Дискретные структуры. Учебный год 2013—2014.

Примеры вопросов письменной части итогового экзамена

Сформулируйте два главных правила комбинаторики (правила сложения и умножения).

Расставьте в порядке возрастания числа $\overline{A}_{100}^{65}$, C_{100}^{65}, $\overline{C}_{100}^{65}$.

Запишите формулу, выражающую $\binom{n}{k}$ через факториалы.

Почему числа $\binom{n}{k}$ называются биномиальными коэффициентами?

Выразите полиномиальный коэффициент $\binom{n}{k_1\, k_2\, \ldots\, k_l}$ через факториалы.

Почему числа $\binom{n}{k_1\, \ldots\, k_s}$ называются полиномиальными коэффициентами?

Исправьте ошибку в тождестве: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k+1}$.

Исправьте ошибку в тождестве: $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n+1}{k} + \binom{n}{k+1}$.

Что такое «унимодальность последовательности биномиальных коэффициентов»?

Дайте определение чисел Стирлинга второго рода и напишите, чему равно $\left\{ {3 \atop 2} \right\}$.

Дайте определение чисел Белла и напишите, чему равно B_3.

Запишите формулу включения-исключения для случая четырёх множеств.

Пусть f, g — функции из $\mathbb{N}$ в $(0, +\infty)$. Приведите пример таких f и g, что $f = O(g)$ и $2^f \neq O(2^g)$.

Пусть f, g — функции из $\mathbb{N}$ в $(0, +\infty)$. Приведите пример таких f и g, что $f - g \to +\infty$ и $f = O(g)$.

Из перечисленных величин выберите ту, которая даёт самую точную асимптотическую нижнюю оценку для $n!$: $(n/e)^n$, $(n/2)^n$, $(n/e)^n \cdot e^{-n(n-1)/2}$, $(n/e)^n \cdot 2^{-n(n-1)/2}$.

Из перечисленных условий выберите самое слабое, при котором справедлива асимптотика $\binom{n}{k} \sim \frac{n^k}{k!}$: $k = O\left(\frac{n}{\ln n}\right)$, $k = O\left(\sqrt{n}\right)$, $k = o\left(\sqrt{n}\right)$, $k = o\left(n\right)$, $k = O\left(\frac{\sqrt{n}}{\ln n}\right)$.

Исправьте ошибку в утверждении: при $r \leqslant n/2$ выполнено неравенство $\sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k} \leqslant \frac{n!}{r!(n-r)!}$.

Пусть последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяют одному и тому же однородному линейному рекуррентному соотношению с постоянными коэффициентами. Пусть λ — один из корней характеристического многочлена этого соотношения. Из следующих последовательностей выберите те, которые гарантированно удовлетворяют этому же соотношению: $\{a_n + 2b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n - 2b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n + \lambda^n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n + \lambda^n \cdot b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\lambda^{n+25}\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\lambda^{2n}\}_{n=1}^{\infty}$.

Пусть λ — корень кратности 4 характеристического многочлена однородного линейного рекуррентного соотношения с постоянными коэффициентами. Из следующих последовательностей выберите те, которые гарантированно удовлетворят этому рекуррентному соотношению: $\{\lambda^n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{2n \cdot \lambda^n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{n^2\}_{n=1}^{\infty}$, $\{n^2 \cdot \lambda^n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{n^3 \cdot \lambda^n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{(n\lambda)^n\}_{n=1}^{\infty}$.

Какова минимальная длина универсальной двоичной последовательности длины n?

Что такое последовательность де Брёйна порядка k?

Пусть a_k — количество циклических двоичных слов периода k. Чему равна сумма $\sum_{k|n} a_k$?

Сформулируйте теорему Мёбиуса об обращении.

Пусть μ обозначает функцию Мёбиуса. Чему равна сумма $\sum_{k|2014} \mu(k)$?

Пусть $T_r(n)$ обозначает количество циклических слов, а $L_r(n)$ — количество «обычных» слов длины n в r-символьном алфавите Как при $n \to \infty$ асимптотически соотносятся между собой $T_r(n)$ и $L_r(n)$ (асимптотически равны, или какая-то из величин является $o()$ от другой)? Тот же вопрос для $\ln T_r(n)$ и $\ln L_r(n)$?

