Дискретные структуры

МФТИ, осень 2013

Александр Дайняк

www.dainiak.com

Комбинаторные числа

- Количество размещений без повторений
$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$
- Количество размещений с повторениями
$$\bar{A}_n^k = n^k$$
- Количество сочетаний без повторений
$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$
- Количество сочетаний с повторениями
$$\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}$$
- Числа Стирлинга, Белла

Не всегда нужно знать точное значение

Сравним:

- «Мой алгоритм проработает 5 дней»
- Алгоритм проработал 6 дней

и

- «Мой алгоритм проработает 1000 дней»
- Алгоритм проработал 1001 день

Часто точное значение трудно вычислить

Сравним:

- «Мой алгоритм выполняет $\frac{\binom{2n}{n}}{n+1}$ обращений к жёсткому диску»
- «Алгоритм выполняет примерно $\frac{4^n}{n^{3/2}}$ обращений к жёсткому диску»

Нужно формализовать понятие «примерно»

- Рассматриваемые величины «очень большие» или растут с ростом некоторого общего параметра
- A *асимптотически равно* B, если относительная разница мала:
$$\frac{|A - B|}{B} \to 0$$
- Обозначение: $A \sim B$

(Если неясно из контекста, нужно указывать, по какому параметру берётся предел)

Примеры

Пусть $n \to \infty$. Тогда

- $n^2 + n \sim n^2$
- $2^n + n^n \sim n^n$
- $2n^2 \nsim n^2$

Скорости роста величин

- Логарифмическая: $\mathrm{const} \cdot \log n + o(\log n)$
- Полилогарифмическая: например, $(\log n)^7$
- Линейная: $\mathrm{const} \cdot n + o(n)$
- Квазилинейная: например, $10n \cdot \log n$
- Полиномиальная: например, $n^{25} + 2n^8$
- Экспоненциальная: например, $4^n \cdot 5n^9$
- и другие…

Сравнительные описания: *сверх*линейная, *суб*экспоненциальная и т.д.

Сравнение скоростей роста

Хочется формально описать соотношения:

- Функции n^2 и $2n^2$ не равны асимптотически, но «растут одинаково»
- Функция n растёт «существенно медленнее», чем n^2

- Функция $10000000 \cdot n$ всё равно растёт медленнее, чем $0.000001 \cdot n^2$

Сравнение скоростей роста

$$f(n) = O\big(g(n)\big)$$

- «$f(n)$ по порядку не превосходит $\mathrm{g}(n)$»

$f(n) \leq C \cdot g(n)$ начиная с некоторого n и для некоторой константы C. По-другому,

$$\frac{f(n)}{g(n)} \leq C$$

Примеры

- $n^2 + 2n = O\left(0.5 \cdot n^2\right)$,
  поскольку $n^2 + 2n \leq 10 \cdot 0.5 \cdot n^2$

- $n^2 = O\left(n^{25}\right)$

- $n \log n \neq O(n)$

Сравнение скоростей роста

Если $f(n) = O\big(g(n)\big)$, то это обозначается

$$g(n) = \Omega\big(f(n)\big)$$

Если $f(n) = O\big(g(n)\big)$ и $g(n) = O\big(f(n)\big)$, то

$$f(n) = \Theta\big(g(n)\big)$$

Примеры

- $0.5 \cdot n^2 = \Omega(n^2)$
- $n^3 = \Omega(n^2)$

- $n^2 = \Theta(3n^2 + 10n)$
- $n \log n \neq \Theta(n^2)$

Сравнение скоростей роста

$$f(n) = o\big(g(n)\big)$$

- «$f(n)$ по порядку меньше $g(n)$»

$$\frac{f(n)}{g(n)} \to 0$$

Примеры

- $2n = o\left(0.5 \cdot n^2\right)$

- $n = o(n \log n)$, поскольку $\frac{n}{n \log n} = \frac{1}{\log n} \to 0$

- $0.0001 \cdot n \neq o(n)$, поскольку $\frac{0.0001 \cdot n}{n} = 0.0001$

Сравнение скоростей роста

$$f(n) \lesssim g(n)$$

- «$f(n)$ асимптотически не больше $g(n)$»

$$\max\{0, f(n) - g(n)\} = o\big(g(n)\big)$$

или, по-другому,

Примеры

- $n^2 + n \lesssim n^2$

- $1.00001 \cdot n^2 \not\lesssim n^2$

Подытожим:

- $f(n) \sim g(n)$
- $f(n) \lesssim g(n)$
- $f(n) = o\big(g(n)\big)$
- $f(n) = O\big(g(n)\big)$
- $f(n) = \Omega\big(g(n)\big)$
- $f(n) = \Theta\big(g(n)\big)$

Что нам встречалось до сих пор:

- Количество размещений без повторений
$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$
- Количество размещений с повторениями
$$\bar{A}_n^k = n^k$$
- Количество сочетаний без повторений
$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$
- Количество сочетаний с повторениями
$$\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}$$
- Числа Стирлинга и Белла

