Дискретные структуры

МФТИ, весна 2014

Александр Дайняк

www.dainiak.com

Теорема Рамсея

Теорема Турана оценивает, сколько рёбер достаточно добавить в граф, чтобы в нём появилась клика — «область плотности».

Верно ли, что в любом большом (очень) графе найдётся либо большая «область плотности» (клика), либо большая «область неплотности» (независимое множество)?

—Да, верно!

Теорема Рамсея

Теорема (F.P. Ramsey). Для любых s и t найдётся такое N, что для любого графа G, имеющего не менее N вершин, выполнено хотя бы одно из неравенств $\alpha(G) \geq s,\ \omega(G) \geq t$.

Переформулировка в терминах раскрасок:
Для любых s, t найдётся N, такое, что в любой раскраске рёбер K_N
в красный и синий цвета найдётся полностью красный K_s
или полностью синий K_t
(возможно, и оба одновременно).

Теорема Рамсея

Теорема (F.P. Ramsey). Для любых s и t найдётся такое N, что для любого графа G, имеющего не менее N вершин, выполнено хотя бы одно из неравенств $\alpha(G) \geq s,\ \omega(G) \geq t$.

Минимальное такое N называется *числом Рамсея* и обозначается

$$R(s,t)$$

Тривиальные равенства:

- $R(s,1) = R(1,t) = 1$
- $R(s,2) = s, \quad R(2,t) = t$

Доказательство теоремы Рамсея

Индукцией по (s, t) докажем неравенство

$$R(s,t) \leq R(s-1,t) + R(s,t-1)$$

Пусть $R(s-1,t)$ и $R(s,t-1)$ существуют.

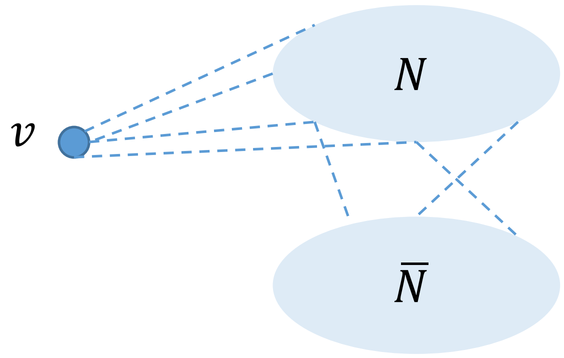
Пусть G — произвольный граф, такой, что

$$|G| = R(s-1,t) + R(s,t-1).$$

Пусть $v \in V(G)$ — произвольная вершина,
N — множество соседей v,
$\overline{N}$ — множество вершин, не смежных с v.

Доказательство теоремы Рамсея

Так как $|G| = R(s-1,t) + R(s,t-1)$, то $|N| \geq R(s,t-1)$ или $|\overline{N}| \geq R(s-1,t)$.



Пусть $|N| \geq R(s,t-1)$.

Тогда, по предположению, либо в N есть н.м. размера s, и тогда $\alpha(G) \geq s$,
либо в N есть клика K размера $(t-1)$, и тогда $K \cup \{v\}$ — клика в G, то есть $\omega(G) \geq t$.

Случай $|\overline{N}| \geq R(s-1,t)$ разбирается аналогично.

Верхняя оценка чисел Рамсея

Утверждение.

$$R(s,t) \le \binom{s+t-2}{s-1}$$

Доказательство:
При $s = 1$ или $t = 1$ неравенство выполнено. При $s, t \ge 2$ по индукции получаем:

$$R(s,t) \le R(s-1,t) + R(s,t-1) \le \binom{s+t-3}{s-2} + \binom{s+t-3}{s-1} =$$

$$= \binom{s+t-2}{s-1}$$

Верхняя оценка чисел Рамсея

Утверждение (Рамсей ’1930, Эрдёш, Секереш ’1935).

$$R(s,t) \leq \binom{s+t-2}{s-1}$$

Следствие.

$$R(s,s) \leq \binom{2s-2}{s-1} \sim \frac{4^{s-1}}{\sqrt{\pi s}} = 4^{s-\Omega(\log s)}$$

Лучшая известная оценка (Конлон ’2009).

$$R(s,s) < 4^{s-\Omega\left(\log^2 s/\log\log s\right)}$$

Нижняя конструктивная оценка чисел Рамсея

Теорема. (Франкл, Уилсон)
Для любого достаточно большого s существует граф G, такой, что $\alpha(G) \leq s$ и $\omega(G) \leq s$, и при этом

$$|G| \geq \exp\left(\frac{(\ln s)^2}{72 \ln \ln s}\right)$$

Отсюда сразу следует, что $R(s,s) \geq e^{(\ln s)^2/(72 \ln \ln s)}$ — то есть числа Рамсея растут сверхполиномиально.

