Дискретные структуры

осень 2013

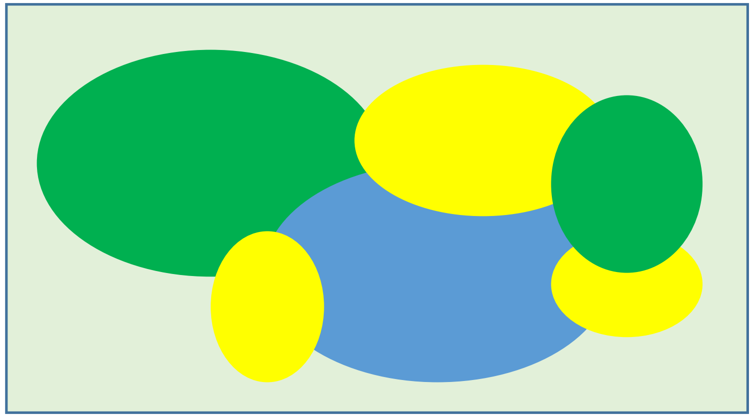
Александр Дайняк

www.dainiak.com

Задача о раскраске карт

Исторически первая задача о раскраске:

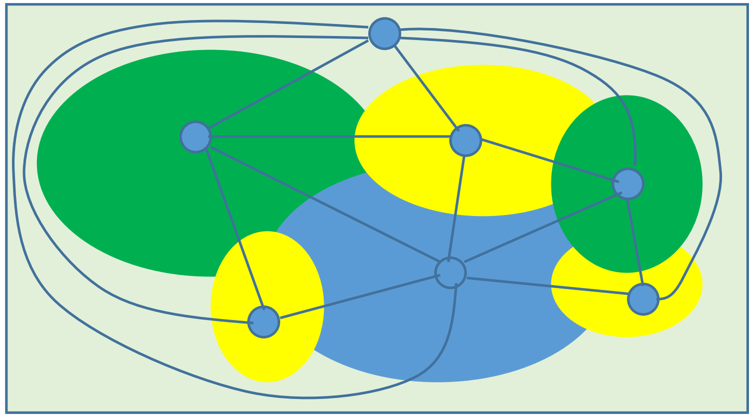
- Сколько цветов достаточно использовать в типографии, чтобы можно было напечатать любую географическую карту (так, чтобы граничащие друг с другом страны не сливались на карте)?



Задача о раскраске планарных графов

Задачу о раскраске карт можно переформулировать на языке раскрасок, рассмотрев планарный граф, *двойственный* карте:

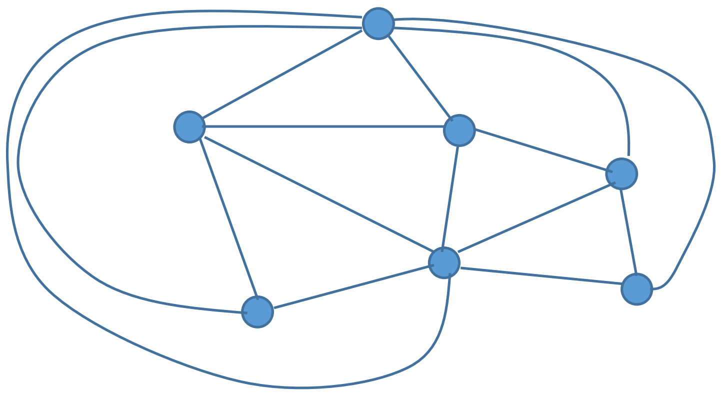
- Сколькими цветами можно правильно раскрасить любой планарный граф?



Задача о раскраске планарных графов

Задачу о раскраске карт можно переформулировать на языке раскрасок, рассмотрев планарный граф, *двойственный* карте:

- Сколькими цветами можно правильно раскрасить любой планарный граф?



