Основы теории графов

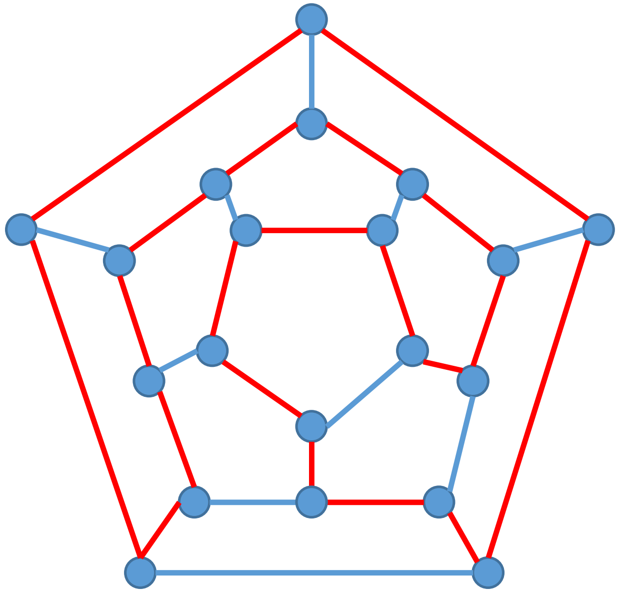
осень 2013

Александр Дайняк

www.dainiak.com

Гамильтоновы циклы

- *Гамильтонов цикл* — через каждую вершину графа проходит ровно по одному разу
- *Гамильтонов граф* — граф, в котором есть гамильтонов цикл



Гамильтоновы циклы

- В отличие от эйлеровых циклов, пока нет ни хороших критериев гамильтоновости, ни быстрых алгоритмов построения г.ц.
- Есть некоторые достаточные условия существования гамильтоновых циклов.
  В основном, утверждения типа «если граф «достаточно плотный», то в нём есть г.ц.»

Теорема Хватала—Эрдёша

Теорема. (Erdős, Chvátal ’1972)
Если $\alpha(G) \leq \kappa(G)$, то граф G гамильтонов.

Доказательство:
Допустим, что G негамильтонов и покажем, что в этом случае $\alpha(G) > \kappa(G)$.

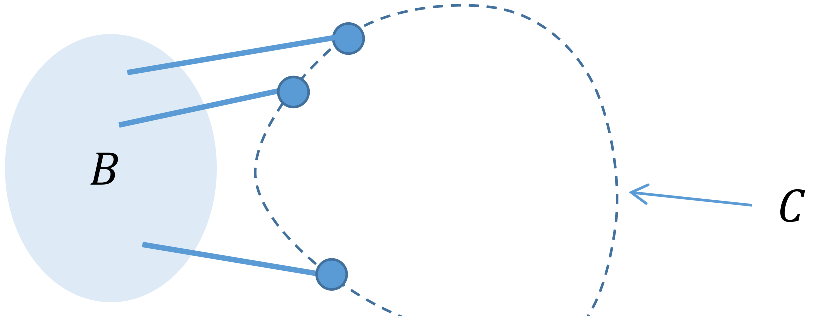
Рассмотрим цикл C в G, имеющий максимальную длину.

По предположению, $V(C) \neq V(G)$.

Теорема Хватала—Эрдёша

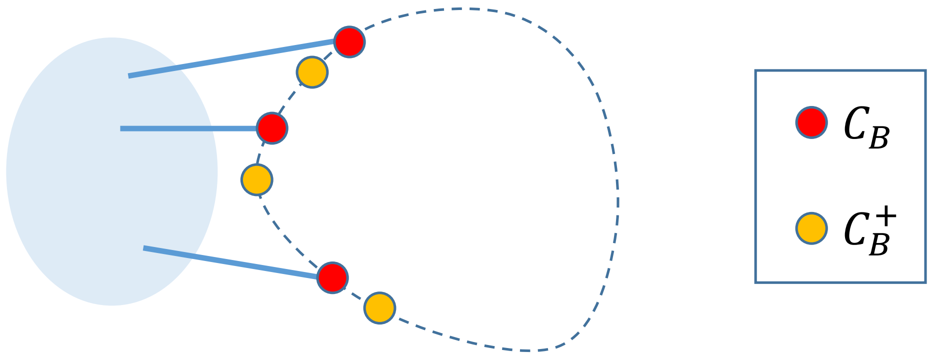
Пусть $B \subset G$ — одна из компонент связности (возможно, единственная) графа $(G - C)$.

Так как G связный, то есть рёбра между B и C.



Теорема Хватала—Эрдёша

Пусть C_B — вершины C, смежные с B, и пусть C_B^+ — вершины цикла C, «следующие» за вершинами из C_B (в некоторой ориентации C).