Исправьте ошибку в утверждении: «количество разбиений числа N на не более чем k слагаемых равно количеству разбиений N на слагаемые, максимальное из которых равно k».

Исправьте ошибку в утверждении: «количество разбиений числа N на не более чем k слагаемых равно количеству разбиений $N + \frac{k(k+1)}{2}$ на k слагаемых».

Исправьте ошибку в утверждении: «количество разбиений числа N на не более чем k слагаемых равно количеству разбиений $N + k$ на не менее чем k слагаемых».

Исправьте ошибку в утверждении: «количество разбиений числа N на k слагаемых равно количеству разбиений $N + \frac{k(k+1)}{2}$ на k различных слагаемых».

Обозначим $p_{\text{чёт}}(N)$ и $p_{\text{неч}}(N)$ количества разбиений N соответственно на чётное и нечётное число различных слагаемых. Укажите наиболее точную оценку величины $|p_{\text{чёт}}(N) - p_{\text{неч}}(N)|$ при $N \to \infty$: $O(1)$, $O(n)$, $O(n \ln n)$, $O(e^{\sqrt{n}})$.

Пусть $p(N;\, n_1, n_2, \ldots, n_k)$ — количество неупорядоченных разбиений N на слагаемые, каждое из которых равно одному из чисел n_i. Напишите основное рекуррентное соотношение для $p(\ldots)$.

Пусть $P(N;\, n_1, n_2, \ldots, n_k)$ — количество упорядоченных разбиений N на слагаемые, каждое из которых равно одному из чисел n_i. Напишите основное рекуррентное соотношение для $P(\ldots)$.

Как растёт с ростом N количество неупорядоченных разбиений N на слагаемые: линейно / нелинейно полиномиально / сверхполиномиально субэкспоненциально / экспоненциально / сверхэкспоненциально?

Сформулируйте теорему Коши о радиусе сходимости степенного ряда.

Сформулируйте определение произведения степенных рядов.

Запишите рекуррентное соотношение для чисел Каталана.
Выпишите формулу, выражающую числа Каталана через биномиальные коэффициенты.
Сформулируйте определение группы.
Что значит, что две группы изоморфны?
Пусть перестановка на множестве $\{1, \ldots, 5\}$ задана своими циклами: $(2, 1, 3)(4, 5)$. Запишите обратную к ней перестановку.
Сформулируйте теорему Кэли.
Приведите пример группы и пример смежного класса в этой группе по какой-нибудь подгруппе.
Сформулируйте теорему Лагранжа о порядке подгруппы.
Сформулируйте теорему Силова о существовании подгруппы.
Что такое порядок элемента группы?
Дайте определение мультипликативной группы вычетов.
Что такое функция Эйлера?
Сформулируйте теорему Эйлера—Ферма.
Сформулируйте определение поля.
Для каких натуральных чисел n множество $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ образует поле относительно операций сложения и умножения по модулю n?
Для каких натуральных чисел n множество $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ образует группу относительно операции сложения по модулю n?
Для каких натуральных чисел n множество $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ образует группу относительно операции умножения по модулю n?
Сформулируйте теорему о делении многочленов с остатком.
Что такое простой (неприводимый) многочлен?
Определите, какие из натуральных чисел, не превосходящие 20, могут быть количествами элементов в конечном поле.
Запишите асимптотику числа нормированных многочленов степени n, неприводимых над $\mathbb{Z}_p$, при $n \to \infty$.
Сформулируйте теорему Редфилда—Пойи о числе орбит.
Сформулируйте лемму Бёрнсайда о числе орбит.
Чем отличаются определения *подграфа* и *порождённого подграфа*?
Что такое полустепень исхода и полустепень захода вершины?
Сформулируйте теорему о рукопожатиях.
Какое наибольшее и наименьшее количество компонент связности может быть у графа на 2014 вершинах с 4 рёбрами? Обосновывать ответ не нужно.
Что такое мост в графе?
Что такое точка сочленения в графе?
Что такое кликовое число графа?
Что такое число независимости графа?
Сколько рёбер в полном графе на 2014 вершинах?
Приведите алгоритм Флёри для поиска эйлерова цикла в графе.
Сколько вершин в графе де Брёйна, по которому строится последовательность де Брёйна порядка 2014?
Как соотносятся между собой число вершин и рёбер дерева?
Дайте любые два из определений дерева, рассмотренных в лекциях.
Дайте определение планарного графа.
Известно, что некоторый граф нельзя уложить на сфере. Обязательно ли этот граф непланарен?
Запишите формулу Эйлера для планарных графов. Для каких графов она справедлива?
Какое максимальное число рёбер может быть в простом планарном графе на 10 вершинах?
В простом планарном графе стянули ребро. Как при этом может измениться число вершин графа?
Сформулируйте критерий планарности Вагнера.
Какое максимальное и минимальное количество автоморфизмов может быть у графа на 2014 вершинах?
Сколько автоморфизмов у графа на 2014 вершинах с одним ребром?
Как растёт с ростом n количество неизоморфных n-вершинных деревьев: линейно / нелинейно полиномиально / сверхполиномиально субэкспоненциально / экспоненциально / сверхэкспоненциально?
Чему равно количество различных деревьев на множестве вершин $\{1, \ldots, 2014\}$? (Речь именно о различных, а не о неизоморфных деревьях.)
В графе на 2014 вершинах всего десять компонент связности, каждая из которых является деревом. Сколько в этом графе рёбер?
Что такое правильная раскраска вершин графа?
Что такое правильная раскраска рёбер графа?

