Дискретные структуры

осень 2013

Александр Дайняк

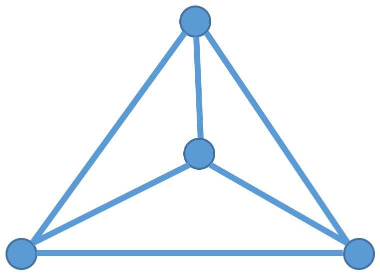
www.dainiak.com

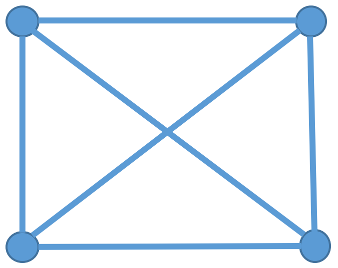
Графы и их представления

- Следует чётко различать сам граф (абстрактный объект, пара множеств) и его представление (например, изображение на плоскости).
- Графы существуют вне зависимости от их изображений. Например, граф

$$\big(\{1,2,3,4\},\{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\}\big)$$

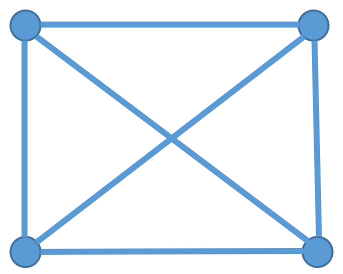
можно по-разному «изобразить»:





Графы и их представления

- И наоборот, два разных графа могут «структурно» представлять собой одно и то же: графы
$$(\{1,2,3,4\},\{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\})$$
и
$$(\{A,B,C,D\},\{\{A,B\},\{C,D\},\{A,C\},\{B,D\},\{D,A\},\{B,D\}\})$$

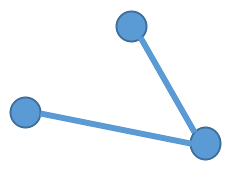


Изоморфизм графов

- Графы, которые неотличимы со структурной точки зрения, называются *изоморфными*
- Формально, графы G' и G'' без петель и кратных рёбер *изоморфны*, если существует биекция
$$\phi: V(G') \leftrightarrow V(G'')$$
такая, что
$$uv \in E(G') \Leftrightarrow \phi(u)\phi(v) \in E(G'')$$
- Сама биекция ϕ называется *изоморфизмом* между G' и G''

Изоморфизм графов

- Иначе говоря, G' и G'' изоморфны, если их вершины можно «занумеровать» так, что вершины с одинаковыми «номерами» либо смежны и в G', и в G'', либо несмежны в обоих этих графах
- Пример:
  - $V(G') = \{1,2,3\},\ E(G') = \{\{1,2\},\{1,3\}\}$
  - $V(G'') = \{x,y,z\},\ E(G'') = \{\{y,z\},\{z,x\}\}$
  - Изоморфизм: $1 \leftrightarrow z, 2 \leftrightarrow x, 3 \leftrightarrow y$



Изоморфизм графов

- **Упражнение.** Данное выше формальное определение изоморфных графов «работает» только для графов без петель и кратных рёбер. Дайте формальное определение изоморфизма, пригодное для мульти- и псевдографов.

Изоморфизм графов

- Поскольку изоморфные графы с точки зрения структуры идентичны, мы часто будем считать их одним и тем же графом
- Любая характеристика графа (числовая или качественная), зависящая лишь от структуры графа (т.е. равная у любой пары изоморфных графов), называется *инвариантом* графа
- Пример: количества вершин и рёбер графа являются инвариантами

Изоморфизм графов

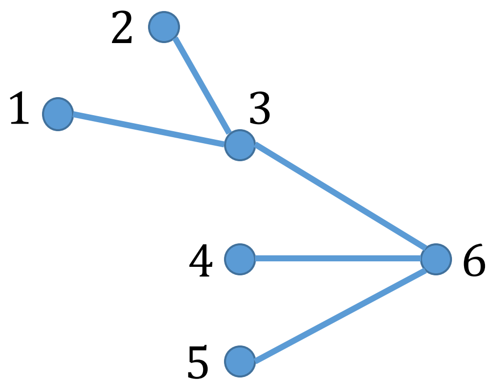
Если требуется определить, являются ли два данных графа изоморфными, то

- для доказательства неизоморфности графов надо указать инвариант, значение которого различается у этих графов
- для доказательства изоморфности нужно указать, какая вершина первого графа соответствует какой вершине второго

Автоморфизмы

Автоморфизм графа — это изоморфизм графа с самим собой (перестановка вершин, переводящая граф сам в себя).

