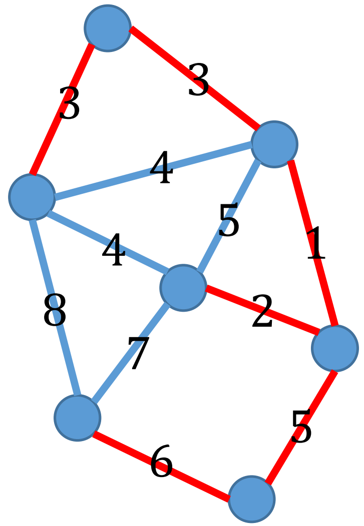
Дискретная оптимизация
весна 2013

Александр Дайняк

http://www.dainiak.com

Минимальное остовное дерево (Minimal Spanning Tree)

- Дан граф с весами на рёбрах
- Требуется выбрать дерево, покрывающее все вершины и имеющее как можно меньший вес
- В отличие от ЗК, решается очень просто: жадным алгоритмом!



Жадные алгоритмы

- Ещё одна простая метаэвристика: «жадность»
- Жадные алгоритмы хотят всего и сразу
- Из-за этого «сразу» решение может быть неоптимальным, однако иногда…

Жадные алгоритмы

- Можно выделить целый класс задач, на которых жадный алгоритм работает оптимально
- Рассмотрим следующую задачу оптимизации:
  - S — конечное множество, каждому $s \in S$ приписан вес $w(s) \geq 0$
  - F — семейство подмножеств S («допустимые» подмножества)
  - Для каждого $A \subseteq S$ полагаем $w(A) = \sum_{s \in A} w(s)$
  - Требуется найти $A \in F$, такое, что $w(A) \to \max$

Жадные алгоритмы

- TSP и MST — частные случаи указанной задачи:
  - В задаче коммивояжёра
    - $S \coloneqq E(G)$
    - $w(s) \coloneqq (\text{bigconst} - \text{вес ребра } s \text{ в исходном графе})$
    - $F \coloneqq \{E' \subseteq E(G) \mid E' \text{образует ГЦ в } G\}$
    - Трюк с изменением весов работает только потому, что количество рёбер во всех ГЦ одинаковое!
  - В задаче об остовном дереве:
    - $F = \{E' \subseteq E(G) \mid E' \text{образует остовное дерево в } G\}$

Жадные алгоритмы

- Пусть $\forall A, B \ (A \in F, B \subset A \ \Rightarrow B \in F)$, то есть подмножество любого допустимого множества тоже допустимо (это свойство F называется *наследственностью*)
- Жадный алгоритм решения задачи оптимизации с наследственным F:
   1. A := $\emptyset$
   2. if $\exists s\colon A \cup \{s\} \in F$ then
      A := $A \cup \{\operatorname{argmax} w(s)\}$
      goto 2
      else
      stop.

Жадные алгоритмы

- Какие требования наложить на структуру (S, F), чтобы жадный алгоритм давал оптимальное решение задачи оптимизации?
- Ответ: пара (S, F) должна быть *матроидом*

Матроиды

- Матроиды введены в 1935 году Хасслером Уитни, как объекты, удовлетворяющие абстрактным свойствам систем линейно независимых векторов
- Пара (S, F) — матроид, если
  1. $\forall A, B \ (A \in F, B \subset A \ \Rightarrow B \in F)$ (*наследственность*)
  2. $\forall C \subseteq S$ все максимальные по включению допустимые подмножества C равномощны.
     «Максимальное по включению допустимое подмножество в C» означает $A \subseteq C$, такое, что $A \in F$, но $\forall s \in C \setminus A \quad A \cup \{s\} \notin F$.

Матроиды

1. $\underline{\forall A, B\ (A \in F, B \subset A\ \Rightarrow B \in F)}$
   Любое подмножество системы линейно независимых векторов само линейно независимо.
2. <u>$\forall C \subseteq S$ все максимальные по включению допустимые подмножества C равномощны.</u>
   Максимальные линейно независимые подмножества фиксированного множества C векторов равномощны: их мощность равна размерности C.

Матроиды и жадный алгоритм

Теорема Радо—Эдмондса о матроидах.
Пусть (S, F) — наследственная система (т.е. выполнен п.1 определения матроида). Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. Пара (S, F) — матроид.
2. При любом выборе неотрицательных весов на S жадный алгоритм даёт оптимальное решение оптимизационной задачи.
3. Для любых двух $I_1, I_2 \in F$, таких, что $|I_1| > |I_2|$, найдётся $s \in I_1 \setminus I_2$, для которого $I_2 \cup \{s\} \in F$.

Доказательство теоремы Радо—Эдмондса

$\mathbf{1} \Rightarrow \mathbf{2}$:

Пусть (S, F) — матроид. Пусть
$A \in F,\ A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ — множество максимального веса, $B \in F$,
$B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ — множество, построенное ж.а.

