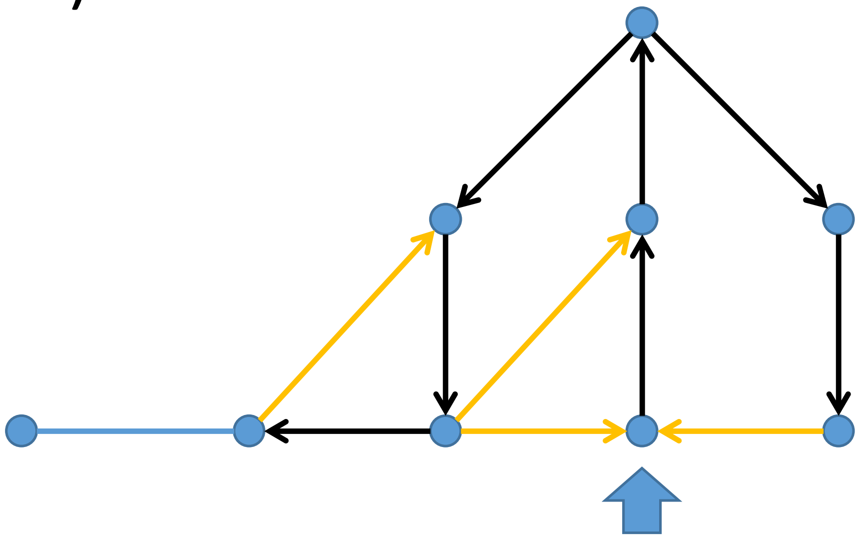
- рёбра DFS-дерева (в «новые» вершины),
- *обратные* рёбра (в пройденные вершины).



DFS-дерево и обратные рёбра

При поиске в глубину рёбра графа разбиваются на два типа:

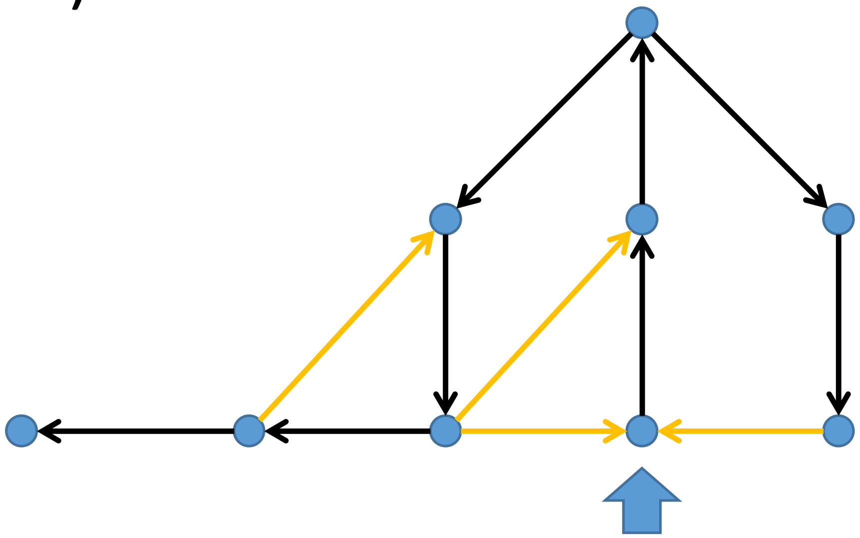
- рёбра DFS-дерева (в «новые» вершины),
- *обратные* рёбра (в пройденные вершины).



DFS-дерево и обратные рёбра

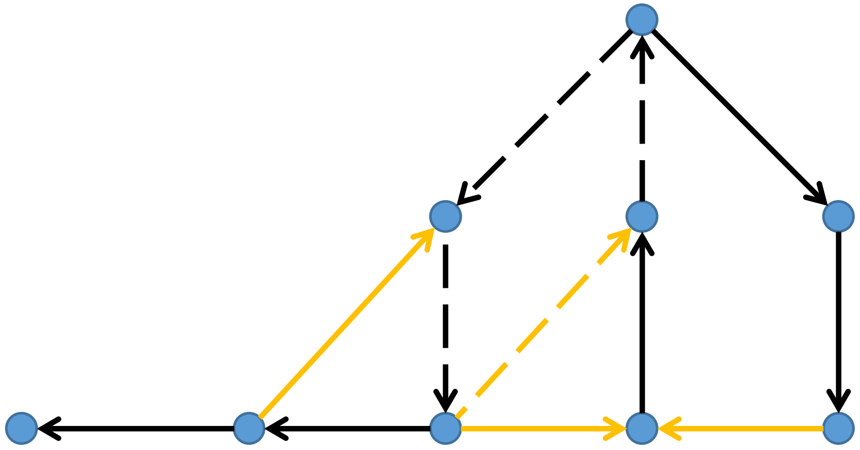
При поиске в глубину рёбра графа разбиваются на два типа:

- рёбра DFS-дерева (в «новые» вершины),
- *обратные* рёбра (в пройденные вершины).



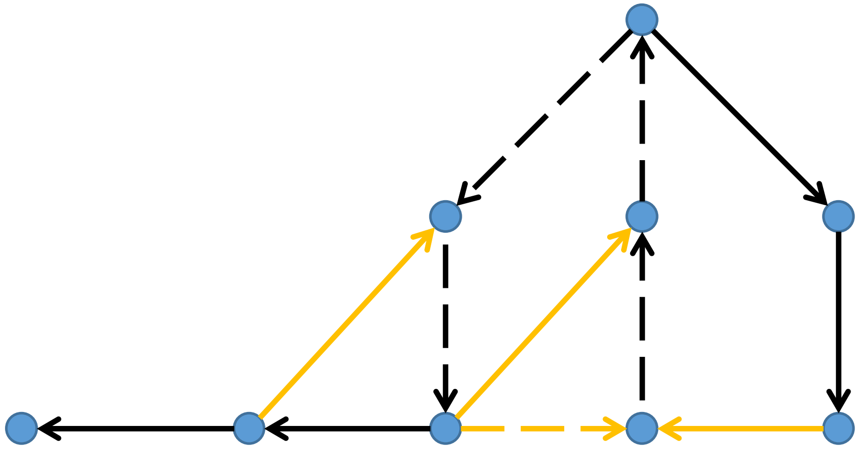
Фундаментальные циклы

Каждое обратное ребро вместе с путём по DFS-дереву образует *фундаментальный цикл*.



Фундаментальные циклы

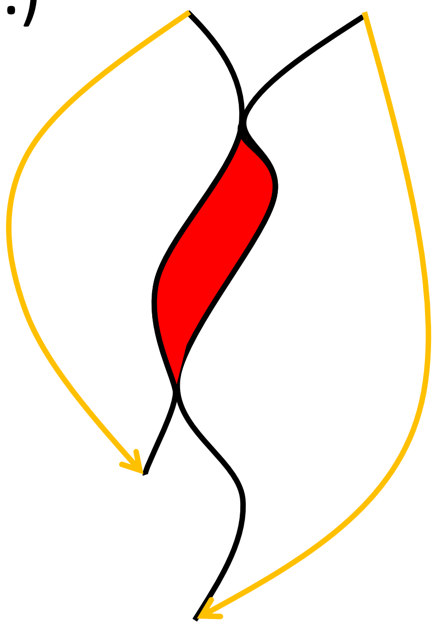
Каждое обратное ребро вместе с путём по DFS-дереву образует *фундаментальный цикл*.



Фундаментальные циклы

Любая пара фундаментальных циклов либо не имеют общих рёбер, либо их пересечение — путь в DFS-дереве.