Пример автоморфизмов:



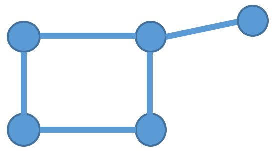
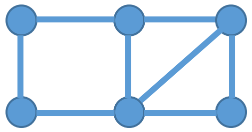
$1 \to 1$	$1 \to 2$	$1 \to 4$
$2 \to 2$	$2 \to 1$	$2 \to 5$
$3 \to 3$	$3 \to 3$	$3 \to 6$
$4 \to 4$	$4 \to 4$	$4 \to 2$
$5 \to 5$	$5 \to 5$	$5 \to 1$
$6 \to 6$	$6 \to 6$	$6 \to 3$

Множество всех автоморфизмов графа G образует группу, обозначаемую $\mathrm{Aut}(G)$

Автоморфизмы

Автоморфизм графа — это изоморфизм графа с самим собой.

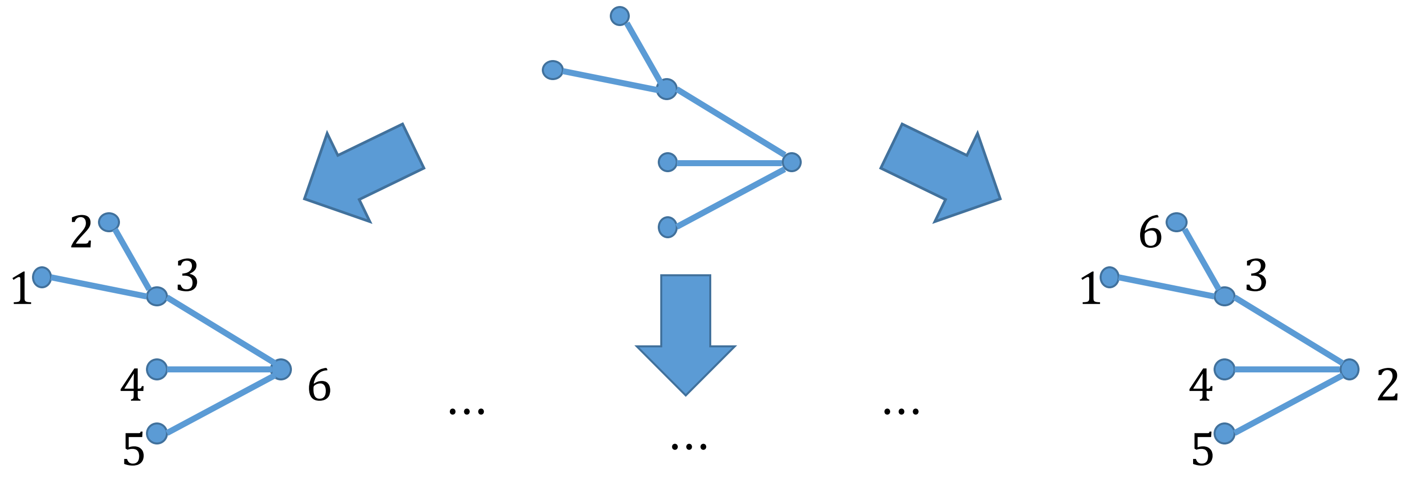
Примеры:

- У графа K_n группа автоморфизмов равна $\mathbb{S}_n$
- У графа  группа автоморфизмов изоморфна $\mathbb{Z}_2$
- У графа  группа автоморфизмов состоит из одной тождественной подстановки

Различные графы vs. Неизоморфные графы

Будем рассматривать графы на множестве вершин $\{1, \ldots, n\}$.

