

Основы теории графов

осень 2013

Александр Дайняк

www.dainiak.com

Укладки графов

Укладкой графа на поверхности называется сопоставление

- вершинам графа — точек поверхности
- рёбрам графа — гладких кривых без самопересечений

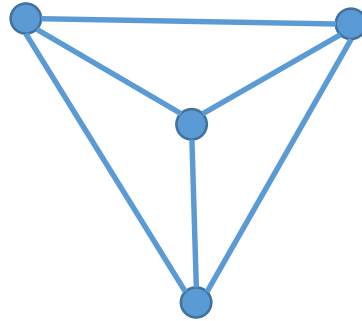
так, чтобы кривые, соответствующие рёбрам, не пересекались (за исключением, быть может, своих концов).

По умолчанию в качестве поверхности рассматривается плоскость.

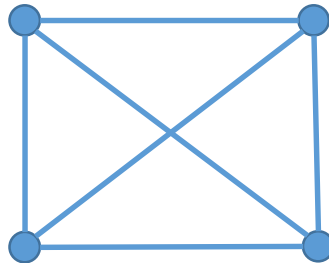
Укладки графов

Пример:

- Укладка графа K_4 :



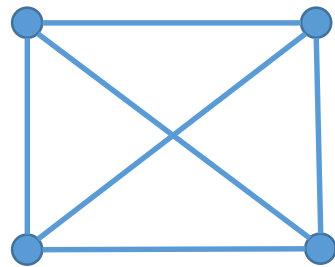
- Изображение графа K_4 , не являющееся укладкой:



Планарные графы

Планарный граф — это граф, для которого существует плоская укладка.

Например, граф

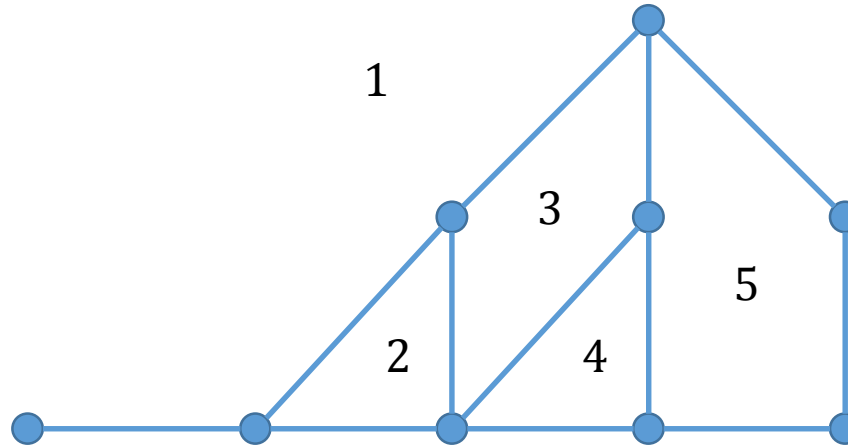


планарный

Планарные графы

Грань плоской укладки — это область плоскости, отделяемая укладкой.

Пример:

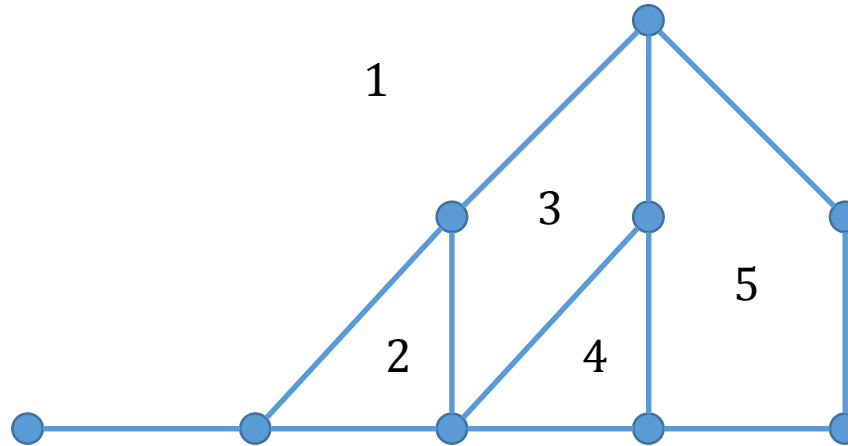


Формула Эйлера

Формула Эйлера.

Для любого связного планарного графа

$$\# \text{вершин} - \# \text{рёбер} + \# \text{граней} = 2$$



Формула Эйлера

Формула Эйлера.

Для любого связного планарного графа

$$\# \text{вершин} - \# \text{рёбер} + \# \text{граней} = 2$$

Доказательство:

индукция по величине $(\# \text{рёбер} - \# \text{вершин})$

Если $(\# \text{рёбер} - \# \text{вершин}) = -1$, то наш граф является деревом, и грань в его укладке ровно одна.

Формула Эйлера

Индуктивный переход:

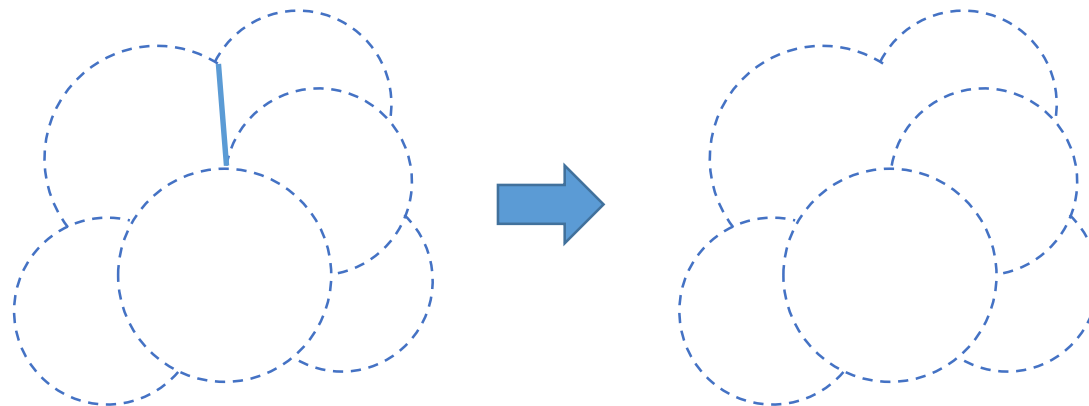
Если $(\# \text{рёбер} - \# \text{вершин}) = t \geq 0$, то в нашем графе G есть цикл. Удаление любого ребра из этого цикла приводит к связному графу G' , для которого

$$(\# \text{рёбер в } G' - \# \text{вершин в } G') = t - 1$$

и

$$\# \text{граней в } G' = \# \text{граней в } G - 1$$

(т.к. удаление ребра из G привело к «слиянию» двух граней).



Формула Эйлера

Итак,

$$\begin{aligned}(\# \text{рёбер в } G - \# \text{вершин в } G) &= t \\(\# \text{рёбер в } G' - \# \text{вершин в } G') &= t - 1 \\ \# \text{граней в } G' &= \# \text{граней в } G - 1\end{aligned}$$

По предположению индукции, для G' имеем

$$\# \text{вершин в } G' - \# \text{рёбер в } G' + \# \text{граней в } G' = 2$$

Отсюда

$$(\# \text{вершин в } G - \# \text{рёбер в } G) + 1 + (\# \text{граней в } G - 1) = 2,$$

что и требовалось.

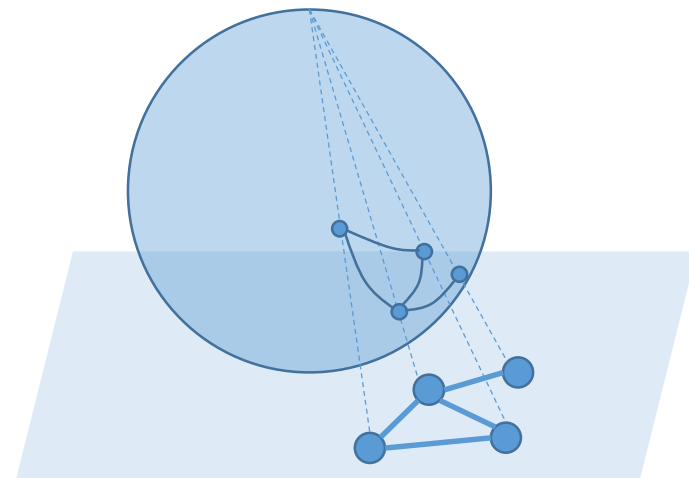
Планарные графы на сферах

Утверждение. Граф планарен т. и т.т., когда его можно уложить на сфере.

Идея доказательства.

Используем стереографическую проекцию.

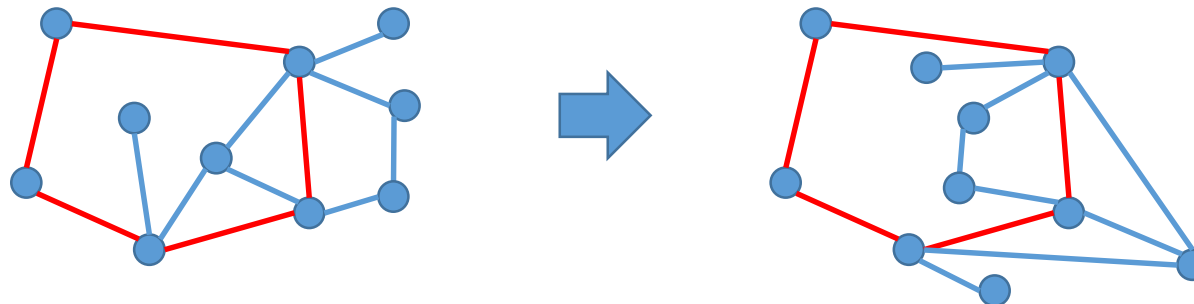
Единственное требование — чтобы центр проекции не совпадал с вершиной графа и не лежал на ребре.



