

Вопросы для самоконтроля по первой лекции

- Q1.** Что такое полиномиальный коэффициент?
- Q2.** Сколько 3-сочетаний с повторениями можно выбрать из десятиэлементного множества?
- Q3.** Расположите в порядке возрастания числа A_7^2 , \overline{A}_7^2 , C_7^2 , \overline{C}_7^2 .
- Q4.** Во множестве A пять элементов, а во множестве B семь элементов. Чему равно $|A \cup B|$, если $|A \cap B| = 2$?
- Q5.** Какие из чисел A_7^3 , \overline{A}_7^3 , C_7^3 , \overline{C}_7^3 , $\{3\}^7$ являются ответами на следующие вопросы:
1. Сколькими способами можно выдать комплект медалей трём из семи спортсменов?
 2. Сколькими способами студент может выбрать три экзаменационных задачи из семи?
 3. Сколькими способами семь студентов могут разбиться на три группы по изучению английского языка?
 4. Сколько различных трёхзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 7, 8, 9?
 5. Сколькими способами студент может вытянуть билеты на трёх пересдачах по одному и тому же предмету, если всего имеется семь различных экзаменационных билетов?

Вопросы для самоконтроля по второй лекции

Q6. Какие из следующих функций растут линейно по n ? Какие полилогарифмически? Какие полиномиально? Какие экспоненциально? Какие сверхэкспоненциально? Какие квазилинейно?

1. 2^{n^2}
2. $n!$
3. $\ln n!$
4. $\binom{n}{43}$
5. $\binom{n}{\sqrt[3]{n}}$
6. $\log_2 n + \sqrt{n}$
7. $\log_7 \sqrt{n}$
8. $e^{\log_5 n}$

Q7. Для каких из следующих функций f , g можно написать, что $f = O(g)$ при $n \rightarrow \infty$? Для каких пар функций $f = o(g)$? Для каких пар $f = \Omega(g)$? Для каких пар $f = \Theta(g)$?

1. $f(n) = n!$, $g(n) = 2^{n^2}$
2. $f(n) = \log_2 n$, $g(n) = \log_3 n$
3. $f(n) = (\ln n)^2$, $g(n) = \ln \ln n$
4. $f(n) = n^3 + n^2 + 1$, $g(n) = 18n^2 + 3n^3 + \ln n$
5. $f(n) = \ln \binom{3n}{n}$, $g(n) = 15n$
6. $f(n) = \ln \binom{3n}{n}$, $g(n) = \binom{4n}{n}$

Q8. Почему сразу можно заключить, что определитель приведённой ниже матрицы отличен от нуля?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 25 & 9 \\ 1 & 8 & 125 & 27 \end{pmatrix}$$

Q9. Какой характеристический многочлен у рекуррентного соотношения $a_{n+2} - a_{n+3} + 4a_{n-1} = 0$?

Q10. Как определяется последовательность чисел Фибоначчи?

Вопросы для самоконтроля по третьей лекции

- Q11.** Может ли последовательность Туэ—Морса содержать подслово 001100011?
- Q12.** Какую длину имеет двоичная последовательность ДеБрёйна порядка 50?
- Q13.** Различные или одинаковые циклические слова соответствуют словам *aabba* и *baaab*?
- Q14.** Пусть μ — функция Мёбиуса. Найдите значения $\mu(1)$, $\mu(1000)$, $\mu(1001)$.
- Q15.** Почему $\sum_{k=1}^n \mu(k) \leq n$?

Вопросы для самоконтроля по четвёртой лекции

- Q16.** Как вычислить количество неупорядоченных разбиений числа 50?
- Q17.** Сколько упорядоченных разбиений числа 5?
- Q18.** Постройте диаграмму разбиения $13 = 5 + 3 + 2 + 2 + 1$. Постройте диаграмму, двойственную к предыдущей. Какому разбиению она соответствует?
- Q19.** Пусть $p_{\text{различн}}(N)$ обозначает количество неупорядоченных разбиений числа N на различные слагаемые. Почему из теоремы Эйлера о разбиениях следует, что $p_{\text{различн}}(1001)$ чётно?
- Q20.** Какая производящая функция у последовательности $1, 1, \dots, 1, \dots$? Чему равен радиус сходимости соответствующего ряда?
- Q21.** Выпишите четыре первых члена ряда для $(1+x)^{1/3}$ пользуясь обобщённой формулой бинома Ньютона.
- Q22.** Чему равен четвёртый член в последовательности чисел Каталана?

