Основы теории графов

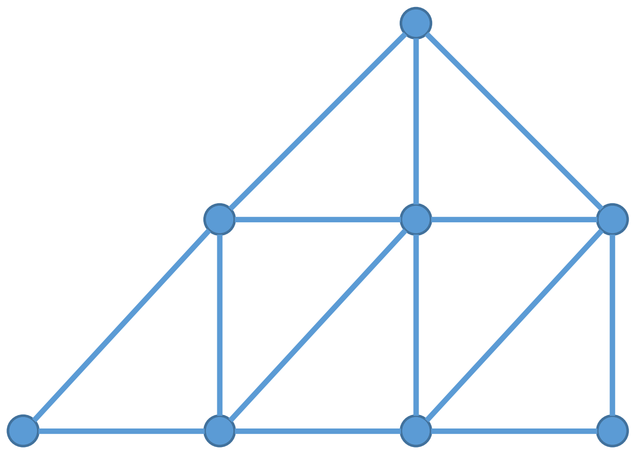
осень 2013

Александр Дайняк

www.dainiak.com

Квазитриангуляции

Квазитриангуляция — это планарный граф, границы всех граней которого являются простыми циклами, причём границы всех внутренних граней — треугольники.

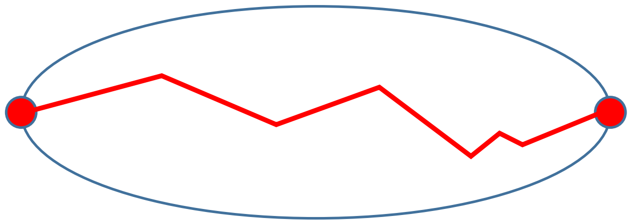


Лемма о красно-синей альтернативе

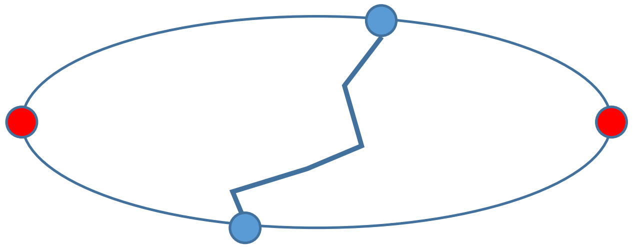
Лемма.
Пусть вершины квазитриангуляции G покрашены в красный и синий цвета. Пусть цикл C — граница внешней грани G.

Пусть u, w — произвольная пара красных вершин на C. Тогда

- найдётся красная цепь, соединяющая u и w,
- или найдётся синяя цепь, соединяющая две вершины из разных компонент связности $C - \{u, w\}$.



или



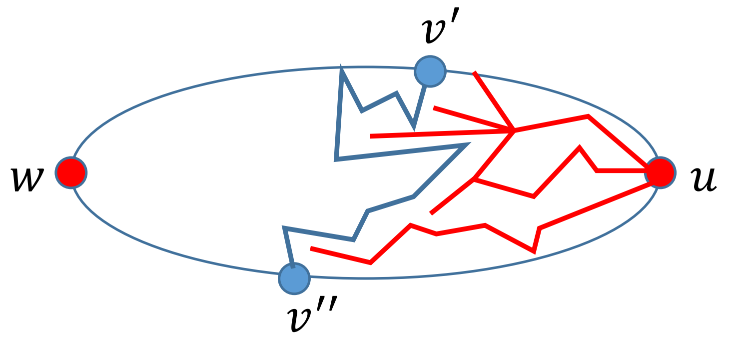
Доказательство леммы о красно-синей альтернативе

Пусть U — красные вершины G, до которых можно добраться по красным цепям.

Если $w \in U$, то искомая красная цепь между u и v нашлась.

Пусть теперь $w \notin U$ и пусть W — компонента связности $(G - U)$, содержащая w. Пусть v' и v'' — синие вершины из $C \cap W$, по разные стороны от w и наиболее далёкие от w.