Циклы в планарных графах

Утверждение. Пусть в некоторой укладке планарного графа внутри некоторого цикла C лежит множество рёбер E_{int} , а снаружи множество рёбер E_{ext} . Тогда существует и укладка этого графа, в которой внутри C лежат рёбра E_{ext} , а снаружи рёбра E_{int} .

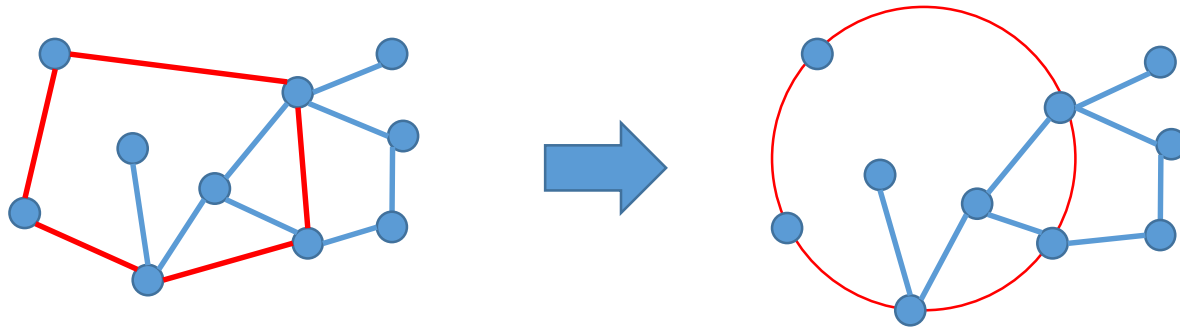
Пример:



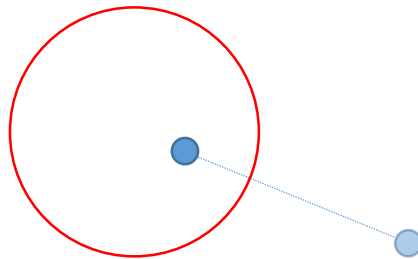
Циклы в планарных графах

Идея доказательства.

Сначала деформируем изображение графа, так, чтобы изображение цикла C стало окружностью, и при этом через центр окружности не проходили никакие рёбра.



Затем выполняем инверсию плоскости относительно этой окружности.



Циклы в планарных графах

Утверждение. Пусть в некоторой укладке планарного графа внутри некоторого цикла C лежит множество рёбер E_{int} , а снаружи множество рёбер E_{ext} . Тогда существует и укладка этого графа, в которой внутри C лежат рёбра E_{ext} , а снаружи рёбра E_{int} .

Следствие. Если некоторый цикл графа ограничивает грань в некоторой укладке, то существует укладка, в которой этот цикл ограничивает внешнюю грань.

Планарность и двусвязность

Утверждение. Если каждый блок графа планарен, то и сам граф планарен.

Доказательство. Индукция по числу блоков.

Если в графе один блок, то утверждение тривиально.

Пусть в графе n блоков, и для графов с $(n - 1)$ блоками утверждение выполнено.

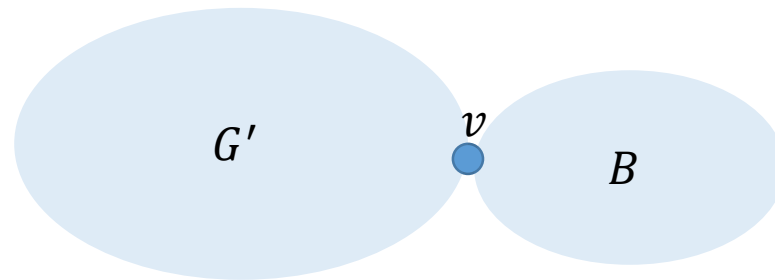
Пусть каждый из блоков планарен. Докажем, что и граф планарен.

Планарность и двусвязность

Рассмотрим концевой блок B . Этот блок прикреплён к остальной части G' графа G точкой сочленения v .

Существуют укладки графов B и G' , в которых точка v лежит на границе внешней грани.

Из этих упаковок легко строится укладка G .



Рёбра и грани

Утверждение.

Для любого планарного графа, в котором минимальная длина циклов равна t , выполнено неравенство

$$\text{\#рёбер} \geq \frac{t}{2} \cdot \text{\#граней}$$

Доказательство:

Для i -й грани рассмотрим величину n_i — количество рёбер, отделяющих её от других граней. Тогда

$$\sum_i n_i \geq t \cdot \text{\#граней}$$

При этом в сумме слева каждое ребро графа посчитано максимум дважды.

Число рёбер в планарных графах

Утверждение.

Если в планарном графе минимальная длина циклов равняется t , то

$$\#\text{рёбер} \leq \frac{t}{t-2} \cdot (\#\text{вершин} - 2)$$

Доказательство. Считаем, что граф связен.

Из формулы Эйлера и предыдущего утверждения получаем:

$$\begin{aligned} 2 &= \#\text{вершин} - \#\text{рёбер} + \#\text{граней} \leq \\ &\leq \#\text{вершин} - \#\text{рёбер} + \frac{2}{t} \cdot \#\text{рёбер} \end{aligned}$$

Отсюда легко следует доказываемое неравенство.

Непланарные графы

Утверждение.

Если в планарном графе минимальная длина циклов равняется t , то

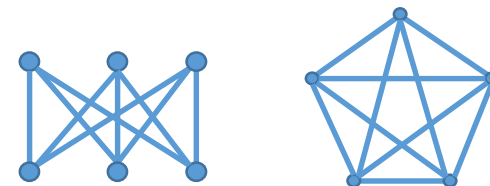
$$\# \text{рёбер} \leq \frac{t}{t-2} \cdot (\# \text{вершин} - 2)$$

Следствие. Графы K_5 и $K_{3,3}$ непланарны.

Доказательство:

В графе K_5 всего 5 вершин и 10 рёбер, так что неравенство не выполнено даже при $t = 3$.

В графе $K_{3,3}$ нет циклов длины меньше четырёх, при этом 6 вершин и 9 рёбер, поэтому и для него неравенство не выполняется.



Непланарные графы

Утверждение.

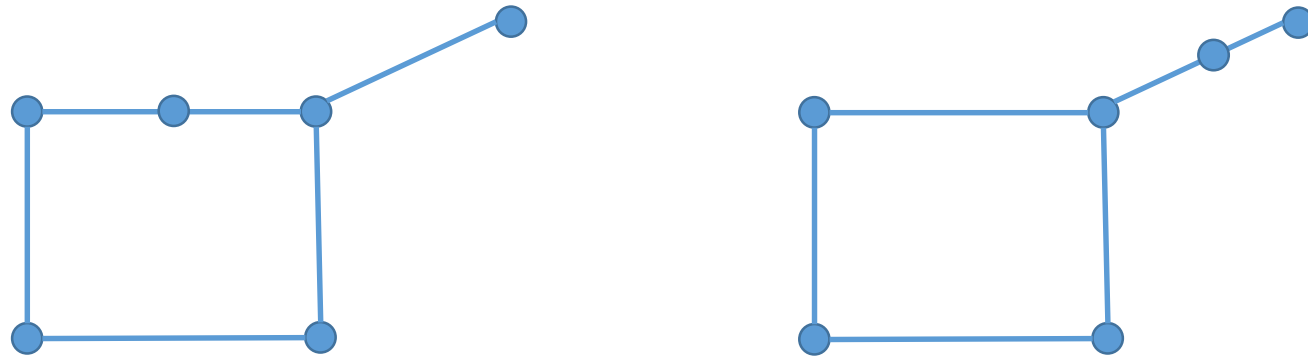
Если в планарном графе минимальная длина циклов равняется t , то

$$\text{\#рёбер} \leq \frac{t}{t-2} \cdot (\text{\#вершин} - 2)$$

Следствие. В любом планарном графе на n ($n \geq 3$) вершинах число рёбер не превосходит $(3n - 6)$.

Гомеоморфизм графов

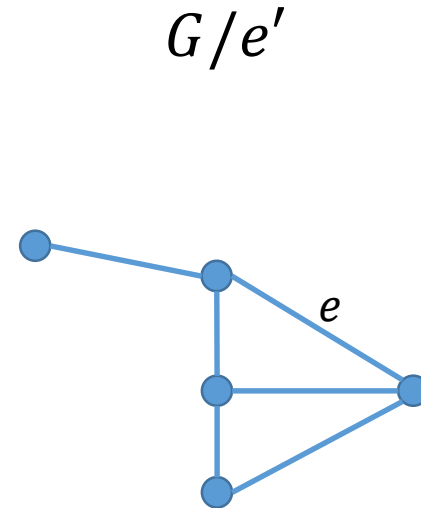
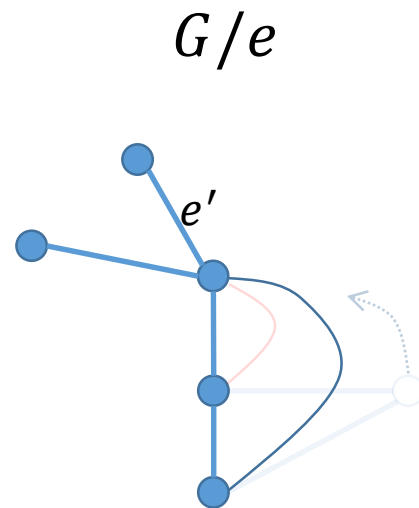
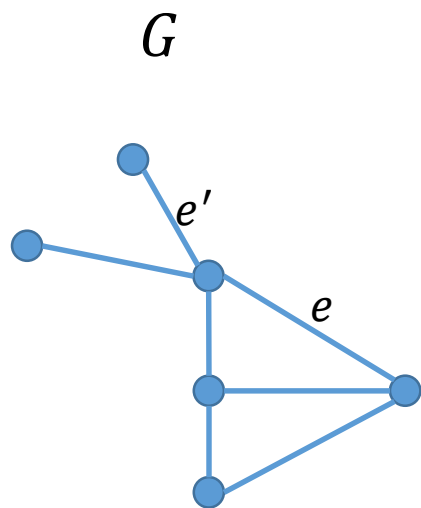
- *Гомеоморфные графы* — это графы, которые можно сделать изоморфными, удаляя/добавляя проходные вершины



