Дискретные структуры. Учебный год 2012—2013.

Билеты устной части итогового экзамена

1. (a) Определите комбинаторные числа C_n^k, A_n^k, $\overline{C}_n^k$, $\overline{A}_n^k$, числа Стирлинга второго рода и числа Белла. Приведите примеры задач, в которых возникают эти числа. Какие из чисел C_n^k, A_n^k, $\overline{C}_n^k$, $\overline{A}_n^k$ при фиксированном k и при $n \to \infty$ растут медленнее, а какие быстрее? Выпишите и обоснуйте формулу, выражающую число сочетаний с повторениями через число сочетаний без повторений.

   (b) Дайте определение t-пересекающегося гиперграфа. Докажите теорему Эрдёша—Ко—Радо о числе рёбер в 1-пересекающемся гиперграфе. Сформулируйте теорему Альсведе—Хачатряна о максимальном числе рёбер в t-пересекающемся гиперграфе и поясните, почему конструкция, рассматриваемая в теореме, действительно образует t-пересекающийся гиперграф.

2. (a) Докажите основное рекуррентное соотношение для биномиальных коэффициентов. Докажите унимодальность последовательности биномиальных коэффициентов. Обоснуйте формулу бинома Ньютона и полиномиальную формулу.

   (b) Дайте определение проекции семейства множеств на множество, измельчения семейства, VC-размерности семейства, ε-сети. Докажите теорему о максимальной мощности семейства с заданными VC-размерностью и мощностью домена. Докажите теорему о верхней оценке VC-размерности измельчения семейства через VC-размерность исходного семейства. Сформулируйте теорему Хаусслера—Вельцля о размере ε-сети. Докажите теорему о «запачканных треугольниках» на плоскости.

3. (a) Докажите оценки $(n/e)^n \leqslant n! \leqslant e \cdot (n/2)^n$. Какая из этих оценок, нижняя или верхняя, асимптотически ближе к истинному значению факториала?

   (b) Дайте определение хроматического числа и обхвата. Поясните, почему если обхват графа большой, то «локальное хроматическое число» у него маленькое. Докажите теорему Эрдёша о существовании графов с большим обхватом и хроматическим числом.

4. (a) Докажите оценку $\binom{n}{k} \lesssim \frac{n^k}{k!} \cdot e^{-O(k^2/n)}$. Докажите оценку $\sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k} \leqslant \frac{n^n}{r^r (n-r)^{n-r}}$ при $r \leqslant n/2$.

   (b) Выведите из теоремы Алона теорему Коши—Давенпорта о мощности суммы и теорему Алона—Фридланда—Калаи о существовании регулярных подграфов.

5. (a) Что такое рекуррентное соотношение с постоянными коэффициентами? Как определяется его характеристический многочлен? Что такое общее решение рекуррентного соотношения? Докажите, что если все корни характеристического многочлена $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ различны, то общее решение рекуррентного соотношения имеет вид $c_1\lambda_1^k + \ldots + c_r\lambda_r^k$. Сформулируйте без доказательства утверждение о виде общего решения рекуррентного соотношения в случае, когда кратности корней произвольные.

   (b) Докажите теорему Дилуорта о том, что минимальное число цепей, на которые можно разложить ч. у. м., равно максимальной мощности антицепи. Выведите из неё теорему Холла о паросочетаниях в двудольных графах.

6. (a) Дайте определение универсальной двоичной последовательности порядка n. Докажите нижнюю оценку длины такой последовательности. Покажите, как построить такую последовательность с помощью графа де Брёйна. Объясните, почему в графе де Брёйна всегда найдётся эйлеров цикл.

   (b) Докажите теорему Вея о нижней оценке числа независимости. Докажите теорему о нижней оценке числа скрещиваний (с помощью вероятностного метода).