Хроматическое число планарного графа

Теорема о четырёх красках (без д-ва).
Для любого планарного графа G выполнено
$$\chi(G) \leq 4$$
Мы докажем оценку чуть похуже:
Теорема о пяти красках.
Для любого планарного графа G выполнено
$$\chi(G) \leq 5$$

Лемма о вершине степени ≤ 5

Лемма.
В любом планарном графе найдётся вершина степени ≤ 5.

Доказательство:

Пусть граф $G = (V, E)$ таков, что $\deg v \geq 6$ для любой $v \in V$. Тогда

$$2 \cdot |E| = \sum_{v \in V} \deg v \geq 6 \cdot |V|$$

Отсюда $|E| \geq 3 \cdot |V|$, но для планарного графа должно было быть $|E| \leq 3 \cdot |V| - 6$.

Доказательство теоремы о пяти красках

Доказывать теорему будем индукцией по числу вершин графа.
База: для графов на ≤ 5 вершинах $\chi \leq 5$.

Пусть дан планарный граф G, в котором больше пяти вершин, и пусть любой планарный граф на меньшем числе вершин можно правильно раскрасить в пять цветов.

Докажем, что тогда и G можно раскрасить правильно пятью цветами.

Доказательство теоремы о пяти красках

По Лемме, $\exists v \in V(G)$ такая, что $\deg v \leq 5$.

Пусть G' — граф, полученный из G удалением v.

По предположению, G' можно правильно раскрасить в цвета $\{1,2,3,4,5\}$.

Попытаемся дополнить эту раскраску до раскраски всего графа G.

Пусть $\mathrm{badColors}$ — цвета соседей v.

Если $|\mathrm{badColors}| \leq 4$, то окрасим v в один из оставшихся цветов.

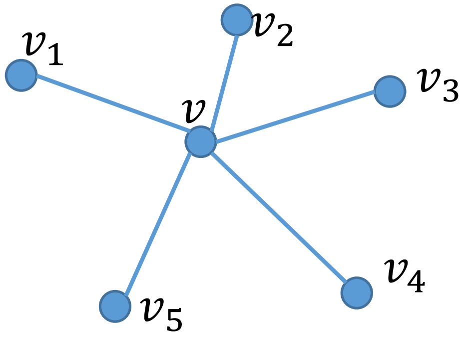
Нетривиален только случай $|\mathrm{badColors}| = 5$.

Доказательство теоремы о пяти красках

Итак, пусть $\deg v = 5$, и все соседи v окрашены в разные цвета из множества $\{1,2,3,4,5\}$.

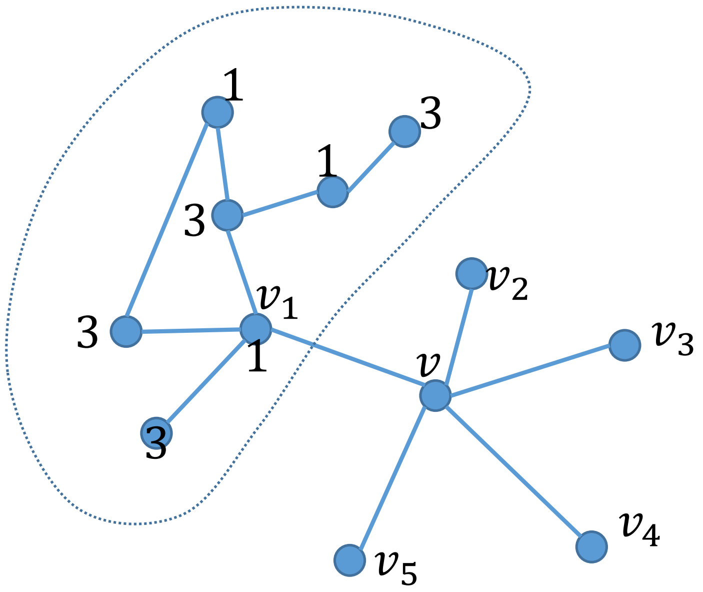
Через v_i обозначим соседа v цвета i.

