Дискретные структуры. Учебный год 2013—2014.

Вопросы устной части итогового экзамена на уровне «продвинутый»
Возможный первый вопрос билета

a) Дайте какое-нибудь определение группы. Дайте определение подгруппы. Докажите теорему Силова о существовании подгрупп заданного порядка.

b) Сформулируйте в общем виде задачу о подсчёте количества раскрасок конфигураций, неэквивалентных относительно группы перестановок. Приведите пример такой задачи. Докажите лемму Бёрнсайда.

c) Дайте определение чисел Каталана. Обоснуйте рекуррентное соотношение для чисел Каталана. Сформулируйте обобщённую формулу бинома и примените её, чтобы представить функцию $\sqrt{1+x}$ в виде степенного ряда. Используя метод производящих функций, выведите формулу, выражающую числа Каталана через биномиальные коэффициенты. Какая асимптотика для чисел Каталана отсюда следует?

d) Сформулируйте теорему Эйлера о разности между количествами разбиений натурального числа на чётное и нечётное число различных слагаемых. Докажите с её помощью рекуррентное соотношение для количества неупорядоченных разбиений натуральных чисел.

e) Дайте определение простого многочлена над заданным полем. Сформулируйте и докажите теорему о числе простых нормированных многочленов над $\mathbb{Z}_p$.

f) Сформулируйте теорему Рамсея и дайте определение чисел Рамсея. Докажите теорему Франкла—Уилсона о числе независимости и кликовом числе «явного рамсеевского графа» (алгебраический метод).

g) Дайте определение хроматического числа и обхвата. Поясните, почему если обхват графа большой, то «локальное хроматическое число» у него маленькое. Докажите теорему Эрдёша о существовании графов с большим обхватом и хроматическим числом.

h) Дайте определение покрытия гиперграфа и покрытия матрицы, указав, как они связаны. Приведите жадный алгоритм построения покрытия. Докажите теорему об оценке мощности жадного покрытия. Докажите теорему о существовании «труднопокрываемых» матриц.

i) Докажите теорему Хаусслера—Вельцля.

Возможный второй вопрос билета

1. Определите комбинаторные числа C_n^k, A_n^k, $\overline{C}_n^k$, $\overline{A}_n^k$, числа Стирлинга второго рода и числа Белла. Приведите примеры задач, в которых возникают эти числа. Какие из чисел C_n^k, A_n^k, $\overline{C}_n^k$, $\overline{A}_n^k$ при фиксированном k и при $n \to \infty$ растут медленнее, а какие быстрее? Выпишите и обоснуйте формулу, выражающую число сочетаний с повторениями через число сочетаний без повторений.

2. Докажите формулу включения-исключения и неравенства Бонферрони с помощью характеристических функций.

3. Докажите основное рекуррентное соотношение для биномиальных коэффициентов. Докажите унимодальность последовательности биномиальных коэффициентов. Обоснуйте формулу бинома Ньютона и полиномиальную формулу.

4. Докажите оценки $(n/e)^n \leqslant n! \leqslant e \cdot (n/2)^n$. Какая из этих оценок, нижняя или верхняя, асимптотически ближе к истинному значению факториала?

5. Докажите оценку $\binom{n}{k} \lesssim \frac{n^k}{k!} \cdot e^{-O(k^2/n)}$. Докажите оценку $\sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k} \leqslant \frac{n^n}{r^r(n-r)^{n-r}}$ при $r \leqslant n/2$.

6. Что такое рекуррентное соотношение с постоянными коэффициентами? Как определяется его характеристический многочлен? Что такое общее решение рекуррентного соотношения? Докажите, что если все корни характеристического многочлена $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ различны, то общее решение рекуррентного соотношения имеет вид $c_1\lambda_1^k + \ldots + c_r\lambda_r^k$. Сформулируйте без доказательства утверждение о виде общего решения рекуррентного соотношения в случае, когда кратности корней произвольные.

7. Дайте определение универсальной двоичной последовательности порядка n. Докажите нижнюю оценку длины такой последовательности. Покажите, как построить такую последовательность с помощью графа де Брёйна (и обоснуйте корректность такого построения). Объясните, почему в графе де Брёйна всегда найдётся эйлеров цикл.