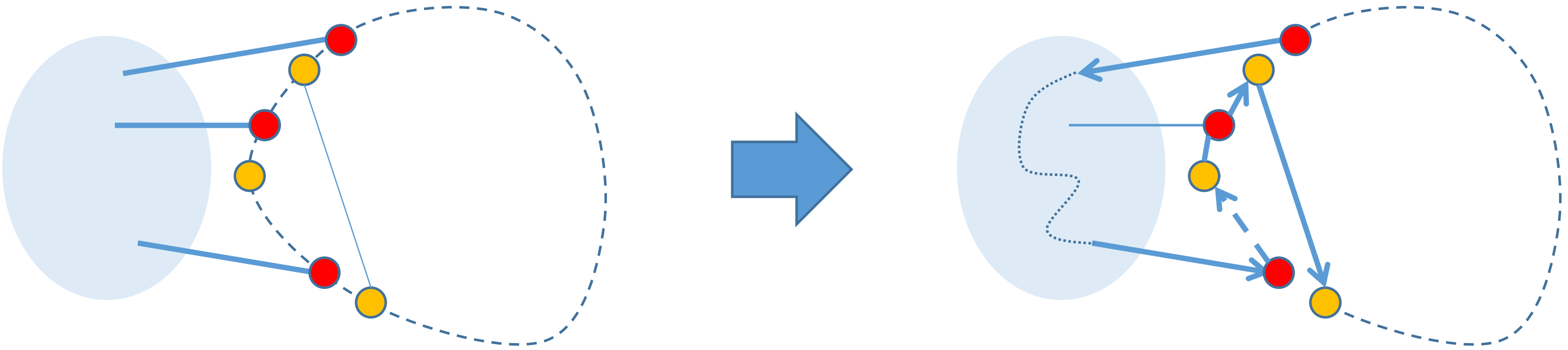


Удаление из G всех вершин, входящих в C_B, нарушает связность G, поэтому

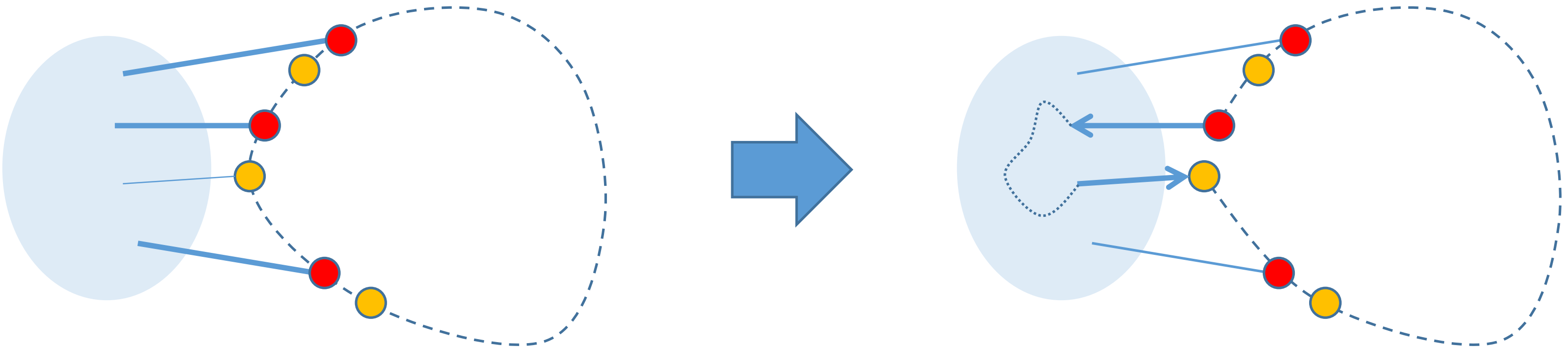
$$\kappa(G) \leq |C_B| = |C_B^+|$$

Теорема Хватала—Эрдёша

Вершины из C_B^+ не смежны между собой, так как иначе цикл C можно было бы увеличить:



Также, между C_B^+ и B рёбер нет, иначе длину цикла можно увеличить:



Теорема Хватала—Эрдёша

Следовательно, если к C_B^+ добавить любую вершину из B, получится независимое множество размера $(|C_B^+| + 1)$ в G.

Отсюда

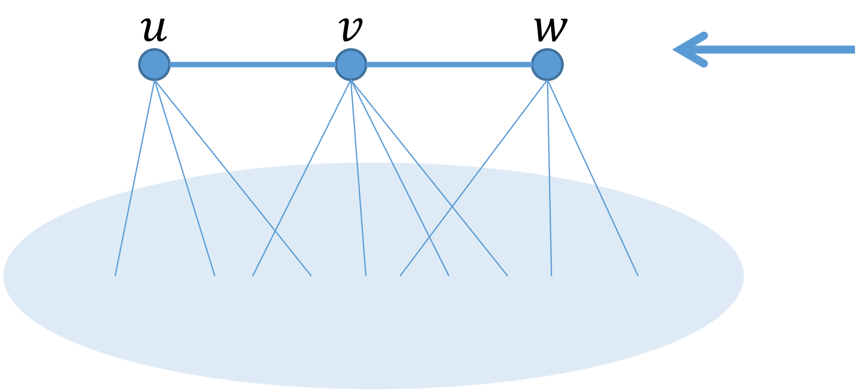
$$\alpha(G) > |C_B^+| \geq \kappa(G),$$

что и требовалось.