Вопросы для самоконтроля по пятой лекции

- Q23.** Образует ли группу относительно сложения множество всех нечётных чисел? А множество чётных чисел?
- Q24.** Придумайте какую-нибудь группу порядка 120. Наличие подгрупп каких порядков в ней можно утверждать, исходя из теоремы Силова? Почему у этой группы не может быть подгрупп порядка 7?
- Q25.** Опишите смежный класс элемента 2012 в группе $(\mathbb{Z}, +)$ по подгруппе $2\mathbb{Z}$. Через $2\mathbb{Z}$ обозначена подгруппа всех чётных чисел.
- Q26.** Этот вопрос использует мультипликативные обозначения. Пусть G — группа, и $a, b \in G$. Убедитесь, что $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.
- Q27.** Чему равна композиция перестановок $1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 5, 5 \rightarrow 3$ и $1 \rightarrow 5, 2 \rightarrow 4, 3 \rightarrow 1, 4 \rightarrow 3, 5 \rightarrow 2$? Запишите перестановки, обратные к данным.

Вопросы для самоконтроля по шестой лекции

- Q28.** Сколько элементов в группах \mathbb{Z}_{12} и \mathbb{Z}_{12}^{\times} ?
- Q29.** Что такое порядок элемента?
- Q30.** Что такое циклическая группа?
- Q31.** Найдите $\phi(15)$.
- Q32.** Почему остаток от деления 5^{16} на 17 равен единице?

Вопросы для самоконтроля по седьмой лекции

Q33. Что такое поле?

Q34. Чему равен остаток от деления многочлена $x^4 + 7x + 1$ на многочлен $x^2 + 5$? Многочлены рассматриваются как элементы множества $\mathbb{Z}_9[x]$.

Q35. Что такое неприводимый многочлен? Почему многочлен $x^{28} + 28$ не является неприводимым над \mathbb{Z}_{29} ?

Q36. Что такое нормированный многочлен? Сколько нормированных многочленов степени 4, неприводимых над \mathbb{Z}_7 ?

Q37. Пользуясь малой теоремой Ферма, найдите обратный по умножению элемент к 5 в поле \mathbb{Z}_{11} .

Вопросы для самоконтроля по восьмой лекции

Q38. Найдите цикловые индексы перестановок $1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 5, 5 \rightarrow 3$ и $1 \rightarrow 5, 2 \rightarrow 4, 3 \rightarrow 1, 4 \rightarrow 3, 5 \rightarrow 2$.

Q39. С помощью теоремы Редфилда—Пойи найдите количество неэквивалентных раскрасок вершин квадрата в красный, синий и зелёный цвета. Раскраски считаются эквивалентными, если существует поворот *трёхмерного* пространства, совмещающий их.

Вопросы для самоконтроля по девятой лекции

Q40. Что такое граф, орграф, маршрут, цикл, простой цикл, цепь?

Q41. Сколько рёбер в графе K_n ? Сколько рёбер в $K_{m,n}$?

Q42. В связном графе есть три вершины степени 5. Обязательно ли в этом графе ещё какие-то вершины нечётной степени? Обязательно ли в этом графе есть ещё одна вершина степени 3? Есть ли в этом графе эйлеров цикл?

Q43. Сколько вершин должно быть в графе Де Брёйна порядка 123?

Вопросы для самоконтроля по десятой лекции

Q44. Какими альтернативными способами можно определить класс деревьев, кроме «связные графы без циклов»?

Q45. Приведите пример укладки планарного графа, для которой не справедлива формула Эйлера.

Q46. Бывают ли графы, которые можно уложить на плоскости, но нельзя на сфере?

Q47. Можно ли уложить на плоскости граф со 100 вершинами и 300 рёбрами?

Q48. Что такое группа автоморфизмов графа? Приведите пример планарного графа, группа автоморфизмов которого состоит из одного элемента.

Вопросы для самоконтроля по одиннадцатой лекции

Q49. Чего больше асимптотически: неизоморфных n -вершинных графов или помеченных n -вершинных деревьев?

Q50. Какое корневое дерево соответствует последовательности $((()())((())))$? Какое помеченное дерево соответствует коду Прюфера 32741?

Q51. Для произвольного k приведите пример графа, у которого $\Delta(G) = k$ и $\chi(G) = 2$.

Q52. Какие значения может принимать величина $\chi'(G)$, если $\Delta(G) = k$?