- Если два графа гомеоморфны, то они либо оба планарны, либо оба непланарны

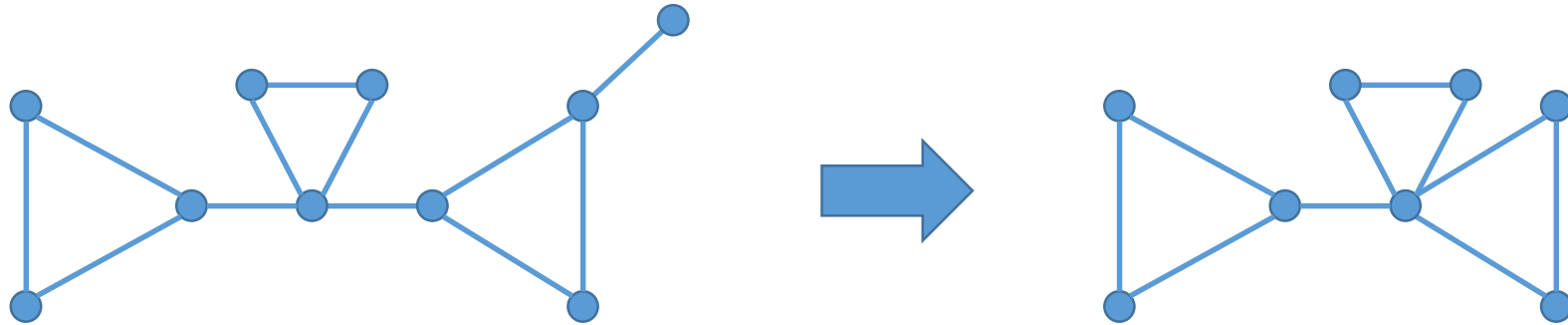
Стягивание рёбер

Стягивание ребра e в графе G — это операция, результатом которой является граф G/e , получаемый из G удалением e и отождествлением его концов. Если при этом образуются кратные рёбра, оставляем из них только одно.

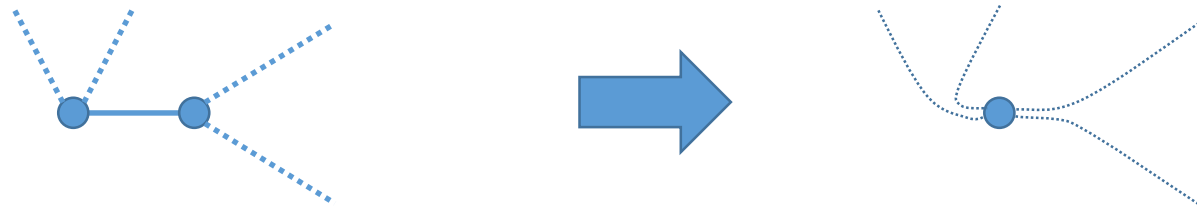


Стягивание рёбер

- Граф G является *стягиваемым* к графу G' , если G' можно получить из G , применив некоторое количество раз операцию стягивания ребра

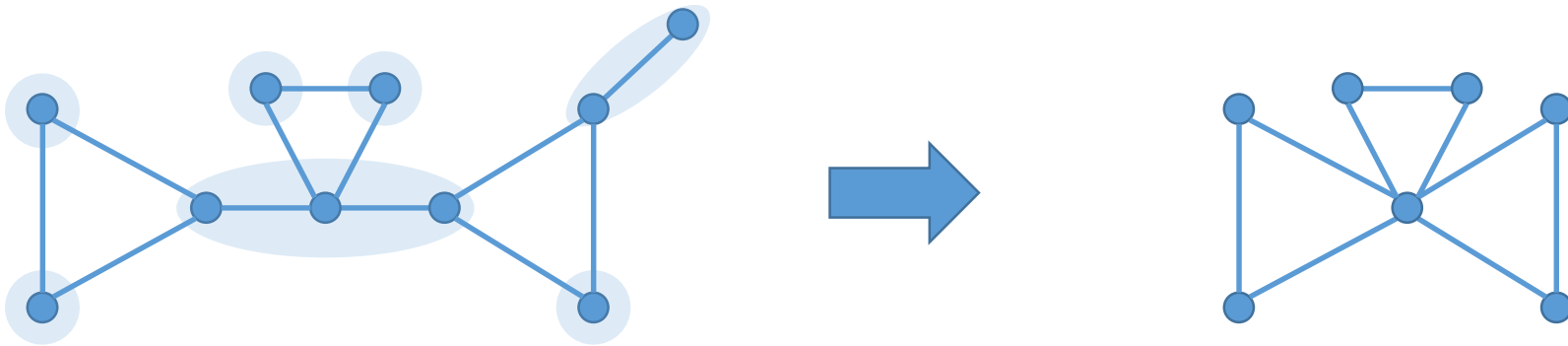


- Если граф G планарен, то и граф G' планарен:



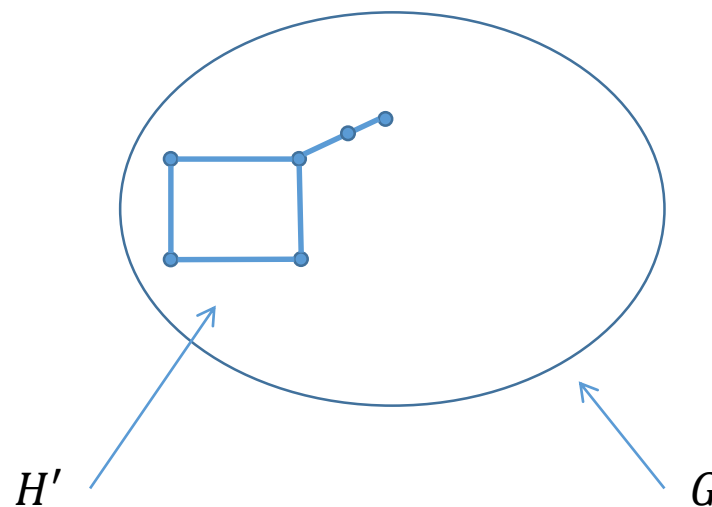
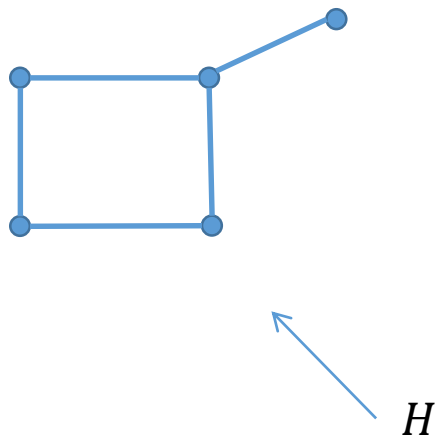
Стягивание рёбер

- Граф G является стягиваемым к графу G' , если вершины графа G можно разбить на связные множества, каждое из которых соответствует одной вершине графа G' , и при этом $(u, v) \in E(G')$, если между соответствующими множествами в G есть ребро.



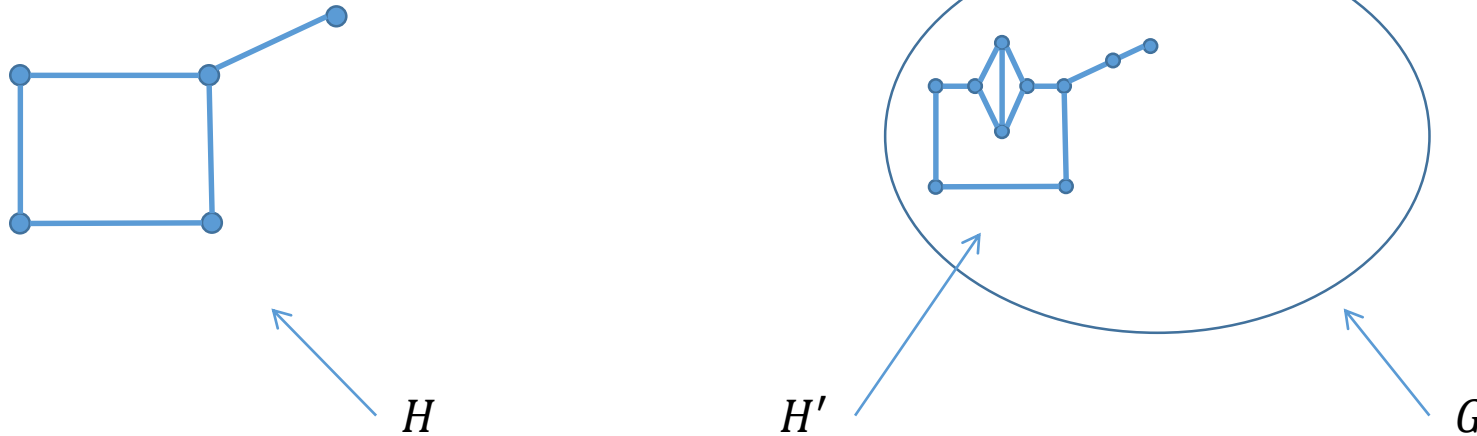
Топологические миноры

- Граф H является *топологическим минором* графа G , если в G есть подграф H' , который может быть получен из H добавлением проходных вершин



Миноры

- Граф H является *минором* графа G , если в G есть подграф H' , который можно стянуть к H



- Любой топологический минор является минором. Обратное верно не всегда.