Теорема Асратяна—Хачатряна

Теорема. (А. С. Асратян, Н. К. Хачатрян ’1990)
Пусть граф G связен и пусть для любой тройки $u, v, w \in V(G)$, такой, что $uv, vw \in V(G)$ и $uw \notin V(G)$ выполнено неравенство
$$d(u) + d(w) \geq |N(u) \cup N(v) \cup N(w)|.$$

Тогда граф G гамильтонов.



u, v, w образуют *порождённую цепь* в G

Теорема Асратяна—Хачатряна

Для любой порождённой цепи uvw выполнены неравенства

$$|N(u) \cap N(w)| = d(u) + d(w) - |N(u) \cup N(w)| \geq$$
$$\geq |N(u) \cup N(v) \cup N(w)| - |N(u) \cup N(w)| =$$
$$= |N(v)| - \left|N(v) \cap \left(N(u) \cup N(w)\right)\right| = \left|N(v) \setminus \left(N(u) \cup N(w)\right)\right| =$$
$$= |N(v) \setminus N(\{u, w\})|$$

В переходе «$\geq$» мы использовали условие теоремы, во всех остальных переходах — теоретико-множественные простые свойства.

Теорема Асратяна—Хачатряна

Для любой порождённой цепи uvw имеем

$$|N(u) \cap N(w)| \geq |N(v) \setminus N(\{u, w\})|$$

В частности, $|N(u) \cap N(w)| \geq |\{u, w\}| = 2$, следовательно в G есть циклы.

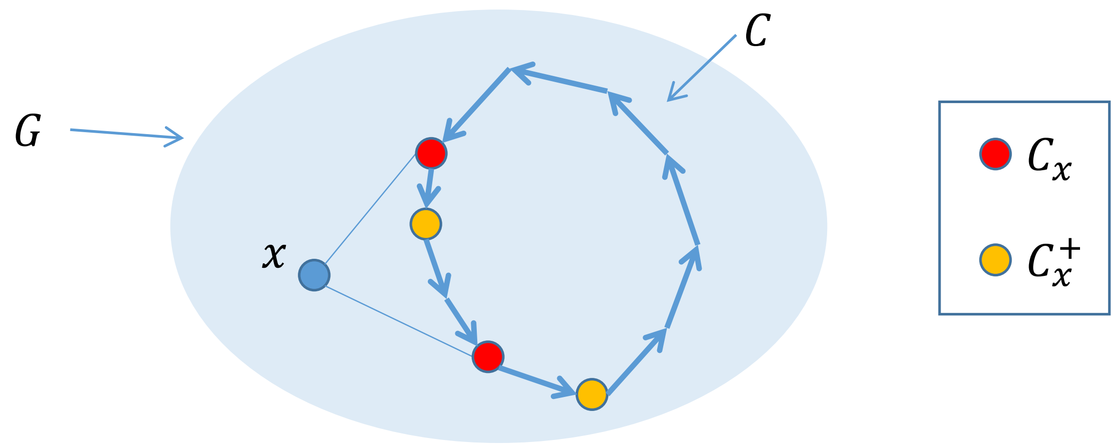
Пусть C —максимальный простой цикл в G.

Предположив, что $V(G) \setminus V(C) \neq \emptyset$, придём к противоречию.

Теорема Асратяна—Хачатряна

Пусть $x \in V(G - C)$, и $N(x) \cup V(C) \neq \emptyset$.
Зафиксируем некоторую ориентацию цикла C.

Положим $C_x \coloneqq V(C) \cap N(x)$, и пусть C_x^+ — множество «последователей» вершин из C_x на цикле C:

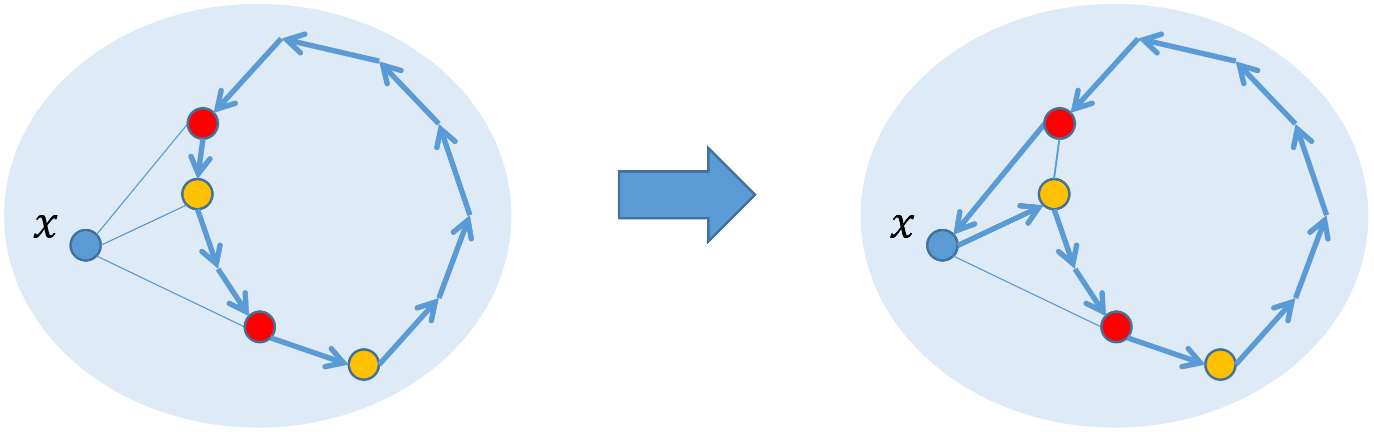


Из максимальности C следует, что $C_x \cap C_x^+ = \emptyset$.

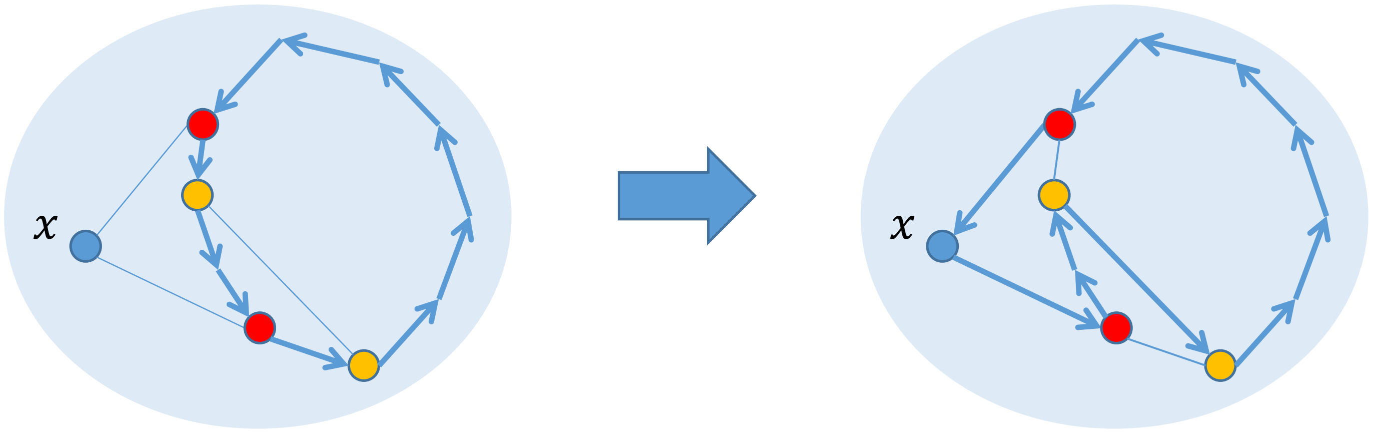
Теорема Асратяна—Хачатряна

Никакая пара вершин из $\{x\} \cup C_x^+$ не смежна:

Если x смежна с вершиной из C_x^+



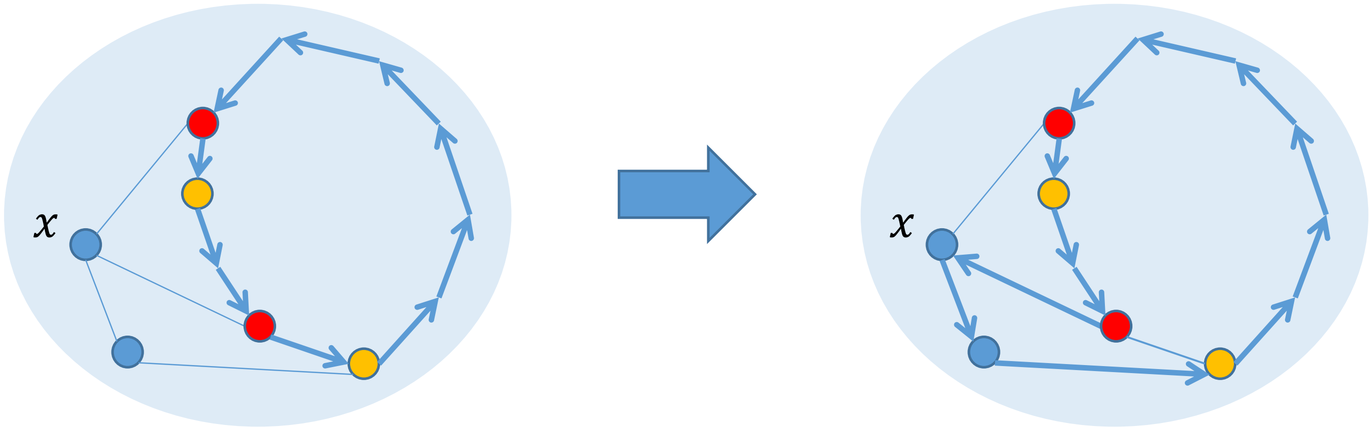
Если вершины из C_x^+ смежны



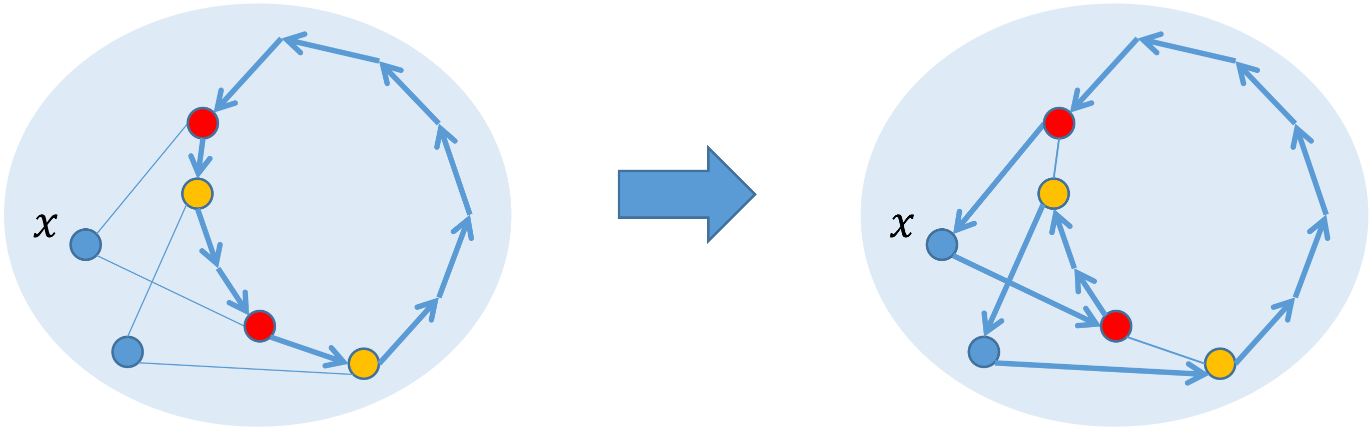
Теорема Асратяна—Хачатряна

Никакая пара вершин из $\{x\} \cup C_x^+$ не имеет общих соседей вне цикла C:

Если сосед вне C есть у x и вершины из C_x^+



Если сосед вне C есть у пары вершин из C_x^+



Теорема Асратяна—Хачатряна

Никакие две вершины из $\{x\} \cup C_x^+$ не смежны, а значит, порождённой цепью в G является каждая тройка вершин xyy^+, где $y \in C_x$ и $y^+ \in C_x^+$ (y^+ — последователь y на C).

Тогда $|N(x) \cap N(y^+)| \geq |N(y) \setminus N(\{x, y^+\})|$.

Так как $(C_x^+ \cup \{x\}) \cap N(\{x, y^+\}) = \emptyset$, то

$$|N(y) \setminus N(\{x, y^+\})| \geq |N(y) \cap (C_x^+ \cup \{x\})| = |N(y) \cap C_x^+| + 1.$$

Отсюда $|N(y) \cap C_x^+| \leq |N(x) \cap N(y^+)| - 1$.

Теорема Асратяна—Хачатряна

Итак, для каждой тройки вида xyy^+ имеем

$$|N(y) \cap C_x^+| \leq |N(x) \cap N(y^+)| - 1.$$

Пусть $\|C_x, C_x^+\|$ — число рёбер G, соединяющих вершины из C_x и C_x^+. Получаем

$$\|C_x, C_x^+\| = \sum_{y \in C_x} |N(y) \cap C_x^+| \leq \sum_{y \in C_x} (|N(x) \cap N(y^+)| - 1) =$$

$$= -|C_x| + \sum_{y \in C_x} |N(x) \cap N(y^+)|$$

Теорема Асратяна—Хачатряна

Никакие две вершины из $\{x\} \cup C_x^+$ не имеют общих соседей вне C, поэтому

$$N(x) \cap N(y^+) = C_x \cap N(y^+)$$

Отсюда

$$\|C_x, C_x^+\| \leq -|C_x| + \sum_{y \in C_x} |N(x) \cap N(y^+)| =$$

$$= -|C_x| + \sum_{y \in C_x} |C_x \cap N(y^+)| = -|C_x| + \|C_x, C_x^+\|$$

—противоречие.