Каждому n-вершинному графу соответствует несколько различных изоморфных графов на множестве вершин $\{1, \ldots, n\}$:



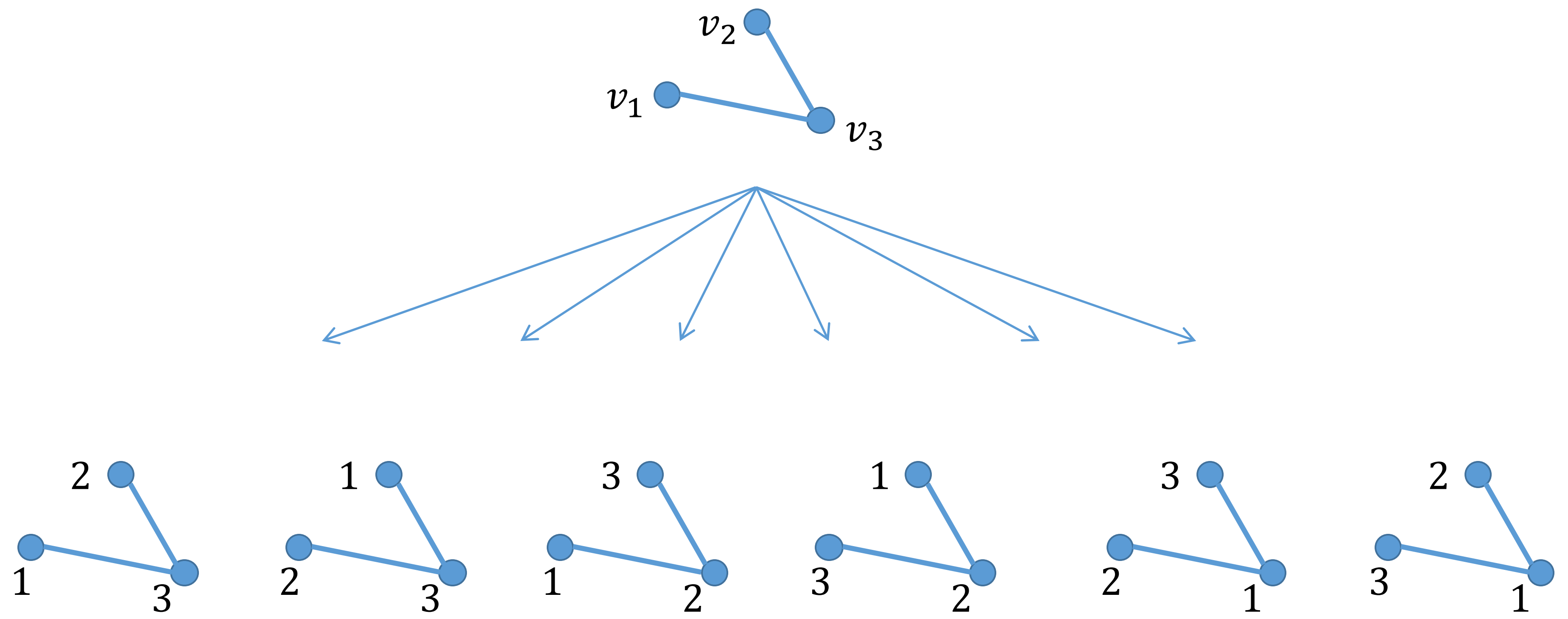
Количество графов

Утверждение.
Количество графов на вершинах $\{1, \dots, n\}$, изоморфных заданному n-вершинному графу G, равно $\frac{n!}{|\mathrm{Aut}(G)|}$.