Задание графа

Пусть p — простое, и пусть $m \coloneqq p^3$.

Рассмотрим граф $G = (V, E)$, в котором

$$V \coloneqq \{\boldsymbol{a} \in \{0,1\}^m \quad | \quad \|\boldsymbol{a}\| = p\}$$

(т.е. в каждом векторе из V ровно p^2 единиц)

$$E \coloneqq \left\{\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\} \quad | \quad \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \overset{p}{=} 0\right\}$$

Оказывается,

- $\alpha(G) \leq \sum_{l=0}^{p-1} \binom{m}{l}$
- $\omega(G) \leq \sum_{l=0}^{p} \binom{m}{l}$

Оценка $\alpha(G)$: многочлены $P_{\boldsymbol{a}}$

- $V := \{\boldsymbol{a} \in \{0,1\}^m \quad | \quad \|\boldsymbol{a}\| = p\}$, где $m := p^3$
- $E := \left\{\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\} \quad | \quad \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \overset{p}{=} 0\right\}$

Каждому вектору $\boldsymbol{a} \in V$ сопоставим многочлен

$$P_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) := \prod_{i=1}^{p-1} (\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} \rangle - i) \quad \in \mathbb{Z}_p[x_1, \dots, x_m]$$

Для любых $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ имеем

$$P_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{b}) \overset{p}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \overset{p}{\neq} 0$$

Оценка $\alpha(G)$: переходим от $P_{\boldsymbol{a}}$ к $\tilde{P}_{\boldsymbol{a}}$

$$P_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) \coloneqq \prod_{i=1}^{p-1} (\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} \rangle - i) \quad \in \mathbb{Z}_p[x_1, \dots, x_m]$$

Раскроем скобки в определении $P_{\boldsymbol{a}}(x)$, и каждый моном вида $x_{i_1}^{t_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_l}^{t_l}$ заменим на $x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_l}$ (т.е. «забудем» про степени).

Получим новый многочлен $\tilde{P}_{\boldsymbol{a}}$, такой, что

- $\deg_{x_k} \tilde{P}_{\boldsymbol{a}} \leq 1$ для каждого $k \in \{1, \dots, m\}$,
- $\tilde{P}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{c}) = P_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{c})$ для любого $\boldsymbol{c} \in \{0,1\}^m$.

Оценка $\alpha(G)$: свойства $\tilde{P}_{\boldsymbol{a}}$ для независимых множеств

- $V \coloneqq \{\boldsymbol{a} \in \{0,1\}^m \quad | \quad \|\boldsymbol{a}\| = p\}$, где $m \coloneqq p^3$
- $E \coloneqq \left\{\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\} \quad | \quad \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \overset{p}{=} 0\right\}$

Построили набор многочленов $\tilde{P}_{\boldsymbol{a}}$, таких, что

- $\deg_{x_k} \tilde{P}_{\boldsymbol{a}} \le 1$ для каждого $k \in \{1, \dots, m\}$,
- для любых $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ имеем

$$\tilde{P}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{b}) \overset{p}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \overset{p}{\neq} 0$$

Пусть $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_r$ — независимое множество в G.
Тогда $\forall i, j \in \{1, \dots, r\}$ имеем

$$\tilde{P}_{\boldsymbol{a}_i}(\boldsymbol{a}_j) \overset{p}{\neq} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j \rangle \overset{p}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad i = j$$

Оценка $\alpha(G)$: размерность пространства, в котором лежат $\tilde{P}_{\boldsymbol{a}}$

По любому независимому множеству $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_r$ можно построить многочлены $\tilde{P}_{\boldsymbol{a}_1}, \dots, \tilde{P}_{\boldsymbol{a}_r}$, такие, что

$$\forall i, j \in \{1, \dots, r\} \qquad \tilde{P}_{\boldsymbol{a}_i}(\boldsymbol{a}_j) \overset{p}{\neq} 0 \quad \Leftrightarrow \quad i = j$$

Т.к. $\deg_{x_k} \tilde{P}_{\boldsymbol{a}_i} \leq 1$ для каждого $k \in \{1, \dots, m\}$, то каждый из многочленов лежит в пространстве с базисом из произведений вида $x_{k_1} \cdot \ldots \cdot x_{k_l}$, где $0 \leq l \leq p-1$ и $1 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_l \leq m$.

Если мы покажем, что $\tilde{P}_{\boldsymbol{a}_1}, \dots, \tilde{P}_{\boldsymbol{a}_r}$ линейно независимы, сразу получим оценку $r \leq \sum_{l=0}^{p-1} \binom{m}{l}$.