Q53. Известно, что $\chi(G) \geq 3$. Обязательно ли выполнено неравенство $\omega(G) \geq 3$?

Вопросы для самоконтроля по двенадцатой лекции

Q54. Наличие вершин какой степени можно гарантировать в планарном графе?

Q55. Сформулируйте теорему Холла.

Q56. Почему из теоремы Кёнига о хроматическом индексе следует, что в любом двудольном регулярном графе есть совершенное паросочетание?

Q57. Запишите хроматический многочлен для цепи на 15 вершинах, полного графа на 5 вершинах, пустого графа на 100 вершинах.

Q58. Почему число 4 не может быть корнем хроматического многочлена планарного графа?

Вопросы для самоконтроля по тринадцатой лекции

Q59. Обязательно ли в 50-регулярном графе на 100 вершинах есть гамильтонов цикл?

Q60. Что такое гиперграф? Что такое правильная раскраска гиперграфа?

Q61. Что такое вершинное покрытие гиперграфа, как ещё оно называется? Что такое глубина матрицы?

Q62. Приведите верхнюю оценку мощности «жадного» покрытия матрицы (с нижним ограничением на число единиц в столбце). Переформулируйте эту теорему в терминах покрытий гиперграфов.

Q63. На лекции строится матрица, на которой жадный алгоритм работает «очень неоптимально». Сколько всего единиц в этой матрице (при каждом a)?

Q64. Что такое перманент?

Вопросы для самоконтроля по четырнадцатой лекции

Q65. Сформулируйте теоремы Алона, Коши—Давенпорта, Алона—Фюреди, Алона—Фридланда—Калаи.

Q66. Покажите, что условия $|S_i| \geq t_i + 1$ в формулировке теоремы Алона являются в некотором смысле оптимальными: если хотя бы для одного i ослабить условие до $|S_i| = t_i$, то существование нужного набора x_1, \dots, x_m уже нельзя гарантировать в общем случае.

Q67. Пусть $A, B \subset \mathbb{Z}_{11}$ и $A = \{1, 4, 6\}$, $B = \{2, 5, 7\}$. Выпишите все элементы множества $(A + B)$.

Q68. В любом ли простом 4-регулярном графе найдётся 3-регулярный подграф?

Вопросы для самоконтроля по пятнадцатой лекции

Q69. В графе на 10 вершинах нет клик размера 5. Какое максимальное число рёбер может быть у такого графа?

Q70. Как можно из теоремы Турана получить оценку *минимального* числа рёбер в графе без *независимых множеств* заданного размера?

Q71. Что такое $Z_{a,b}(m, n)$?

Q72. Выпишите верхнюю оценку $Z_2(m)$.

Вопросы для самоконтроля по шестнадцатой лекции

Q73. Сколько единиц в матрице, которая была с помощью алгебраической конструкции построена на лекции для доказательства нижней оценки чисел Заранкевича? Каких размеров эта матрица?

Q74. Что такое постулат Бертрана? Как его можно асимптотически усилить?

Q75. Что такое числа Рамсея? Чему равно $R(s, 2)$?

Q76. Чему равна вероятность того, что в случайном графе на n вершинах, в котором каждое ребро проводится с вероятностью $\frac{1}{2}$, появится клика на фиксированном подмножестве из k вершин?

Вопросы для самоконтроля по семнадцатой лекции

Q77. Как асимптотически соотносятся между собой нижние оценки диагональных чисел Рамсея, полученные вероятностным (неконструктивным) и алгебраическим (конструктивным) подходами? Равны по порядку? Логарифмы равны по порядку?

Q78. Как соотносятся нижние оценки чисел $Z_2(m)$, полученные вероятностным (неконструктивным) и алгебраическим (конструктивным) подходами?

Вопросы для самоконтроля по восемнадцатой лекции

Q79. Пусть событие A не зависит от группы событий B_1, \dots, B_5 . Всегда ли из этого следует, что $\Pr[A \mid (B_1 \cup B_4) \cap \overline{B_3}] = \Pr[A]$? Всегда ли из этого следует, что $\Pr[B_1 \mid A \cap B_2] = \Pr[B_1]$?

Q80. Сформулируйте лемму Ловаса в общем и симметричном случае.

Вопросы для самоконтроля по девятнадцатой лекции

Q81. Оценку какого порядка даёт лемма Ловаса для чисел Рамсея $R(s, 3)$?