Тогда есть синяя цепь, проходящая по той части границы W, которая «ближе к u». (Наличие красных вершин на этой части границы противоречило бы квазитр. и определению U.)

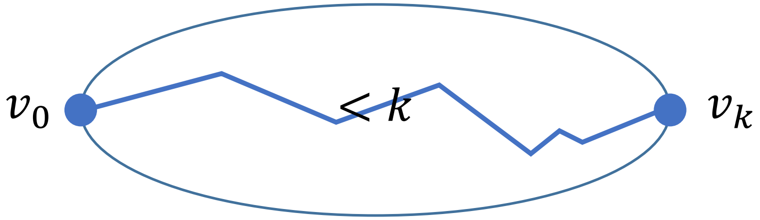


Лемма о цепях
в «толстой» квазитриангуляции

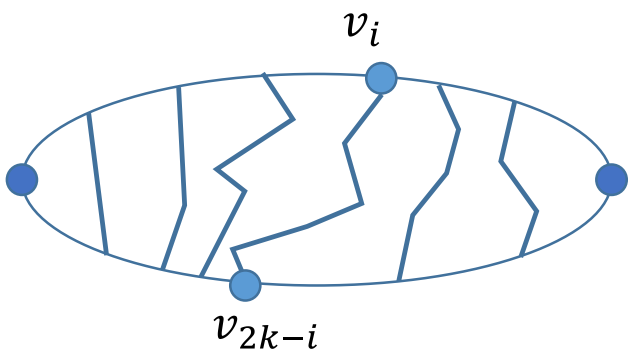
Лемма.

Пусть $v_0 v_1 \dots v_{2k-1}$ — внешний цикл квазитриангуляции G.

Тогда если $d(v_0, v_k) = k$, то найдутся k непересекающихся по вершинам цепей из v_i в v_{2k-i} для $i = 0, \dots, k-1$.



или



Доказательство леммы о цепях

Пусть $X \coloneqq \{v_0, \ldots, v_k\}$ и $Y \coloneqq \{v_k, \ldots, v_{2k-1}, v_0\}$.

Пусть S — наименьший X, Y-разделитель. Отметим, что $v_0, v_k \in S$.

Будем считать вершины из S красными, а остальные — синими, и применим лемму о красно-синей альтернативе:

- синей цепи между X и Y нет (т.к. S — разделитель),
- значит, есть красная цепь между v_0 и v_k.

По условию, пути между v_0 и v_k имеют длину $\geq k$, отсюда $|S| \geq k$.

Отсюда, по теореме Пима, найдутся k непересекающихся путей между X и Y.

В силу планарности, эти пути соединяют v_i с v_{k-i}.

Сепарация графов

Общая концепция: удалить из графа «совсем небольшое» число вершин/рёбер, так, чтобы оставшиеся вершины распались на два несмежных множества, в константу раз меньшие исходного.

Применение.
В алгоритмах типа «разделяй и властвуй».

Пример-упражнение.
В любом бинарном n-вершинном дереве можно удалить одно ребро, так, что оно распадётся на два дерева, в каждом из которых менее $2n/3$ вершин.

Сепарация графов

Общая концепция: удалить из графа «совсем небольшое» число вершин/рёбер, так, чтобы оставшиеся вершины распались на два несмежных множества, в константу раз меньшие исходного.

Формальное определение.
(m, α)-сепаратор графа G — это такое подмножество V' вершин G, что $|V'| \leq m$ и $(G - V')$ можно разбить на части G_1 и G_2, где $|G_i| \leq \alpha \cdot |G|$, и между G_1, G_2 рёбер нет.

Теорема Липтона—Тарджена

Теорема. (R.J. Lipton, R. Tarjan)
У любого планарного n-вершинного графа есть $\left(\frac{2\sqrt{2n}}{1-\sqrt{2/3}}, \frac{1}{2}\right)$-сепаратор.

Смысл.
Любой планарный граф G можно раскроить на две почти равные части, удалив $o(|G|)$ вершин.