Планарные графы и миноры

- Если G планарен и G' — подграф графа G , то и G' также планарен (поскольку любая укладка графа G содержит некоторую укладку графа G')
- Аналогично, любой минор планарного графа также планарен
- Следовательно, если у графа есть непланарный минор, то и сам граф непланарен

Планарные графы и миноры

- Если у графа есть непланарный минор, то и сам граф непланарен
- Графы K_5 и $K_{3,3}$ непланарны
- Следовательно, если в графе есть минор, изоморфный K_5 или $K_{3,3}$, то граф непланарен
- Оказывается, K_5 и $K_{3,3}$, по сути, единственные «запрещённые» миноры для планарных графов

Теоремы Вагнера и Куратовского

Критерий Куратовского. Граф планарен тогда и только тогда, когда K_5 и $K_{3,3}$ не являются его топологическими минорами.

Критерий Вагнера. Граф планарен тогда и только тогда, когда K_5 и $K_{3,3}$ не являются его минорами.

Необходимость условий Вагнера и Куратовского очевидна.
Достаточность в теореме Вагнера сразу следует из теоремы Куратовского.

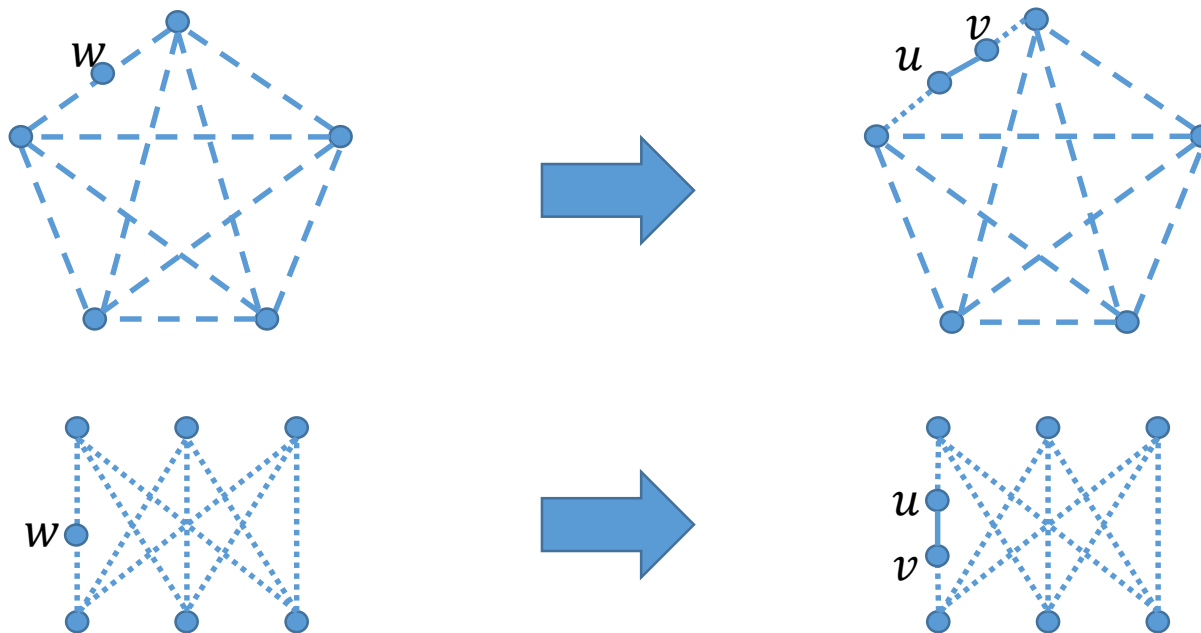
Теоремы Вагнера и Куратовского

Утверждение. Если (хотя бы) один из графов K_5 или $K_{3,3}$ является минором графа G , то (хотя бы) один из графов K_5 или $K_{3,3}$ является топологическим минором графа G .

Доказательство. Достаточно доказать следующее: если G' получен из G стягиванием *одного* ребра и в G' есть топол. минор K_5 или $K_{3,3}$, то и в G есть топол. минор K_5 или $K_{3,3}$.
(Отсюда по индукции будет следовать доказываемое утверждение.)

Теоремы Вагнера и Куратовского

Пусть G' получен из G стягиванием ребра uv (из которого в G' образуется вершина w). Если вершина w не входит в минор в графе G' или лежит внутри одной из его цепей, то всё просто, т.к. при «растягивании» вершины w в ребро uv минор «не испортится»:

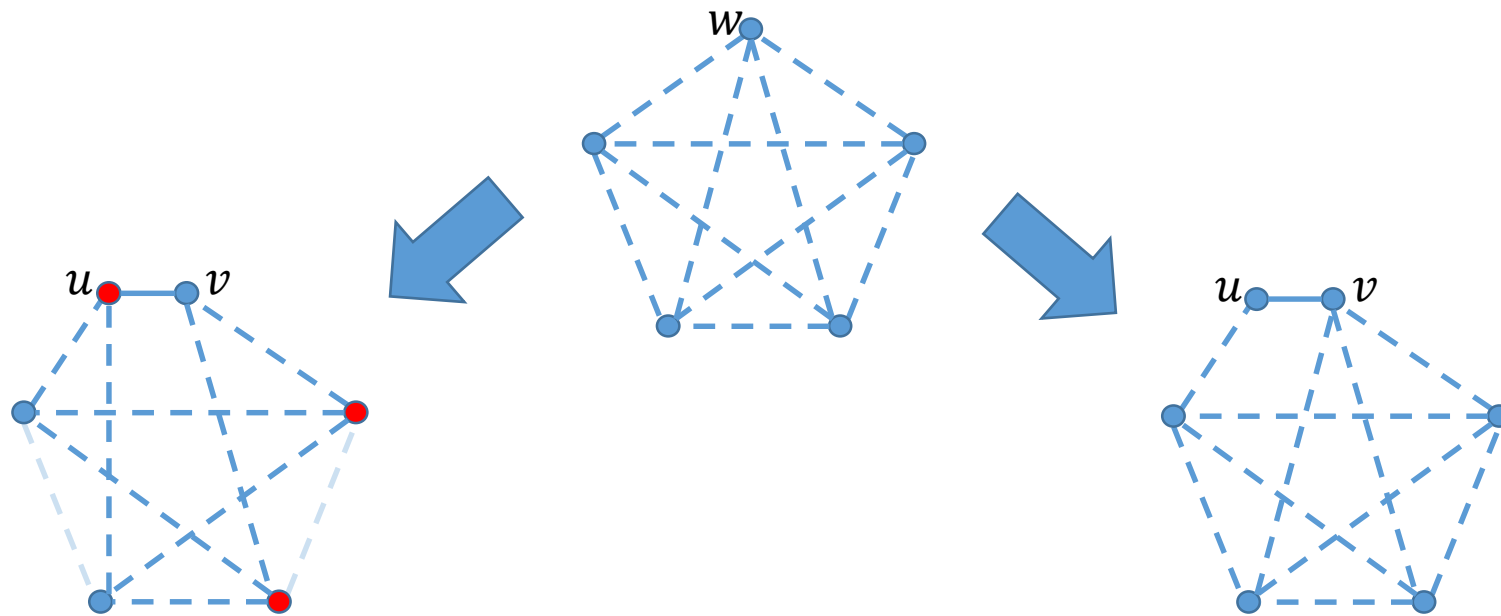


Теоремы Вагнера и Куратовского

Также «безопасен» случай, когда w является вершиной степени 3 в $K_{3,3}$ в G' .

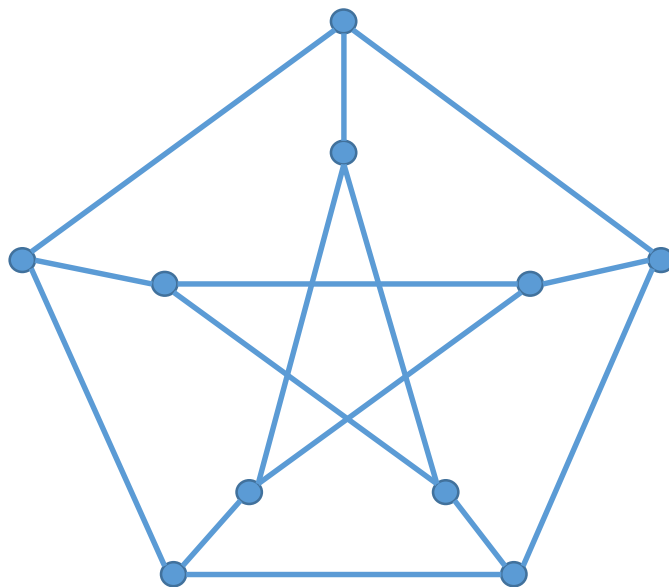
Остался случай, когда в G' есть топол. минор K_5 и вершина w является вершиной степени 4 в этом миноре.

