Дополнительные главы комбинаторики. Весна 2010.

1. Пользуясь формулой Стирлинга, найдите асимптотику по n следующих функций:
   (a) $f(n) = C_{2n}^{n}$,
   (b) $f(n) = C_{n^3}^{n^2}$,
   (c) $f(n) = \sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2$.
2. Доказать оценку: $C_n^k \geqslant \frac{n^k}{k!} e^{-\frac{k(k-1)}{2n} + O(\frac{k^3}{n^2})}$.
3. Доказать, что число всех вхождений натурального числа k в упорядоченные разбиения числа n, $n \geqslant k+1$, равно $(n-k+3) \cdot 2^{n-k-2}$.
4. Найти асимптотику для количества неупорядоченных разбиений натурального числа N на слагаемые, каждое из которых не превосходит $\lfloor \frac{N}{100} \rfloor$.
5. Найдите количество неупорядоченных разбиений $p(4)$, $p(5)$, $p(6)$ и $p(7)$, и сравните полученный результат с формулой Харди-Рамануджана.
6. Найти количество различных циклических слов длины 10 в трёхбуквенном алфавите.
7. Пусть $(S, \leqslant)$ — частично упорядоченное множество, такое, что для каждого $x \in S$ существует лишь конечное число элементов y таких, что $y \leqslant x$. Функция Мёбиуса ч. у. м. зависит от двух аргументов и определяется рекурсивно. $\mu(x, y) = 0$ для несравнимых элементов x, y. Если $x = y$, то $\mu(x, y) = 1$. Если $x < y$, то $\mu(x, y) = -\sum_{z\colon x \leqslant z < y} \mu(x, z)$. Доказать *обобщённую формулу обращения Мёбиуса*: если функции f и g, действующие из S в $\mathbb{R}$, связаны соотношением $f(y) = \sum_{x\colon x \leqslant y} g(x)$, то $g(y) = \sum_{x\colon x \leqslant y} f(x)\mu(x, y)$.
8. Найдите асимптотику n-го члена последовательности, заданной соотношением $a_{n+2} = 3a_{n+1} + a_n$ и начальными условиями $a_0 = 0$, $a_1 = 2$.
9. Примените теорему Холла для доказательства следующего факта. Пусть граф G таков, что для любого его подграфа H число рёбер в H не более чем в d раз больше числа вершин в H. Тогда в G можно так ориентировать рёбра, чтобы для каждой вершины число выходящих из неё дуг было не больше d.
10. Приведите пример сети, на которой алгоритм Форда-Фалкерсона будет работать (при некотором, неудачном, выборе потока в остаточной сети на каждом шаге) время, пропорциональное максимальной пропускной способности рёбер.
11. Приведите пример сети на n вершинах, число различных максимальных потоков в которой экспоненциально по n.
12. Дана сеть на вершинах A, B, C, D, E, F, G, H. Вершины A и H являются истоком и стоком соответственно. Список дуг с пропускными способностями: AB(4), AE(2), BC(1), BE(1), BH(1), CD(3), DF(3), DH(2), EC(2), EF(4), FG(2), GH(2). На первом шаге алгоритма Форда-Фалкерсона был построен поток $A \to B \to C \to D \to H$ величины 1. Продемонстрировать дальнейшие шаги поиска максимального потока в указанной сети.
13. Докажите, что рёбра любого графа, у которого степень каждой вершины не превосходит k, можно правильно раскрасить в $\lceil \frac{3}{2}k \rceil$ цветов. (Указание: примените теорему о существовании 2-фактора).
14. Пусть КНФ от переменных $\{x_1, \ldots, x_n\}$ такова, в каждой элементарной дизъюнкции ровно k литералов, и каждая переменная входит не более чем в $\frac{2^{k-2}}{k}$ элементарных дизъюнкций. Докажите, что эта КНФ задаёт не равную тождественно нулю функцию. (Указание: возьмите случайный набор значений переменных.)
15. Докажите, что для любого фиксированного графа H почти все графы содержат H в качестве порождённого подграфа.
16. С помощью вероятностного метода докажите нижнюю оценку для $R_r(p, q)$ при произвольном r.
17. Пусть $(S, \mathfrak{F}_1)$ и $(S, \mathfrak{F}_2)$ — матроиды. Докажите, что матроидом является пара $(S, \mathfrak{F})$, где $\mathfrak{F} = \{I_1 \cup I_2 \mid I_1 \in \mathfrak{F}_1, I_2 \in \mathfrak{F}_2\}$. Докажите, что матроидом является пара $(S, \mathfrak{F})$, где $\mathfrak{F} = \{I_1 \cap I_2 \mid I_1 \in \mathfrak{F}_1, I_2 \in \mathfrak{F}_2\}$.
18. Докажите вторую часть теоремы Франкла-Уилсона (оцените размер максимальной клики в графе).
19. Выведите из теоремы Франкла-Уилсона оценку для чисел Рамсея, заявленную на лекции: $R_2(s, s) \geqslant (e^{1/4} + o(1))^{\frac{(\ln s)^2}{\ln \ln s}}$.