8. Дайте определение функции Мёбиуса. Докажите лемму о сумме значений функции Мёбиуса по всем делителям натурального числа. Сформулируйте и докажите теорему Мёбиуса об обращении.

9. Сформулируйте (не доказывая) «арифметическую» теорему Мёбиуса об обращении. Докажите справедливость формулы для числа циклических слов и выведите из неё асимптотику для числа циклических слов в алфавите фиксированной мощности при стремящейся к бесконечности длине слов.

10. Пусть $p(N; n_1, \ldots, n_s)$ означает количество неупорядоченных разбиений числа N на слагаемые из множества $\{n_1, \ldots, n_s\}$. Докажите простое рекуррентное соотношение для $p(\ldots)$. Используя диаграммную технику, докажите какие-нибудь три теоремы о равенствах между количествами разбиений со специальными свойствами. Докажите теорему Эйлера о разности между количествами разбиений натурального числа на чётное и нечётное число различных слагаемых.

11. Дайте определение формального степенного ряда. Определите произведение и частное (когда оно существует) формальных степенных рядов. Дайте определение производящей функции и покажите, как можно применять метод производящих функций, на примере вычисления суммы $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \frac{k^2}{2^k}$. Докажите рациональность производящей функции последовательности, удовлетворяющей линейному рекуррентному соотношению с постоянными коэффициентами.

12. Дайте основное определение группы (через существование обратного и нейтрального элементов). Приведите пример какой-нибудь конечной и бесконечной группы. Докажите единственность нейтрального элемента. Докажите, что у любого элемента группы обратный элемент единственен. Сформулируйте определение изоморфизма групп и приведите пример пары изоморфных групп. Дайте определение подгруппы. Докажите, что «сдвиг» множества не меняет его мощность. Докажите теорему Лагранжа о порядке подгруппы.

13. Сформулируйте «альтернативное» определение группы (существование решений уравнений) и докажите, что оно эквивалентно «основному» определению (существование обратного и нейтрального элементов). Дайте определение подгруппы. Дайте определение симметрической группы. Сформулируйте и докажите теорему Кэли.

14. Дайте определения аддитивной и мультипликативной групп вычетов. Дайте определение порядка элемента группы. Докажите, что у каждого элемента конечной группы есть конечный порядок. Докажите, что в конечной группе множество всех степеней (в мультипликативных обозначениях) фиксированного элемента образует подгруппу, изоморфную аддитивной группе вычетов.

15. Дайте определение мультипликативной группы вычетов. Сформулируйте теорему Лагранжа. Дайте определение функции Эйлера. Докажите теорему Эйлера—Ферма.

16. Дайте определение поля. Докажите, что в поле для любого a выполнены равенства $a \cdot 0 = a$ и $(-1) \cdot a = -a$. Дайте определение простого многочлена над заданным полем. Сформулируйте теорему о разложении многочлена на простые. Опишите, как строится конечное поле $\mathbb{Z}_p[x]/Q$ по многочлену Q, неприводимому над $\mathbb{Z}_p$, и докажите, что это действительно поле.

17. Сформулируйте в общем виде задачу о подсчёте количества раскрасок конфигураций, неэквивалентных относительно группы перестановок. Приведите пример такой задачи. Докажите теорему Пойи, используя без доказательства лемму Бёрнсайда.

18. Дайте определение изоморфизма простых графов и автоморфизма графа. Приведите пример графа с какой-нибудь нетривиальной группой автоморфизмов. Обоснуйте, почему количество графов на n занумерованных вершинах, изоморфных заданному n-вершинному графу G, равно $\frac{n!}{|Aut(G)|}$. Докажите верхнюю оценку числа неизоморфных n-вершинных деревьев вида 4^n (используя переход к правильным скобочным последовательностям).

19. Дайте определения эйлеровых и гамильтоновых циклов в графе. Сформулируйте критерий существования эйлерова цикла в графе и докажите корректность алгоритма Флёри для построения эйлерова цикла в графе. Докажите теорему Оре о достаточных условиях существования гамильтонова цикла в графе.