Доказательство теоремы Липтона—Тарджена: построение $\left(2\sqrt{2n}, \frac{2}{3}\right)$-сепаратора

Сначала докажем существование $\left(2\sqrt{2n}, \frac{2}{3}\right)$-сепаратора.

Уложим G на плоскости и дополним рёбрами до триангуляции (любой сепаратор полученной триангуляции будет также сепаратором исходного графа).

Для цикла C через c_{int} и c_{ext} обозначим число вершин графа G внутри и вне C соответственно.

Доказательство теоремы Липтона—Тарджена: построение $\left(2\sqrt{2n}, \frac{2}{3}\right)$-сепаратора

Пусть $k \coloneqq \left\lfloor\sqrt{2n}\right\rfloor$. Пусть C выбран так, что:

- $|C| \leq 2k$
- $c_{\text{ext}} \leq \frac{2n}{3}$
- $(c_{\text{int}} - c_{\text{ext}}) \rightarrow \min$

Отметим, что C существует, т.к. первым двум ограничениям удовлетворяет внешний цикл G.

Покажем, что C — искомый сепаратор. Допустим, что это не так, и придём к противоречию.

Доказательство теоремы Липтона—Тарджена: построение $\left(2\sqrt{2n}, \frac{2}{3}\right)$-сепаратора

- $k \coloneqq \left\lfloor\sqrt{2n}\right\rfloor, \quad |C| \le 2k, \quad c_{\mathrm{ext}} \le \frac{2n}{3}, \quad (c_{\mathrm{int}} - c_{\mathrm{ext}}) \to \min$

Пусть C — не $\left(2\sqrt{2n}, \frac{2}{3}\right)$-сепаратор. Тогда $c_{\mathrm{int}} > \frac{2n}{3}$.

- Заметим, что $|C| = 2k$. В противном случае, можно было бы добавить к C одну из c_{int} вершин, уменьшив $(c_{\mathrm{int}} - c_{\mathrm{ext}})$.

Доказательство теоремы Липтона—Тарджена: построение $\left(2\sqrt{2n}, \frac{2}{3}\right)$-сепаратора

- $k \coloneqq \left\lfloor \sqrt{2n} \right\rfloor, \quad |C| \leq 2k, \quad c_{\text{ext}} \leq \frac{2n}{3}, \quad (c_{\text{int}} - c_{\text{ext}}) \to \min$
- Предположили, что C не сепаратор: $c_{\text{int}} > \frac{2n}{3}$.

Для вершин $u, v \in V(C)$ пусть $d_C(u, v)$ — расстояние между u и v «по циклу», а $d_{\text{int}}(u, v)$ — длина кратчайшего пути между ними, состоящего только из вершин на C и внутри C.

Докажем, что $d_{\text{int}}(u, v) = d_C(u, v)$ для любых $u, v \in V(C)$.

Доказательство теоремы Липтона—Тарджена: построение $\left(2\sqrt{2n}, \frac{2}{3}\right)$-сепаратора

Допустим, что $d_{\text{int}}(u, v) < d_C(u, v)$ для каких-то $u, v \in V(C)$.

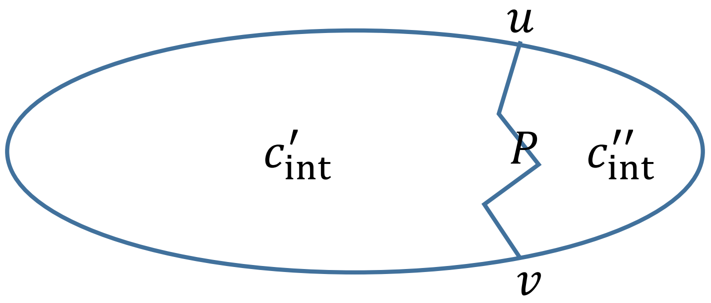
Среди всех таких пар u, v выберем пару с наименьшим $d_{\text{int}}(u, v)$.

Пусть P — кратчайший путь между u и v внутри C.

В силу выбора пары u, v имеем $V(P) \cap V(C) = \{u, v\}$.