Можно считать, что A и B максимальные по включению, а значит $m = n$.

Будем считать, что $w(a_1) \geq w(a_2) \geq \cdots \geq w(a_m)$ и $w(b_1) \geq w(b_2) \geq \cdots \geq w(b_m)$.

Покажем, что $\forall i\ w(b_i) \geq w(a_i)$, и тем самым $w(B) \geq w(A)$.

Доказательство теоремы Радо—Эдмондса

Покажем, что $\forall i\ w(b_i) \geq w(a_i)$, и тем самым $w(B) \geq w(A)$.

Индукция по $i = 1, \dots, m$.

- Неравенство $w(b_1) \geq w(a_1)$ выполнено — тривиально.
- Покажем, что $w(b_k) \geq w(a_k)$ в предположении $\forall i \in \{1, \dots, k-1\} \quad w(b_i) \geq w(a_i)$.
  Рассмотрим множество $U = \{s \in S \mid w(s) \geq w(a_k)\}$.
  Для множеств $\mathrm{A}' = \{a_1, \dots, a_k\}$ и $B' = \{b_1, \dots, b_{k-1}\}$ имеем:
  $$A', B' \in F, \qquad A', B' \subseteq U, \qquad |A'| > |B'|,$$
  следовательно, B' не максимальное по включению допустимое подмножество U и $\exists s \in U \setminus B'$, для которого $B' \cup \{s\} \in F$.
  Но тогда $w(b_k) \geq w(s) \geq w(a_k)$, что и требовалось.

Доказательство теоремы Радо—Эдмондса

$\mathbf{2} \Rightarrow \mathbf{3}$ (доказываем $\neg 3 \Rightarrow \neg 2$):

Допустим, $\exists I_1, I_2 \in F$, такие, что
$|I_1| > |I_2|$ и $\forall s \in I_1 \setminus I_2 \quad I_2 \cup \{s\} \notin F$.

Рассмотрим набор весов:

$w(s) = 0$ при $s \notin I_1 \cup I_2$

$w(s) = |I_2| + 2$ при $s \in I_2$
$w(s) = |I_2| + 1$ при $s \in I_1 \setminus I_2$

Жадный алгоритм при таком наборе весов выберет все элементы множества I_2, и не сможет добавить к ним ни одного элемента из I_1, получив итоговый вес $|I_2| \cdot (|I_2| + 2)$, в то время как

$$w(I_1) \geq (|I_2| + 1)^2.$$

www.dainiak.com

Доказательство теоремы Радо—Эдмондса

$\mathbf{3} \Rightarrow \mathbf{1}$:
Пусть $C \subseteq S$ — произвольное множество, и $I_1, I_2 \subseteq C$, и $I_1, I_2 \in F$.

Тогда если $|I_1| > |I_2|$, то $\exists s \in I_1 \setminus I_2$ такой, что $I_2 \cup \{s\} \in \mathrm{F}$.
Но $I_2 \cup \{s\} \subseteq C$, то есть I_2 — не максимальное допустимое подмножество C.

Теорема Радо—Эдмондса доказана ($1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$).

Жадность vs. локальность

- На матроиде корректно будет работать и локальный алгоритм (*упражнение!*):
  1. $A \coloneqq \forall$максимальное допустимое множество
  2. $N(A) \coloneqq \{A' \in F \mid A' = (A \setminus \{s\}) \cup \{s'\},\ s' \notin A\}$
  3. if $\exists A' \in N(A)$: $w(A') > w(A)$ then
     $A \coloneqq A'$
     goto 2

Жадный алгоритм в задаче MST

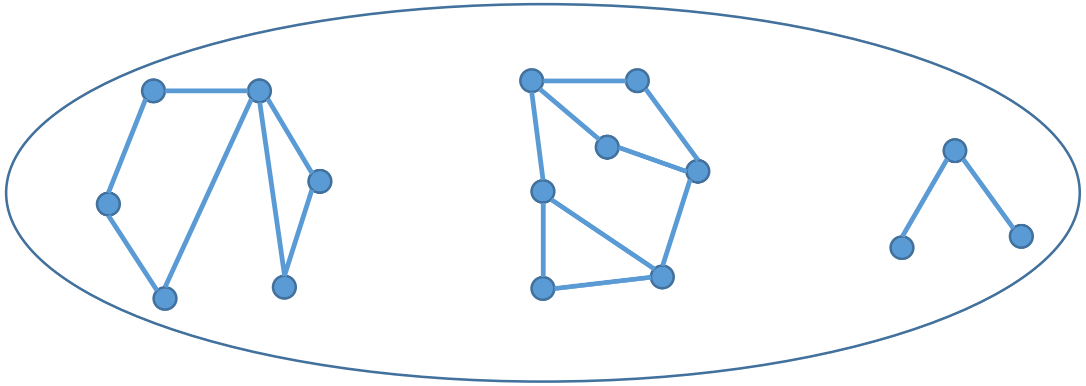
- Дан граф с весами на рёбрах.
- Требуется выбрать дерево, покрывающее все вершины и имеющее как можно меньший вес
- Формальная постановка:
  - $S = E(G)$
  - $w(s) = (\text{bigconst} - \text{вес ребра } s \text{ в исходном графе})$
  - $F = \{E' \subseteq E(G) \mid E' \text{образует остовное дерево в } G\}$
  - Трюк с изменением весов работает потому, что количество рёбер во всех остовных деревьях одинаковое!