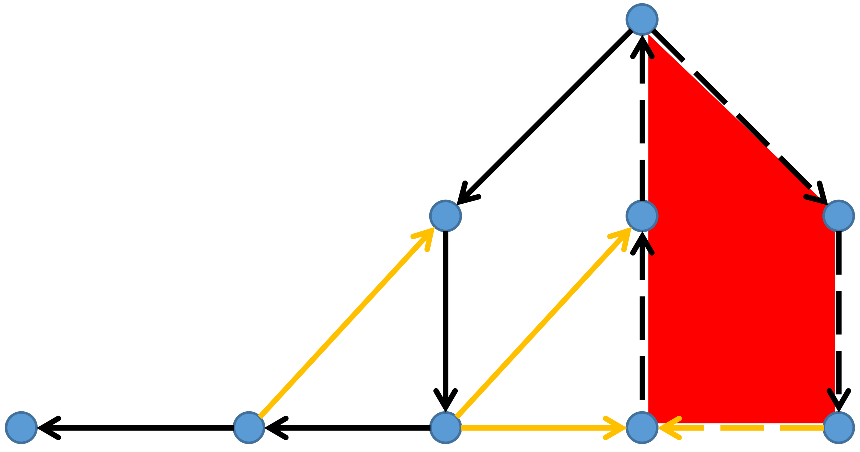
(Иначе противоречие с отсутствием циклов в дереве.)



Фундаментальные циклы

Если DFS произвести в плоском графе, то каждый фундаментальный цикл будет сориентирован

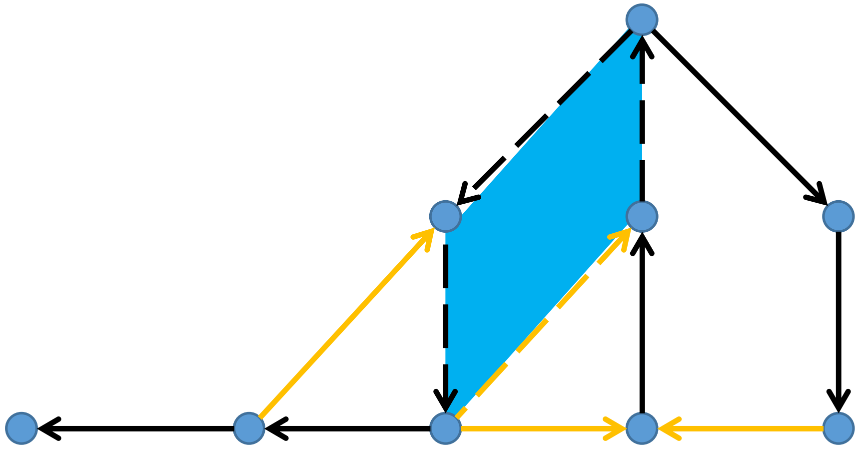
- по часовой стрелке («вправо»)



Фундаментальные циклы

Если DFS произвести в плоском графе, то каждый фундаментальный цикл будет сориентирован

- по часовой стрелке («вправо»)
- либо против часовой стрелки («влево»)

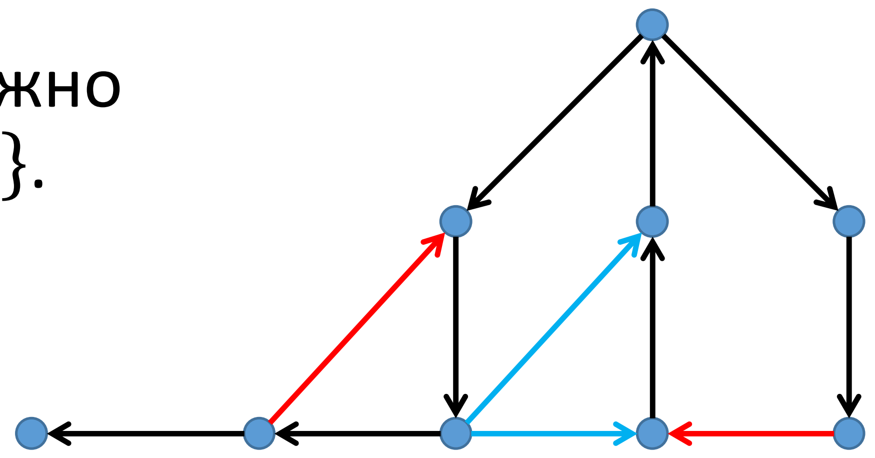


Фундаментальные циклы и стороны рёбер

Если DFS произвести в плоском графе, то каждый фундаментальный цикл будет сориентирован

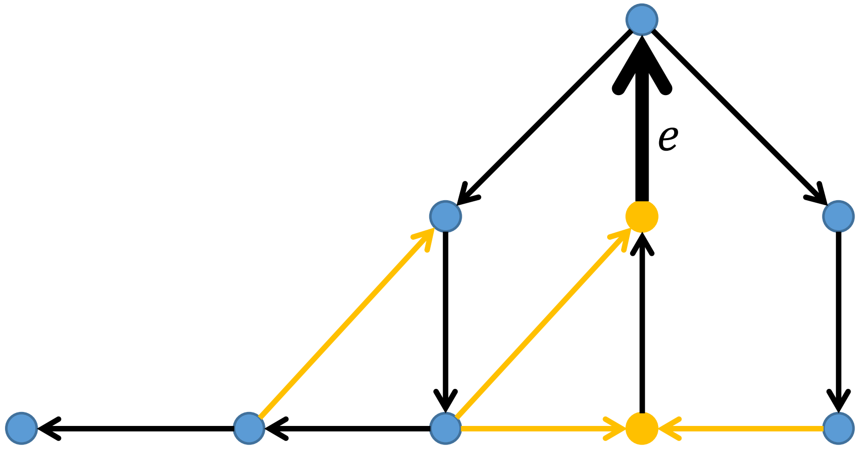
- по часовой стрелке («вправо»)
- либо против часовой стрелки («влево»)

Тогда каждому обратному ребру тоже можно приписать одну из сторон $\{\text{левая}, \text{правая}\}$.



Точки возврата и нижние точки

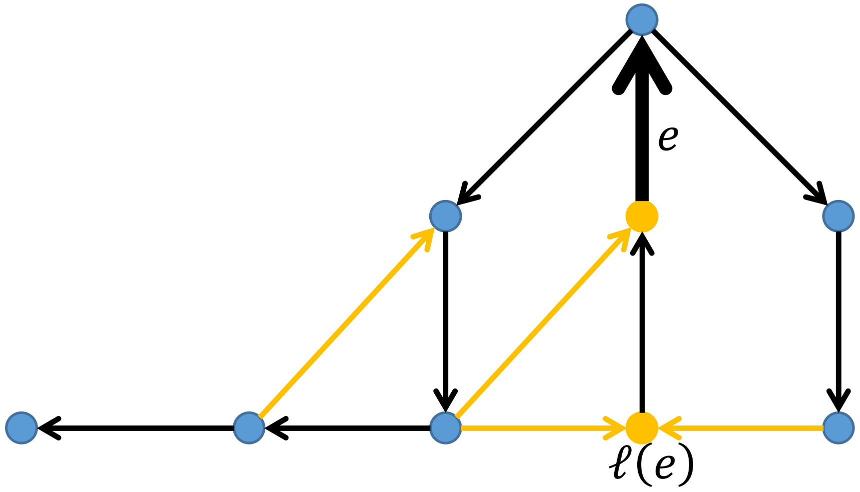
Точки возврата ребра e — это вершины дерева, в которые попадают обратные рёбра, лежащие на циклах, содержащих e.



Точки возврата и нижние точки

Точки возврата ребра e — это вершины, в которые попадают обратные рёбра, лежащие на циклах, содержащих e.