Уложим G на плоскости, и б.о.о. будем считать, что $v_1, \dots v_5$ расположены по порядку друг за другом по часовой стрелке относительно v:



Доказательство теоремы о пяти красках

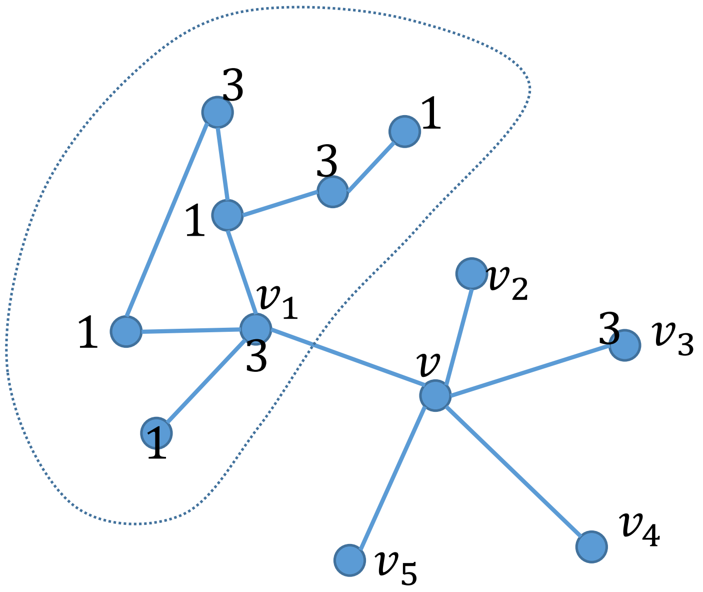
Пусть $V_{1,3}$ — *все* вершины G, до которых можно дойти из v_1 только по вершинам цветов 1 и 3:



Доказательство теоремы о пяти красках

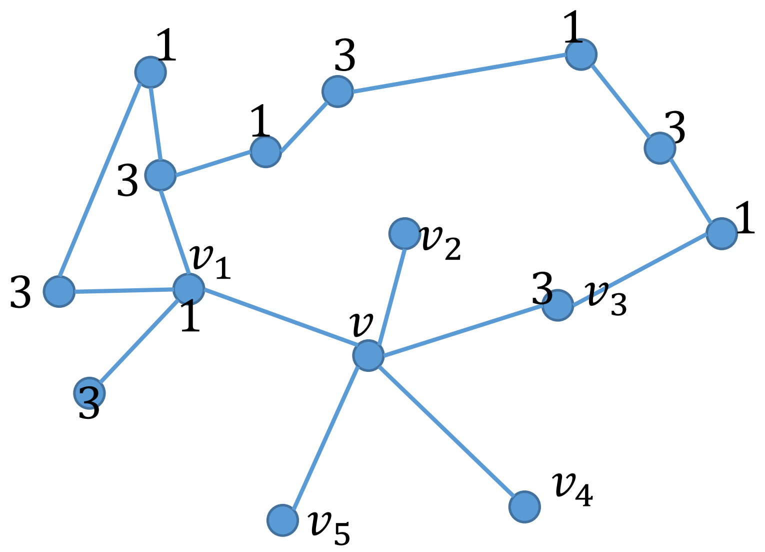
Если $v_3 \notin V_{1,3}$, то можно для всех вершин из $V_{1,3}$ поменять цвет 1 на 3 и наоборот.

Раскраска останется правильной, но теперь v_1 уже окрашена в цвет 3, и можно окрасить v в освободившийся цвет 1.