Жадный алгоритм в задаче MST

- $F = \{E' \subseteq E(G) \mid E' \text{образует остовное дерево в } G\}$
  Нет наследственности!
- Но это можно исправить:
  $$F = \{E' \subseteq E(G) \mid E' \text{образует ациклический подграф в } G\}$$

Жадный алгоритм для MST

- $F = \{E' \subseteq E(G) \mid E' \text{образует ациклический подграф в } G\}$
- Необходимо проверить п.2 определения матроида: «$\forall C \subseteq E(G)$ все максимальные по включению ациклические подмножества C равномощны».

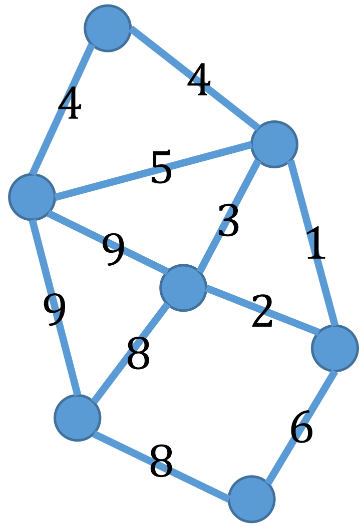


Выполнено!

Жадный алгоритм для MST

- Дан граф с весами на рёбрах
- Требуется выбрать дерево, покрывающее все вершины и имеющее как можно меньший вес

- Матроидная постановка:
  - S — множество всех рёбер графа
  - F содержит все ациклические подмножества рёбер



Единственность решения оптимизационной задачи

- Решаем задачу:
  - S — конечное множество, для $A \subseteq S$ полагаем $w(A) = \sum_{s \in A} w(s)$
  - F — семейство «допустимых» подмножеств S
  - Требуется найти $A_{\text{опт}} \in F$, такое, что $w(A_{\text{опт}}) \to max$
- Вопросы:
  - Когда решение такой задачи единственное?
  - Что будет, если $w(s)$ выбирать случайным образом, например, из множества $\{1,2, \dots, M\}$?

Лемма об изолировании

Лемма об изолировании. При случайном равномерном независимом выборе весов элементов S из M-элементного множества вероятность единственности решения оптимизационной задачи не меньше $1 - \frac{|S|}{M}$.

Происхождение названия леммы: набор весов называется изолирующим для семейства F, если решение оптимизационной задачи на данном наборе весов единственное.

Доказательство леммы об изолировании

Для $s \in S$ рассмотрим величину

$$\alpha(s) = \max_{A \in F:\, s \notin A} w(A) - \max_{B \in F:\, s \in B} w(B \setminus \{s\})$$

Допустим, есть два различных множества $A', B' \in F$, на которых достигается максимум веса.

Тогда рассмотрим произвольный $s \in B' \setminus A'$. Для такого s выполнено

$$\alpha(s) = \max_{A \in F:\, s \notin A} w(A) - \max_{B \in F:\, s \in B} w(B \setminus \{s\}) = w(A') - w(B' \setminus \{s\}) =$$

$$= w(A') - \big(w(B') - w(s)\big) = w(s)$$

Следовательно, **если** $\forall s \in S \quad w(s) \neq \alpha(s)$, **то решение оптимизационной задачи единственное.**

Доказательство леммы об изолировании

Если $\forall s \in S \quad w(s) \neq \alpha(s)$, то решение оптимизационной задачи единственное.

$$\alpha(s) = \max_{A \in F:\, s \notin A} w(A) - \max_{B \in F:\, s \in B} w(B \setminus \{s\})$$

Заметим, что $\alpha(s)$ не зависит от $w(s)$, поэтому

$$\Pr\{w(s) = \alpha(s)\} \leq \frac{1}{M}$$

Теперь можно оценить вероятность единственности решения:

$$\Pr\{\forall s \in S \quad w(s) \neq \alpha(s)\} = 1 - \Pr\{\exists s \in S: \quad w(s) = \alpha(s)\} \geq$$

$$\geq 1 - \sum_{s \in S} \Pr\{w(s) = \alpha(s)\} \geq 1 - \frac{|S|}{M}$$

Резюме

- Локальный поиск и жадность — простые подходы, эффективные в некоторых случаях (например, в оптимизационных задачах на матроидах), но, конечно, далеко не во всех
- В оптимизационных задачах при случайном выборе весов решение с большой вероятностью единственное