Основы теории графов

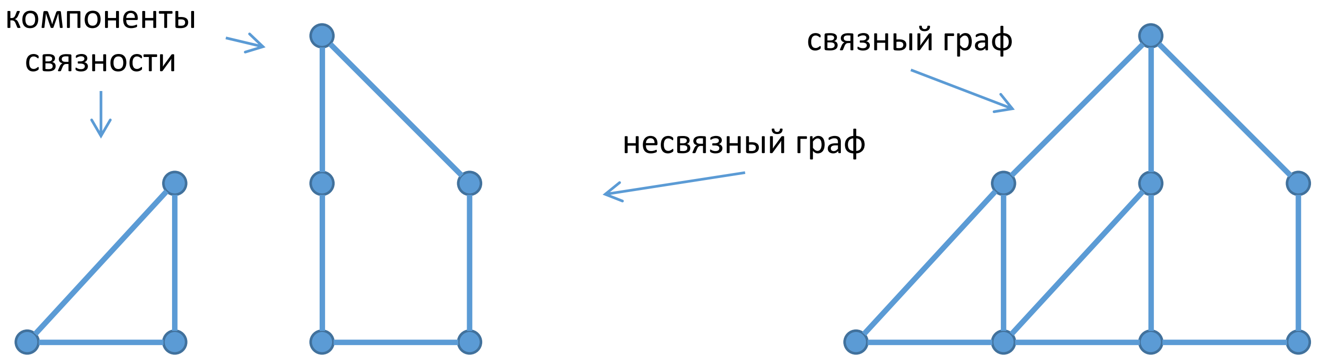
осень 2013

Александр Дайняк

www.dainiak.com

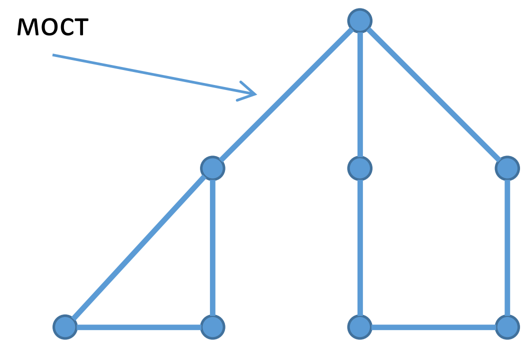
Связность

- *Связный граф* — это граф, в котором между любыми двумя вершинами существует путь
- *Компонента связности* графа — это его максимальный связный подграф



Связность

- *Мост* — это ребро, удаление которого приводит к графу с бо́льшим числом компонент связности
- *Точка сочленения* — вершина, удаление которой приводит к графу с бо́льшим числом компонент связности



k-связность

k-связный (*k-вершинно-связный*) граф — это такой связный граф, что чтобы сделать его несвязным или одновершинным, нужно удалить *не менее* k вершин.

Тривиальные наблюдения:

- 1-связные графы — это то же, что и связные графы
- В k-связном графе при $k \geq 2$ должно быть не менее чем $(k+1)$ вершин
- Если граф $(k+1)$-связен, то он и k-связен
- Если из k-связного графа удалить любые l вершин, то граф останется по крайней мере $(k-l)$-связным

Рёберная k-связность

k*-рёберно-связный* граф — это такой связный граф, что чтобы сделать его несвязным, нужно удалить *не менее* k рёбер.

Тривиальные наблюдения:

- Если граф $(k+1)$-рёберно-связен, то он и k-рёберно-связен
- 1-рёберно-связные графы — это то же, что и связные графы
- Если из k-рёберно-связного графа удалить любые l рёбер, то полученный граф будет, как минимум, $(k-l)$-рёберно-связным

Характеристики связности

- $\kappa(G)$ — *число вершинной связности* графа. Это минимальное число вершин, которые нужно удалить из графа, чтобы он стал одновершинным или несвязным.
- $\lambda(G)$ — *число рёберной связности*. Это минимальное число рёбер, которые нужно удалить из графа, чтобы он стал несвязным

Характеристики связности

Имеют место неравенства

$$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$$

При этом для любых $\kappa, \lambda, \delta \in \mathbb{N}$, таких, что $\kappa \leq \lambda \leq \delta$, можно указать граф G, имеющий

$$\kappa(G) = \kappa, \quad \lambda(G) = \lambda, \quad \delta(G) = \delta$$

Теорема Мадера

Теорема. (W. Mader ’1972)
Пусть непустой граф G таков, что $\|G\| \geq 2k \cdot |G|$.
Тогда в G найдётся $(k+1)$-связный подграф.

Замечание.
Из доказательства теоремы также будет следовать, что существует такой $(k+1)$-связный $H \subseteq G$, для которого

$$\frac{\|H\|}{|H|} \geq \frac{\|G\|}{|G|} - k$$

Доказательство теоремы Мадера

Положим $\gamma := \|G\|/|G| \geq 2k$.

Рассмотрим множество подграфов

$$\mathcal{G} := \{G' \subseteq G \quad | \quad |G'| \geq 2k \quad \wedge \quad \|G'\| > \gamma \cdot (|G'| - k)\}$$

- Множество $\mathcal{G}$ непусто, т.к. $G \in \mathcal{G}$.
- Для любого $G' \in \mathcal{G}$ выполнено $|G'| > 2k$, т.к. иначе мы имели бы

$$\|G'\| > \gamma \cdot (2k - k) = \gamma k \geq 2k^2 > \binom{2k}{2} \geq \|G'\|$$

Доказательство теоремы Мадера

- $\gamma \coloneqq \|G\|/|G| \geq 2k$
- $\mathcal{G} \coloneqq \{G' \subseteq G \quad | \quad |G'| \geq 2k \quad \wedge \quad \|G'\| > \gamma \cdot (|G'| - k)\}$
- Для любого $G' \in \mathcal{G}$ выполнено $|G'| > 2k$

Пусть H — граф из $\mathcal{G}$ с минимальным числом вершин.

Имеем $\delta(H) > \gamma$, иначе можно было удалить из H вершину степени $\leq \gamma$, и полученный граф оказался бы снова из $\mathcal{G}$.

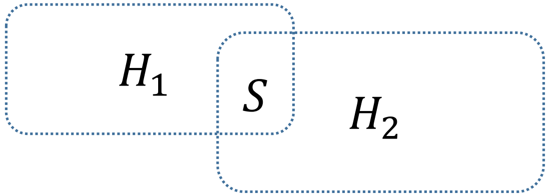
Доказательство теоремы Мадера

- $\gamma \coloneqq \|G\|/|G| \geq 2k$
- $\mathcal{G} \coloneqq \{G' \subseteq G \quad | \quad |G'| \geq 2k \quad \wedge \quad \|G'\| > \gamma \cdot (|G'| - k)\}$
- H — граф из $\mathcal{G}$ с минимальным числом вершин
- $\delta(H) > \gamma$

Допустим, что H не $(k+1)$-связный и придём к противоречию.

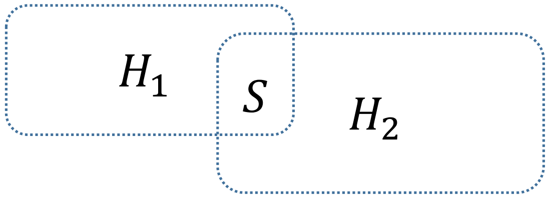
Пусть найдётся $S \subset V(H)$, такое, что $|S| \leq k$ и $(H - S)$ несвязен.

Тогда H имеет вид $H_1 \cup H_2$, где $V(H_1) \cap V(H_2) = S$,
$V(H_1) \setminus S$ и $V(H_2) \setminus S$ непусты
и между $V(H_1) \setminus S$ и $V(H_2) \setminus S$ рёбер нет.



Доказательство теоремы Мадера

- $\gamma \coloneqq \|G\|/|G| \geq 2k$
- $\mathcal{G} \coloneqq \{G' \subseteq G \quad | \quad |G'| \geq 2k \quad \wedge \quad \|G'\| > \gamma \cdot (|G'| - k)\}$
- H — граф из $\mathcal{G}$ с минимальным числом вершин
- $\delta(H) > \gamma$
- Пусть $S \subset V(H)$, $|S| \leq k$, $H = H_1 \cup H_2$, $V(H_1) \cap V(H_2) = S$, между $V(H_1) \setminus S$ и $V(H_2) \setminus S$ рёбер нет.



У любой вершины из $V(H_i) \setminus S$ более γ соседей, так что $|H_i| > 2k$.

Из минимальности H следует $\|H_i\| \leq \gamma \cdot (|H_i| - k)$. Отсюда

$$\|H\| \leq \|H_1\| + \|H_2\| \leq \gamma \cdot (|H_1| + |H_2| - 2k) \leq \gamma \cdot (|H| - k)$$

— противоречие с выбором $H \in \mathcal{G}$.