Теоремы Дирака и Оре

Теорема. (Асратян, Хачатрян ’1990)
Если граф G связен и для любой порождённой цепи uvw выполнено неравенство
$$d(u) + d(w) \geq |N(u) \cup N(v) \cup N(w)|,$$
то граф G гамильтонов.

Следствие. (Ore ’1960)
Если для любых несмежных $u, v \in V(G)$ выполнено неравенство $d(u) + d(v) \geq |G|$, то граф G гамильтонов.

Следствие. (Dirac ’1952)
Если $\delta(G) \geq |G|/2$, то граф G гамильтонов.

Гамильтоновы последовательности

Степенной последовательностью графа G называется набор чисел $\{d(v)\}_{v \in V(G)}$, упорядоченный по возрастанию.

Последовательность чисел $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$ называется *гамильтоновой*, если гамильтоновым является любой граф G, такой, что его степенная последовательность $\{d_i\}_{i=1}^{n}$ удовлетворяет условиям $d_1 \ge a_1, \ldots, d_n \ge a_n$.

Теорема Хватала

Теорема. (Chvátal ’1972)
Последовательность $0 < a_1 \leq \cdots \leq a_n < n$ гамильтонова, если и только если для каждого $k \in [1, n/2)$ выполнено условие:

$$a_k \leq k \quad \Rightarrow \quad a_{n-k} \geq n - k.$$

Необходимость условий Хватала

Доказательство необходимости:
Допустим, для некоторого $k < {}^{n}/_{2}$ условия нарушены, то есть $a_k \leq k$ и $a_{n-k} \leq n - k - 1$.

Построим негамильтонов граф G со следующей степенной последовательностью:

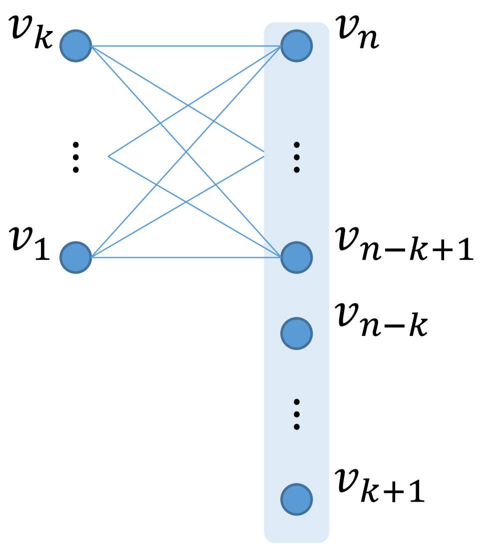
- $d_1 = \cdots = d_k \coloneqq k$
- $d_{k+1} = \cdots = d_{n-k} \coloneqq n - k - 1$
- $d_{n-k+1} = \cdots = d_n \coloneqq n - 1$

(Очевидно, $\forall i \; d_i \geq a_i$.)

Необходимость условий Хватала

Негамильтонов граф G:

- $d_1 = \cdots = d_k \coloneqq k$
- $d_{k+1} = \cdots = d_{n-k} \coloneqq n - k - 1$
- $d_{n-k+1} = \cdots = d_n \coloneqq n - 1$



Полный двудольный подграф на вершинах $v_1, \dots, v_k; v_{n-k+1}, \dots, v_n$, клика на вершинах $v_{k+1}, \dots, v_n$.

Никакой простой цикл в G не может содержать одновременно вершины $v_1, \dots, v_k; v_{n-k+1}, \dots, v_n$ и v_{k+1}.

Достаточность условий Хватала

Допустим, что нашёлся негамильтонов граф, удовлетворяющий условиям Хватала:

$$\forall k < \frac{n}{2} \ (d_k \leq k \ \Rightarrow \ d_{n-k} \geq n - k)$$

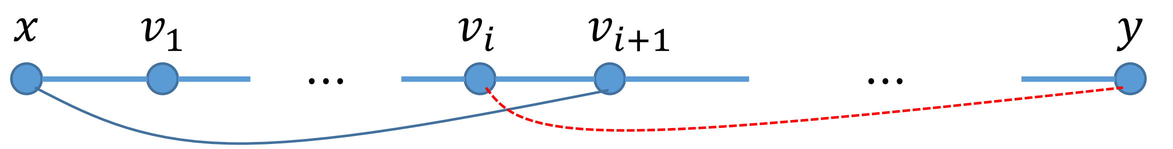
Добавление рёбер в граф не нарушает условий Хватала. Будем добавлять в наш граф рёбра, пока не получим граф G, такой, что

- G удовлетворяет условиям Хватала,
- G негамильтонов,
- $(G + xy)$ гамильтонов для любых $x, y \in V(G)$, таких, что $xy \neq E(G)$.

Достаточность условий Хватала

Выберем в G пару несмежных вершин x, y, таких, что $d(x) \leq d(y)$ и что сумма $d(x) + d(y)$ максимально возможная.

