

Основы теории графов

осень 2013

Александр Дайняк

www.dainiak.com

Укладки графов

Укладкой графа на поверхности называется сопоставление

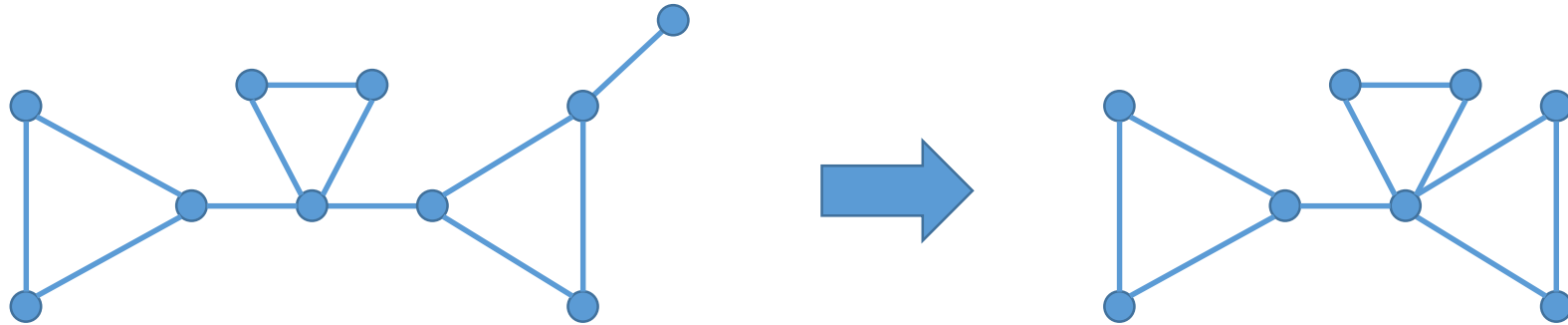
- вершинам графа — точек поверхности
- рёбрам графа — гладких кривых без самопересечений

так, чтобы кривые, соответствующие рёбрам, не пересекались (за исключением, быть может, своих концов).

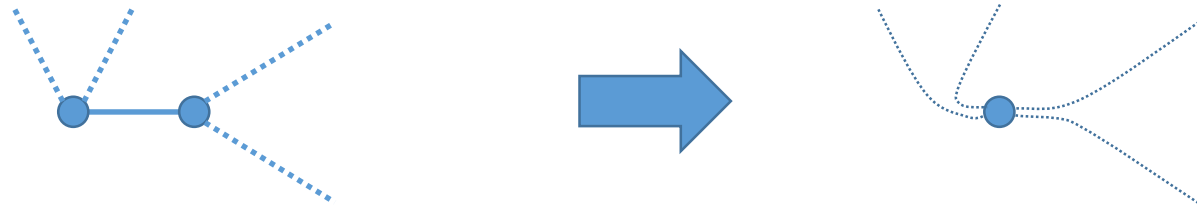
По умолчанию в качестве поверхности рассматривается плоскость.

Стягивание рёбер

- Граф G является *стягиваемым* к графу G' , если G' можно получить из G , применив некоторое количество раз операцию стягивания ребра