Оценки для факториала

- Формула Стирлинга

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

где

$$\pi = 3.14 \ldots$$
$$e = 2.718 \ldots$$

Оценки для факториала

Более грубая, но простая оценка:
$$\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq e \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^n$$

Доказываем по индукции. При $n = 1$ всё верно. Переход в нижней оценке:
$$(n+1)! = n! \cdot (n+1) \geq \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot (n+1) = \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} \cdot e \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} =$$
$$= \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} \cdot e \cdot \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^{-1} > \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}$$

Переход в верхней оценке:
$$(n+1)! = n! \cdot (n+1) \leq e \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^n \cdot (n+1) = e \cdot \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1} \cdot 2\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} =$$
$$= e \cdot \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1} \cdot 2\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}$$

Оценки биномиальных коэффициентов

- $\binom{n}{k} \leq \left(\frac{en}{k}\right)^k$, где $e = 2.718 \ldots$

Доказательство:

$$\binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{k!} \leq \frac{n^k}{\left(\frac{k}{e}\right)^k} = \left(\frac{en}{k}\right)^k$$

Оценки биномиальных коэффициентов

- Применим формулу Стирлинга $n! \sim \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$ для оценки чисел $\binom{n}{k}$

Если $n = a \cdot k$, получаем

$$\binom{ak}{k} = \frac{(ak)!}{k!(ak-k)!} \sim \frac{\sqrt{2\pi ak}\cdot\left(\frac{ak}{e}\right)^{ak}}{\sqrt{2\pi k}\cdot\left(\frac{k}{e}\right)^{k}\sqrt{2\pi(a-1)k}\cdot\left(\frac{(a-1)k}{e}\right)^{(a-1)k}} \sim \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2\pi(a-1)k}} \cdot \frac{a^{ak}}{(a-1)^{(a-1)k}} =$$

$$= \sqrt{\frac{a}{2\pi(a-1)}} \cdot k^{-1/2} \cdot \left(\frac{a^a}{(a-1)^{a-1}}\right)^k$$

Оценки биномиальных коэффициентов

- Ещё одна полезная оценка получается, если применить неравенство $\ln(1-x) < -x$

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot\big(n-(k-1)\big)}{k!} =$$

$$= \frac{n^k}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) = \frac{n^k}{k!}e^{\ln\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right)} =$$

$$= \frac{n^k}{k!}e^{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1-\frac{k-1}{n}\right)} < \frac{n^k}{k!}e^{-\frac{1}{n}-\frac{2}{n}-\cdots-\frac{k-1}{n}} = \frac{n^k}{k!}e^{-\frac{k(k-1)}{2n}}$$

Оценки биномиальных коэффициентов

Мы только что вывели оценку:

$$\binom{n}{k} < \frac{n^k}{k!} e^{-\frac{k(k-1)}{2n}} = \frac{n^k}{k!} e^{-O(k^2/n)}$$

Если при выводе этой оценки вместо неравенства $\ln(1-x) < -x$ использовать $\ln(1-x) > -x - x^2$, то получим

$$\binom{n}{k} > \frac{n^k}{k!} e^{-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}-\frac{2}{n}-\frac{2^2}{n^2}-\cdots-\frac{k-1}{n}-\frac{(k-1)^2}{n^2}} = \frac{n^k}{k!} e^{-\frac{k(k-1)}{2n}-\frac{1}{n^2}\cdot\sum_{i\le k} i^2} >$$

$$> \frac{n^k}{k!} e^{-\frac{k^2}{2n}-O\left(\frac{k^3}{n^2}\right)}$$

Оценки биномиальных коэффициентов

Итак,

$$\frac{n^k}{k!} e^{-\frac{k^2}{2n} - O\left(\frac{k^3}{n^2}\right)} < \binom{n}{k} < \frac{n^k}{k!} e^{-\Omega(k^2/n)}$$

Следствие. При $k = o(\sqrt{n})$ имеем $\binom{n}{k} \sim \frac{n^k}{k!}$.

Суммы биномиальных коэффициентов

Утверждение. При любом $r \le \frac{n}{2}$, выполнено неравенство

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k} \le \frac{n^n}{r^r (n-r)^{n-r}}$$

Доказательство:

Для любого $t \le 1$ выполнены неравенства

$$t^{-r}(t+1)^n = t^{-r} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k \ge \sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k} t^{k-r} \ge \sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k}$$

При $r \le n/2$, полагая $t = \frac{r}{n-r}$, получим

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k} \le \left(\frac{n-r}{r}\right)^r \cdot \left(\frac{n}{n-r}\right)^n = \frac{n^n}{r^r (n-r)^{n-r}}$$

Оценки для чисел Стирлинга и Белла (без доказательства)

- При $k = const$ и $n \to \infty$

$$\left\{ n \atop k \right\} \sim c(k) \cdot k^n \cdot \binom{n}{k}$$

- Для всех n

$$B_n < \left(\frac{0.8n}{\ln n} \right)^n$$