7. (a) Дайте определение функции Мёбиуса. Докажите лемму о сумме значений функции Мёбиуса по всем делителям натурального числа. Сформулируйте и докажите теорему Мёбиуса об обращении.

   (b) Докажите утверждение о делении многочленов, на котором основывается доказательство теоремы Алона. Докажите теорему Алона о существовании необнуляющего набора. Выведите из теоремы Алона теорему о покрытии вершин гиперкуба гиперплоскостями.

8. (a) Сформулируйте (не доказывая) теорему Мёбиуса об обращении. Докажите справедливость формулы для числа циклических слов и выведите из неё асимптотику для числа циклических слов в алфавите фиксированной мощности при стремящейся к бесконечности длине слов.

   (b) Дайте определение чисел Заранкевича в терминах двудольных матриц и в терминах графов. Докажите верхнюю и нижнюю алгебраические оценки числа Заранкевича $Z_2(m)$ для чисел m специального вида. Сформулируйте без доказательства теорему Бейкера—Хармана—Пинца и выведите отсюда асимптотику $Z_2(m)$.

9. (a) Дайте определение хроматического числа и хроматического индекса. Докажите оценки этих величин, которые были на лекции. Приведите жадный алгоритм раскраски вершин графа. Без доказательства сформулируйте теоремы Брукса и Визинга. Дайте определение хроматического многочлена и докажите рекуррентное соотношение для него.

   (b) Сформулируйте теорему Рамсея и дайте определение чисел Рамсея. Докажите теорему о числе независимости и кликовом числе «явного рамсеевского графа» (алгебраический метод).

10. (a) Пусть $p(N;\, n_1, \ldots, n_s)$ означает количество неупорядоченных разбиений N на слагаемые из множества $\{n_1, \ldots, n_s\}$. Докажите рекуррентное соотношение для $p(\ldots)$. Используя диаграммную технику, докажите три теоремы о равенствах между количествами разбиений со специальными свойствами. Докажите теорему Эйлера о разности между количествами разбиений натурального числа на чётное и нечётное число различных слагаемых.

    (b) Дайте определение частично упорядоченного множества. Дайте определение булеана, булева куба. Докажите теорему Лубелла—Ямамото—Мешалкина о верхней оценке мощности антицепи в булеане. Докажите теорему Шпернера. Докажите теорему о том, что минимальное число антицепей, на которые можно разложить ч. у. м., равно максимальной длине цепи.

11. (a) Дайте определение формального степенного ряда. Определите произведение и частное (когда оно существует) формальных степенных рядов. Дайте определение производящей функции и покажите, как можно применять метод производящих функций, на примере вычисления суммы $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \frac{k^2}{2^k}$.

    (b) Докажите теорему Турана о количестве рёбер в графах с ограниченным кликовым числом. Дайте определение чисел Заранкевича в терминах двудольных матриц и в терминах графов. Докажите вероятностную нижнюю оценку чисел Заранкевича.

12. (a) Дайте определение чисел Каталана. Обоснуйте рекуррентное соотношение для чисел Каталана. Сформулируйте обобщённую формулу бинома и примените её для получения ряда для $\sqrt{1+x}$. Используя метод производящих функций, выведите формулу, выражающую числа Каталана через биномиальные коэффициенты. Какая асимптотика для чисел Каталана отсюда следует?

    (b) Докажите теорему Рамсея, сформулировав её предварительно в терминах раскрасок и в терминах кликового и хроматического числа. Дайте определение чисел Рамсея и докажите их верхнюю оценку через биномиальный коэффициент. Докажите вероятностную нижнюю оценку (не использующую лемму Ловаса).

13. (a) Дайте основное определение группы (через существование обратного и нейтрального элементов). Приведите пример какой-нибудь конечной и бесконечной группы. Докажите единственность нейтрального элемента. Докажите, что у любого элемента группы обратный элемент единственен. Сформулируйте определение изоморфизма групп и приведите пример пары изоморфных групп. Дайте определение подгруппы. Докажите, что «сдвиг» множества не меняет его мощность. Докажите теорему Лагранжа о порядке подгруппы.