20. Дайте определения укладки графа на плоскости, планарного графа, хроматического числа. Докажите формулу Эйлера для планарных связных графов. Докажите существование в планарных графах вершин степени $\leqslant 5$. Докажите теорему о пяти красках.

21. Дайте определение хроматического числа и хроматического индекса. Докажите оценки этих величин, которые были на лекции. Приведите жадный алгоритм раскраски вершин графа. Без доказательства сформулируйте теоремы Брукса и Визинга. Дайте определение хроматического многочлена и докажите рекуррентное соотношение для него.

22. Дайте определение двудольного графа, паросочетания, хроматического индекса. Докажите теорему Холла о паросочетаниях в двудольных графах, основываясь на понятии чередующихся цепей. Выведите из теоремы Холла теорему Кёнига о хроматическом индексе двудольного графа.

23. Докажите утверждение о делении многочленов, на котором основывается доказательство теоремы Алона. Докажите теорему Алона о существовании необнуляющего набора. Выведите из теоремы Алона теорему Алона—Фюреди о покрытии вершин гиперкуба гиперплоскостями.

24. Выведите из теоремы Алона теорему Коши—Давенпорта о мощности суммы и теорему Алона—Фридланда—Калаи о существовании регулярных подграфов.

25. Докажите теорему Турана о количестве рёбер в графах с ограниченным кликовым числом. Дайте определение чисел Заранкевича в терминах двудольных матриц и в терминах графов. Докажите вероятностную нижнюю оценку чисел Заранкевича.

26. Дайте определение чисел Заранкевича в терминах двудольных матриц и в терминах графов. Докажите верхнюю и нижнюю алгебраические оценки числа Заранкевича $Z_2(m)$ для чисел m специального вида. Сформулируйте без доказательства теорему Бейкера—Хармана—Пинца и выведите отсюда асимптотику $Z_2(m)$.

27. Докажите теорему Рамсея, сформулировав её предварительно в терминах раскрасок и в терминах кликового числа и числа независимости. Дайте определение чисел Рамсея и докажите их верхнюю оценку через биномиальный коэффициент. Докажите вероятностную нижнюю оценку (не использующую лемму Ловаса).

28. Дайте определение орграфа зависимостей. Докажите локальную лемму Ловаса в общем случае и выведите из неё справедливость леммы в формулировке для симметричного случая. Покажите, как лемма Ловаса применяется в оценке диагональных чисел Рамсея и чисел $R(s, 3)$.

29. Докажите теорему Вея о нижней оценке числа независимости. Докажите теорему о нижней оценке числа скрещиваний (с помощью вероятностного метода).

30. Дайте определение частично упорядоченного множества. Дайте определение булеана, булева куба. Докажите теорему Лубелла—Ямамото—Мешалкина о верхней оценке мощности антицепи в булеане. Докажите теорему Шпернера. Докажите теорему о том, что минимальное число антицепей, на которые можно разложить ч. у. м., равно максимальной длине цепи.

31. Докажите теорему Дилуорта о том, что минимальное число цепей, на которые можно разложить ч. у. м., равно максимальной мощности антицепи. Выведите из неё теорему Холла о паросочетаниях в двудольных графах.

32. Дайте определение t-пересекающегося гиперграфа. Докажите теорему Эрдёша—Ко—Радо о числе рёбер в 1-пересекающемся гиперграфе. Сформулируйте теорему Альсведе—Хачатряна о максимальном числе рёбер в t-пересекающемся гиперграфе и поясните, почему конструкция, рассматриваемая в теореме, действительно образует t-пересекающийся гиперграф.

33. Докажите теорему Фишера о числе рёбер в однородном гиперграфе, у которого каждая пара рёбер имеет одно и то же число общих вершин.

34. Дайте определение проекции семейства множеств на множество, измельчения семейства, VC-размерности семейства, ε-сети. Докажите теорему о максимальной мощности семейства с заданными VC-размерностью и мощностью домена. Докажите теорему о верхней оценке VC-размерности измельчения семейства через VC-размерность исходного семейства. Сформулируйте теорему Хаусслера—Вельцля о размере ε-сети. Докажите теорему о «запачканных треугольниках» на плоскости.