Теорема Менгера

- Граф является k-вершинно-связным т. и т.т., когда любую пару вершин графа можно соединить k цепями, не имеющими общих внутренних вершин.
  (вершинная теорема Менгера)
- Граф является k-рёберно-связным т. и т.т., когда любую пару вершин графа можно соединить k цепями, не имеющими общих рёбер.
  (рёберная теорема Менгера)

Доказательство рёберного варианта теоремы Менгера

Тривиальная часть теоремы:

- Если любую пару вершин графа можно соединить k цепями, не имеющими общих рёбер, то граф является k-рёберно-связным

(Т.к. никакую пару вершин графа нельзя отрезать друг от друга, удалив произвольные $(k-1)$ рёбер)

Доказательство рёберного варианта теоремы Менгера

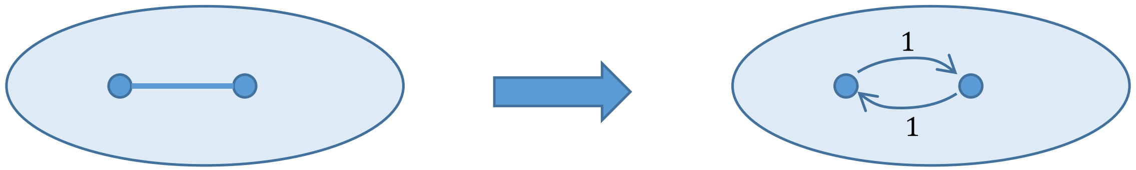
Нетривиальная часть теоремы:

- Если граф является k-рёберно-связным, то любую пару вершин графа можно соединить k цепями, не имеющими общих рёбер

Доказательство — с помощью теоремы Форда—Фалкерсона (максимальная величина потока равна минимальной пропускной способности разреза)

Доказательство рёберного варианта теоремы Менгера

- Зафиксируем в k-рёберно-связном графе произвольную пару вершин s, t.
- Каждое ребро заменим на пару противоположных дуг.
- Пропускные способности всех дуг считаем равными 1.

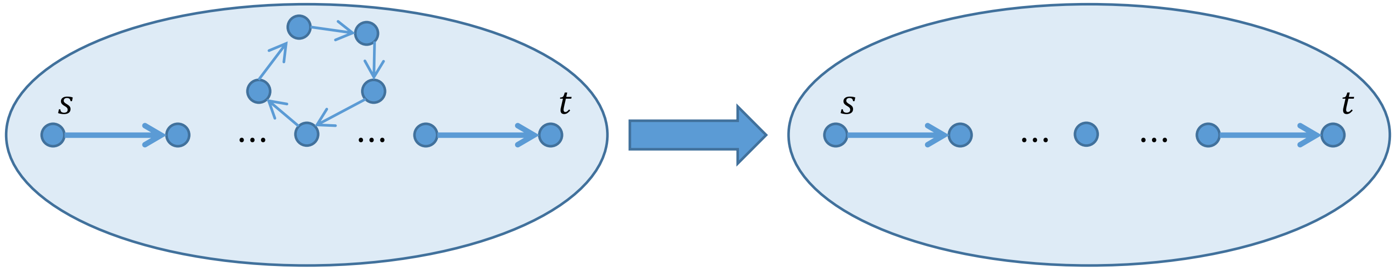


Доказательство рёберного варианта теоремы Менгера

- Если в полученной сети есть разрез (отделяющий s от t) пропускной способности k', то исходный граф можно разделить на несколько компонент связности удалением соответствующих k' рёбер.
- Т.к. исходный граф k-рёберно-связен, то пропускная способность любого разреза в сети не меньше k. Значит в сети есть целочисленный поток величины k.

Доказательство рёберного варианта теоремы Менгера

- Осталось в построенном потоке удалить ориентированные циклы, если они есть:



- Полученный поток определяет k не пересекающихся по дугам путей, ведущих из s в t.
- Эти пути соответствуют k не пересекающимся по рёбрам цепям между s и t в исходном графе.

Доказательство вершинного варианта теоремы Менгера

- Граф является k-связным т. и т.т., когда любую пару вершин графа можно соединить k цепями, не имеющими общих внутренних вершин.

Тривиальная часть:

- Если любую пару вершин графа можно соединить k цепями без общих внутренних вершин, то граф является k-связным.

Доказательство вершинного варианта теоремы Менгера

Нетривиальная часть:

- В k-связном графе любую пару вершин можно соединить k цепями без общих внутренних вершин.

Доказательство, как и в рёберном случае, выводится из теоремы Форда—Фалкерсона. Теперь нужно добиться, чтобы у вершин графа тоже были «пропускные способности».

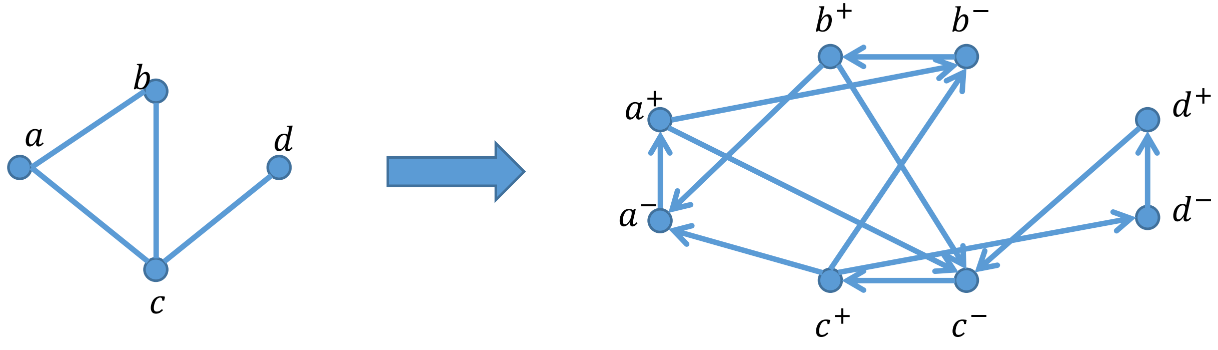
Доказательство вершинного варианта теоремы Менгера

По исходному графу строим сеть:

- Каждой вершине v графа соответствует две вершины сети: v^- и v^+
- Для каждой пары вершин сети v^-, v^+ проводим дугу из v^- в v^+
- Если в исходном графе было ребро между u и v, то проводим в сети дугу из u^- в v^+
- Пропускные способности всех дуг равны 1

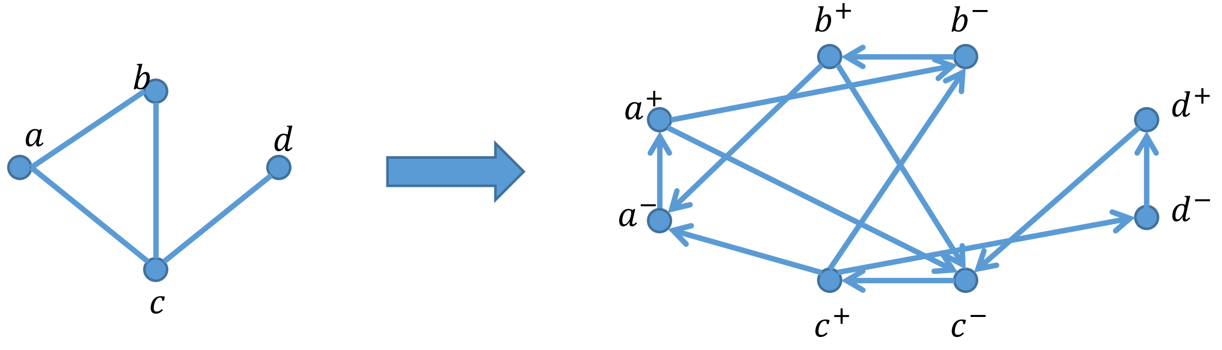
Доказательство вершинного варианта теоремы Менгера

- Вершина v графа → пара вершин сети: v^-, v^+
- Ребро uv графа → дуга в сети: u^+v^-
- Добавляем в сеть дуги вида v^-v^+



Доказательство вершинного варианта теоремы Менгера

- Если в сети есть разрез пропускной способности k', то исходный граф можно сделать несвязным, удалив k' вершин
- Т.к. исходный граф k-связен, то пропускная способность любого разреза не меньше k



Доказательство вершинного варианта теоремы Менгера

- Значит, для любой пары s, t вершин графа в сети есть целочисленный поток величины k из s^+ в t^-
- После удаления из потока ориентированных циклов, его можно разбить на k путей из s^+ в t^-, не пересекающихся по внутренним вершинам
- Этим путям соответствуют k цепей в исходном графе между s и t без общих внутренних вершин