Доказательство теоремы о пяти красках

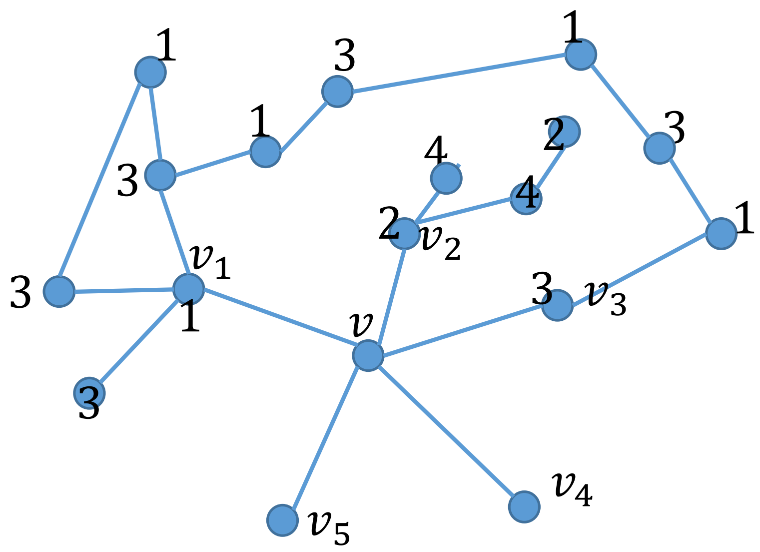
Если же $v_3 \in V_{1,3}$, то обмен цветов внутри $V_{1,3}$ не поможет.



Доказательство теоремы о пяти красках

Тогда рассмотрим множество $V_{2,4}$ — те вершины G, до которых можно дойти из v_2 по цветам $2,4$.

Множество $V_{2,4}$ оказывается внутри цикла из вершин цветов $1,3$ и вершины v:

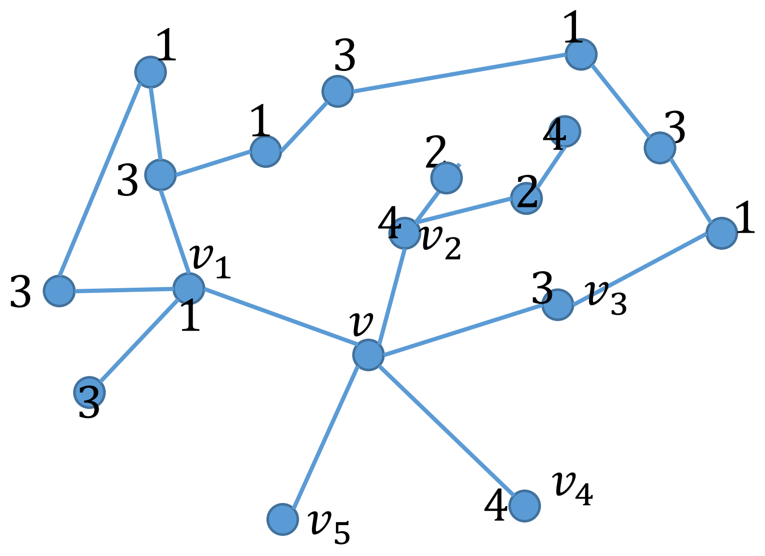


Доказательство теоремы о пяти красках

Множество $V_{2,4}$ оказывается внутри цикла из вершин цветов $1{,}3$ и вершины v.

Тогда можно поменять друг на друга цвета $2{,}4$ для вершин множества $V_{2,4}$.

Вершина v_2 станет цвета 4, и v можно теперь окрасить в цвет 2.



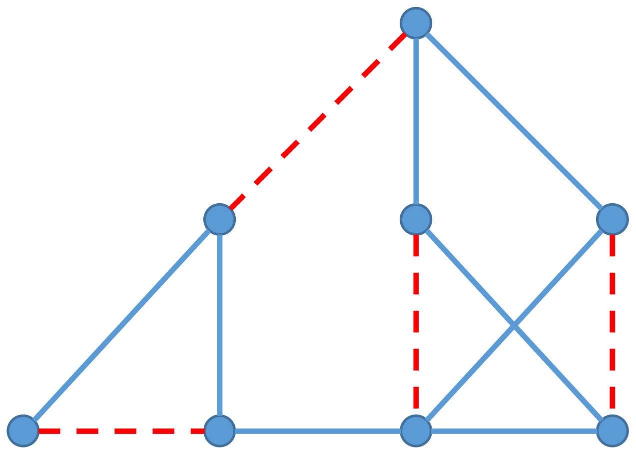
Соседи

- Любая вершина, смежная с вершиной v, называется *соседом* v
- Множество соседей v обозначают $N(v)$
- Для множества вершин A считаем