Тогда, «растягивая» $w \rightarrow uv$, получаем, что в G должен найтись или $K_{3,3}$, или K_5 :



Теоремы Вагнера и Куратовского

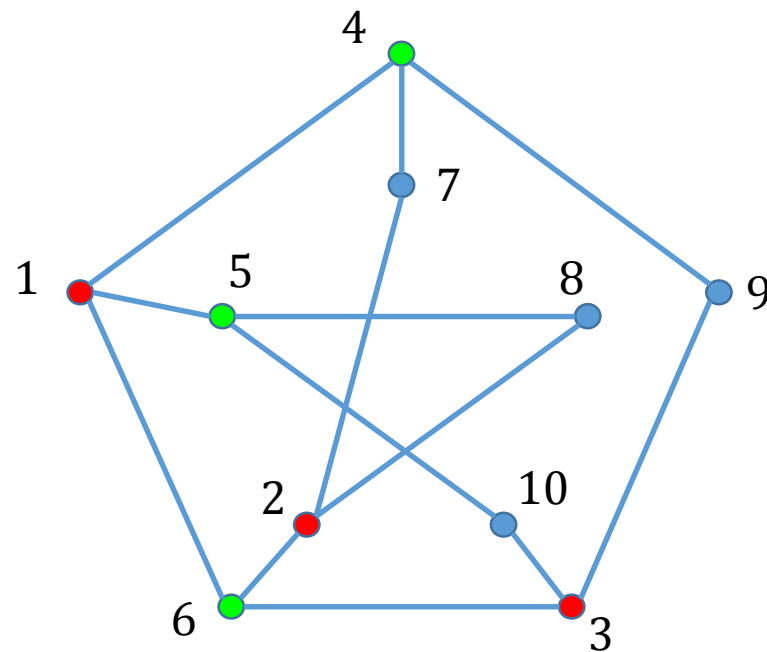
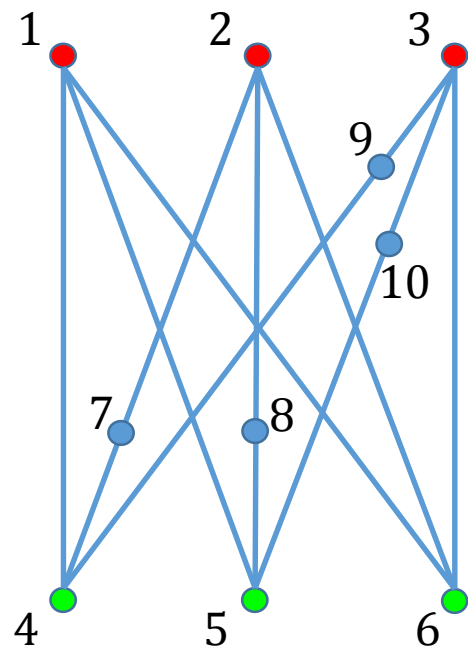
Пример. Рассмотрим граф Петерсена:



Для графа Петерсена граф K_5 является минором,
но не топологическим минором!

Теоремы Вагнера и Куратовского

Зато топологическим минором будет $K_{3,3}$:



Теоремы Вагнера и Куратовского

Итак, теорема Куратовского, хотя формально более сильная, чем теорема Вагнера, нетрудно из неё выводится.

Остаётся доказать теорему Вагнера.

Достаточно доказать

Утверждение. Если граф G непланарен, то стягиваниями и удалениями рёбер из G можно получить K_5 или $K_{3,3}$.

(Это и означает, что K_5 или $K_{3,3}$ является минором графа G .)

Доказательство теоремы Вагнера

Пусть G — произвольный непланарный граф.

Будем удалять и стягивать в G рёбра, так, чтобы непланарность сохранялась.

В итоге получим непланарный граф \tilde{G} , который становится планарным при стягивании или удалении любого ребра.

Достаточно доказать, что \tilde{G} — это K_5 или $K_{3,3}$.

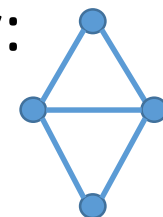
Доказательство теоремы Вагнера: свойства графа \tilde{G}

Заметим, что $\delta(\tilde{G}) \geq 3$, поскольку иначе можно было бы стянуть некоторое ребро в \tilde{G} и получить по-прежнему непланарный граф.

Далее докажем два важных свойства графа \tilde{G} :

Первое свойство. Для любого ребра $xy \in E(\tilde{G})$ выполнено неравенство $\delta(\tilde{G} - \{x, y\}) \geq 2$.

Второе свойство. Для любого ребра $xy \in E(\tilde{G})$ граф $(\tilde{G} - \{x, y\})$ не содержит θ -подграфа, то есть подграфа, гомеоморфного такому:



Доказательство теоремы Вагнера: первое свойство графа \tilde{G}

Первое свойство. Для любого ребра $xy \in E(\tilde{G})$ выполнено неравенство $\delta(\tilde{G} - \{x, y\}) \geq 2$.

Доказательство.

Обозначим $\hat{G} = (\tilde{G} - \{x, y\})$.

Пусть v — вершина минимальной степени в \hat{G} .

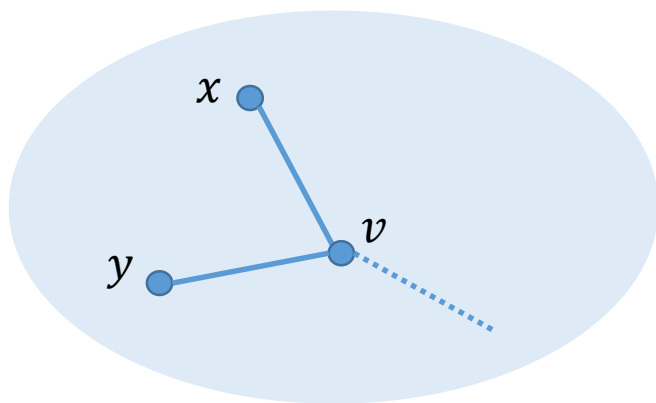
Если $d_{\hat{G}}(v) = 0$, то $d_{\tilde{G}}(v) \leq 2$, что противоречит неравенству $\delta(\tilde{G}) \geq 3$.

Доказательство теоремы Вагнера: первое свойство графа \tilde{G}

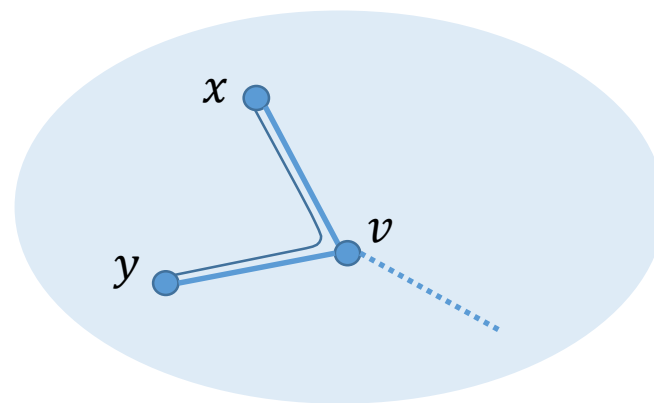
Продолжение доказательства.

Если $d_{\hat{G}}(v) = 1$, то $vx, vy \in E(\tilde{G})$.

Тогда укладку графа \tilde{G} можно было бы получить из укладки графа $(\tilde{G} - xy)$, дорисовав xy вдоль vx и vy , что противоречит непланарности \tilde{G} .



Укладка $(\tilde{G} - xy)$



Укладка \tilde{G}

Доказательство теоремы Вагнера: второе свойство графа \tilde{G}

Второе свойство. Для любого ребра $xy \in E(\tilde{G})$ граф $(\tilde{G} - \{x, y\})$ не содержит θ -подграфа.

Доказательство.

Рассмотрим граф \tilde{G}/xy .

Пусть $z \in V(\tilde{G}/xy)$ — вершина, в которую слились x и y .

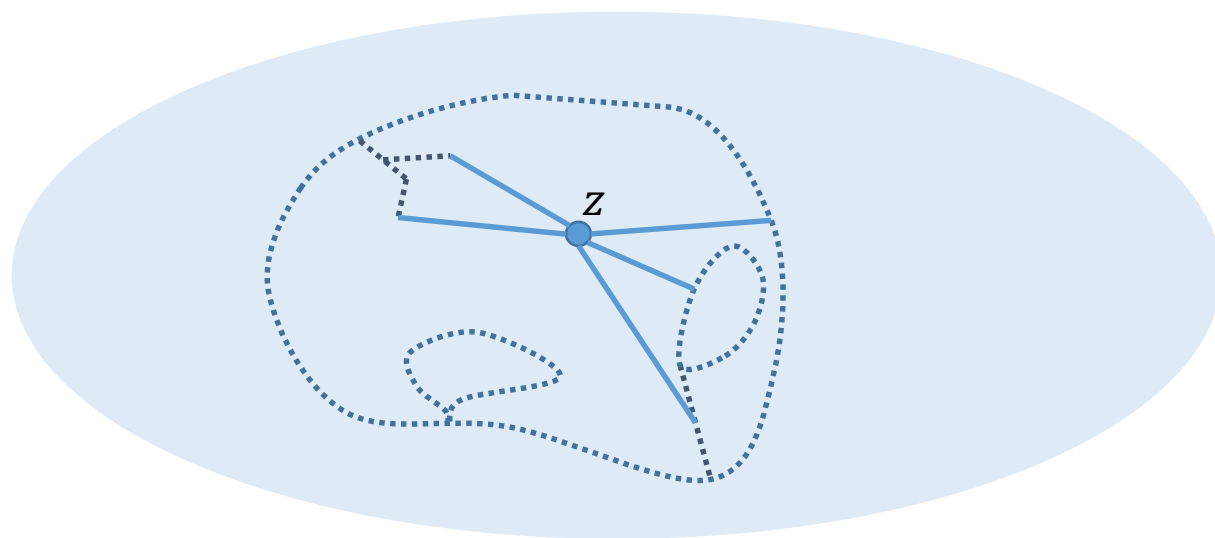
Очевидно, $(\tilde{G}/xy - z) = (\tilde{G} - \{x, y\})$.

Доказательство теоремы Вагнера: второе свойство графа \tilde{G}

Рассмотрим какую-нибудь укладку графа \tilde{G}/xu .