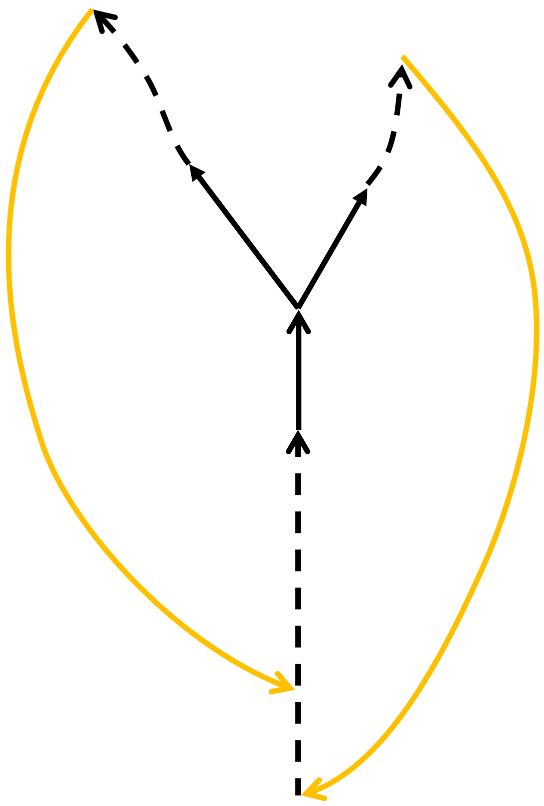
Самая нижняя (ближайшая к корню дерева) точка возврата ребра e называется *нижней точкой* e и обозначается $\ell(e)$.



Развилки фундаментальных циклов

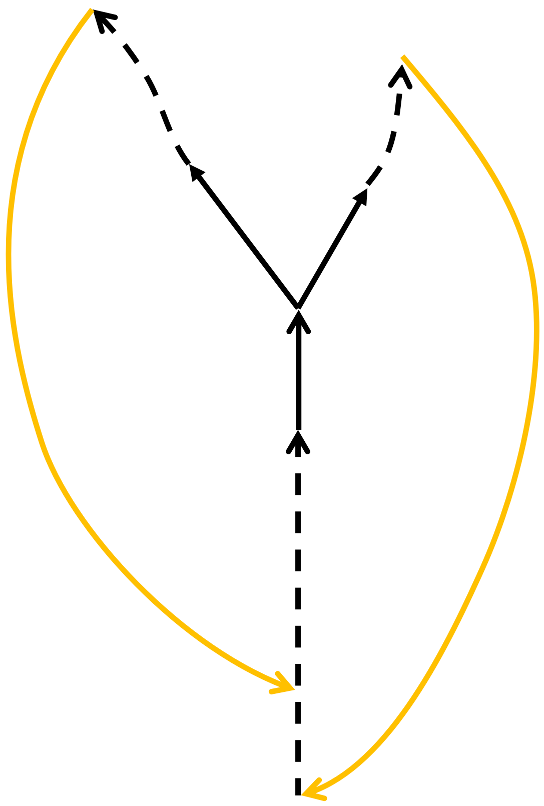
Развилка двух циклов, пересекающихся по рёбрам, — это тройка рёбер

- последнее общее ребро,
- и следующие за ним два ребра, относящиеся к различным циклам.



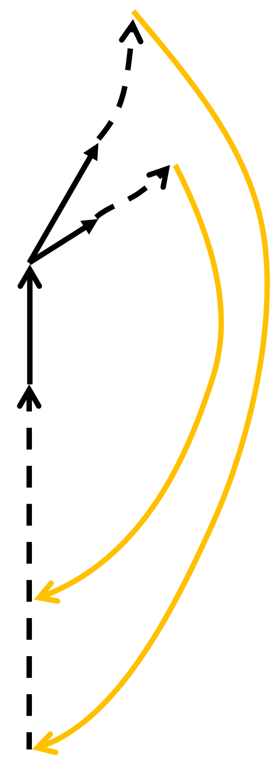
Фундаментальные циклы в укладке планарного графа

- Два цикла, имеющие общие рёбра, ориентированы одинаково т. и т.т., когда один цикл лежит внутри другого.



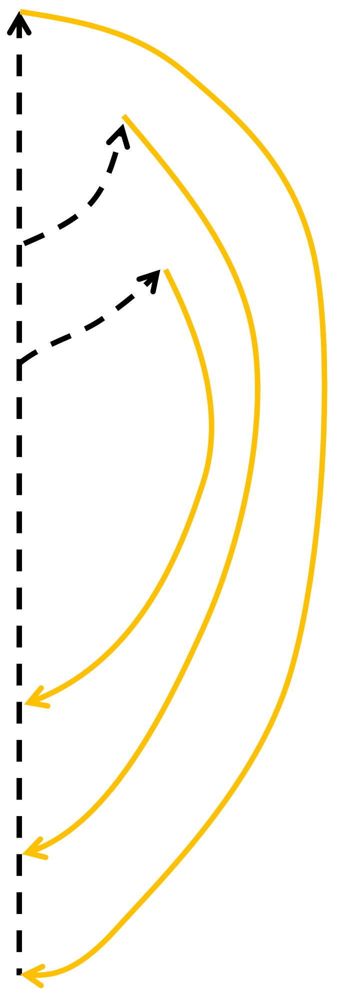
Фундаментальные циклы в укладке планарного графа

- Два цикла, имеющие общие рёбра, ориентированы одинаково т. и т.т., когда один цикл лежит внутри другого.



Фундаментальные циклы в укладке планарного графа

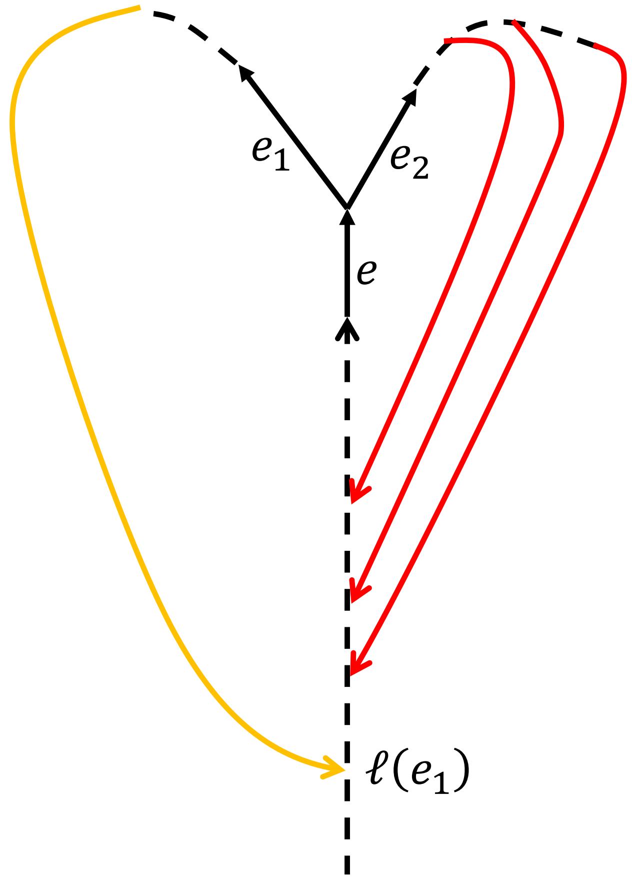
- Два цикла, имеющие общие рёбра, ориентированы одинаково т. и т.т., когда один цикл лежит внутри другого.
- Если циклы вложены друг в друга, то порядок вложения зависит от порядка, в котором на дереве расположены нижние точки обратных рёбер.