$$N(A) \coloneqq \left(\bigcup_{v \in A} N(v)\right) \setminus A$$

Паросочетания

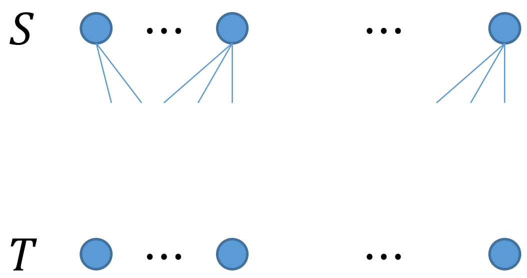
Паросочетание в графе — это подмножество рёбер без общих концов.



Паросочетания в двудольных графах

Задача.
Есть множество спортсменов S и множество тренеров T. Каждый тренер готов взять на обучение не больше одного спортсмена.

Известно, какие спортсмены готовы пойти к каким тренерам. Требуется при этих условиях распределить всех спортсменов по тренерам.

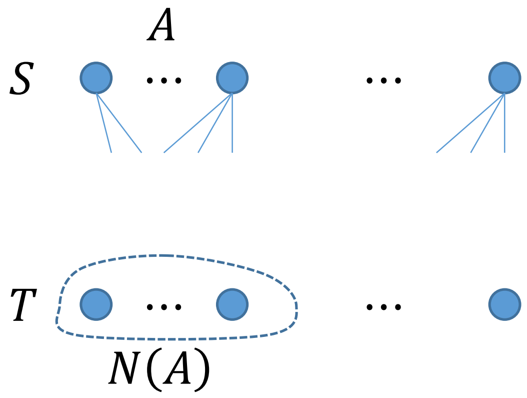


В терминах графов: построить в двудольном графе паросочетание, покрывающее всё множество S.

Условия Холла

- Когда вообще поставленная задача разрешима?
- Необходимое условие: для любого множества вершин $A \subseteq S$ число их соседей $|N(A)|$ в T должно быть не меньше размера самого A:

$$|N(A)| \geq |A|$$

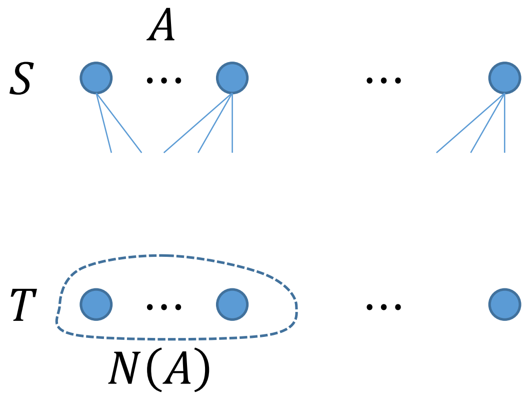


Теорема Холла

Теорема Холла. Пусть дан двудольный граф с долями S и T. Условие

$$\forall A \subseteq S \quad |N(A)| \geq |A|$$

является необходимым *и достаточным* для существования паросочетания, покрывающего все вершины из S.