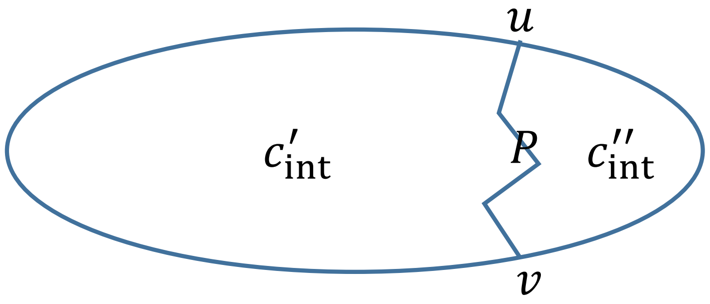
Пусть C' и C'' — циклы, образованные P и C.

Б.о.о. считаем, что $c'_{\text{int}} \geq c''_{\text{int}}$.



Доказательство теоремы Липтона—Тарджена: построение $\left(2\sqrt{2n}, \frac{2}{3}\right)$-сепаратора

- $k \coloneqq \left\lfloor \sqrt{2n} \right\rfloor, \quad |C| \le 2k, \quad c_{\text{ext}} \le \frac{2n}{3}, \quad (c_{\text{int}} - c_{\text{ext}}) \to \min$
- $d_{\text{int}}(u, v) < d_C(u, v),\ V(P) \cap V(C) = \{u, v\}$
- $c'_{\text{int}} \ge c''_{\text{int}}$



В предположении, что $c_{\text{int}} > \frac{2n}{3}$, получаем

$$c'_{\text{ext}} = n - |C'| - c'_{\text{int}} \le n - (2 \cdot |P| - 2) - \frac{c'_{\text{int}} + c''_{\text{int}}}{2} \le$$
$$\le n - \frac{|P| - 2 + c'_{\text{int}} + c''_{\text{int}}}{2} = n - \frac{c_{\text{int}}}{2} < \frac{2n}{3}$$

Кроме того,

$$|C'| = |C| - d_C(u, v) + d_{\text{int}}(u, v) < |C| \le 2k$$

Очевидно, $(c'_{\text{int}} - c'_{\text{ext}}) < (c_{\text{int}} - c_{\text{ext}})$ — противоречие с выбором C.

Доказательство теоремы Липтона—Тарджена: построение $\left(2\sqrt{2n}, \frac{2}{3}\right)$-сепаратора

В предположении, что $c_{\text{int}} > \frac{2n}{3}$, мы вывели, что $|C| = 2k$ и $d_{\text{int}}(u, v) = d_C(u, v)$ для любых $u, v \in V(C)$.

Занумеруем вершины C: $v_0 v_1 \dots v_{2k-1}$ и применим Лемму о цепях в «толстой» квазитриангуляции к вершинам C и его внутренности: так как $d_{\text{int}}(v_0, v_k) = k$, то есть k непересекающихся цепей внутри C между v_i и v_{2k-i}.
Число вершин на цепи такого вида не меньше, чем $\min\{2i+1, \quad 2(k-i)+1\}$.

Отсюда

$$|C| + c_{\text{int}} \geq \sum_{i=0}^{k} \min\{2i+1, \quad 2(k-i)+1\} \geq 2 \cdot \sum_{i=0}^{\lfloor (k-1)/2 \rfloor} (2i+1) =$$

$$= 2 \cdot \left(\left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor + 1\right) \cdot \left(2 \cdot \left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor + 2\right) \geq (k+1)^2 > n$$

Доказательство теоремы Липтона—Тарджена: построение $\left(\frac{2\sqrt{2n}}{1-\sqrt{2/3}}, \frac{1}{2}\right)$-сепаратора