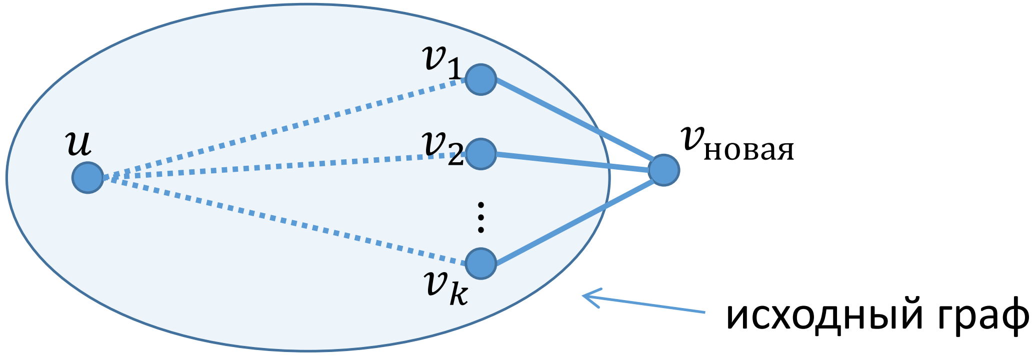
Свойства k-связных графов

- Если графы G' и G'' являются k-связными и имеют не менее k общих вершин, то граф $G' \cup G''$ является k-связным
- Если к k-связному графу добавить новую вершину и соединить её с любыми k вершинами графа, полученный граф будет также k-связным

Свойства k-связных графов

Лемма о веере
В k-связном графе для любых различных вершин $u, v_1, v_2, \dots, v_k$ существует k не пересекающихся по внутренним вершинам путей из u в v_i $(i = 1, \dots, k)$

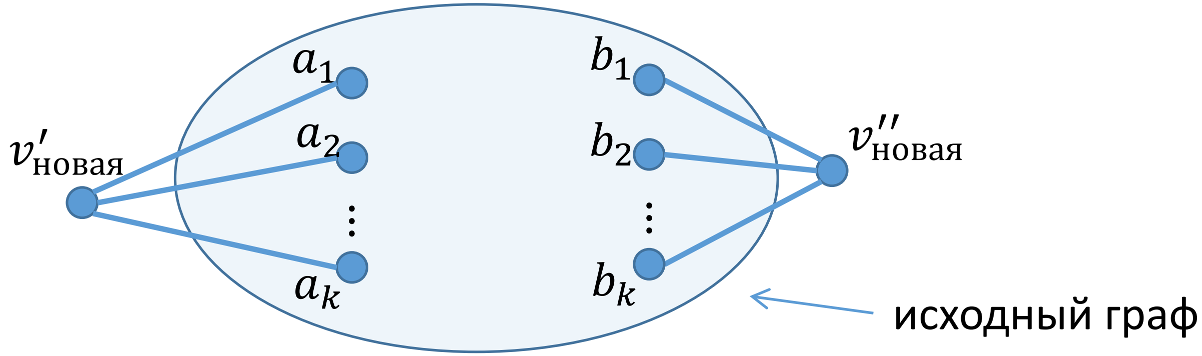
Идея доказательства: добавляем вершину и используем (второе) определение k-связности.



Свойства k-связных графов

Теорема.
В k-связном графе для любых $A, B \subseteq V$, таких, что $A \cap B = \emptyset$ и $|A| = |B| = k$, найдутся k не пересекающихся по вершинам путей из A в B.

Идея доказательства: добавляем к графу две новые вершины.



Двусвязные графы

Следующие утверждения эквивалентны:

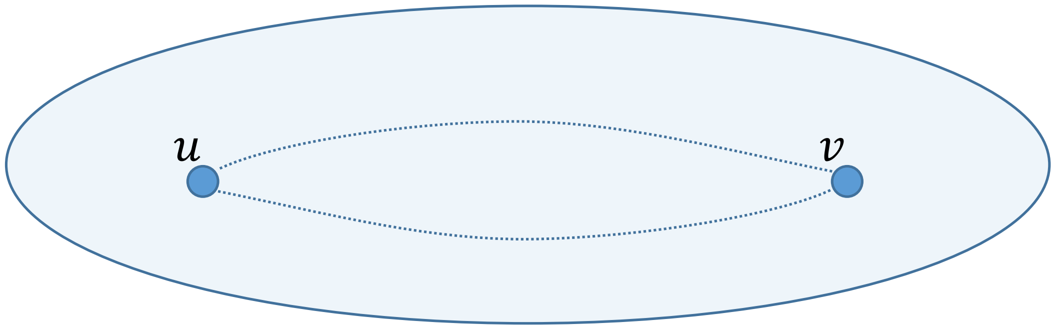
- Граф двусвязен
- Любые две вершины графа принадлежат простому циклу
- Любая вершина и любое ребро принадлежат простому циклу
- Любые два ребра принадлежат простому циклу
- Для любых двух вершин a, b и любого ребра e в графе есть простая цепь между a и b, содержащая e
- Для любых трёх вершин a, b, c существует простая цепь между a и b, проходящая через c

Двусвязные графы

Граф двусвязен ⇒ любые две вершины графа принадлежат простому циклу

Для произвольных $u, v \in V(G)$ в двусвязном графе есть две цепи без общих внутренних вершин.

Объединив эти цепи, получаем простой цикл.



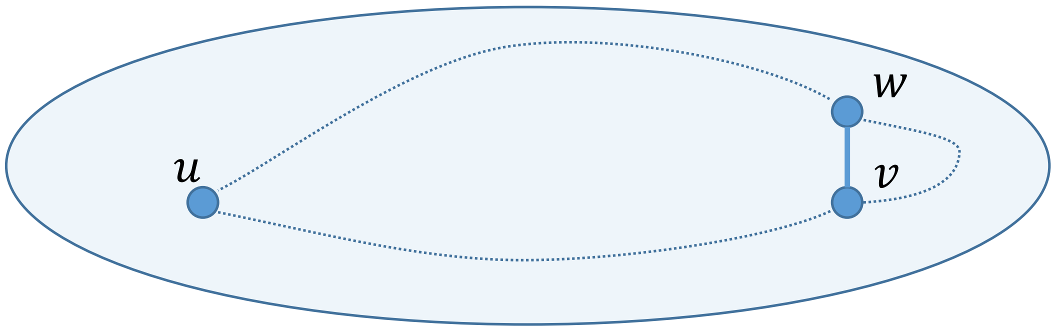
Двусвязные графы

Любые две вершины графа принадлежат простому циклу $\Rightarrow$ любая вершина и любое ребро принадлежат простому циклу

Пусть $u \in V(G)$ и $\{v, w\} \in E(G)$.

Вершины u, v лежат на некотором простом цикле.

Если он проходит через w, то всё хорошо.



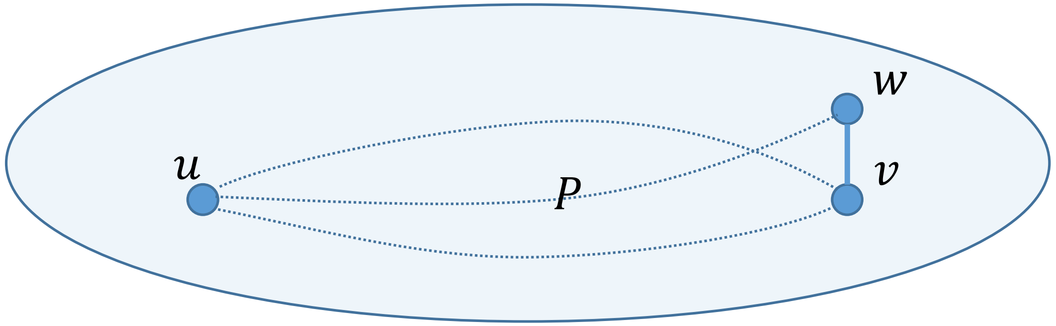
Двусвязные графы

Любые две вершины графа принадлежат простому циклу $\Rightarrow$ любая вершина и любое ребро принадлежат простому циклу

Пусть $u \in V(G)$ и $\{v, w\} \in E(G)$.

Вершины u, v лежат на некотором простом цикле C. Если w на этом цикле не лежит, то воспользуемся тем, что есть ещё цикл C', проходящий через u и w.

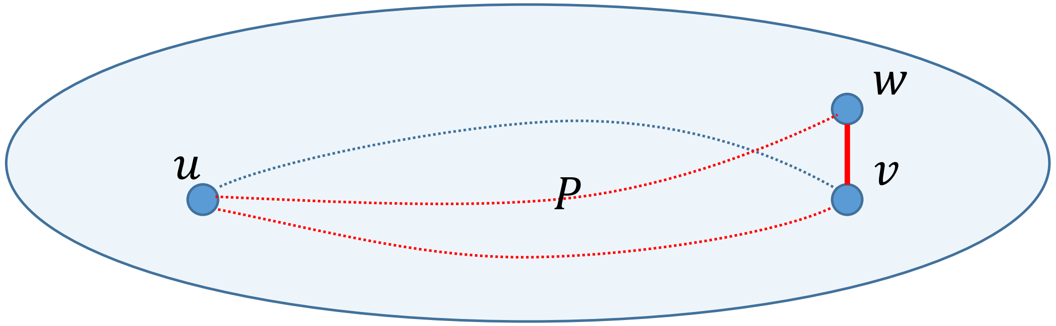
Из C' можно выделить цепь P, соединяющую u с w и *не* проходящую через v.