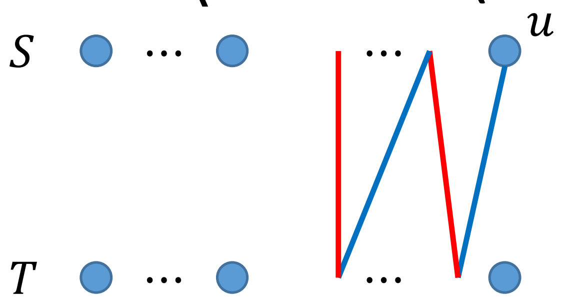
Доказательство теоремы Холла

Пусть M — паросочетание наибольшей возможной мощности в нашем графе $(S \cup T, E)$.

Допустим, что $|M| < |S|$, и покажем, что
в этом случае условия Холла нарушаются.

Пусть $u \in S$ —вершина, не покрытая M.

Чередующаяся цепь — это цепь, выходящая из u и идущая попеременно по рёбрам из $E \setminus M$ и M (начиная с ребра из $E \setminus M$).

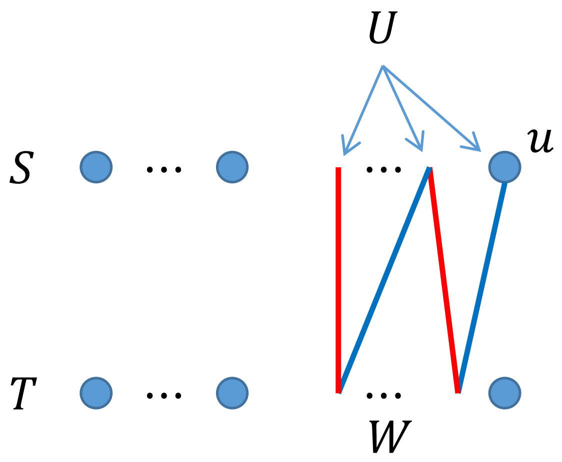


Доказательство теоремы Холла

Пусть $U \subseteq S$ — те вершины из S, до которых можно дойти из u по чередующимся цепям (включая саму u).

Пусть $W \subseteq T$ — множество вершин из T, до которых можно дойти из u по чередующимся цепям (включая саму u).

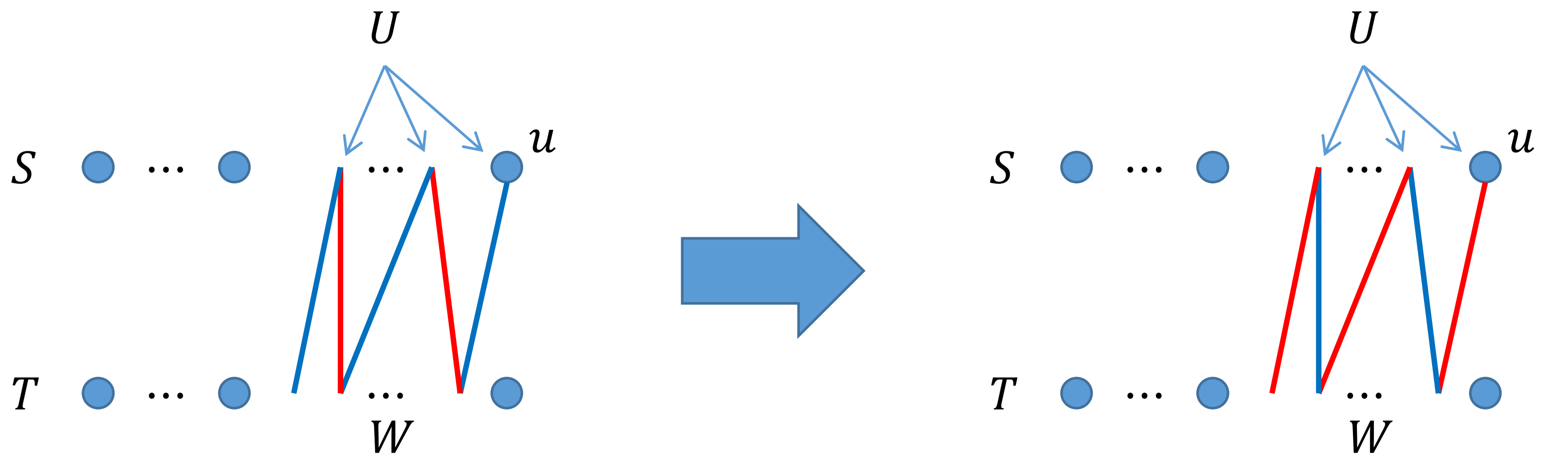
Заметим, что $N(U) = W$.