Q82. Пусть есть три вида событий: A_1, \dots, A_m , B_1, \dots, B_m и C_1, \dots, C_m . Пусть на каждое событие вида A могут влиять не больше n_{AB} событий вида B и не более n_{AC} событий вида C . Аналогично введём величины n_{BA} , n_{BC} , n_{CA} , n_{CB} . Убедитесь, что для выполнения неравенства

$$\Pr \left[\bigcap_i (\overline{A_i} \cap \overline{B_i} \cap \overline{C_i}) \right] > 0$$

достаточно, чтобы нашлись числа $a, b, c \in (0, 1)$, такие, что $\Pr[A_i] \leq a(1-b)^{n_{AB}}(1-c)^{n_{AC}}$, $\Pr[B_i] \leq b(1-a)^{n_{BA}}(1-c)^{n_{BC}}$ и $\Pr[C_i] \leq c(1-a)^{n_{CA}}(1-b)^{n_{CB}}$. Заметьте, что это частный случай леммы Ловаса.

Вопросы для самоконтроля по двадцатой лекции

Q83. Сформулируйте теорему Эрдёша о графах с большим хроматическим числом и обхватом. Почему из того, что обхват графа большой, следует «лёгкость локальной раскрашиваемости» графа?

Q84. Сформулируйте теорему Вей о нижней оценке числа независимости через степени вершин. Сколько перестановок вершин графа удовлетворяют условию, что в этих перестановках соседи некоторой фиксированной вершины v лежат «позднее» неё?

Вопросы для самоконтроля по двадцать первой лекции

- Q85.** Что такое число скрещиваний? Сформулируйте «тривиальную» (линейную по числу рёбер) и «нетривиальную» (доказанную с помощью вероятностного метода) нижнюю оценку на число скрещиваний.
- Q86.** Могут ли в укладке с минимальным числом скрещиваний два ребра пересекаться более одного раза?
- Q87.** Что такое цепь в ЧУМе? Что такое антицепь? Что такое максимальная цепь в булеане?
- Q88.** Сформулируйте теорему Лубелла—Ямамото—Мешалкина.
- Q89.** Сформулируйте теорему Шпернера. Приведите пример антицепи, на которой оценка теоремы достигается.

Вопросы для самоконтроля по двадцать второй лекции

- Q90.** Как в выводе теоремы Холла из теоремы о разложении ЧУМ связан исходный граф (для которого формулируются условия Холла) и вспомогательное ЧУМ?
- Q91.** Теорема Шпернера оценивает мощность максимальной антицепи в булеане. На какое минимальное число цепей, исходя из этой теоремы, можно разложить булеан?
- Q92.** Пусть максимальный размер антицепи в некотором ЧУМе равен k ; назовём элемент ЧУМа «хорошим», если он входит хотя бы в одну антицепь размера k . Пусть дано разложение ЧУМа на k цепей. Почему на каждой из этих цепей найдётся хотя бы по одному «хорошему» элементу?
- Q93.** В продолжение предыдущего вопроса. На каждой из этих цепей выберем минимальный (на ней) «хороший» элемент. Почему множество выбранных элементов будет образовывать антицепь?

Вопросы для самоконтроля по двадцать третьей лекции

- Q94.** Сформулируйте теорему Эрдёша—Ко—Радо. Какая вероятностная модель выбора случайного подмножества в $\{1, \dots, n\}$ используется в её доказательстве?
- Q95.** Как устроено семейство множеств (гиперграф), на котором достигается оптимум в теореме Альсведе—Хачатряна?
- Q96.** Сформулируйте теорему Фишера.

Вопросы для самоконтроля по двадцать четвёртой лекции

- Q97.** Пусть $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1, 2, 3\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}\}$. Чему равна проекция $\mathcal{F}|_{\{1, 2\}}$? Дробится ли множество $\{1, 2\}$ семейством \mathcal{F} ?
- Q98.** Что такое размерность Вапника—Червоненкиса?
- Q99.** Сформулируйте теорему о верхней оценке мощности семейства с заданным доменом и VC-размерностью.

Вопросы для самоконтроля по двадцать пятой лекции

- Q100.** Сформулируйте теорему об оценке мощности проекции.
- Q101.** Теорему об оценке размерности измельчения семейства.
- Q102.** Что такое ε -сеть?
- Q103.** Конечна или бесконечна VC-размерность семейства всех треугольников на плоскости?
- Q104.** Сформулируйте теорему Хаусслера—Вельцля.
- Q105.** Сформулируйте геометрическое следствие теоремы Хаусслера—Вельцля.