Двусвязные графы

Любые две вершины графа принадлежат простому циклу ⇒ любая вершина и любое ребро принадлежат простому циклу

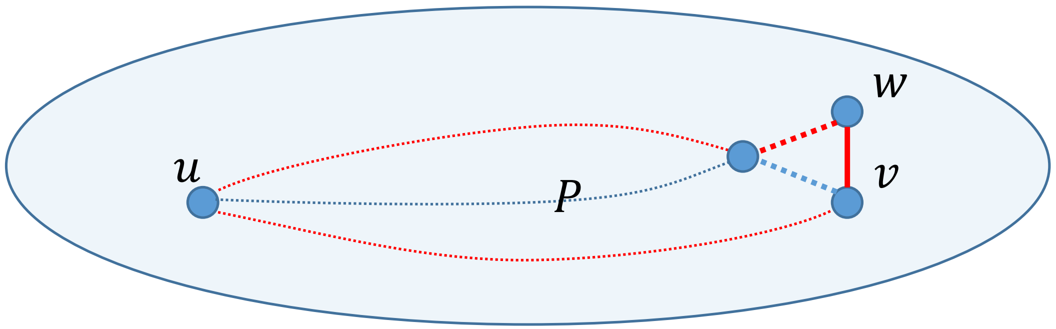
Если цепь P не пересекается хотя бы с одной из цепей между u и v (например, с $u \dots v$), то можно скомбинировать искомый цикл:



Двусвязные графы

Любые две вершины графа принадлежат простому циклу ⇒ любая вершина и любое ребро принадлежат простому циклу

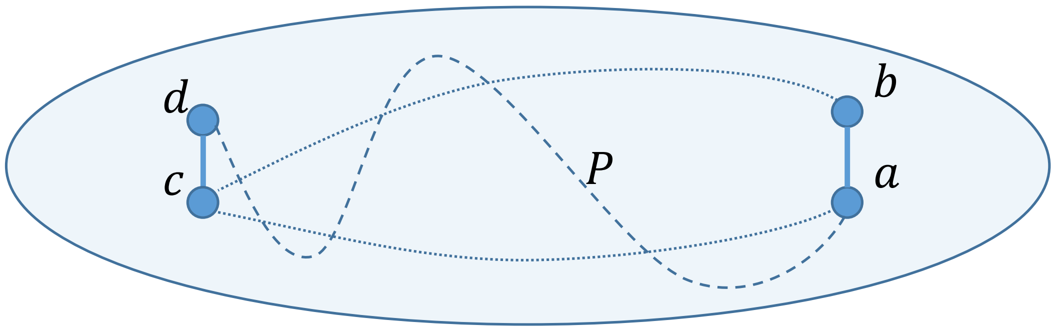
Если P пересекается с циклом C, то рассмотрим кусок P от вершины w до первого пересечения с C. Из этого куска и цикла C можно скомбинировать искомый цикл:



Двусвязные графы

Любая вершина и любое ребро принадлежат простому циклу ⇒ любые два ребра принадлежат простому циклу

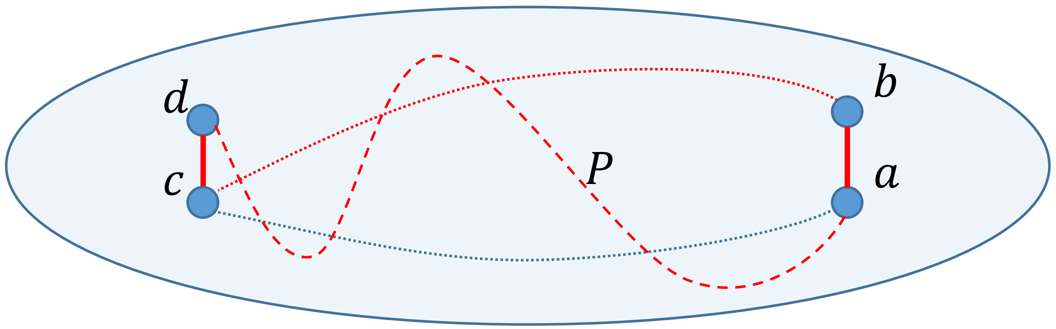
Пусть ab и cd — рёбра, и C — простой цикл через c и ab. Через d и ab тоже проходит некоторый простой цикл, из которого можно выделить цепь P, соединяющую a и d и не проходящую через c.



Двусвязные графы

Любая вершина и любое ребро принадлежат простому циклу ⇒ любые два ребра принадлежат простому циклу

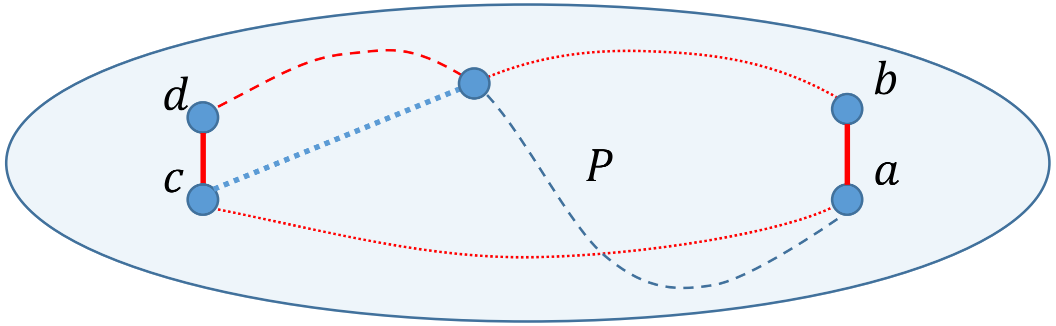
Если кроме вершины a цепь P больше не имеет с циклом C общих вершин, то всё ОК:



Двусвязные графы

Любая вершина и любое ребро принадлежат простому циклу ⇒ любые два ребра принадлежат простому циклу

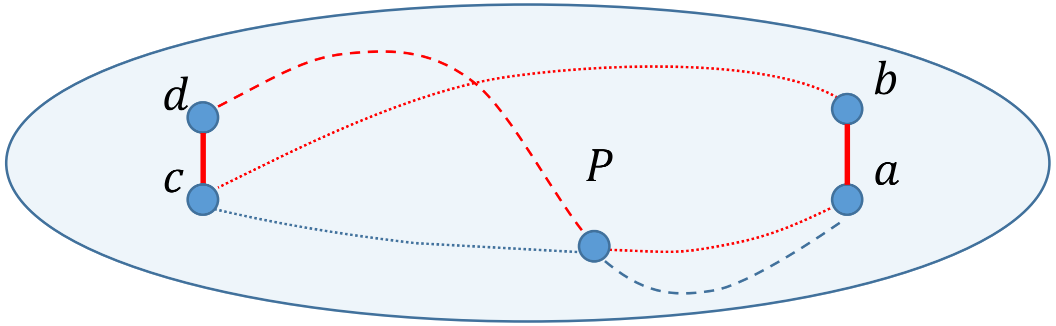
Если первая (по пути от d) точка пересечения P с циклом C лежит на пути $c \ldots b$, то искомый цикл получается так:



Двусвязные графы

Любая вершина и любое ребро принадлежат простому циклу ⇒ любые два ребра принадлежат простому циклу

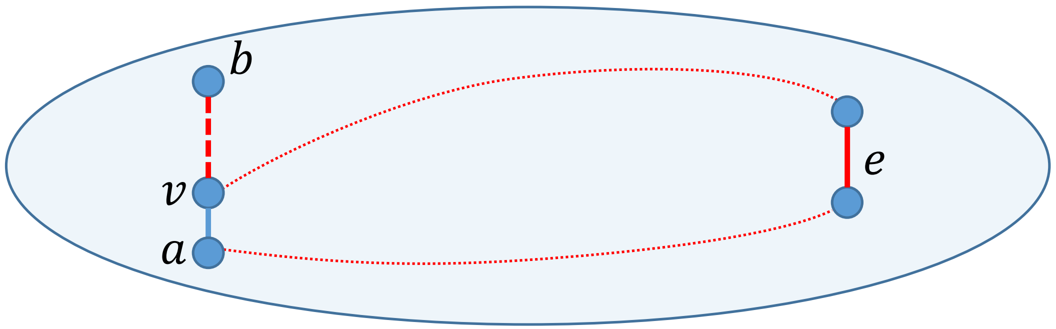
Если первая (по пути от d) точка пересечения P с циклом C лежит на пути $c \dots a$, то искомый цикл получается аналогично:



Двусвязные графы

Любые два ребра принадлежат простому циклу ⇒ для любых двух вершин $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ и любого ребра $\boldsymbol{e}$ в графе есть простая цепь между $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, содержащая $\boldsymbol{e}$

Между a и b есть некоторая цепь P.
Пусть v — сосед a на этой цепи. В графе есть цикл, проходящий через e и av. На основе этого цикла и цепи P комбинируется искомая цепь между a и b:



P

Двусвязные графы

Для любых двух вершин a, b и любого ребра e в графе есть простая цепь между a и b, содержащая e $\Rightarrow$ для любых трёх вершин a, b, c существует простая цепь между a и b, проходящая через c

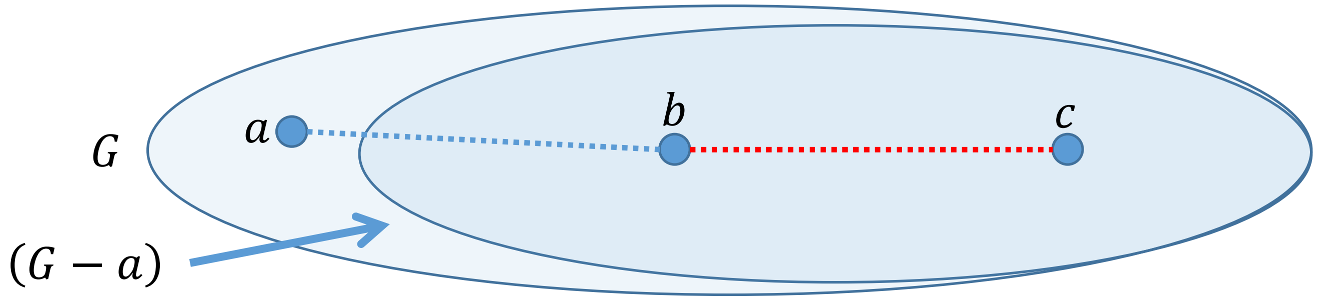
Пусть e — любое ребро, концом которого является c. В графе есть цепь из a в b, проходящая через e. Эта цепь содержит c.

Двусвязные графы

Для любых трёх вершин $\boldsymbol{a, b, c}$ существует простая цепь между $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, проходящая через $\boldsymbol{c} \Rightarrow$ граф двусвязен

Надо показать, что удаление из графа одной любой вершины не нарушает связности.
Пусть из графа G удалена произвольная вершина a. Пусть b, c — любые вершины графа $(G - a)$.

В графе G была простая цепь из a в b, проходящая через c.
Но кусок этой цепи, соединявший c и b остался в $(G - a)$:



Циклы в k-связных графах

Теорема.
При любом $k \geq 2$ в любом k-связном графе для любых $v_1, \ldots, v_k \in V$ существует простой цикл, содержащий $v_1, \ldots, v_k$.

Доказательство индукцией по k:

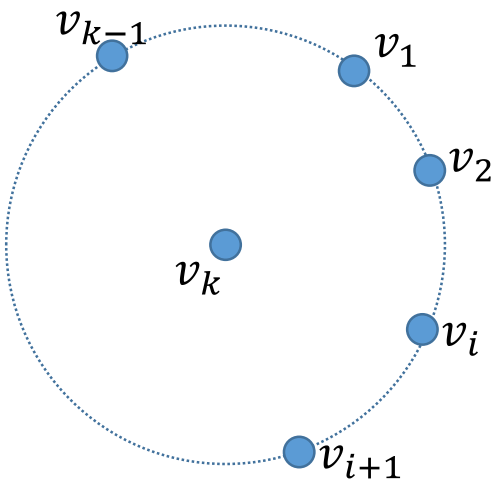
- При $k = 2$ уже доказано
- Пусть $k \geq 3$ и для $(k-1)$-связных графов утверждение теоремы выполнено…

Циклы в k-связных графах

Удалим из исходного графа G вершину v_k.

Граф $(G - v_k)$ по меньшей мере $(k-1)$-связный, так что в нём есть цикл C, содержащий $v_1, \dots, v_{k-1}$ (и не содержащий v_k).

Без ограничения общности можно считать, что $v_1, \dots, v_{k-1}$ идут на C по порядку:

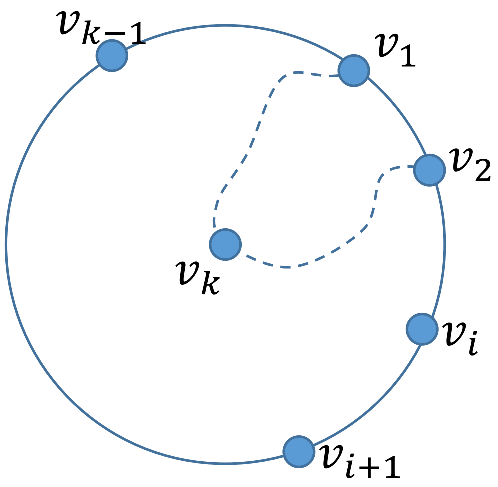


Циклы в k-связных графах

Вначале рассмотрим случай, когда $V(C) = \{v_1, \dots, v_{k-1}\}$.

Тогда граф $(G - \{v_3, \dots, v_{k-1}\})$ по меньшей мере двусвязный, и в нём есть цепь из v_1 в v_2 через v_k.

Объединяя эту цепь с $(C - v_1 v_2)$, получаем нужный цикл.



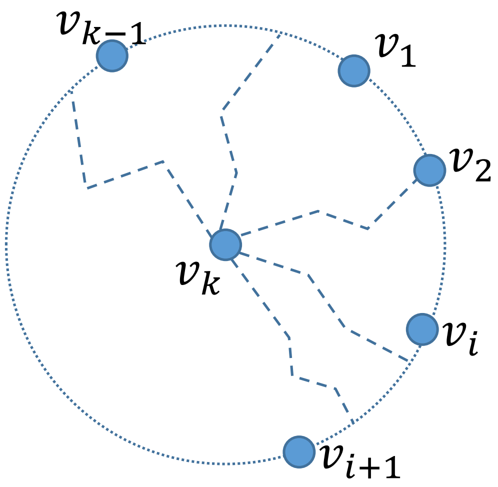
Циклы в k-связных графах

Теперь рассмотрим случай, когда есть вершина

$$u \in V(C) \setminus \{v_1, \dots, v_{k-1}\}$$

По лемме о веере, в G есть k не пересекающихся по внутренним вершинам путей из v_k в каждую из вершин $u, v_1, \dots, v_{k-1}$.

Рассмотрим отрезки этих путей от v_k до первого пересечения с циклом:

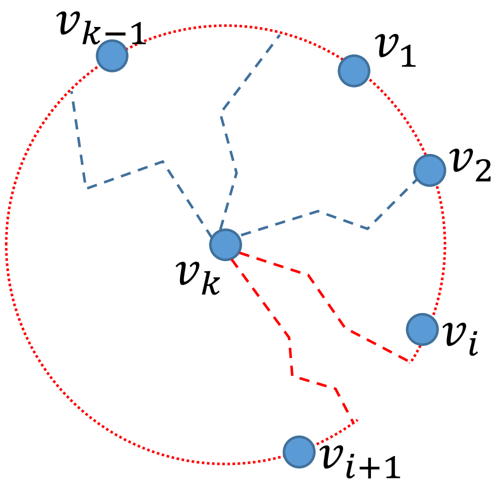


Циклы в k-связных графах

Всего таких отрезков путей k штук, а вершины $v_1, \dots, v_{k-1}$ разбивают цикл на $(k-1)$ интервалов.

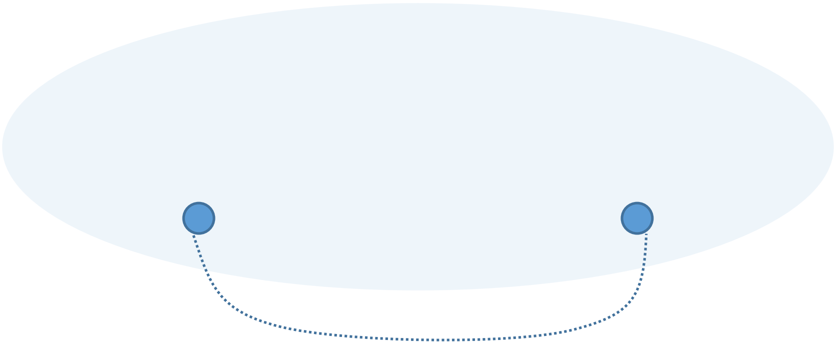
По принципу Дирихле, найдётся интервал, на который попали концы двух отрезков.