Количество графов

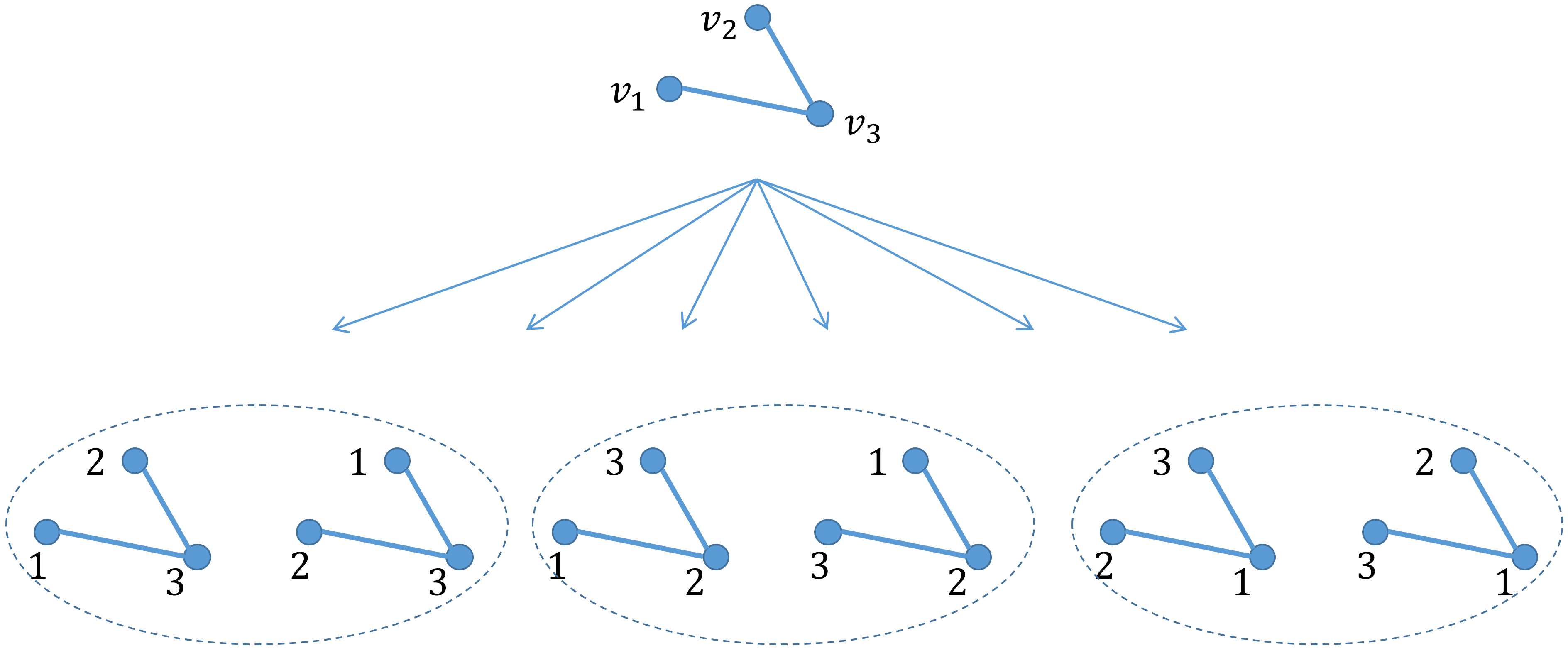
Пусть G — граф на вершинах $\{v_1, \dots, v_n\}$.

Занумеровать вершины $v_1, \dots, v_n$ можно $n!$ способами:



Количество графов

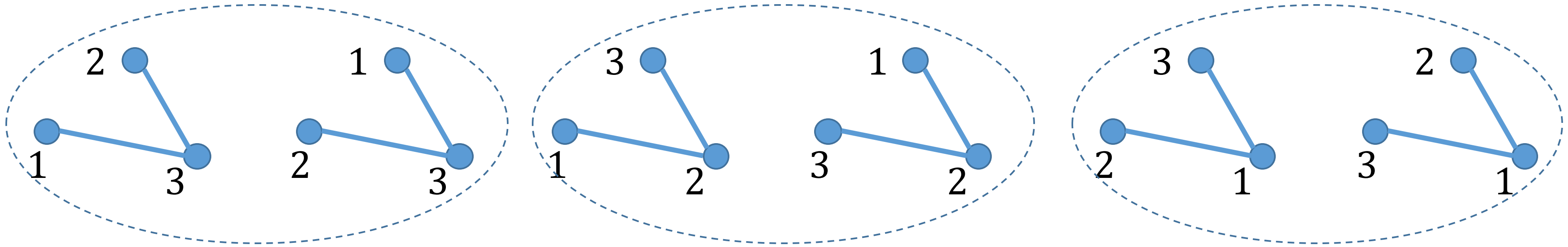
Полученные $n!$ графов на вершинах $\{1, \ldots, n\}$ распадаются на классы одинаковых графов:



Количество графов

В каждом из выделенных классов ровно $|\mathrm{Aut}(G)|$ графов. Ведь именно столькими способами можно перенумеровать вершины графа, так, чтобы он перешёл сам в себя.

Значит, число классов равно $\frac{n!}{|\mathrm{Aut}(G)|}$.



Количество графов

- Каждому n-вершинному графу G соответствуют ровно $\frac{n!}{|\mathrm{Aut}(G)|}$ различных изоморфных графов на множестве $\{1, \ldots, n\}$
- Число различных графов на $\{1, \ldots, n\}$ равно
$$2^{\binom{n}{2}}$$
- Отсюда получаем формулу
$$2^{\binom{n}{2}} = \sum_{G} \frac{n!}{|\mathrm{Aut}(G)|}$$
(суммирование ведётся по всем неизоморфным графам на n вершинах)

Количество графов

Теорема (без доказательства).

Количество неизоморфных графов на n вершинах *асимптотически* равно

$$\frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!}$$

То есть у «подавляющего большинства» графов группа автоморфизмов состоит из одной (тождественной) подстановки.

Количество неизоморфных деревьев

Теорема (без доказательства).
Количество неизоморфных n-вершинных деревьев *асимптотически* равно

$$C \cdot \gamma^n \cdot n^{-5/2}$$

где $C \approx 0.44$ и $\gamma \approx 2.96$

Докажем существенно более простую оценку:
количество неизоморфных n-вершинных деревьев не превосходит 4^n.

Количество неизоморфных деревьев

Теорема.
Количество неизоморфных n-вершинных деревьев не превосходит a_{n-1}, где a_{n-1} — число Каталана.

Следствие.
Количество неизоморфных n-вершинных деревьев не превосходит 4^n.

Количество неизоморфных деревьев

Доказательство:

Будем рассматривать *корневые деревья*, т.е. деревья с выделенной вершиной-*корнем*.

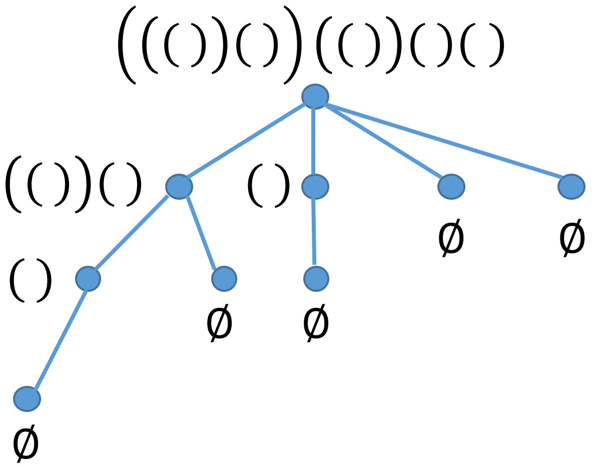
Сопоставим каждому корневому дереву с n вершинами правильную последовательность из $(n-1)$ пар скобок, так, что неизоморфным деревьям соответствуют разные последовательности.