В G есть гамильтонов путь из x в y:



Вершина y не может быть смежна с «левыми соседями» вершин из $N(x)$, иначе в G был бы гамильтонов цикл.

Поэтому $d(y) \leq n - 1 - d(x)$, то есть $d(x) + d(y) < n$.

Достаточность условий Хватала

Положим $k \coloneqq d(x) < {}^{n}/_{2}$.

Так как $|V(G) \setminus N(y)| \geq d(x) = k$ и $\big(d(x) + d(y)\big)$ максимальна, то

$$|\{v \in V(G) \mid d(v) \leq k\}| \geq k.$$

Значит, в степенной последовательности графа G имеем $d_1 \leq k, \dots, d_k \leq k$. Следовательно,

$$d_{n-k} \geq n - k, \dots, d_n \geq n - k.$$

Отсюда $|\{v \in V(G) \mid d(v) \geq n - k\}| \geq k + 1 > d(x)$ и найдётся $z \in V(G) \setminus N(x)$ такая, что $d(z) \geq n - k$.

Но тогда $d(x) + d(z) \geq n > d(x) + d(y)$, — противоречие.

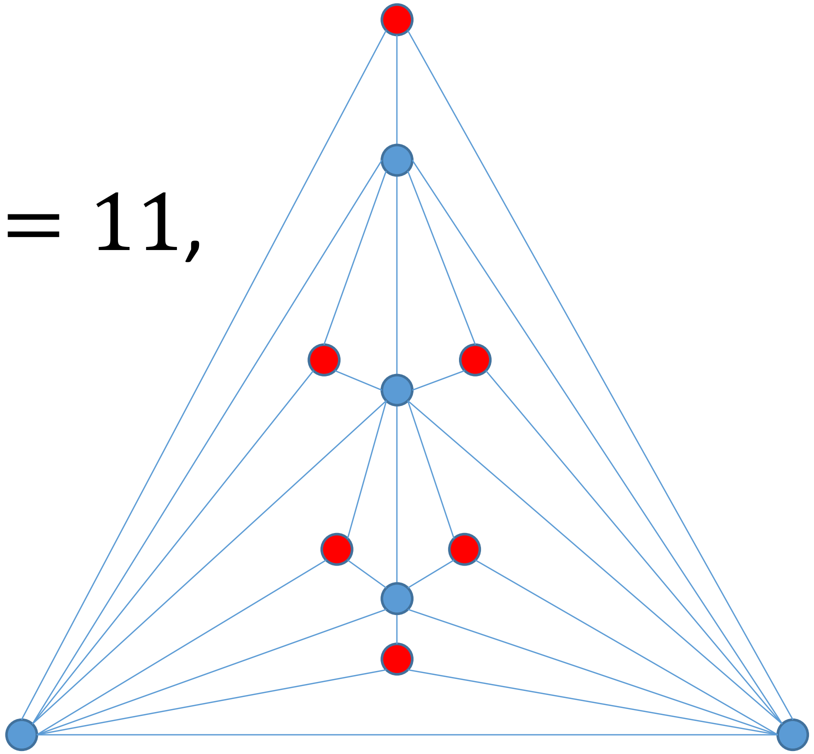
Гамильтоновость и связность

Утверждение.

- Каждый гамильтонов граф двусвязен
- Для любого k существуют k-связные негамильтоновы графы

Гамильтоновость и планарность

Утверждение.
Существуют негамильтоновы планарные трёхсвязные графы. Их можно найти даже среди триангуляций.



Для графа справа $\alpha(G) = 6$ и $|G| = 11$, в то время как у гамильтоновых графов $\alpha(G) \leq |G|/2$.

Гамильтоновость и планарность

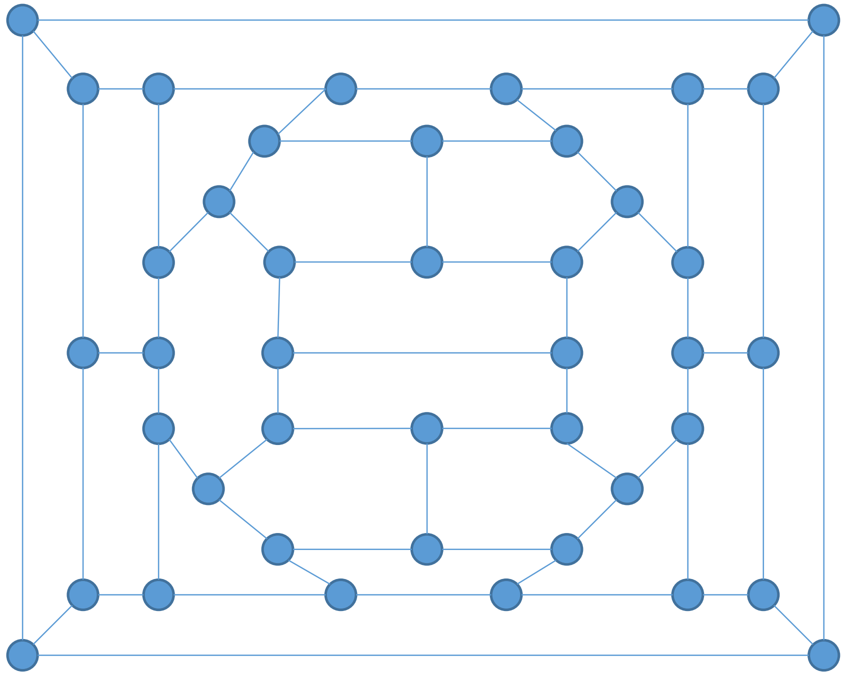
Теорема. (Whitney ’1932)
Если G триангуляция, и если в G каждый цикл длины 3 ограничивает некоторую грань, то G является гамильтоновым.