Основное свойство сторон рёбер в планарном графе

Для произвольной развилки e, e_1, e_2 в графе

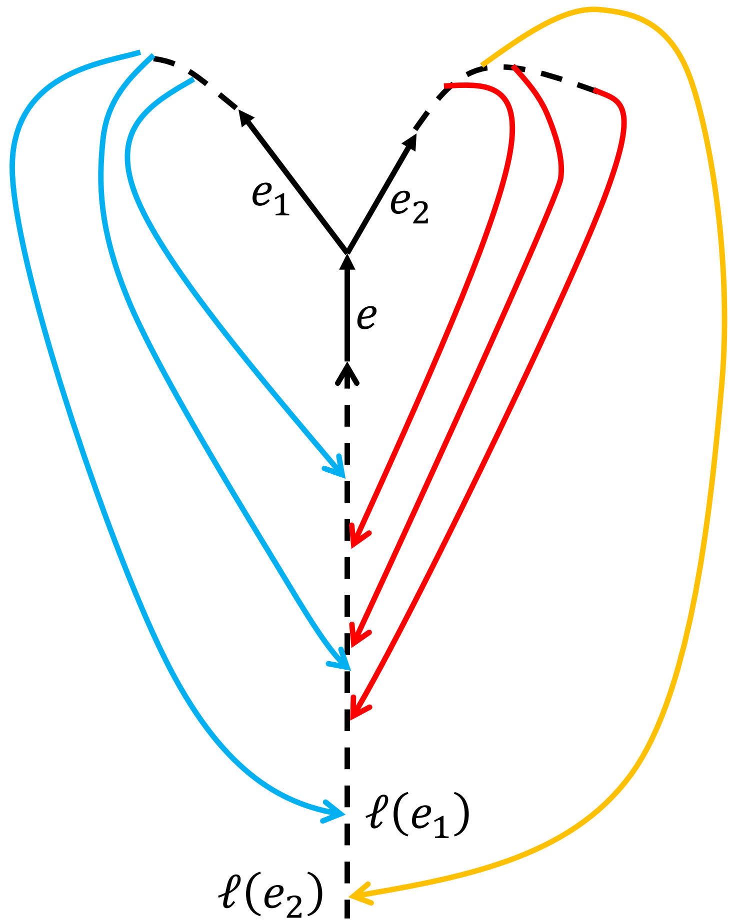
- все обратные рёбра, заканчивающиеся строго выше $\ell(e_1)$, у которых циклы содержат e и e_2, имеют одну сторону…



Основное свойство сторон рёбер в планарном графе

Для произвольной развилки e, e_1, e_2 в графе

- все обратные рёбра, заканчивающиеся строго выше $\ell(e_1)$, у которых циклы содержат e и e_2, имеют одну сторону,
- а обратные рёбра, заканчивающиеся строго выше $\ell(e_2)$, у которых циклы содержат e и e_1, имеют *другую* сторону.



ЛП-разбиение

На множестве обратных рёбер графа задано *ЛП-разбиение* на «левые» и «правые» рёбра, если для каждой развилки e, e_1, e_2

- все обратные рёбра, заканчивающиеся строго выше $\ell(e_1)$, у которых циклы содержат e и e_2, имеют одну сторону,
- а обратные рёбра, заканчивающиеся строго выше $\ell(e_2)$, у которых циклы содержат e и e_1, имеют другую сторону.

У любого планарного графа есть ЛП-разбиение: доказали выше.

Оказывается, если есть ЛП-разбиение, то граф планарен.

ЛП-разбиение

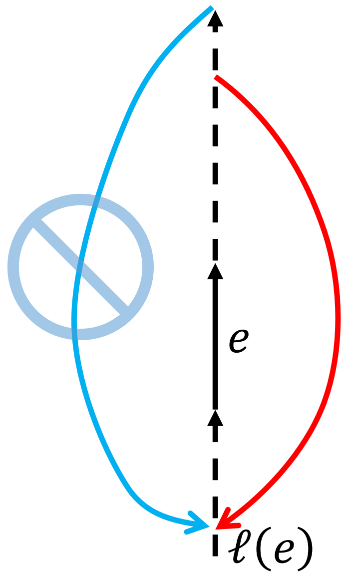
На множестве обратных рёбер графа задано *ЛП-разбиение* на «левые» и «правые» рёбра, если для каждой развилки e, e_1, e_2

- все обратные рёбра, заканчивающиеся строго выше $\ell(e_1)$, у которых циклы содержат e и e_2, имеют одну сторону,
- а обратные рёбра, заканчивающиеся строго выше $\ell(e_2)$, у которых циклы содержат e и e_1, имеют другую сторону.

Таким образом, в ЛП-разбиении на пары обратных рёбер накладываются *ограничения* «*равносторонности*» и «*разносторонности*».

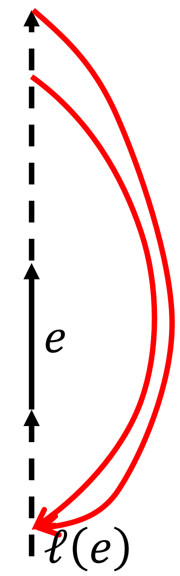
Приведённое ЛП-разбиение

ЛП-разбиение приведённое, если для любого ребра e все обратные рёбра, ведущие в $\ell(e)$, относятся к одной стороне.



Приведённое ЛП-разбиение

ЛП-разбиение *приведённое*, если для любого ребра e все обратные рёбра, ведущие в $\ell(e)$, циклы которых содержат e, относятся к одной стороне.

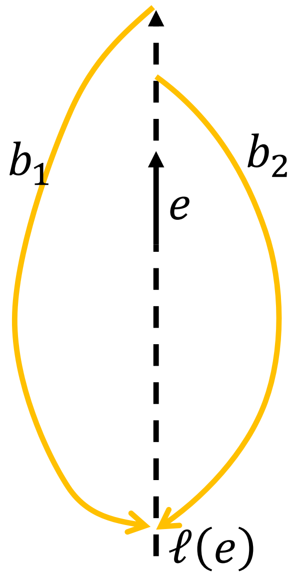


Приведённое ЛП-разбиение

ЛП-разбиение *приведённое*, если для любого ребра e все обратные рёбра, ведущие в $\ell(e)$, циклы которых содержат e, относятся к одной стороне.

Утверждение. Любое ЛП-разбиение можно преобразовать к приведённому виду.

Доказательство. Пусть b_1, b_2 — обратные рёбра, ведущие в $\ell(e)$.



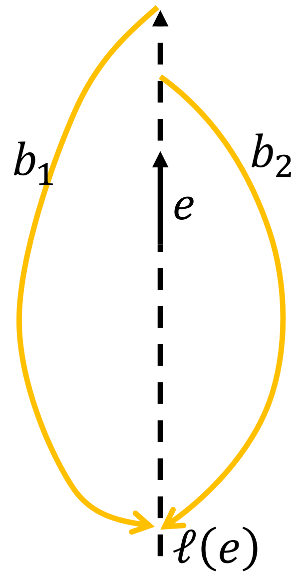
Приведённое ЛП-разбиение

ЛП-разбиение *приведённое*, если для любого ребра e все обратные рёбра, ведущие в $\ell(e)$, циклы которых содержат e, относятся к одной стороне.

Утверждение. Любое ЛП-разбиение можно преобразовать к приведённому виду.

Доказательство. Пусть b_1, b_2 — обратные рёбра, ведущие в $\ell(e)$.

Если b_1 и b_2 не участвуют ни в каких ограничениях, то доказывать нечего.

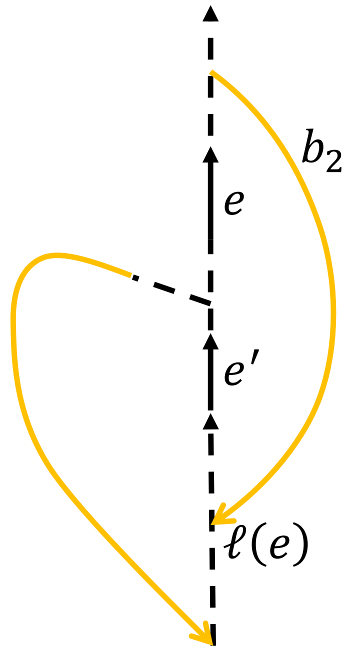


Приведённое ЛП-разбиение

ЛП-разбиение *приведённое*, если для любого ребра e все обратные рёбра, ведущие в $\ell(e)$, циклы которых содержат e, относятся к одной стороне.

Утверждение. Любое ЛП-разбиение можно преобразовать к приведённому виду.

Доказательство. Пусть b_1, b_2 — обратные рёбра, ведущие в $\ell(e)$. Если, скажем, b_2 вовлечено в ограничение, то это ограничение соответствует ребру e', лежащему ниже e.