Из этой пары отрезков и части цикла через $v_1, \dots, v_{k-1}$ строится искомый цикл через $v_1, \dots, v_k$:



Рекурсивное построение двусвязных графов

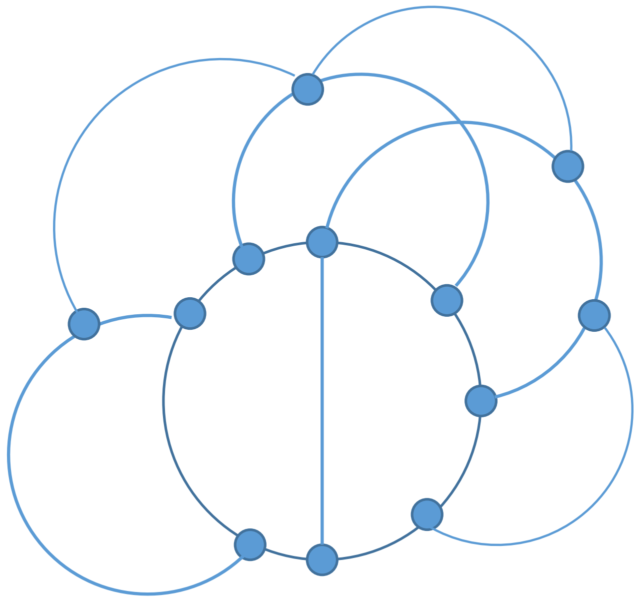
Внешней цепью для графа называется цепь, концы которой принадлежат графу, а внутренние вершины — не принадлежат:



Утверждение. Если произвольную пару вершин двусвязного графа соединить внешней цепью, получится двусвязный граф.

Рекурсивное построение двусвязных графов

Теорема. Граф двусвязен т. и т.т., когда его можно построить, начав с простого цикла и последовательно добавляя внешние цепи.



Рекурсивное построение двусвязных графов

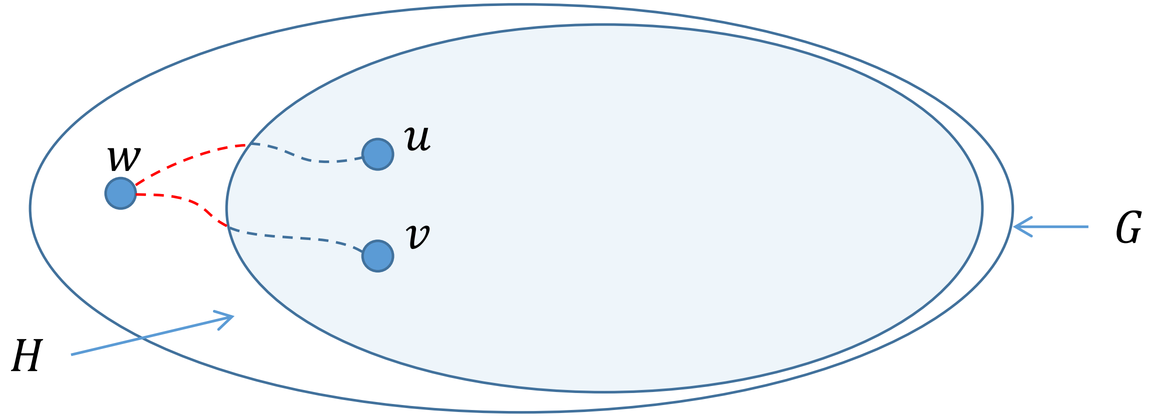
- Докажем, что произвольный двусвязный граф можно построить, начав с простого цикла и последовательно добавляя внешние цепи.
- База. Так как G двусвязен, в нём есть цикл. Любой из циклов в G возьмём в качестве первого графа в последовательности.

Рекурсивное построение двусвязных графов

- Пусть на очередном шаге построения мы пришли к подграфу H графа G, и допустим, что H ещё не совпадает с G.
- Если H — остовный подграф в G, то возьмём любое ребро графа G, не входящее в H. Оно само по себе будет внешней для H цепью.
- Добавляя это ребро к H, делаем шаг построения.

Рекурсивное построение двусвязных графов

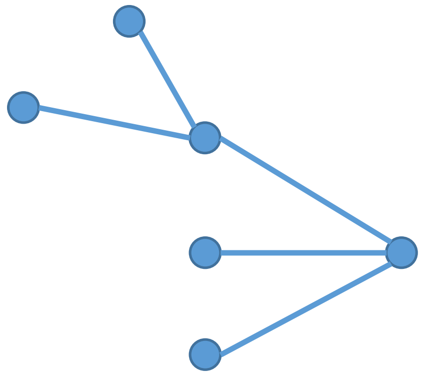
- Если H — не остовный подграф в G, то существует вершина $w \in V(G - H)$.
- В графе H рассмотрим любую пару вершин u, v.
- По лемме о веере, в G есть не пересекающиеся по внутренним вершинам пути из w в u и из w в v.
- Взяв части этих путей до первого пересечения с H, получим внешнюю для H цепь. Это вновь позволяет сделать очередной шаг построения.



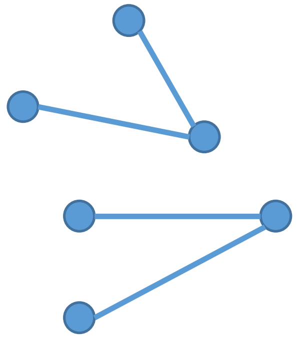
Деревья

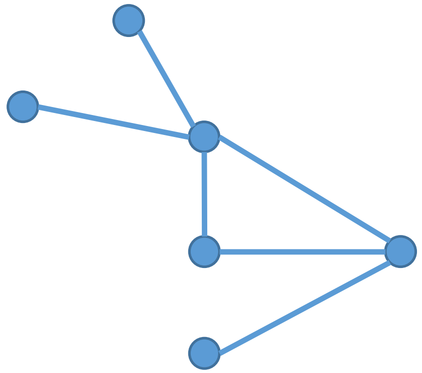
- Дерево — это связный граф без циклов

- Это дерево:



- А это не деревья:





Деревья

Два простейших свойства:

- В любом дереве, имеющем более одной вершины, существует не менее двух листьев (висячих вершин)

- В любом дереве

$$\#\text{вершин} = 1 + \#\text{рёбер}$$

Деревья

Эквивалентные определения дерева:

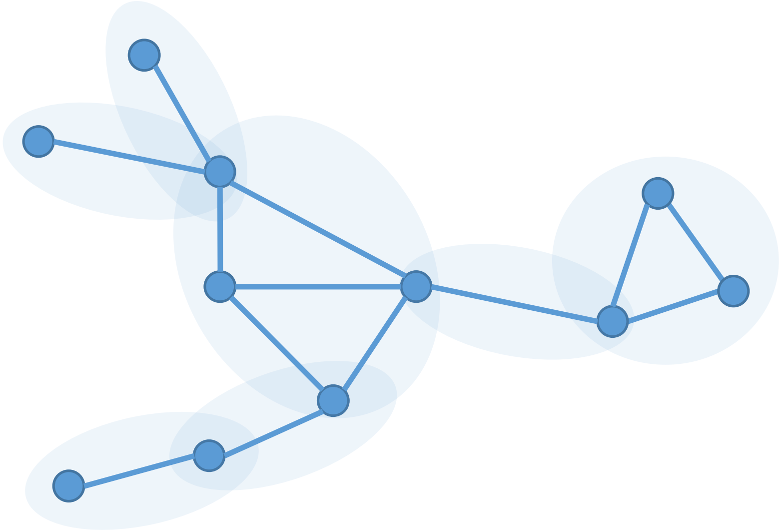
- связный граф без циклов
- связный граф, при удалении любого ребра становящийся несвязным
- граф без циклов, в котором при добавлении любого ребра появляется цикл
- граф, в котором между любой парой вершин существует единственный путь
- связный граф, в котором $\#\text{вершин} = 1 + \#\text{рёбер}$
- граф без циклов, в котором $\#\text{вершин} = 1 + \#\text{рёбер}$

Деревья

- Деревья — простейшие связные графы
- Если требуется доказать некоторое утверждение о всех связных графах, попытайтесь вначале доказать его для деревьев

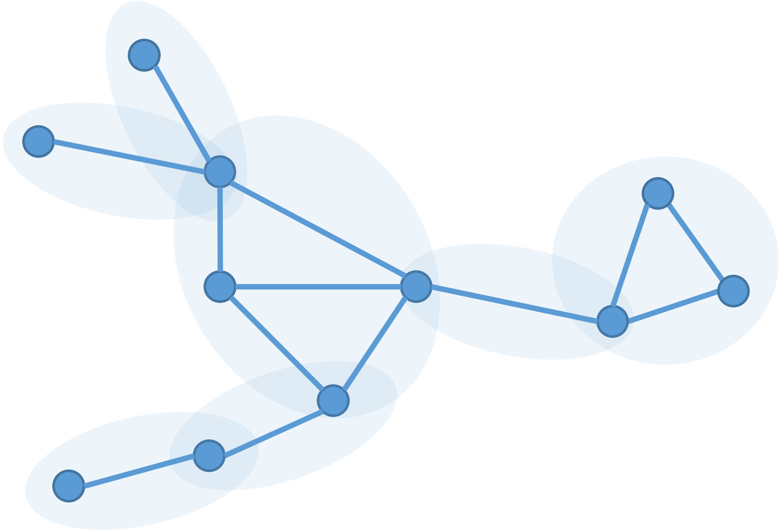
Блоки и точки сочленения

- Точка сочленения графа — это вершина, удаление которой делает граф несвязным
- Блок в графе — это максимальный связный подграф без точек сочленения (т.е. блок — это «компонента двусвязности» графа; будем допускать и блоки, состоящие всего из двух вершин).