Что такое хроматическое число графа?
Что такое хроматический индекс графа?
Каково максимально/минимально возможное хроматическое число двудольного графа на 2014 вершинах?
Сформулируйте теорему Брукса о хроматическом числе.
Сформулируйте теорему Визинга о хроматическом индексе.
Каково максимально возможное хроматическое число планарного графа?
Верно ли, что в любом планарном графе найдётся вершина степени не больше четырёх?
Сформулируйте теорему Холла о паросочетаниях.
Как связаны между собой максимальная и минимальная степень вершин и хроматический индекс двудольного графа?
Что такое хроматический многочлен?
Запишите основное рекуррентное соотношение для хроматического многочлена.
Пусть G — граф на n вершинах с m рёбрами, и $\chi(G;x)$ — его хроматический многочлен. Чему равен $\mathrm{coef}_{x^{n-1}}\,\chi(G;x)$?
Сформулируйте теорему Оре о гамильтоновых циклах.
Сколько рёбер в полном r-однородном n-вершинном гиперграфе?
Что такое покрытие матрицы?
Сформулируйте теорему Алона о нулях многочленов.
Исправьте ошибку в утверждении: «пусть $P \in \mathbb{F}[x_1,\ldots,x_m]$ и $\widetilde{P} \in \mathbb{F}[x_i]$. Тогда существуют $Q, R \in \mathbb{F}[x_1,\ldots,x_m]$, такие, что $P = \widetilde{P}\cdot Q + R$ и $\deg R < \deg P$».
Сформулируйте теорему Коши—Давенпорта о мощности сумм.
Сформулируйте теорему Алона—Фюреди о покрытии вершин гиперкуба гиперплоскостями.
Сформулируйте теорему Алона—Фридланда—Калаи о регулярных подграфах.
Сформулируйте теорему Турана о числе рёбер в графах без больших клик.
Каким образом двудольным графам сопоставляются матрицы при переформулировке проблемы Заранкевича?
Сформулируйте постулат Бертрана о простых числах.
Можно ли утверждать, что существует константа K, такая, что для любого натурального $n > 2$ в интервале $[n,\, n+\frac{Kn}{\ln n}]$ лежит хотя бы одно просто число?
Дайте определение числа Заранкевича $Z_{a,b}(m,n)$.
Каково точное значение $Z_2(p^2+p+1)$ при простом p? (Через $Z_2(\ldots)$ обозначено число Заранкевича.)
Сформулируйте определение числа Рамсея $R(s,t)$ в терминах раскрасок графов в два цвета.
Сформулируйте определение числа Рамсея $R(s,t)$ в терминах кликового числа и числа независимости.
Сверните сумму чисел Рамсея $R(2,\,1)+R(2,\,2)+R(2,\,3)+\ldots+R(2,\,2014)$.
Каким биномиальным коэффициентом оценивалось верху на лекциях число $R(s,t)$?
Как растёт с ростом s число Рамсея $R(s,s)$: линейно / нелинейно полиномиально / сверхполиномиально субэкспоненциально / экспоненциально / сверхэкспоненциально?
Какая из доказанных на лекциях нижних оценок чисел Заранкевича $Z_2(m)$ асимптотически точнее: получаемая вероятностным или алгебраическим методом?
Какая из доказанных на лекциях нижних оценок чисел Рамсея $R(s,s)$ асимптотически точнее: получаемая вероятностным или алгебраическим методом?
Как определяется граф, на основе которого с помощью алгебраического метода получается нижняя конструктивная оценка чисел Рамсея?
Сформулируйте локальную лемму Ловаса в симметричном случае.
Может ли орграф зависимостей для некоторого набора из десяти событий быть пустым? Если да, приведите пример такого набора.
Что такое обхват графа?
Сформулируйте теорему Эрдёша о графах с большим обхватом и хроматическим числом.
Сформулируйте теорему Вея о нижней оценке числа независимости.
Сформулируйте теорему о числе скрещиваний.
Каков порядок верхней оценки числа скрещиваний графа K_n?
Сформулируйте определение булеана, как частично упорядоченного множества.
Сформулируйте теорему Лубелла—Ямамото—Мешалкина о мощности антицепей в булеане.
Сформулируйте теорему Шпернера о мощности антицепи в булеане.
Что значит разложить частично упорядоченное множество на цепи?
Что значит разложить частично упорядоченное множество на антицепи?
Из какого утверждения о частично упорядоченных множествах на лекциях была выведена теорема Холла о паросочетаниях?
Сформулируйте теорему Эрдёша—Ко—Радо о числе рёбер в специальном гиперграфе.