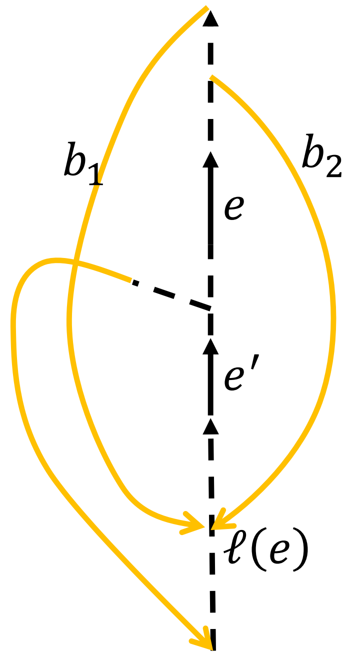
Приведённое ЛП-разбиение

ЛП-разбиение *приведённое*, если для любого ребра e все обратные рёбра, ведущие в $\ell(e)$, циклы которых содержат e, относятся к одной стороне.

Утверждение. Любое ЛП-разбиение можно преобразовать к приведённому виду.

Доказательство. Пусть b_1, b_2 — обратные рёбра, ведущие в $\ell(e)$. Если, скажем, b_2 вовлечено в ограничение, то это ограничение соответствует ребру e', лежащему ниже e.

Тогда b_1 тоже вовлечено в это ограничение…



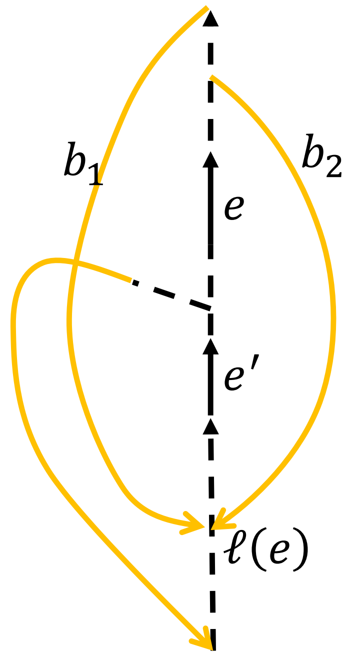
Приведённое ЛП-разбиение

ЛП-разбиение *приведённое*, если для любого ребра e все обратные рёбра, ведущие в $\ell(e)$, циклы которых содержат e, относятся к одной стороне.

Утверждение. Любое ЛП-разбиение можно преобразовать к приведённому виду.

Доказательство. Пусть b_1, b_2 — обратные рёбра, ведущие в $\ell(e)$. Если, скажем, b_2 вовлечено в ограничение, то это ограничение соответствует ребру e', лежащему ниже e.

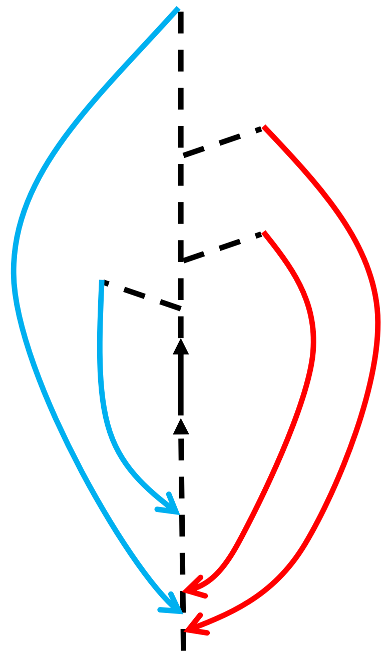
Тогда b_1 тоже вовлечено в это ограничение, и тогда b_1 и b_2 *обязаны* быть односторонними.



Продолжение ЛП-разбиения на рёбра дерева

Присвоим сторону не только обратным рёбрам, но и рёбрам дерева:

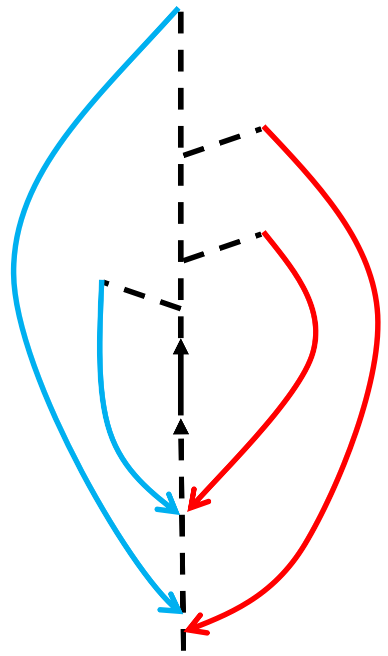
- сторона ребра дерева e равна стороне обратного ребра, цикл которого содержит e и конец которого выше всего.



Продолжение ЛП-разбиения на рёбра дерева

Присвоим сторону не только обратным рёбрам, но и рёбрам дерева:

- сторона ребра дерева e равна стороне обратного ребра, цикл которого содержит e и конец которого выше всего,
- в случае ничьи сторона выбирается произвольно.

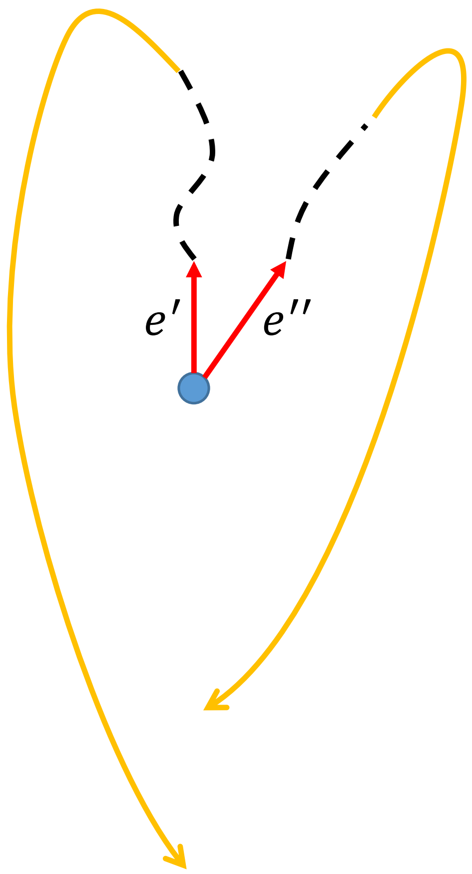


Как по ЛП-разбиению строить укладку

Укладка = упорядочение рёбер в каждой вершине графа.

Два правых ребра в вершине упорядочиваем так:

- $e' \prec e''$, если $\ell(e')$ ниже $\ell(e'')$ в дереве,



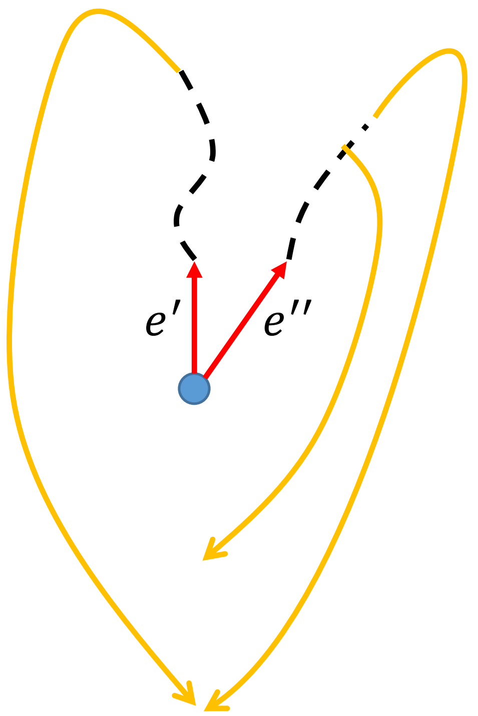
Как по ЛП-разбиению строить укладку

Укладка $=$ упорядочение рёбер в каждой вершине графа.

Два правых ребра в вершине упорядочиваем так:

- $e' \prec e''$, если $\ell(e')$ ниже $\ell(e'')$ в дереве,
- либо если $\ell(e') = \ell(e'')$, но у e'' есть ещё другие обратные рёбра, ведущие выше $\ell(e'')$ — в этом случае e'' называется *хордальным*.