    (b) Дайте определение орграфа зависимостей. Докажите локальную лемму Ловаса в общем случае и выведите из неё справедливость леммы в формулировке для симметричного случая. Покажите, как лемма Ловаса применяется в оценке диагональных чисел Рамсея и чисел $R(s,3)$.

14. (a) Дайте определение двудольного графа, паросочетания, хроматического индекса. Докажите теорему Холла о паросочетаниях в двудольных графах, основываясь на понятии чередующихся цепей. Выведите из теоремы Холла теорему Кёнига о хроматическом индексе двудольного графа.

    (b) Дайте определение t-пересекающегося гиперграфа. Докажите теорему Эрдёша—Ко—Радо о числе рёбер в 1-пересекающемся гиперграфе. Сформулируйте теорему Альсведе—Хачатряна о максимальном числе рёбер в t-пересекающемся гиперграфе и поясните, почему конструкция, рассматриваемая в теореме, действительно образует t-пересекающийся гиперграф.

15. (a) Дайте определения укладки графа на плоскости, планарного графа, хроматического числа. Докажите формулу Эйлера для планарных связных графов. Докажите существование в планарных графах вершин степени $\leqslant 5$. Докажите теорему о пяти красках.

    (b) Дайте определение проекции семейства множеств на множество, измельчения семейства, VC-размерности семейства, ε-сети. Докажите теорему о максимальной мощности семейства с заданными VC-размерностью и мощностью домена. Докажите теорему о верхней оценке VC-размерности измельчения семейства через VC-размерность исходного семейства. Сформулируйте теорему Хаусслера—Вельцля о размере ε-сети. Докажите теорему о «запачканных треугольниках» на плоскости.

16. (a) Дайте определения эйлеровых и гамильтоновых циклов в графе. Сформулируйте критерий существования эйлерова цикла в графе и докажите корректность алгоритма Флёри для построения эйлерова цикла в графе. Докажите теорему Оре о достаточных условиях существования гамильтонова цикла в графе.

    (b) Дайте определение хроматического числа и обхвата. Поясните, почему если обхват графа большой, то «локальное хроматическое число» у него маленькое. Докажите теорему Эрдёша о существовании графов с большим обхватом и хроматическим числом.

17. (a) Дайте определение изоморфизма простых графов и автоморфизма графа. Приведите пример графа с какой-нибудь нетривиальной группой автоморфизмов. Обоснуйте, почему количество графов на n занумерованных вершинах, изоморфных заданному n-вершинному графу G, равно $\frac{n!}{|Aut(G)|}$. Докажите верхнюю оценку числа неизоморфных n-вершинных деревьев вида 4^n (используя переход к правильным скобочным последовательностям).

    (b) Выведите из теоремы Алона теорему Коши—Давенпорта о мощности суммы и теорему Алона—Фридланда—Калаи о существовании регулярных подграфов.

18. (a) Сформулируйте в общем виде задачу о подсчёте количества раскрасок конфигураций, неэквивалентных относительно группы перестановок. Приведите пример такой задачи. Докажите теорему Пойи, используя без доказательства лемму Бёрнсайда.

    (b) Докажите теорему Дилуорта о том, что минимальное число цепей, на которые можно разложить ч. у. м., равно максимальной мощности антицепи. Выведите из неё теорему Холла о паросочетаниях в двудольных графах.

19. (a) Сформулируйте в общем виде задачу о подсчёте количества раскрасок конфигураций, неэквивалентных относительно группы перестановок. Приведите пример такой задачи. Докажите лемму Бёрнсайда.

    (b) Докажите теорему Вея о нижней оценке числа независимости. Докажите теорему о нижней оценке числа скрещиваний (с помощью вероятностного метода).