Определите семейство, на котором достигается оптимум в теореме Альсведе—Хачатряна (не нужно выписывать формулы определения параметров).
Сформулируйте теорему Фишера о числе рёбер в специальном гиперграфе.
Сформулируйте определение VC-размерности.
Пусть семейство подмножеств множества $\{1, \ldots, 10\}$ таково, что каждое подмножество в нём имеет мощность не меньше шести. Какая максимальная VC-размерность может быть у такого семейства?
Сформулируйте теорему Хаусслера—Вельцля об ε-сетях.
Сформулируйте геометрическое следствие теоремы Хаусслера—Вельцля об ε-сетях.
Сформулируйте теорему о верхней оценке мощности семейства с заданной VC-размерностью.
Сформулируйте теорему о VC-размерности измельчения.
Пусть $A = \{1, 2, 3, 5\}$ и $\mathcal{F} = \{\{1, 2\}, \{4, 18\}, \{1, 3, 4, 5, 6\}, \{4, 5\}, \{14, 15\}\}$. Запишите, чему равна проекция $\mathcal{F}|_A$.
Пусть $\mathcal{F} = \{\{1, 2\}, \{4, 18\}, \{1, 3, 4, 5, 6\}, \{4, 5\}, \{14, 15\}\}$. Запишите, чему равно измельчение $\mathcal{F}^{(2)}$.
Запишите последовательность целых чисел, производящая функция которой равна $(1 + x)(2x - 5)$.
Пусть f и g — характеристические функции множеств $\{1, 2, 3\}$ и $\{3, 4, 5\}$. Решите уравнение $f(x) = 2 - g(x)$.
Пусть $p(n)$ — количество неупорядоченных разбиений числа n на слагаемые. Подчеркните *все* слова из перечисленных, которые описывают скорость роста $p(n)$ при $n \to \infty$: линейная, сублинейная, полиномиальная, сверхполиномиальная, экспоненциальная, субэкспоненциальная, сверхэкспоненциальная.
Рассмотрим отношение $\mathcal{R}$ на множестве функций: $f\mathcal{R}g$ тогда и только тогда, когда $f(n) = O(g(n))$. Является ли это отношение рефлексивным? симметричным? транзитивным? антисимметричным?
Пусть μ — функция Мёбиуса, определённая не некотором ЧУМе, в котором 2014 элементов. Сколько решений имеет уравнение $\mu(x) = \sqrt{2}$?
Пусть G — конечная группа (обозначения мультипликативные). Может ли быть так, что для некоторого $a \in G$ выполнено $a^5 \neq a^t$ для всех $t \neq 5$?
Пусть χ' обозначает хроматический индекс. Может ли быть так, что $\chi'(G) = |G|^2 > 100$ для некоторого непустого графа G без петель и кратных рёбер?