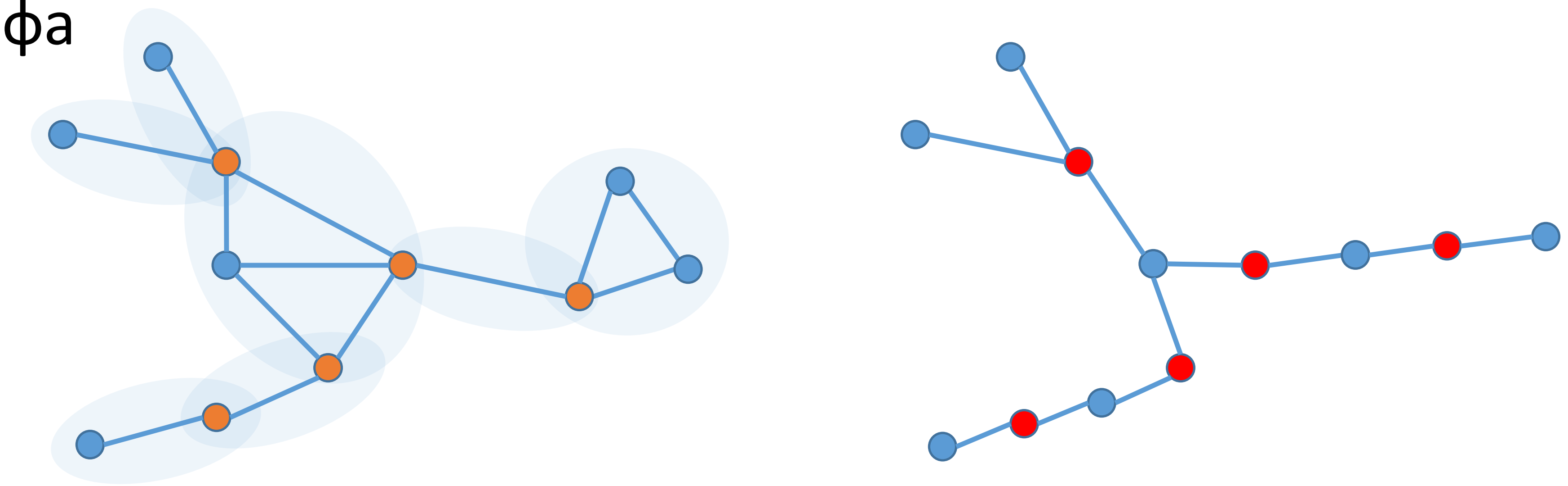
Блоки и точки сочленения

- Любые два блока имеют не более одной общей точки (если она есть, то это точка сочленения)
- Любой простой цикл в графе лежит в пределах одного блока



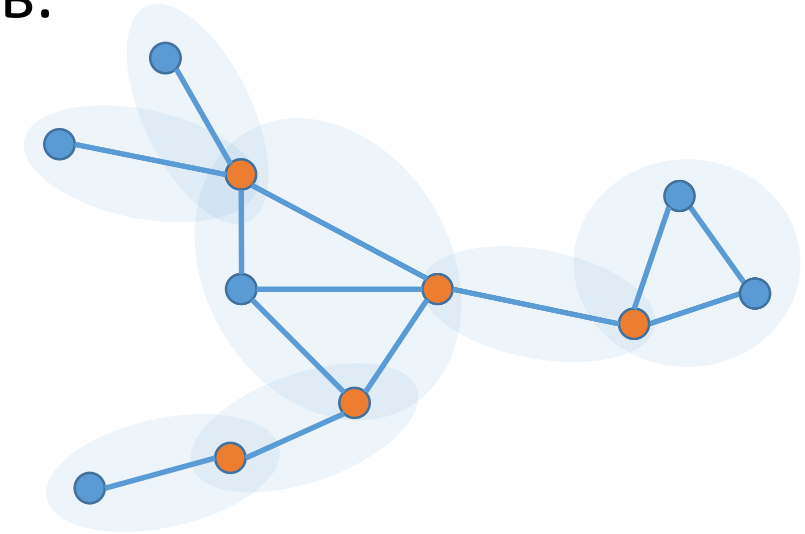
BC-деревья

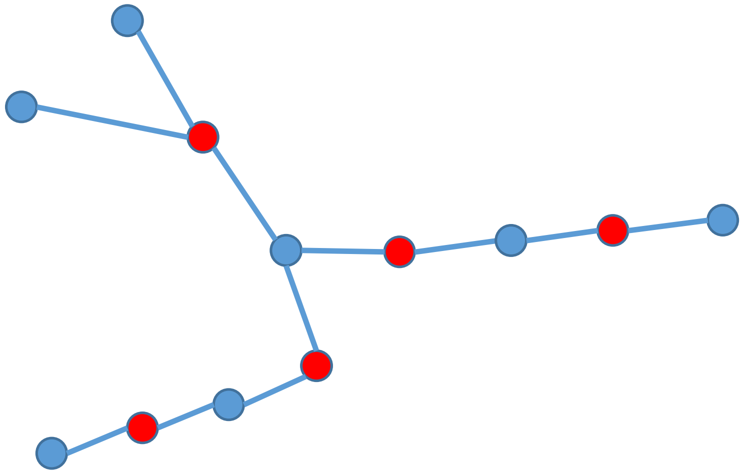
- Каждому связному графу можно поставить в соответствие его *BC-дерево* (BC = Block-Cutvertex)
- Вершины BC-дерева соответствуют блокам и точкам сочленения графа.
- Между вершинами b, c BC-дерева проводится ребро, если соответствующая c точка сочленения принадлежит соответствующему b блоку графа



BC-деревья

- Листья BC-дерева всегда соответствуют блокам графа. Такие блоки называются *концевыми*. Концевые блоки имеют с оставшейся частью графа только одну общую вершину.
- Во всяком дереве не меньше двух листьев, значит, если граф связный, но не двусвязный, то в нём не меньше двух концевых блоков.





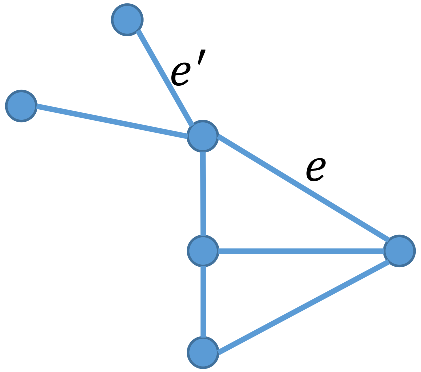
Трёхсвязные графы

- Мы описали структуру двусвязных графов: это в точности те графы, к которым приводят последовательности, начинающиеся с простого цикла и в которых каждый следующий граф получается из предыдущего добавлением внешней цепи
- Для трёхсвязных графов существуют аналогичные критерии (рекурсивные построения), хотя и сложнее.

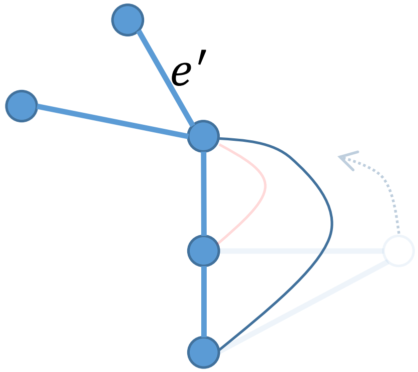
Стягивание ребра

Стягивание ребра e в графе G — это операция, результатом которой является граф G/e, получаемый из G удалением e и отождествлением его концов. Если при этом образуются кратные рёбра, оставляем из них только одно.

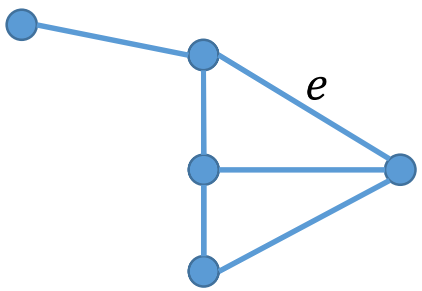
G



G/e



G/e'



Рекурсивное построение трёхсвязных графов

Теорема.

Граф G трёхсвязен т. и т.т., когда существует последовательность графов $G_0, \dots, G_n$, в которой

- $G_0 = K_4$,
- $G_n = G$,
- для каждого i граф G_i получается из G_{i+1} стягиванием некоторого ребра xy, где $d(x), d(y) \geq 3$.

Рекурсивное построение трёхсвязных графов

Лемма.

В любом трёхсвязном графе $G \neq K_4$ есть ребро e, такое, что граф G/e трёхсвязен.

Последовательно применяя эту лемму, можно по любому трёхсвязному графу G построить последовательность

$$G \to G_{n-1} \to \cdots \to G_0$$

из утверждения теоремы.

Рекурсивное построение трёхсвязных графов

Доказательство от противного.