Можно считать, что z лежит не во внешней грани.

Пусть B — граница грани, которая получится в укладке графа $(\tilde{G}/xu - z)$, если удалить z из укладки графа \tilde{G}/xu .



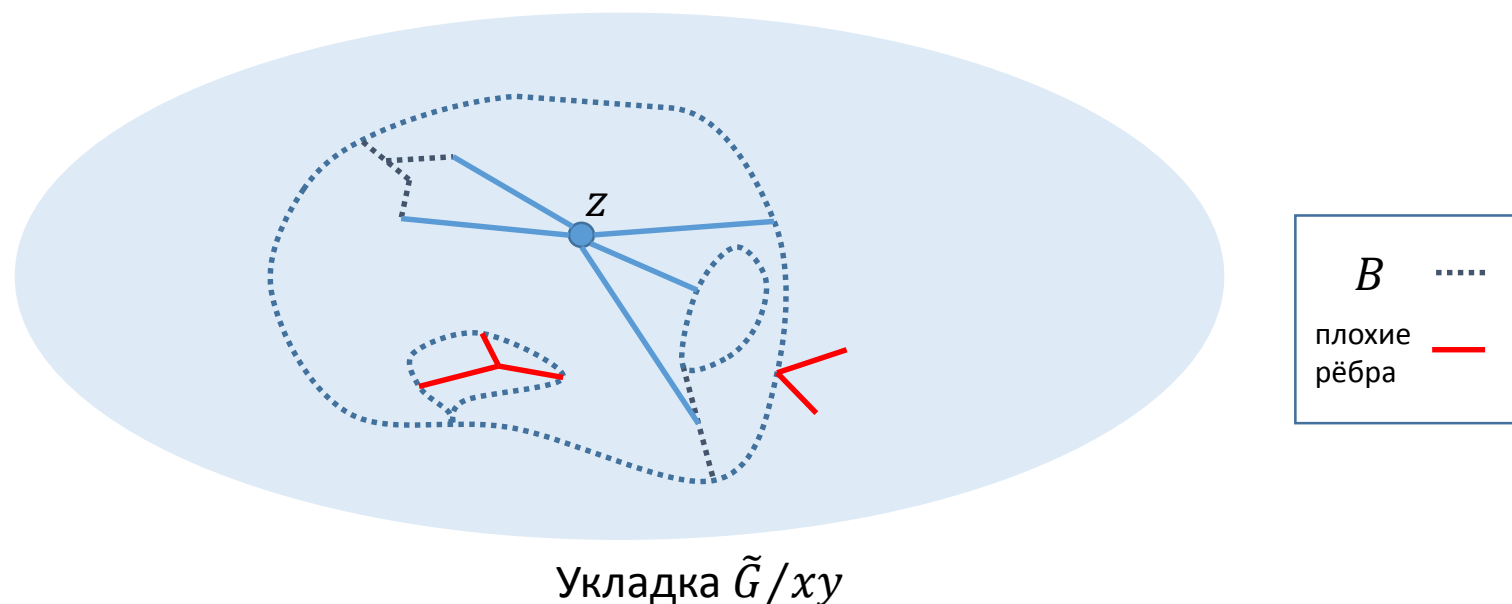
B

Укладка \tilde{G}/xu

Доказательство теоремы Вагнера:
доказываем, что $(\tilde{G}/xy - z) = B$

Докажем, что $(\tilde{G}/xy - z) = B$, то есть что в графе \tilde{G}/xy все рёбра, не выходящие из z , содержатся в B .

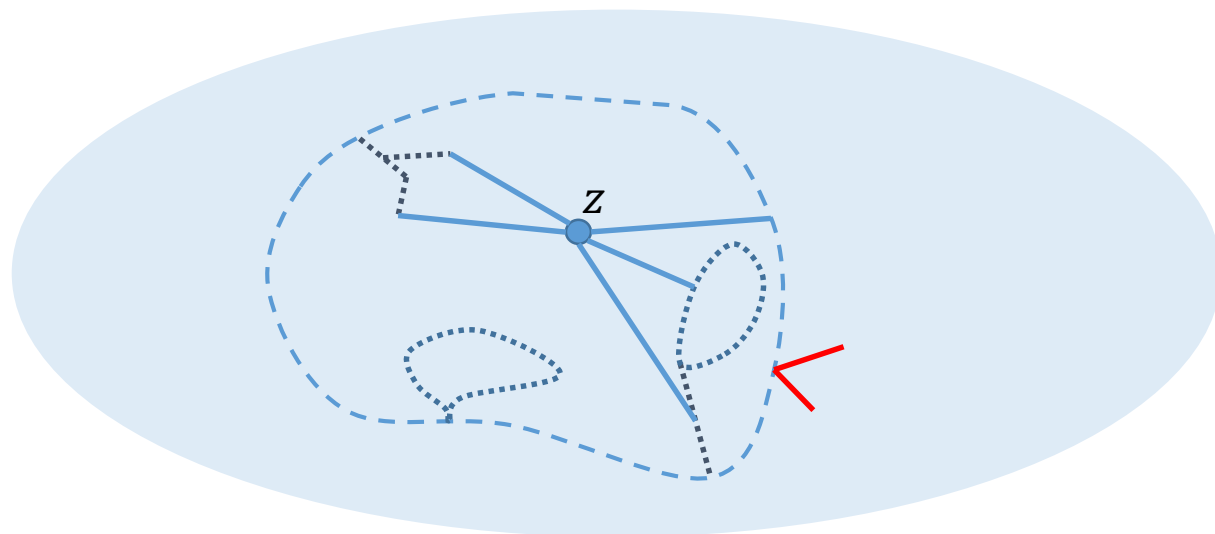
Доказываем от противного. Пусть в \tilde{G}/xy есть «плохие» рёбра, — не выходящие из z и не содержащиеся в B .



Доказательство теоремы Вагнера:
доказываем, что $(\tilde{G}/xy - z) = B$

Можно считать, что есть плоские рёбра вне грани, ограниченной B .
Обозначим множество этих рёбер R .

Тогда в B можно выделить цикл C , который отграничивает z от R .



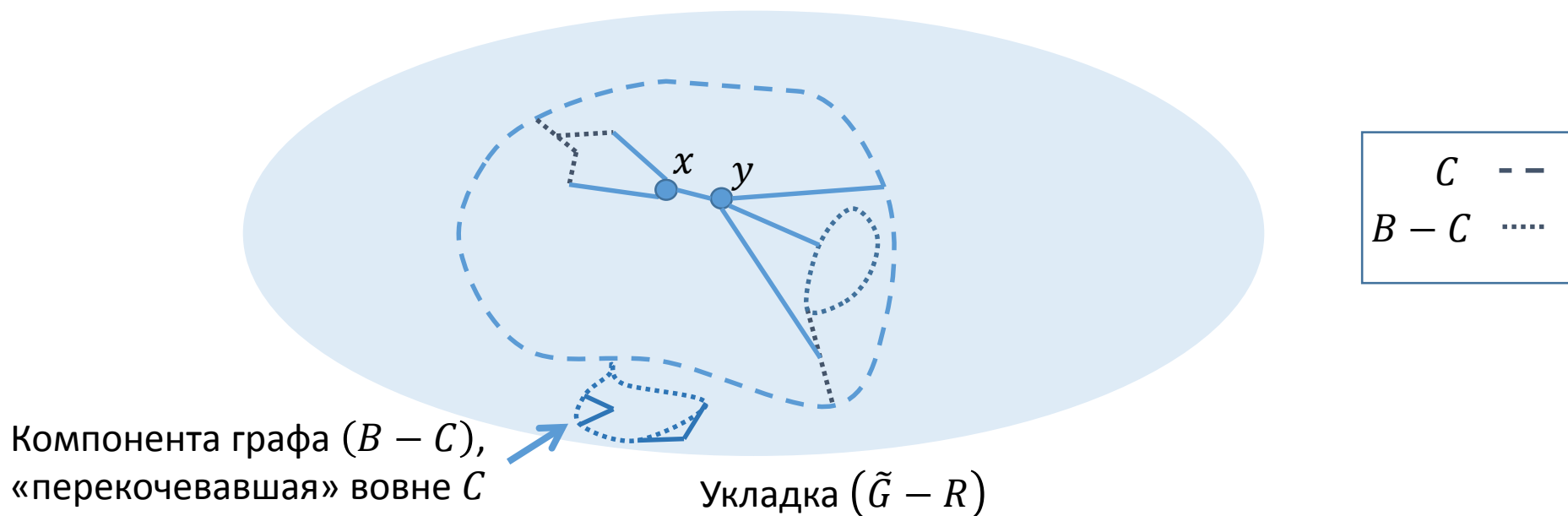
C	--
$B - C$
R	—

Укладка \tilde{G}/xy

Доказательство теоремы Вагнера:
доказываем, что $(\tilde{G}/xy - z) = B$

Рассмотрим укладку графа $(\tilde{G} - R)$. Можно считать, что вершины x и y лежат внутри C .