Количество неизоморфных деревьев

- Одновершинному корневому дереву сопоставим пустую последовательность
- Пусть в корневом дереве T не менее двух вершин. Рассмотрим поддеревья, «прицепленные» к корню, и будем считать их корнями те вершины, которыми они прицеплены. Пусть этим деревьям сопоставлены последовательности $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_k$.
  Тогда дереву T сопоставим последовательность $(\Pi_1)(\Pi_2)\dots(\Pi_k)$.

Количество неизоморфных деревьев

Пример:



Видно, что оценка теоремы неточна:
«код» дерева получится другим, например, при другом упорядочении поддеревьев.

Формула Кэли для числа различных деревьев

Формула Кэли.

Количество различных деревьев на множестве вершин $\{1, \ldots, n\}$ в точности равно n^{n-2}.

Доказательство:

- Идея знакомая: кодирование (H. Prüfer).
- Каждому дереву на вершинах $\{1, \ldots, n\}$ поставим в соответствие вектор длины $(n-2)$, компоненты в котором равны от 1 до n.

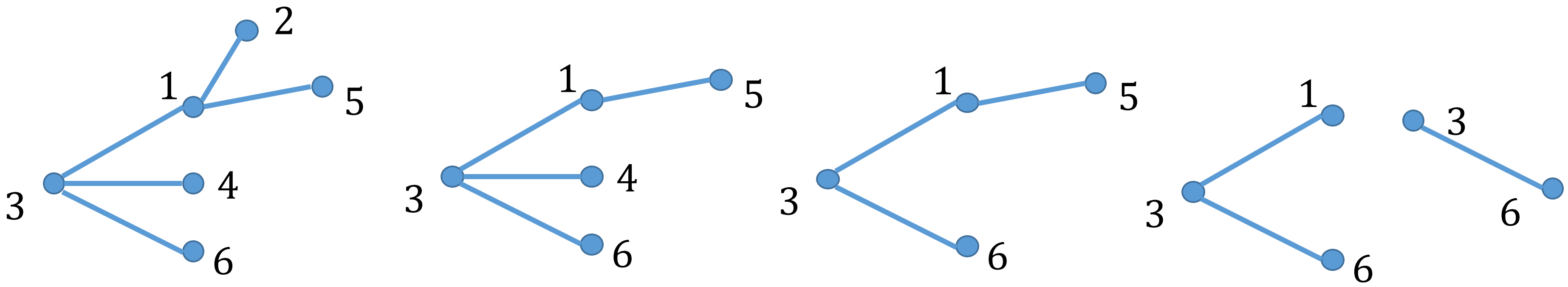
Доказательство формулы Кэли: кодирование Прюфера

- Последовательно проделываем:
  - Берём лист дерева с наименьшим номером, удаляем его, а его соседа выписываем
  - Поступаем так, пока в дереве не останется всего две вершины
- Выписанный вектор и будет кодом дерева

Доказательство формулы Кэли: кодирование Прюфера

Алгоритм кодирования дерева:

- Берём лист дерева с наименьшим номером, удаляем его, а его соседа выписываем
- Поступаем так, пока в дереве не останется всего две вершины



Код дерева: 1313

Доказательство формулы Кэли: кодирование Прюфера

Алгоритм **де**кодирования дерева:

- Пусть дан код $A = a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}$
- Рассмотрим список номеров $B = 1,2, \ldots, n$
- Последовательно делаем:
  - Находим в B наименьшее b, не входящее в A
  - Удаляем b из B и удаляем первый элемент из A
  - Пару этих элементов объявляем ребром дерева
  - Когда список A закончился, то в B должно остаться два элемента. Они образуют последнее ребро дерева.

Доказательство формулы Кэли: кодирование Прюфера

Пример. Пусть код такой: $A = 223145$

Значит, $n = 8$

A	B	ребро
2,2,3,1,4,5	1,2,3,4,5,6,7,8	(2,6)
2,3,1,4,5	1,2,3,4,5,7,8	(2,7)
3,1,4,5	1,2,3,4,5,8	(3,2)
1,4,5	1,3,4,5,8	(1,3)
4,5	1,4,5,8	(4,1)
5	4,5,8	(5,4)
	5,8	(5,8)