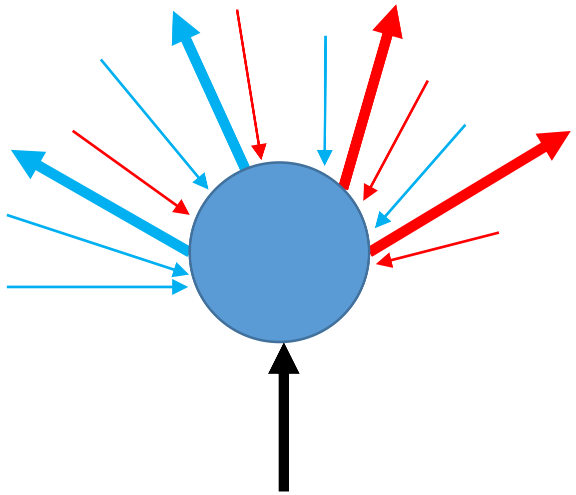
Левые рёбра упорядочиваем наоборот.



Как по ЛП-разбиению строить укладку

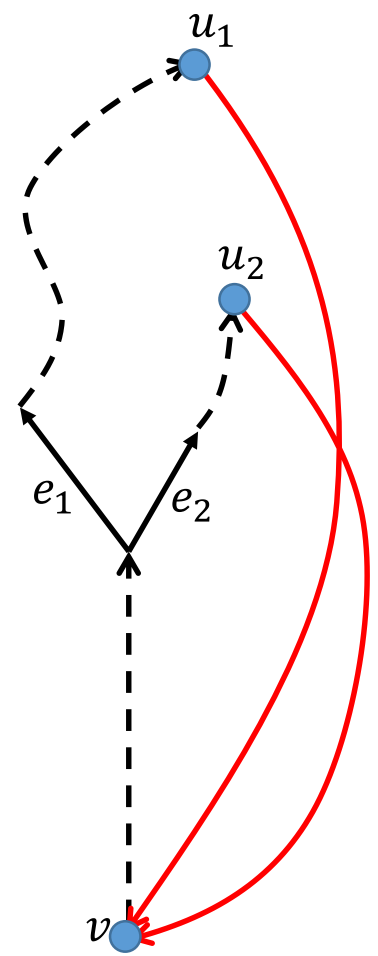
Полный порядок в вершине устроен так:

- сначала входящее ребро
- затем левые исходящие рёбра, окружённые своими левыми и правыми обратными рёбрами
- затем правые исходящие рёбра, окружённые своими левыми и правыми обратными рёбрами



Конфликт двух правых рёбер

Если рёбра ведут в одну и ту же вершину, то противоречие с ЛП-упорядочением правых входящих рёбер в вершине v.

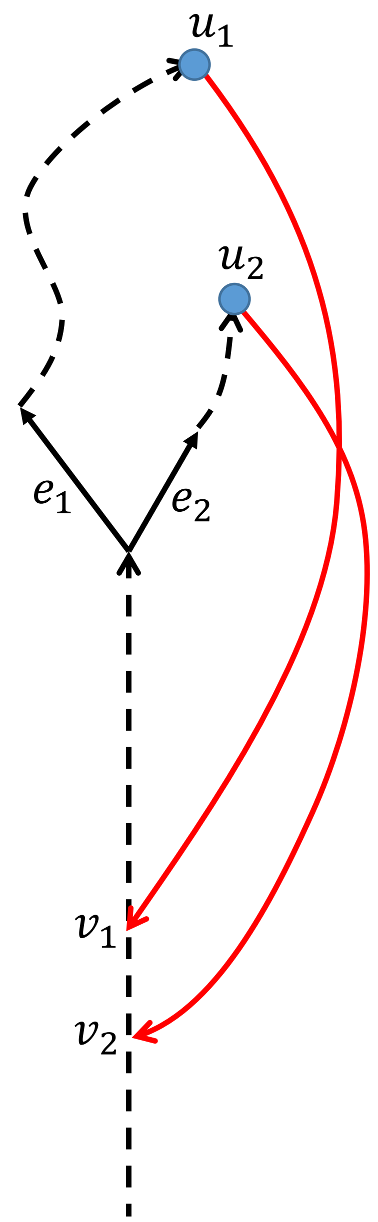


Конфликт двух правых рёбер

Пусть у пересекающихся рёбер концы разные.

Пусть $\{e_1, e_2\}$ — развилка их циклов.

По свойству ЛП-разбиения, все обратные рёбра, относящиеся к e_1 и заканчивающиеся выше v_2, являются правыми.



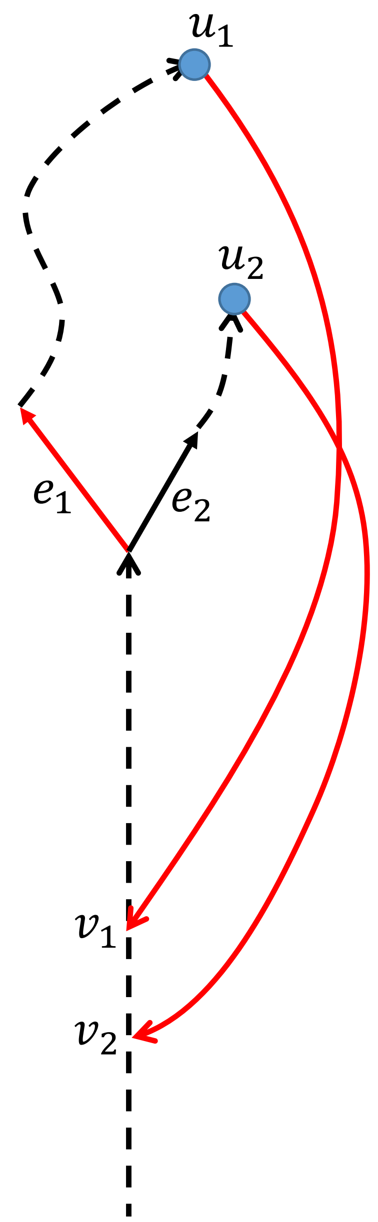
Конфликт двух правых рёбер

Пусть у пересекающихся рёбер концы разные.

Пусть $\{e_1, e_2\}$ — развилка их циклов.

По свойству ЛП-разбиения, все обратные рёбра, относящиеся к e_1 и заканчивающиеся выше v_2, являются правыми.

Значит, e_1 само правое.



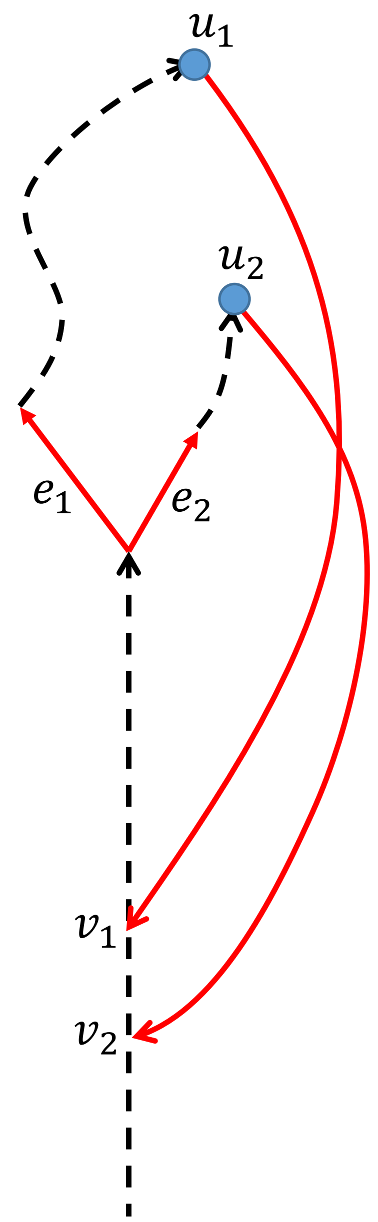
Конфликт двух правых рёбер

Пусть у пересекающихся рёбер концы разные.