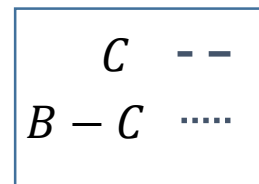
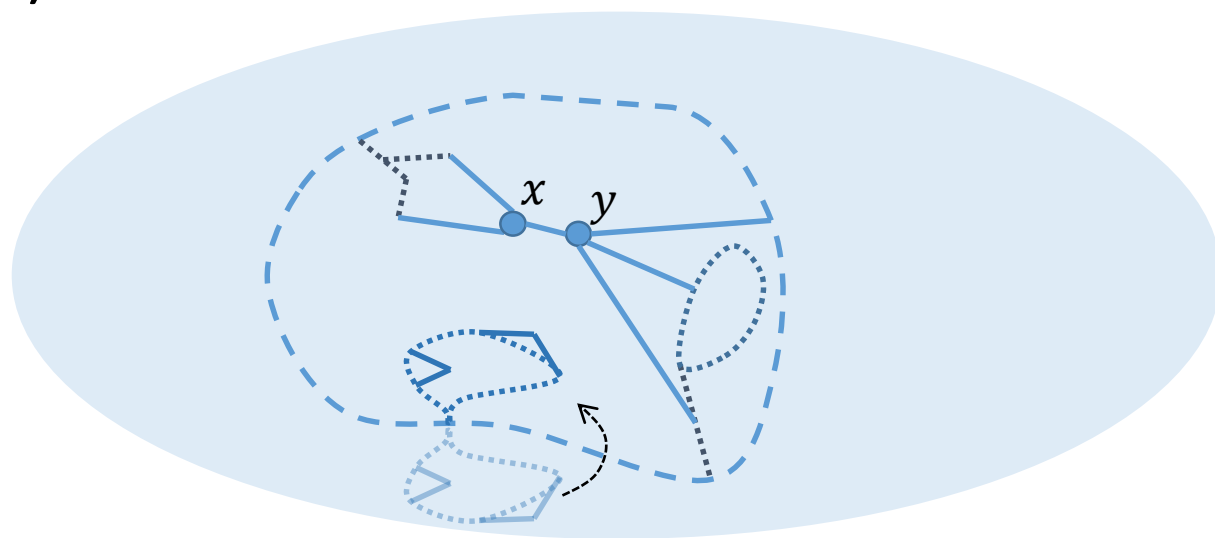
Некоторые из компонент графа $(B - C)$, которые были внутри C в укладке \tilde{G}/xy , могут теперь оказаться вне C .



Доказательство теоремы Вагнера:
доказываем, что $(\tilde{G}/xy - z) = B$

Заметим, что каждая компонента графа $(B - C)$ имеет с C не более одной общей вершины.

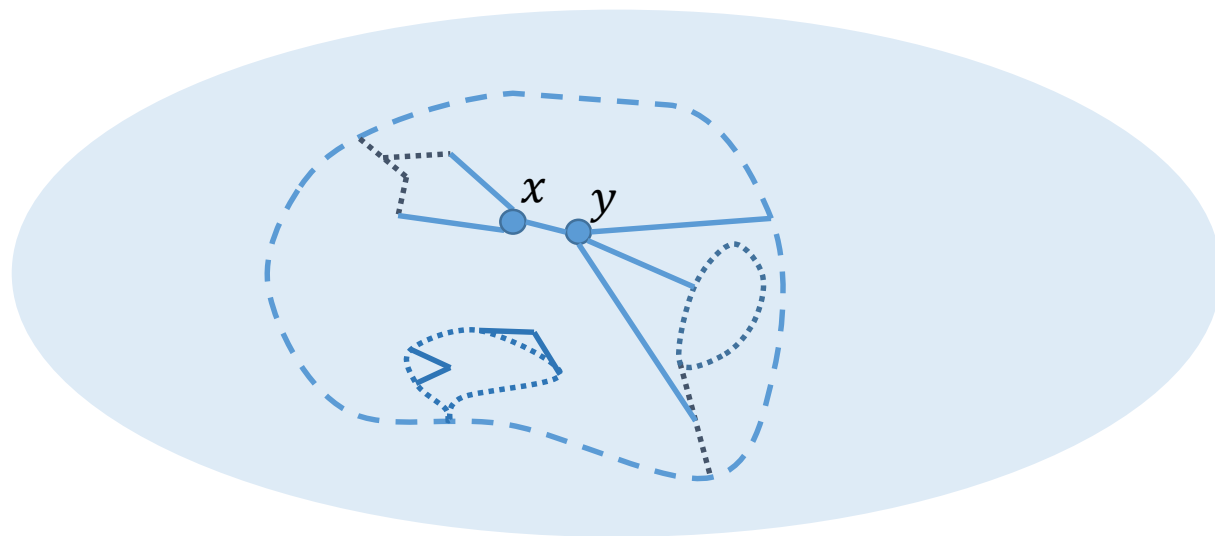
А значит, каждую компоненту $(B - C)$ можно перенести обратно внутрь C (вместе с соответствующими рёбрами из $(\tilde{G} - R - B)$, если они есть).



Укладка $(\tilde{G} - R)$

Доказательство теоремы Вагнера:
доказываем, что $(\tilde{G}/xy - z) = B$

В итоге мы получили укладку графа $(\tilde{G} - R)$, в которой всё лежит внутри C .



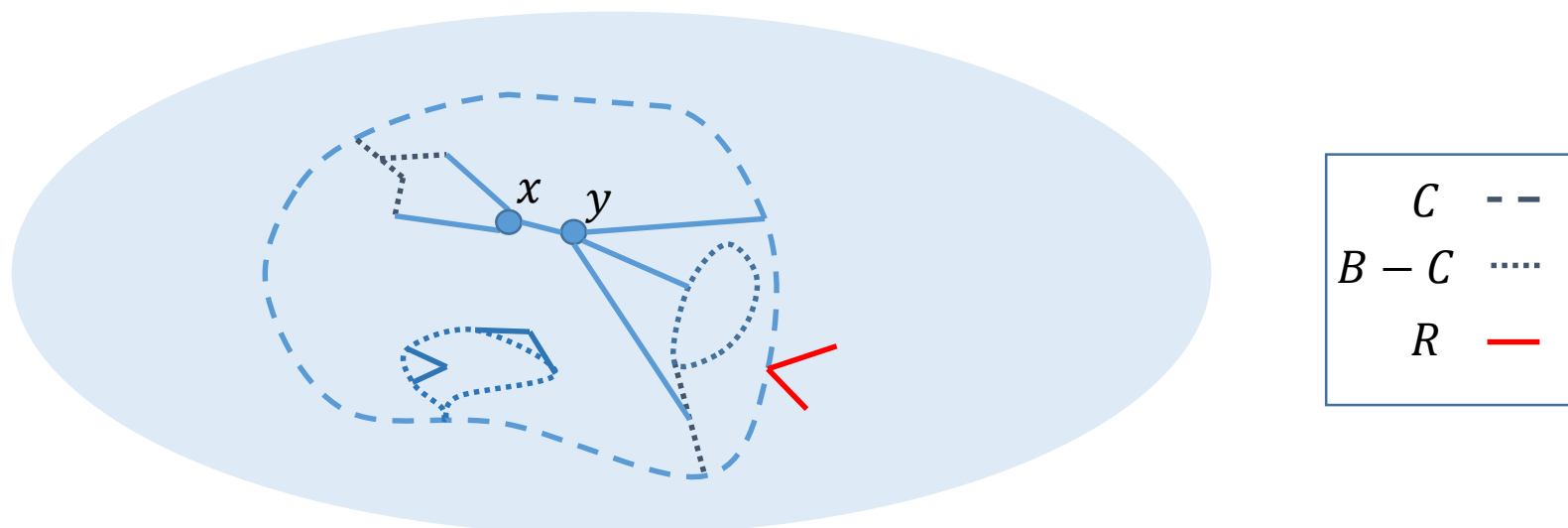
C	--
$B - C$

Укладка $(\tilde{G} - R)$

Доказательство теоремы Вагнера:
доказываем, что $(\tilde{G}/xy - z) = B$

В итоге мы получили укладку графа $(\tilde{G} - R)$, в которой всё лежит внутри C .

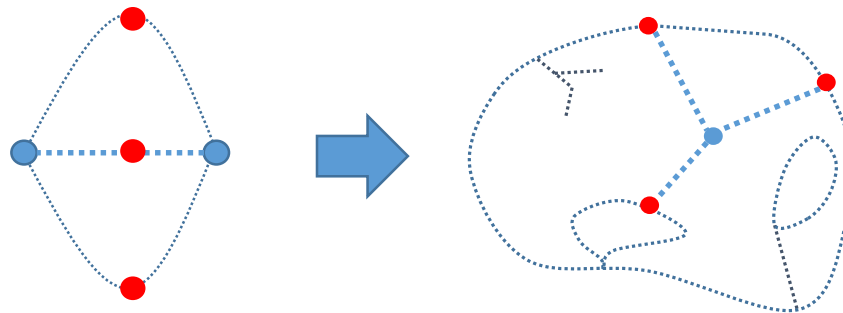
Добавив к ней укладку R (взятую на основе укладки \tilde{G}/xy), получим укладку \tilde{G} . Противоречие.



Укладка \tilde{G} ?!

Доказательство теоремы Вагнера: второе свойство графа \tilde{G}

Итак, мы доказали, что $(\tilde{G} - \{x, y\}) = B$, где B — граница грани некоторого планарного графа. Но граница грани не может содержать θ -подграфа (иначе, взяв точку внутри грани и соединив её с точками на «дугах» θ -подграфа, можно было бы получить плоское изображение $K_{3,3}$).



Доказательство теоремы Вагнера:
граф $(\tilde{G} - \{x, y\})$ — цикл

Мы доказали, что для любого $xu \in E(\tilde{G})$ граф $(\tilde{G} - \{x, y\})$ обладает двумя свойствами:

Первое свойство.

$$\delta(\tilde{G} - \{x, y\}) \geq 2.$$

Второе свойство.

$(\tilde{G} - \{x, y\})$ не содержит θ -подграфа

Выведем отсюда, что для любого $xu \in E(\tilde{G})$ граф $(\tilde{G} - \{x, y\})$ является циклом.