Оценка $\alpha(G)$: доказываем л.н.з. $\tilde{P}_{\boldsymbol{a}}$ для независимого множества

$$\forall i,j \in \{1,\dots,r\} \quad \tilde{P}_{\boldsymbol{a}_i}(\boldsymbol{a}_j) \overset{p}{\neq} 0 \quad \Leftrightarrow \quad i = j$$

Доказываем, что $\tilde{P}_{\boldsymbol{a}_1},\dots,\tilde{P}_{\boldsymbol{a}_r}$ л.н.з.

Допустим, что $\exists c_1,\dots,c_r \in \mathbb{Z}_p$, такие, что

$$c_1\tilde{P}_{\boldsymbol{a}_1}(\boldsymbol{x}) + \dots + c_r\tilde{P}_{\boldsymbol{a}_r}(\boldsymbol{x}) \overset{p}{\equiv} 0$$

Подставим в это тождество $\boldsymbol{a}_i$ вместо $\boldsymbol{x}$. Получим:

$$\dots + c_{i-1}\cdot 0 + \quad c_i \cdot \tilde{P}_{\boldsymbol{a}_i}(\boldsymbol{a}_i) \quad + c_{i+1}\cdot 0 + \ \dots \quad \overset{p}{=} \quad 0$$

Отсюда $c_i = 0$. Так как i произвольно, то

$$c_1 = c_2 = \dots = c_r = 0,$$

что и требовалось доказать.

Оценка $\omega(G)$: многочлены $\hat{P}_{\boldsymbol{a}}$

- $V := \{\boldsymbol{a} \in \{0,1\}^m \quad | \quad \|\boldsymbol{a}\| = p\}$, где $m := p^3$
- $E := \left\{\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\} \quad | \quad \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \overset{p}{=} 0\right\}$

Для оценки $\omega(G)$ введём многочлены

$$\hat{P}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) := \prod_{i=0}^{p-1} (\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} \rangle - i \cdot p) \quad \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_m]$$

Опять же, из условий получаем, что для любой *клики* $\{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_r\} \subseteq V$ выполнено свойство

$$\forall i, j \in \{1, \dots, r\} \qquad \hat{P}_{\boldsymbol{a}_i}(\boldsymbol{a}_j) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad i = j$$

Оценка $\omega(G)$: переход к $\hat{\tilde{P}}_{\boldsymbol{a}}$ и оценка ω

По клике $\{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_r\}$ построили многочлены $\hat{P}_{\boldsymbol{a}_1}, \dots, \hat{P}_{\boldsymbol{a}_r}$

$$\forall i, j \in \{1, \dots, r\} \qquad \hat{P}_{\boldsymbol{a}_i}(\boldsymbol{a}_j) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad i = j$$

Как и раньше, «забываем» про степени переменных в $\hat{P}_{\boldsymbol{a}_1}, \dots, \hat{P}_{\boldsymbol{a}_r}$ и тем самым получаем многочлены $\hat{\tilde{P}}_{\boldsymbol{a}_1}, \dots, \hat{\tilde{P}}_{\boldsymbol{a}_r}$.

$$\forall i, j \in \{1, \dots, r\} \qquad \hat{\tilde{P}}_{\boldsymbol{a}_i}(\boldsymbol{a}_j) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad i = j$$

Многочлены $\hat{\tilde{P}}_{\boldsymbol{a}_1}, \dots, \hat{\tilde{P}}_{\boldsymbol{a}_r}$ л.н.з. и лежат в пространстве, порождённом мономами вида $x_{k_1} \cdot \dots \cdot x_{k_l}$, где $0 \leq l \leq p$ и $1 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_l \leq m$.

Теорема полностью доказана.

Завершение доказательства теоремы: подбор параметров — арифметика

Итак, мы построили для простого p граф, в котором

- $\alpha(G) \leq \sum_{l=0}^{p-1} \binom{p^3}{l}$
- $\omega(G) \leq \sum_{l=0}^{p} \binom{p^3}{l}$
- $|G| = \binom{p^3}{p^2}$

При $p > 4$ имеем

$$\alpha, \omega \leq p \cdot (ep^3/p)^p < p^{3p}$$

и

$$|G| > (p^3/p^2)^{p^2} = p^{p^2}$$

Завершение доказательства теоремы: подбор параметров — арифметика

При простом $p > 4$ есть G, в котором $\alpha, \omega < p^{3p}$ и $|G| \geq p^{p^2}$.