Пусть $\{e_1, e_2\}$ — развилка их циклов.

По свойству ЛП-разбиения, все обратные рёбра, относящиеся к e_1 и заканчивающиеся выше v_2, являются правыми.

Значит, e_1 само правое. Т.к. e_2 идёт после e_1, то и e_2 правое.



Конфликт двух правых рёбер

Пусть у пересекающихся рёбер концы разные.

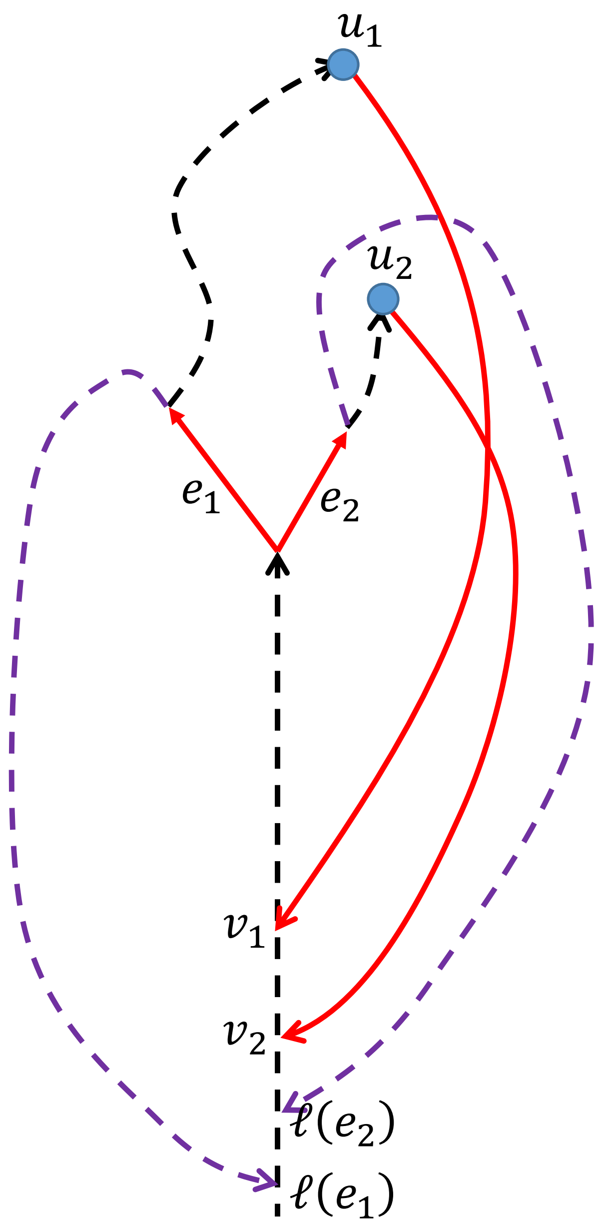
Пусть $\{e_1, e_2\}$ — развилка их циклов.

По свойству ЛП-разбиения, все обратные рёбра, относящиеся к e_1 и заканчивающиеся выше v_2, являются правыми.

Значит, e_1 само правое. Т.к. e_2 идёт после e_1, то и e_2 правое.

У нас $e_1 \prec e_2$, поэтому

- либо $\ell(e_1)$ ниже $\ell(e_2)$, но тогда $u_1 v_1$ и $u_2 v_2$ не могут быть оба правыми,



Конфликт двух правых рёбер

Пусть у пересекающихся рёбер концы разные.

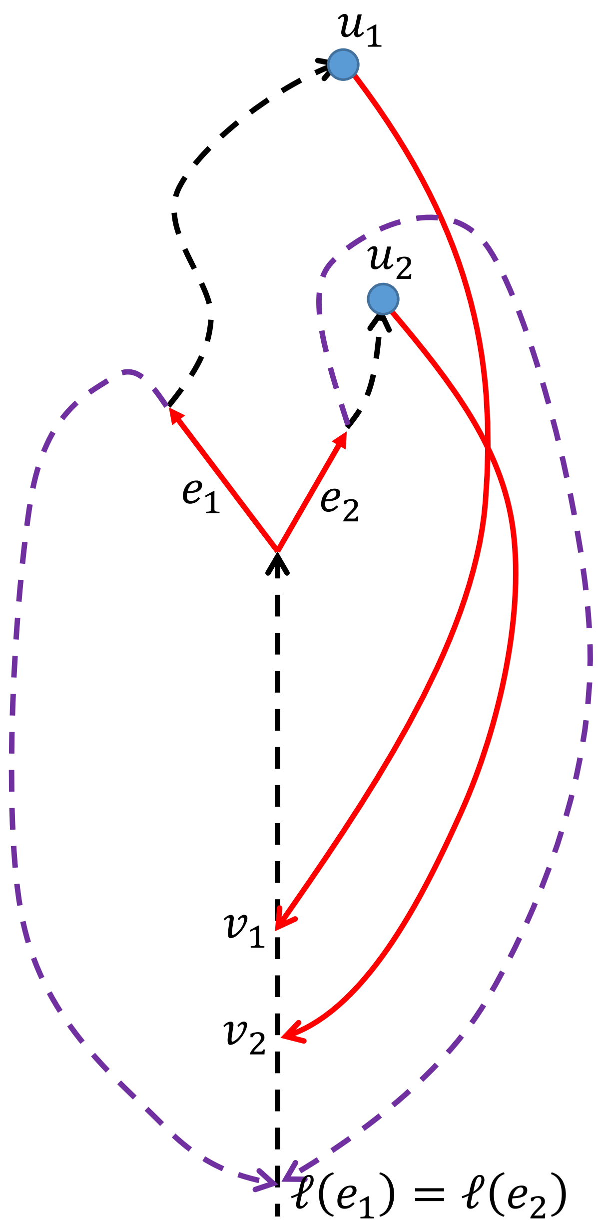
Пусть $\{e_1, e_2\}$ — развилка их циклов.

По свойству ЛП-разбиения, все обратные рёбра, относящиеся к e_1 и заканчивающиеся выше v_2, являются правыми.

Значит, e_1 само правое. Т.к. e_2 идёт после e_1, то и e_2 правое.

У нас $e_1 \prec e_2$, поэтому

- либо $\ell(e_1)$ ниже $\ell(e_2)$, но тогда $u_1 v_1$ и $u_2 v_2$ не могут быть оба правыми,
- либо $\ell(e_1) = \ell(e_2)$ и e_2 хордально. Если $\ell(e_1) = \ell(e_2)$ ниже v_2, то противоречие аналогично предыдущему пункту.



Конфликт двух правых рёбер

Пусть у пересекающихся рёбер концы разные.