20. (a) Дайте определение простого многочлена над заданным полем. Сформулируйте и докажите теорему о числе простых нормированных многочленов над $\mathbb{Z}_p$.

    (b) Докажите утверждение о делении многочленов, на котором основывается доказательство теоремы Алона. Докажите теорему Алона о существовании необнуляющего набора. Выведите из теоремы Алона теорему о покрытии вершин гиперкуба гиперплоскостями.

21. (a) Дайте определение поля. Докажите, что в поле для любого a выполнены равенства $a \cdot 0 = a$ и $(-1) \cdot a = -a$. Дайте определение простого многочлена над заданным полем. Сформулируйте теорему о разложении многочлена на простые. Опишите, как строится конечное поле $\mathbb{Z}_p[x]/Q$ по многочлену Q, неприводимому над $\mathbb{Z}_p$, и докажите, что это действительно поле.

    (b) Дайте определение чисел Заранкевича в терминах двудольных матриц и в терминах графов. Докажите верхнюю и нижнюю алгебраические оценки числа Заранкевича $Z_2(m)$ для чисел m специального вида. Сформулируйте без доказательства теорему Бейкера—Хармана—Пинца и выведите отсюда асимптотику $Z_2(m)$.

22. (a) Дайте определение мультипликативной группы вычетов. Сформулируйте теорему Лагранжа. Дайте определение функции Эйлера. Докажите теорему Эйлера—Ферма.

    (b) Сформулируйте теорему Рамсея и дайте определение чисел Рамсея. Докажите теорему о числе независимости и кликовом числе «явного рамсеевского графа» (алгебраический метод).

23. (a) Дайте определения аддитивной и мультипликативной групп вычетов. Дайте определение порядка элемента группы. Докажите, что у каждого элемента конечной группы есть конечный порядок. Докажите, что в конечной группе множество всех степеней (в мультипликативных обозначениях) фиксированного элемента образует подгруппу, изоморфную аддитивной группе вычетов.

    (b) Дайте определение частично упорядоченного множества. Дайте определение булеана, булева куба. Докажите теорему Лубелла—Ямамото—Мешалкина о верхней оценке мощности антицепи в булеане. Докажите теорему Шпернера. Докажите теорему о том, что минимальное число антицепей, на которые можно разложить ч. у. м., равно максимальной длине цепи.

24. (a) Дайте определение покрытия гиперграфа и покрытия матрицы, указав, как они связаны. Приведите жадный алгоритм построения покрытия. Докажите теорему об оценке мощности жадного покрытия. Докажите теорему о труднопокрываемых матрицах.

    (b) Докажите теорему Турана о количестве рёбер в графах с ограниченным кликовым числом. Дайте определение чисел Заранкевича в терминах двудольных матриц и в терминах графов. Докажите вероятностную нижнюю оценку чисел Заранкевича.

25. (a) Сформулируйте «альтернативное» (через существование решений уравнений) определение группы и докажите, что оно эквивалентно «основному» (через существование обратного и нейтрального элементов). Дайте определение подгруппы. Дайте определение симметрической группы. Сформулируйте и докажите теорему Кэли.

    (b) Докажите теорему Рамсея, сформулировав её предварительно в терминах раскрасок и в терминах кликового и хроматического числа. Дайте определение чисел Рамсея и докажите их верхнюю оценку через биномиальный коэффициент. Докажите вероятностную нижнюю оценку (не использующую лемму Ловаса).

26. (a) Дайте основное определение группы (через существование обратного и нейтрального элементов). Дайте определение подгруппы. Докажите теорему Силова о существовании подгрупп заданного порядка.

    (b) Дайте определение орграфа зависимостей. Докажите локальную лемму Ловаса в общем случае и выведите из неё справедливость леммы в формулировке для симметричного случая. Покажите, как лемма Ловаса применяется в оценке диагональных чисел Рамсея и чисел $R(s, 3)$.