Зафиксируем s и посмотрим, насколько большим можно взять p, чтобы выполнялось неравенство

$$p^{3p} \leq s$$

Возьмём $p \in \left[\frac{\ln s}{6 \ln \ln s}, \frac{\ln s}{3 \ln \ln s}\right]$.
Тогда

$$p^{3p} = e^{3p \ln p} \leq e^{3 \cdot \frac{\ln s}{3 \ln \ln s} \cdot \ln \ln s} = s$$

и

$$p^{p^2} = e^{p^2 \ln p} \geq \exp\left(\left(\frac{\ln s}{6 \ln \ln s}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \ln \ln s\right) = \exp\left(\frac{(\ln s)^2}{72 \ln \ln s}\right)$$

Неконструктивная оценка чисел Рамсея с помощью вероятностного метода

Теорема.

$$R(s,s) \gtrsim \frac{1}{e\sqrt{2}} \cdot s \cdot \left(\sqrt{2}\right)^{s}$$

Идея:

Чтобы доказать нижнюю оценку вида $R(s,s) > n$,
достаточно доказать, что существует граф на n вершинах,
в котором *нет* ни клик, ни независимых множеств размера s.

Возьмём случайный граф и покажем, что с ненулевой вероятностью он нам подойдёт.

Нижняя оценка чисел Рамсея: вводим вероятностную модель

Пусть $n \coloneqq \lfloor 2^{0.5\,s} \rfloor$, и пусть $V \coloneqq \{v_1, \ldots, v_n\}$ — фиксированное множество вершин.

Построим на этих вершинах *случайный граф*, проводя каждое из $\binom{n}{2}$ рёбер независимо от других с вероятностью $1/2$.

Вероятность получить при этом любой конкретный граф на вершинах $v_1, \ldots, v_n$ равна

$$2^{-\binom{n}{2}}$$

Нижняя оценка чисел Рамсея: «плохие» события и их вероятности

Для каждого множества $U \subset V$ размера s рассмотрим события

$$A_U \coloneqq \text{«множество } U \text{ независимое»}$$
$$B_U \coloneqq \text{«множество } U \text{ образует клику»}$$

Для каждого U имеем

$$\Pr[A_U] = \Pr[B_U] = 2^{-\binom{s}{2}}$$

Тогда

$$\Pr\left[\bigcup_{U \subset V} A_U \cup \bigcup_{U \subset V} B_U\right] \leq \sum_{U \subset V} \Pr[A_U] + \sum_{U \subset V} \Pr[B_U] = 2 \cdot \binom{n}{s} \cdot 2^{-\binom{s}{2}}$$

Неравенство, при котором вероятность возникновения плохих событий < 1

- $\Pr[\bigcup_{U \subset V}(A_U \cup B_U)] \le \binom{n}{s} \cdot 2^{1-\binom{s}{2}}$

Если мы подберём n так, чтобы выполнялось

$$\binom{n}{s} \cdot 2^{1-\binom{s}{2}} < 1,$$

то тем самым докажем, что $R(s, s) > n$.

При этом хотим, чтобы n было побольше.

$$\binom{n}{s} < 2^{\binom{s}{2}-1}$$

Нам хватит и такого неравенства:

$$\left(\frac{en}{s}\right)^s < 2^{\binom{s}{2}-1}$$

Нижняя оценка чисел Рамсея

Всё хорошо, если

$$\left(\frac{en}{s}\right)^s < 2^{\binom{s}{2}-1}$$

Берём корень из обеих частей:

$$\frac{en}{s} < 2^{(s-1)/2-1/s}$$

Видно, что можно взять $n \coloneqq \left\lfloor \frac{s \cdot 2^{s/2}}{e\sqrt{2} \cdot 2^{1/s}} - 1 \right\rfloor$, откуда

$$R(s,s) \gtrsim \frac{1}{e\sqrt{2}} \cdot s\left(\sqrt{2}\right)^s$$

Нижняя оценка чисел Рамсея: ещё раз основная идея

- Случайный граф содержит клику или независимое множество размера s с вероятностью не более $\binom{n}{s} \cdot 2^{1-\binom{s}{2}}$.
- При $n < \frac{1}{e\sqrt{2} \cdot 2^{1/s}} \cdot s\left(\sqrt{2}\right)^s$ выполнено неравенство $\binom{n}{s} \cdot 2^{1-\binom{s}{2}} < 1$, и тогда с *положительной* вероятностью случайный граф *не* содержит ни клик ни независимых множеств размера s.
- Это и означает *существование* искомого графа.
- Отсюда делаем вывод, что $R(s,s) > \frac{s\left(\sqrt{2}\right)^s}{e\sqrt{2} \cdot 2^{1/s}}$.