Теорема. (Tutte ’1946)
Каждый 4-связный планарный граф является гамильтоновым.

Гамильтоновость и планарность

Планарность+трёхсвязность+регулярность тоже не гарантирует гамильтоновости. (Tutte ’1946)

Пример графа (Гринберг ’1968):



Теорема Гринберга

Теорема. (Э. Я. Гринберг ’1968)
Для любой укладки планарного гамильтонова графа G и для любого гамильтонова цикла C выполняется соотношение

$$\sum_{k=1}^{|G|}(k-2)f_k^{int} = \sum_{k=1}^{|G|}(k-2)f_k^{ext} = |G| - 2,$$

где f_k^{int} и f_k^{ext} — число граней периметра k, лежащих внутри и вне C соответственно.

Теорема Гринберга

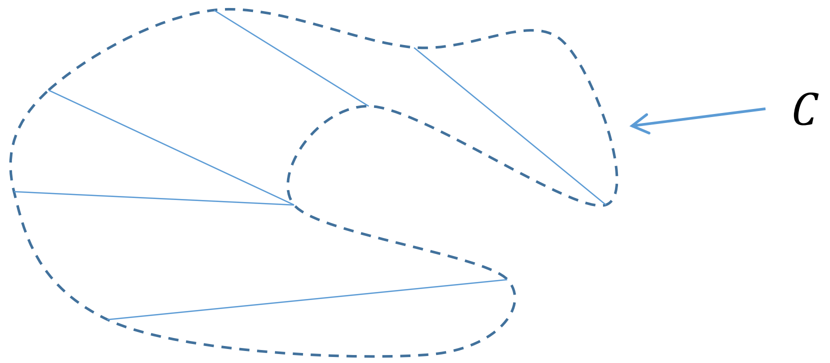
Доказательство:

Пусть E_{int} — множество рёбер графа G, попадающих внутрь цикла C.

Пусть F_{int} — грани G, лежащие внутри C.

Заметим, что выполнено равенство

$$|F_{int}| = |E_{int}| + 1$$



Теорема Гринберга

Каждое ребро из E_{int} отграничивает две грани из F_{int}, а каждое ребро в C лежит на границе ровно одной грани из F_{int}, поэтому сумма периметров всех граней из F_{int} равна

$$|E(C)| + 2|E_{int}| = |G| + 2(|F_{int}| - 1) =$$

$$= |G| - 2 + 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} f_k^{int}$$

С другой стороны, та же сумма периметров равна

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot f_k^{int}$$

Теорема Гринберга

Получаем

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot f_k^{int} = |G| - 2 + 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} f_k^{int}$$

Отсюда

$$\sum_{k=1}^{n} (k-2) \cdot f_k^{int} = |G| - 2.$$

Второе равенство из утверждения теоремы доказывается точно так же.

Теорема Гринберга

Следствие из теоремы Гринберга.
Граф Гринберга негамильтонов.

Доказательство: из теоремы следует, что для гамильтонова графа должно быть выполнено

$$\sum_{k=1}^{n}(k-2)\cdot\left(f_k^{int}-f_k^{ext}\right)=0$$

В графе Гринберга грани имеют периметры только $4,5,8$, поэтому для него нулю равнялась бы сумма

$$2\left(f_4^{int}-f_4^{ext}\right)+3\left(f_5^{int}-f_5^{ext}\right)+6\left(f_8^{int}-f_8^{ext}\right)$$

Теорема Гринберга

Из равенства нулю суммы

$$2\left(f_4^{int} - f_4^{ext}\right) + 3\left(f_5^{int} - f_5^{ext}\right) + 6\left(f_8^{int} - f_8^{ext}\right)$$

следует, что $2\left(f_4^{int} - f_4^{ext}\right)$ делится на 3.

Но в графе Гринберга только одна грань периметра 4 (внешняя), поэтому

$$2\left(f_4^{int} - f_4^{ext}\right) \in \{-2, 2\}$$

Получаем противоречие. Следовательно, граф Гринберга негамильтонов.