Доказательство теоремы Вагнера:
граф $(\tilde{G} - \{x, y\})$ — цикл

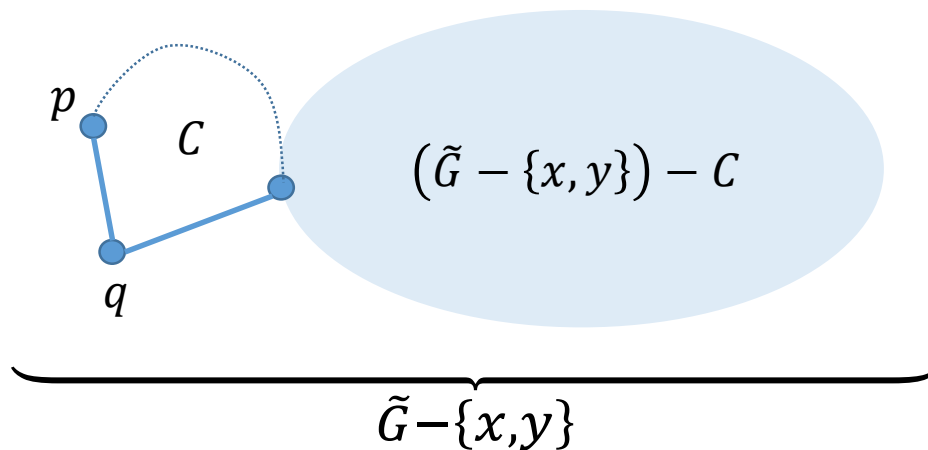
Свойства $(\tilde{G} - \{x, y\})$:
 $\delta(\tilde{G} - \{x, y\}) \geq 2$, нет θ -подграфов

Из этих свойств следует, что каждый блок графа $(\tilde{G} - \{x, y\})$ является ребром или простым циклом. Т.к. висячих вершин в графе нет, то концевые блоки являются простыми циклами.

Доказательство теоремы Вагнера:
граф $(\tilde{G} - \{x, y\})$ — цикл

Рассмотрим произвольный концевой блок-цикл C
графа $(\tilde{G} - \{x, y\})$.

У C с оставшейся частью графа не более одной общей вершины,
значит найдутся две вершины p и q , принадлежащие *только* C :

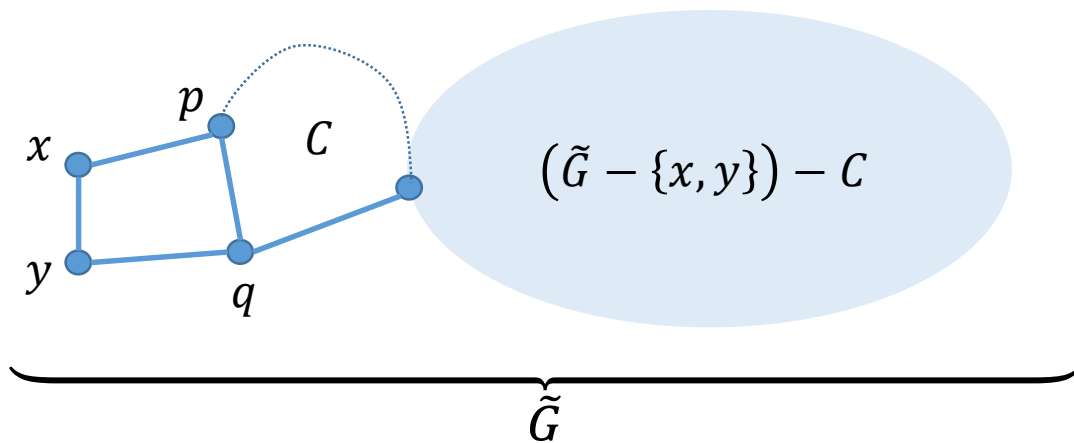


Доказательство теоремы Вагнера:
граф $(\tilde{G} - \{x, y\})$ — цикл

Т.к. $d_{\tilde{G}}(p) \geq 3$ и $d_{\tilde{G}}(q) \geq 3$, то в графе \tilde{G} каждая из вершин p, q соединена с x или y .

Например, пусть $px, qy \in E(\tilde{G})$.

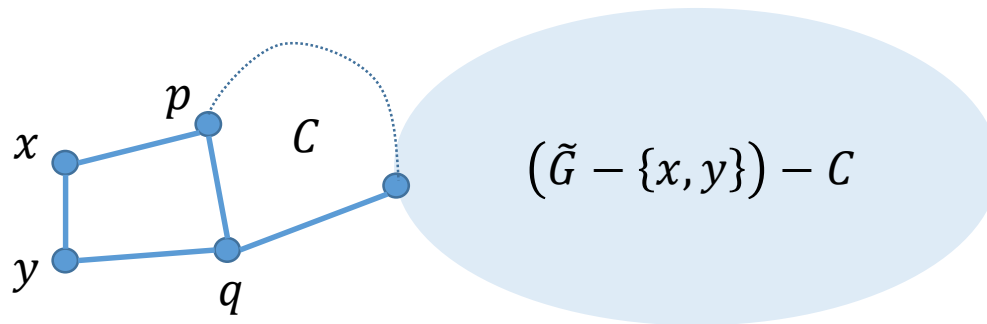
Тогда $C \cup \{px, xy, yq\}$ — θ -подграф в \tilde{G} .



Доказательство теоремы Вагнера:
граф $(\tilde{G} - \{x, y\})$ — цикл

Тогда граф $(\tilde{G} - \{x, y\}) - C$ пустой.

В противном случае в нём нашлось бы ребро ab , где $a, b \notin C$,
и в графе $(\tilde{G} - \{a, b\})$ оказался бы θ -подграф $(C \cup \{px, xy, yq\})$.

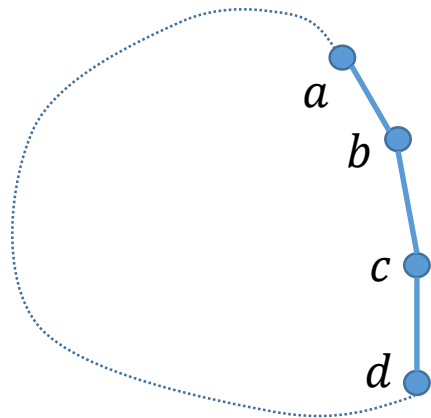


Доказательство теоремы Вагнера:
граф \tilde{G} — это K_5 или $K_{3,3}$

Выше мы доказали, что для любого $xy \in E(\tilde{G})$ граф $(\tilde{G} - \{x, y\})$ является простым циклом.

Если $|\tilde{G}| = 5$, то, очевидно, $\tilde{G} \simeq K_5$.

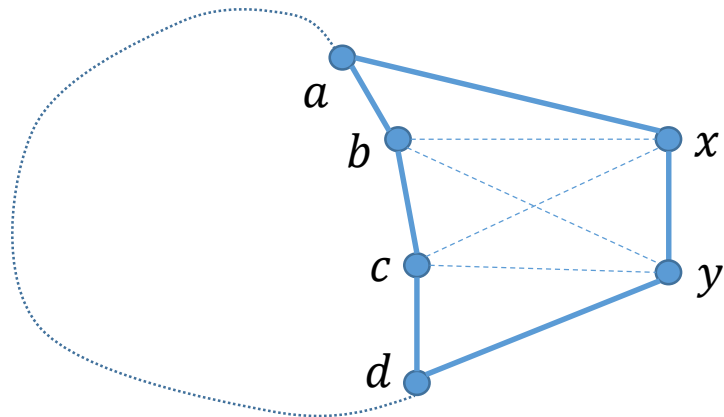
Пусть $|\tilde{G}| \geq 6$. Рассмотрим последовательные вершины a, b, c, d на цикле $(\tilde{G} - \{x, y\})$:



Доказательство теоремы Вагнера:
граф \tilde{G} — это K_5 или $K_{3,3}$

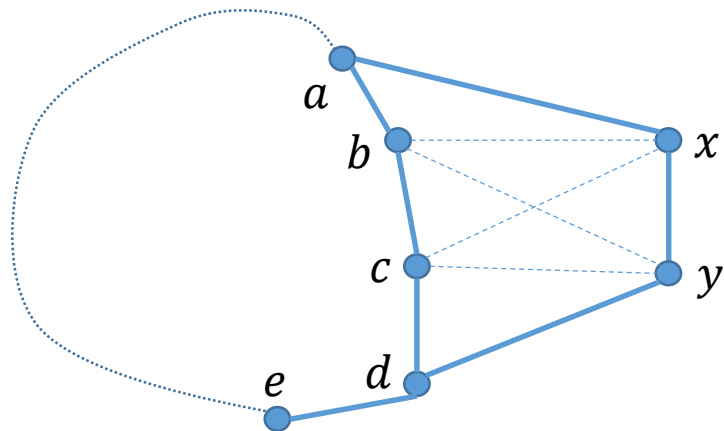
Т. к. граф $(\tilde{G} - \{b, c\})$ должен быть циклом, то из вершин a, d одна соединена с x и не соединена с y , а другая — наоборот.
Можно считать, что $ax, dy \in E(\tilde{G})$.

При этом никакая вершина кроме a, b, c, d , не должна быть соединена ни с x , ни с y .



Доказательство теоремы Вагнера:
граф \tilde{G} — это K_5 или $K_{3,3}$

Если $|\tilde{G}| \geq 7$, то, рассмотрев соседнюю с d вершину цикла e ,
видим, что в графе $(\tilde{G} - \{d, y\})$ вершина e висятая,
чего быть не может.



Доказательство теоремы Вагнера:
граф \tilde{G} — это K_5 или $K_{3,3}$

Остался случай $n = 6$.

Т.к. $(\tilde{G} - \{a, x\})$ и $(\tilde{G} - \{d, y\})$ — циклы, то $bu, cx \in E(\tilde{G})$ и $bx, cy \notin E(\tilde{G})$.

Получаем, что $\tilde{G} \simeq K_{3,3}$.