Доказательство теоремы Холла

Тупиковая ч.ц. — это такая ч.ц., которую нельзя дополнить очередным ребром до более длинной ч.ц.

Никакая тупиковая чередующаяся цепь не заканчивается на вершине из W, иначе M можно было бы увеличить:

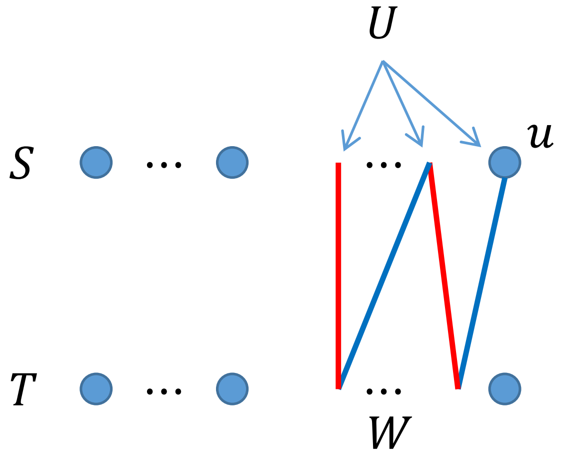


Доказательство теоремы Холла

Никакая тупиковая ч.ц. не заканчивается на вершине из W.

Значит, каждая вершина из W соединена ребром из M с некоторой вершиной из $U \setminus \{u\}$.

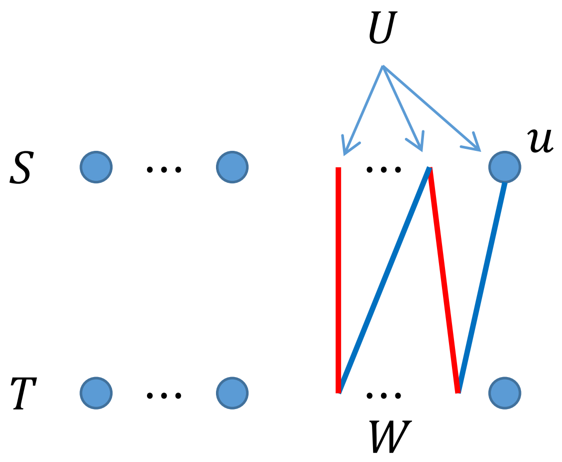
Отсюда $|W| = |U \setminus \{u\}| < |U|$.



Доказательство теоремы Холла

Итак, $|N(U)| = |W| < |U|$.

То есть условия Холла для нашего графа не выполнены.



Следствия теоремы Холла

Паросочетание в графе называется *совершенным*, если оно покрывает все вершины графа.

Следствие из теоремы Холла.
В любом (непустом) двудольном регулярном графе существует совершенное паросочетание.

(Если есть N спортсменов и N тренеров, каждый спортсмен готов пойти к одному из k тренеров, и к каждому тренеру готовы пойти k спортсменов, то можно распределить спортсменов по тренерам, так, чтобы никого не обидеть.)

Следствия теоремы Холла

Доказательство:
Пусть $(S \cup T, E)$ — двудольный k-регулярный граф с долями S и T, и пусть $A \subseteq S$.

Из вершин A суммарно исходит $k \cdot |A|$ рёбер.

Из вершин $N(A)$ исходит $k \cdot |N(A)|$ рёбер.

Т.к. рёбра, выходящие из A, содержатся среди рёбер, выходящих из $N(A)$, то

$$k \cdot |N(A)| \geq k \cdot |A|$$

Условия Холла выполнены, поэтому в графе есть паросочетание, покрывающее всё S.