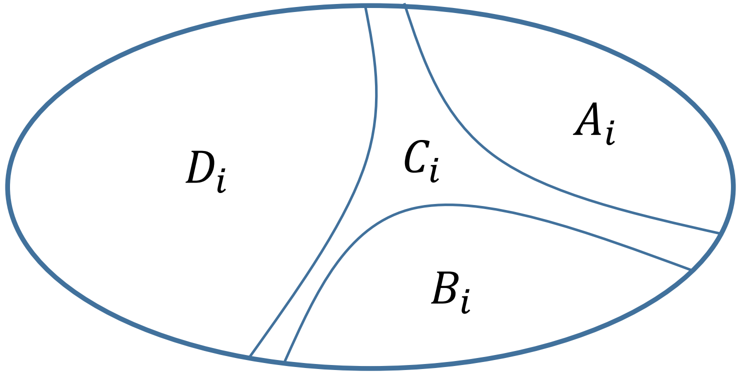
Итак, у любого планарного графа есть $\left(2\sqrt{2n}, \frac{2}{3}\right)$-сепаратор.

Построим $\left(\frac{2\sqrt{2n}}{1-\sqrt{2/3}}, \frac{1}{2}\right)$-сепаратор «рекурсивной балансировкой».

Пусть G — планарный граф.

Построим последовательность A_i, B_i, C_i, D_i, где

- $V(G) = A_i \sqcup B_i \sqcup C_i \sqcup D_i$
- нет рёбер вида $A_i — B_i$, $A_i — D_i$ и $B_i — D_i$,
- $|A_i| \leq |B_i| \leq n/2$



Доказательство теоремы Липтона—Тарджена: построение $\left(\frac{2\sqrt{2n}}{1-\sqrt{2/3}}, \frac{1}{2}\right)$-сепаратора

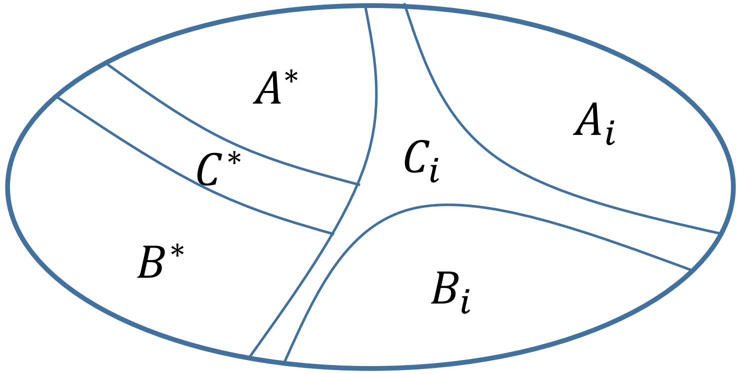
Полагаем $A_0 \coloneqq \emptyset, B_0 \coloneqq \emptyset, C_0 \coloneqq \emptyset, D_0 \coloneqq V(G)$.

Пусть уже построены $A_i \dots D_i$. Тогда $A_{i+1} \dots D_{i+1}$ строим так:

Строим $\left(2\sqrt{2n}, \frac{2}{3}\right)$-сепаратор C^* графа $G|_{D_i}$.

Пусть A^* и B^* — части, на которые $G|_{D_i}$ разбивается с помощью C^*, обозначенные так, что $|A^*| \leq |B^*|$. Полагаем

- $C_{i+1} \coloneqq C_i \cup C^*$
- $A_{i+1} \coloneqq$ меньшее из множеств $A_i \cup A^*$ и B_i
- $B_{i+1} \coloneqq$ большее из множеств $A_i \cup A^*$ и B_i
- $D_{i+1} \coloneqq B^*$



Доказательство теоремы Липтона—Тарджена: построение $\left(\frac{2\sqrt{2n}}{1-\sqrt{2/3}}, \frac{1}{2}\right)$-сепаратора

$D_0 \coloneqq V(G)$ и D_i меньше D_{i+1} по крайней мере в полтора раза, поэтому число шагов k до момента, когда $D_i = \emptyset$, не превосходит

$$\log_{3/2} n$$

На последнем шаге

$$|C_k| \leq \sum_{i=0}^{k} 2\sqrt{2|D_i|} < \sum_{i=0}^{\infty} 2\sqrt{2n\left(\frac{2}{3}\right)^i} = \frac{2\sqrt{2n}}{1-\sqrt{2/3}}$$