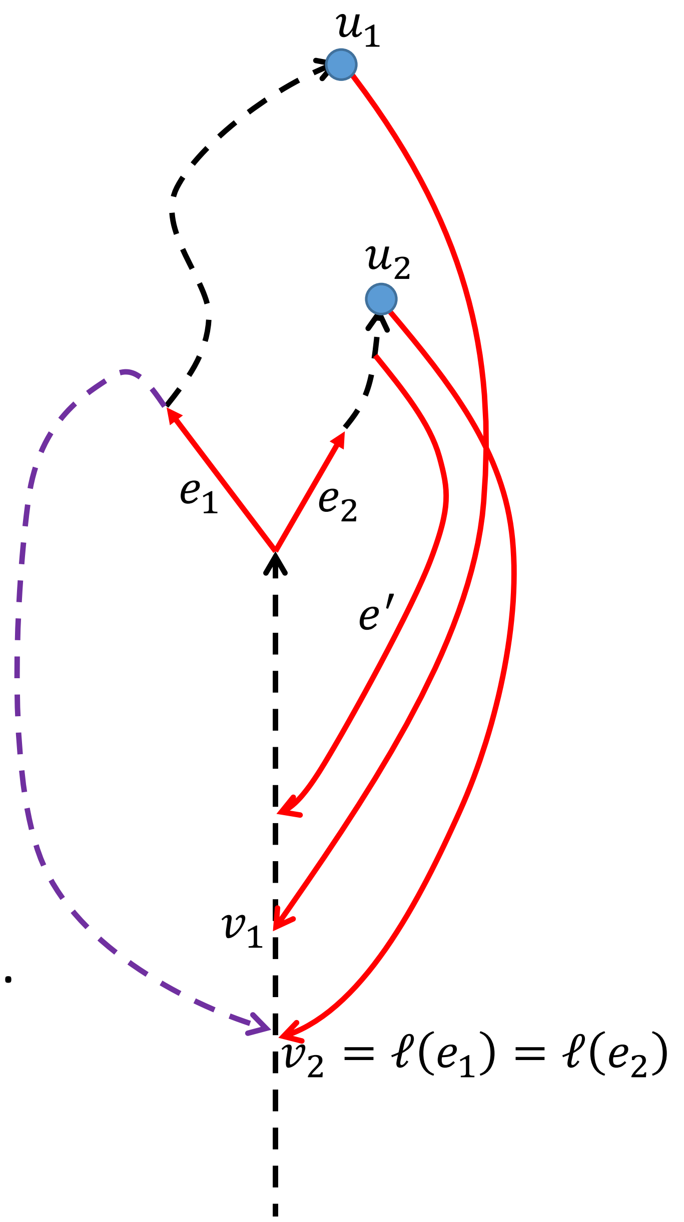
Пусть $\{e_1, e_2\}$ — развилка их циклов.

По свойству ЛП-разбиения, все обратные рёбра, относящиеся к e_1 и заканчивающиеся выше v_2, являются правыми.

Значит, e_1 само правое. Т.к. e_2 идёт после e_1, то и e_2 правое.

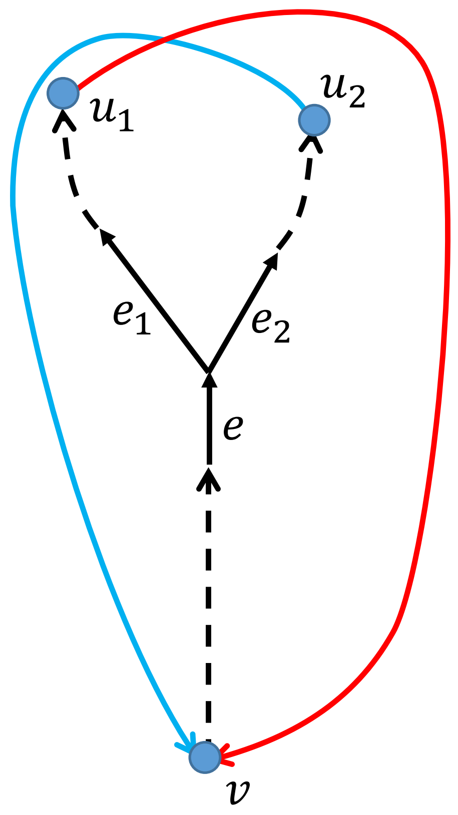
У нас $e_1 \prec e_2$, поэтому

- либо $\ell(e_1)$ ниже $\ell(e_2)$, но тогда $u_1 v_1$ и $u_2 v_2$ не могут быть оба правыми,
- либо $\ell(e_1) = \ell(e_2)$ и e_2 хордально (e' — соотв. обратное ребро). Пусть $\ell(e_1) = \ell(e_2) = v_2$. Тогда e' правое, но тогда $u_1 v_1$ должно было быть левым по определению ЛП-разбиения.



Конфликт разносторонних рёбер

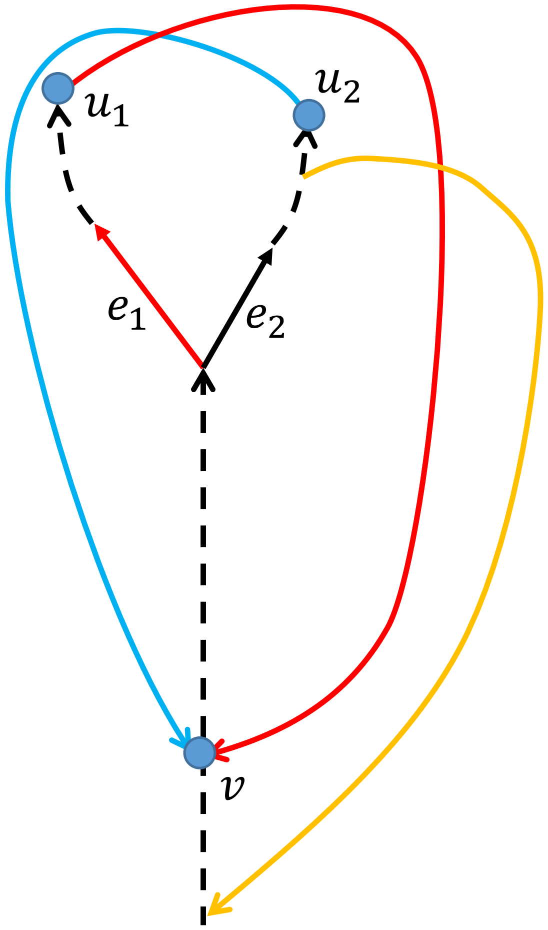
Если конфликтующие ребра ведут в одну вершину v, то если $v = \ell(e_1) = \ell(e_2)$, получаем противоречие с приведённостью ЛП-разбиения.



Конфликт разносторонних рёбер

Пусть, например, $\ell(e_2)$ ниже v.

Тогда должны быть односторонними все обратные рёбра, оканчивающиеся не ниже v, циклы которых содержат e_1. То есть e_1 правое.

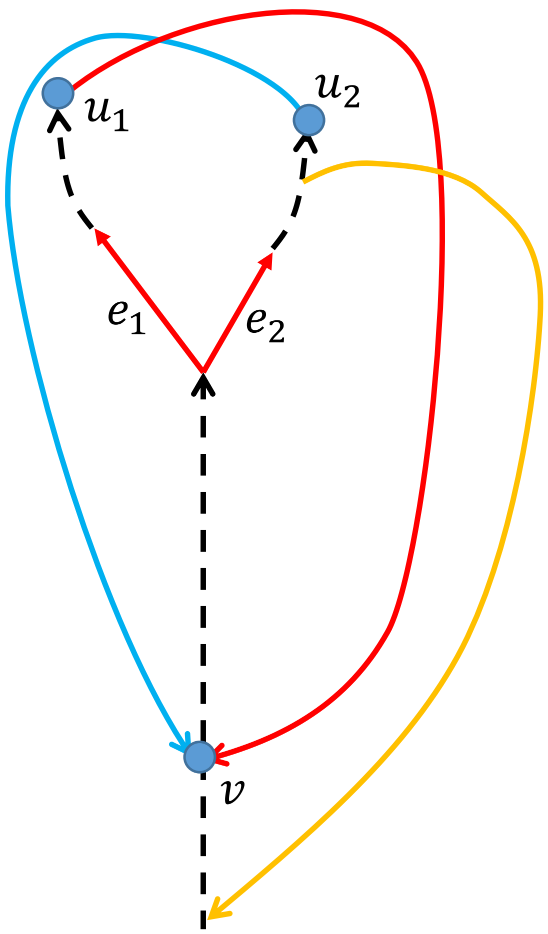


Конфликт разносторонних рёбер

Пусть, например, $\ell(e_2)$ ниже v.

Тогда должны быть односторонними все обратные рёбра, оканчивающиеся не ниже v, циклы которых содержат e_1. То есть e_1 правое.

Значит, e_2 тоже правое.



Конфликт разносторонних рёбер

Пусть, например, $\ell(e_2)$ ниже v.

Тогда должны быть односторонними все обратные рёбра, оканчивающиеся не ниже v, циклы которых содержат e_1. То есть e_1 правое.

e_2 тоже правое. Тогда должно быть правое обратное ребро e', цикл которого содержит e_2 и которое оканчивается выше v.

Односторонность $u_1 v$ и e' противоречит определению ЛП-разбиения.