Осталось заметить, что $|S| = |T|$, поэтому T тоже покрывается этим паросочетанием.

Хроматический индекс двудольных графов

Следствие из теоремы Холла.
В любом (непустом) двудольном регулярном графе существует совершенное паросочетание.

Следствие из следствия.
Для любого двудольного регулярного G имеем $\chi'(G) = \Delta(G)$.
Идея доказательства:
Все рёбра совершенного паросочетания красим в один цвет и временно удаляем из графа.
С оставшимся графом поступаем так же.

Хроматический индекс двудольных графов

Степень вершины в мультиграфе — это количество инцидентных ей рёбер (с учётом кратностей).

Заметим, что при доказательстве предыдущих утверждений никак не использовался факт наличия/отсутствия кратных рёбер, поэтому для любого двудольного регулярного мультиграфа G

$$\chi'(G) = \Delta(G)$$

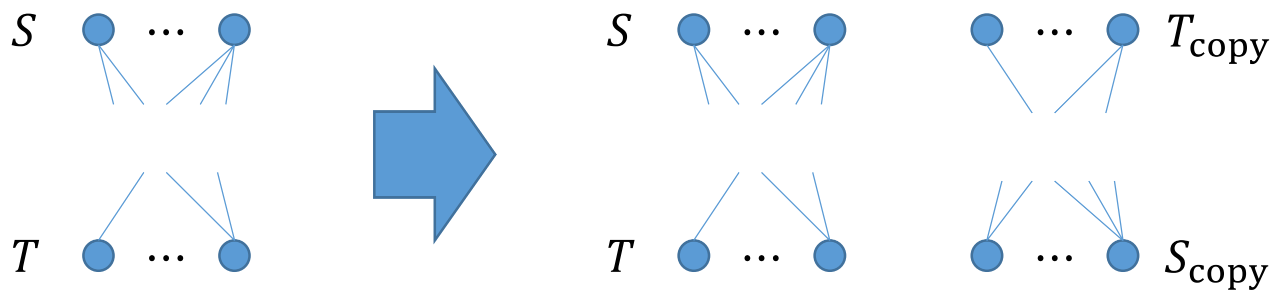
Хроматический индекс двудольных графов

Теорема Кёнига.
Для любого двудольного мультиграфа G
$$\chi'(G) = \Delta(G)$$

Доказательство:

Пусть $\Delta(G) = k$.

Добавим к графу G его перевёрнутую копию:



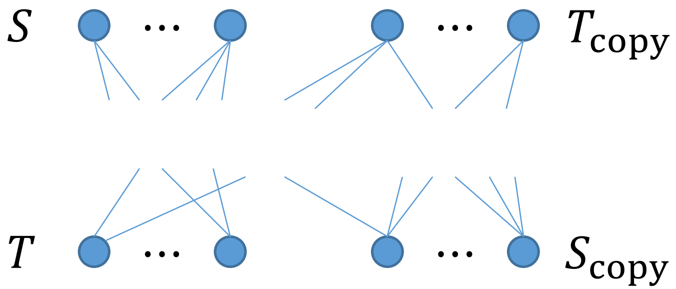
Хроматический индекс двудольных графов

Для полученного графа G' $\Delta(G') = \Delta(G) = k$.

В G' каждую вершину $v \in S$, для которой $\deg v < k$, соединим $(k - \deg v)$ рёбрами со своей копией $v_{\text{copy}} \in S_{\text{copy}}$.

То же самое проделаем с вершинами из T.

Получим k-регулярный мультиграф G'':



Хроматический индекс двудольных графов

Рёбра k-регулярного мультиграфа G'' можно правильно раскрасить в k цветов.

Так как G — подмультиграф G'', то

$$\chi'(G) \leq \chi'(G'') = k = \Delta(G)$$