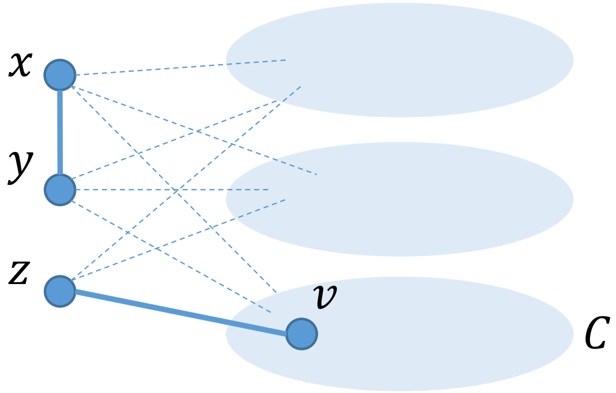
- Допустим, что в графе G не менее пяти вершин, и что для любого ребра xy граф G/xy не трёхсвязен.
- Т.е. в G/xy удаление некоторых двух вершин нарушает связность.
- Одна из этих вершин должна быть та, что получилась слиянием x и y, — иначе сам G разваливался бы при удалении той же пары вершин.
- Получаем: для любого ребра xy графа G должна существовать вершина z, такая, что граф $(G - \{x, y, z\})$ несвязный.

Рекурсивное построение трёхсвязных графов

- Для любого ребра xy графа G должна существовать вершина z, такая, что граф $G_{-xyz} \coloneqq (G - \{x, y, z\})$ несвязный.

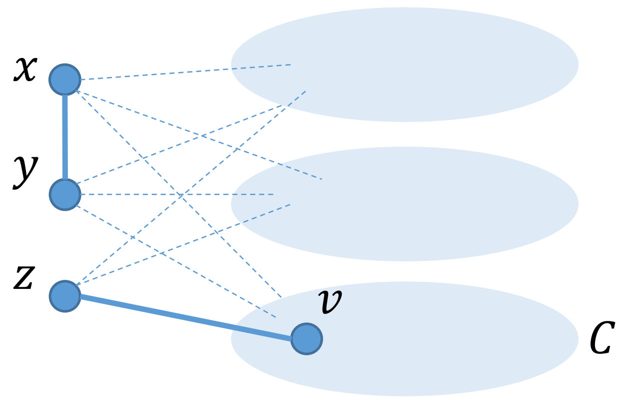
Выберем xy и z так, чтобы минимальная из компонент графа G_{-xyz} имела наименьшее возможное число вершин.
Обозначим эту компоненту C.

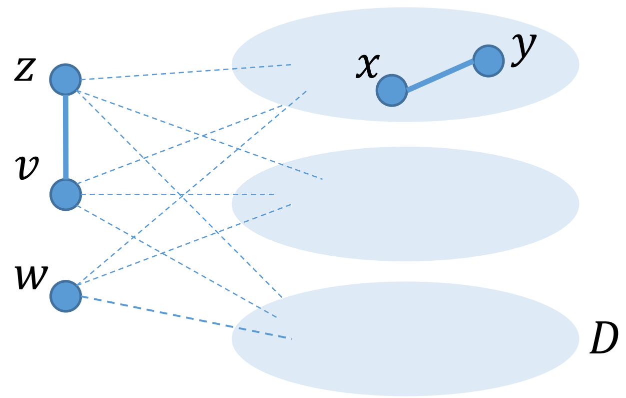
У вершины z есть сосед $v \in C$ (иначе бы C «отваливалась» ужé при удалении x и y)



Рекурсивное построение трёхсвязных графов

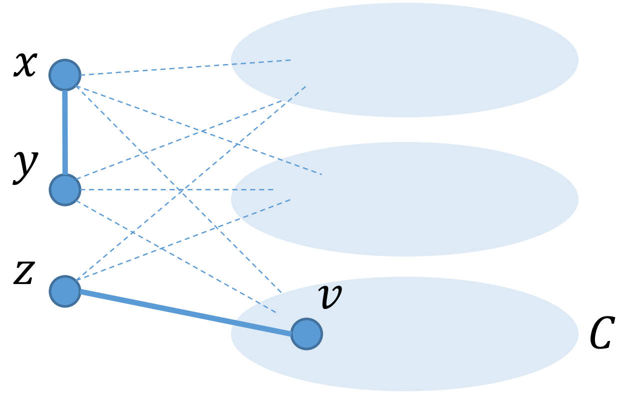
- Для ребра vz в G должна быть вершина w, такая, что граф G_{-zvw} несвязен.
- $w \neq x$, иначе $(G - \{x, z\})$ был бы несвязен. Аналогично, $w \neq y$.
- Вершины x и y лежат в одной и той же компоненте графа G_{-zvw}
- Значит, у G_{-zvw} есть компонента, не содержащая ни x, ни y. Обозначим её D.

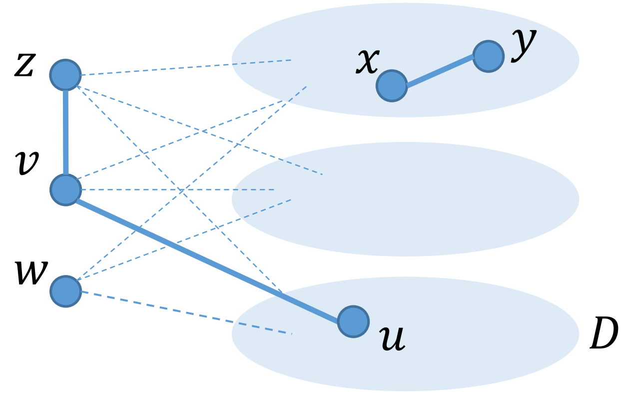




Рекурсивное построение трёхсвязных графов

- У вершины v есть сосед $u \in D$ (иначе G развалился бы при удалении лишь z и w).
- Вершина u принадлежит и множеству C.
- Если из какой-то вершины $t \in D$ есть путь до u по вершинам множества D, то этот путь не содержит x, y, z.
- Значит, этот путь есть и в C. Отсюда $D \subseteq C$. При этом $v \in C \setminus D$, то есть $|D| < |C|$.
- Получаем противоречие с минимальностью $|C|$.





Рекурсивное построение трёхсвязных графов

- Мы только что доказали теорему в одну сторону:

Если граф G трёхсвязен, то существует последовательность графов $G_0, \ldots, G_n$, в которой $G_0 = K_4$, $G_n = G$, и для каждого i граф G_i получается из G_{i+1} стягиванием некоторого ребра xy, где $d(x), d(y) \geq 3$.

- Осталось доказать, что любая последовательность указанного вида приводит к трёхсвязному графу

Рекурсивное построение трёхсвязных графов

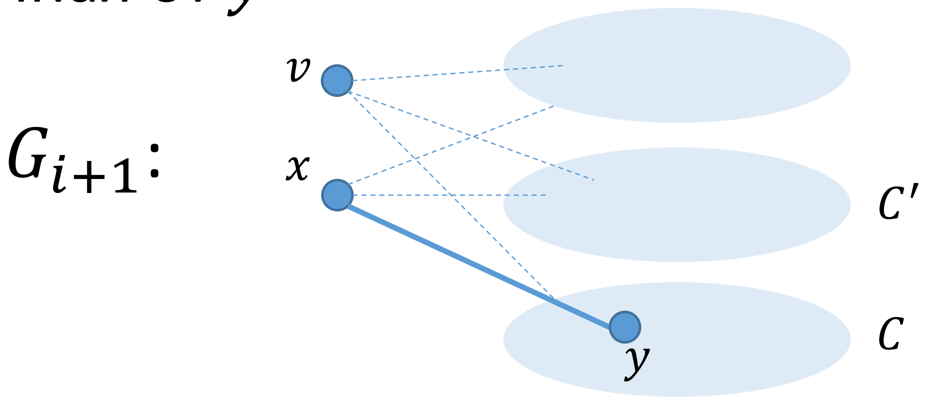
G_i получается из G_{i+1} стягиванием некоторого ребра xy,
где $d(x), d(y) \geq 3$.

Достаточно показать, что если G_i трёхсвязен, то и G_{i+1} трёхсвязен.
Рассуждаем от противного.

- Допустим, что G_{i+1} не трёхсвязен. Тогда в нём есть пара вершин S, удаление которых нарушает связность.
- $S \neq \{x, y\}$, иначе в G_i была бы точка сочленения
- $S \cap \{x, y\} \neq \emptyset$, иначе удаление вершин S из G_i нарушало бы связность G_i

Рекурсивное построение трёхсвязных графов

- Таким образом, можно считать, что $S = \{x, v\}$, где v — некоторая вершина, отличная от y



- Пусть C — компонента графа $(G_{i+1} - S)$, содержащая y, а C' — произвольная компонента, не содержащая y
- Если $\exists u \in C \setminus \{y\}$, то в G_{i+1} любой путь от u до вершин из C' проходит через x или v, а значит граф $(G_i - \{v, xy\})$ несвязен — противоречие. Так что $C = \{y\}$.
- Но тогда получаем $d(y) \leq 2$, что противоречит выбору y