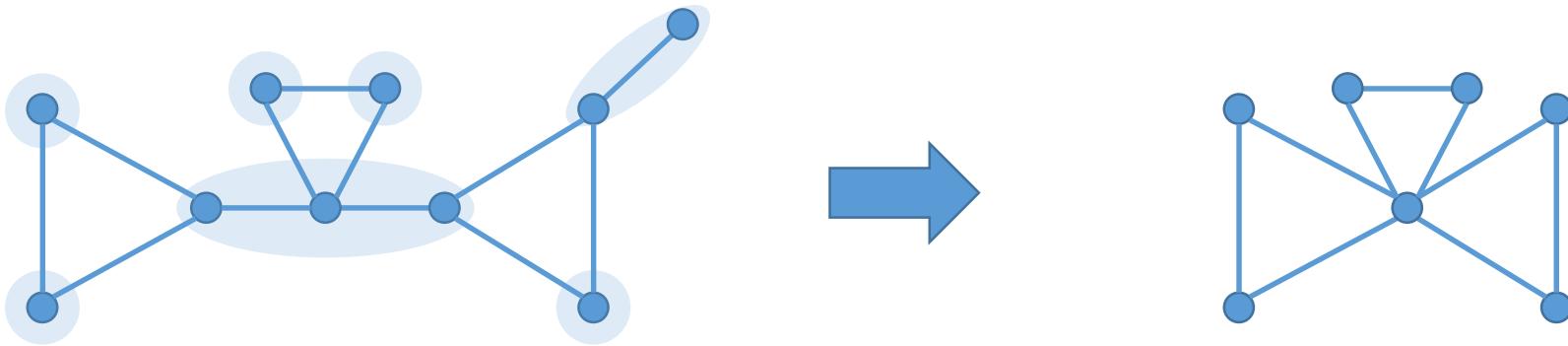


- Если граф G планарен, то и граф G' планарен:



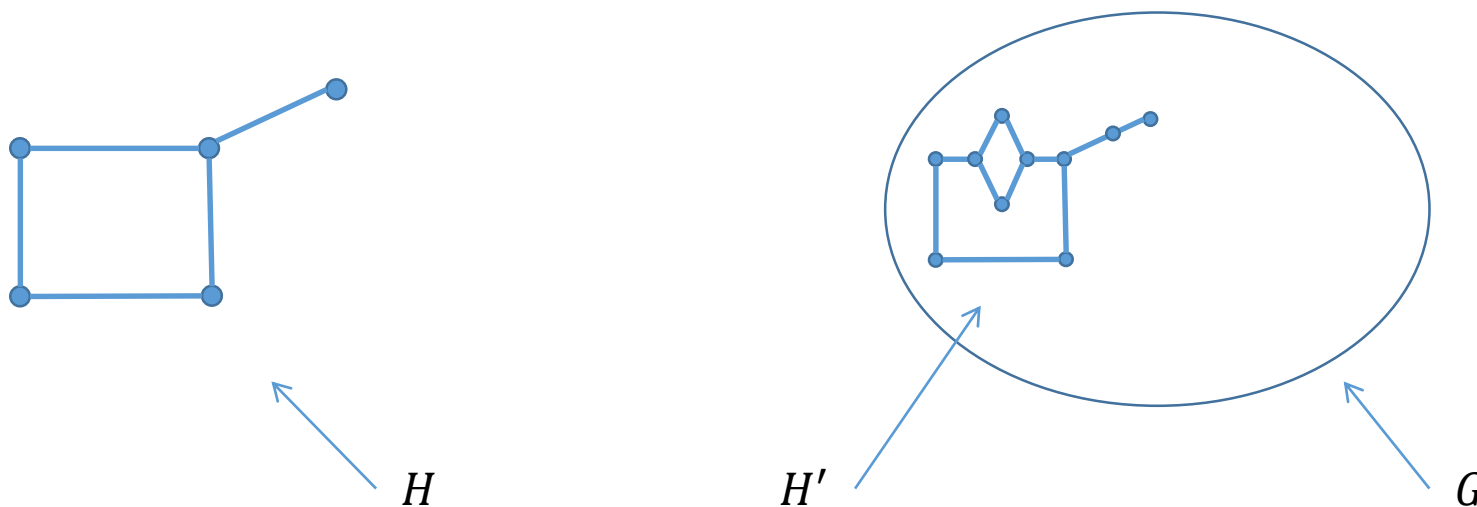
Стягивание рёбер

- Граф G является стягиваемым к графу G' , если вершины графа G можно разбить на связные множества, каждое из которых соответствует одной вершине графа G' , и при этом $(u, v) \in E(G')$, если между соответствующими множествами в G есть ребро.



Миноры

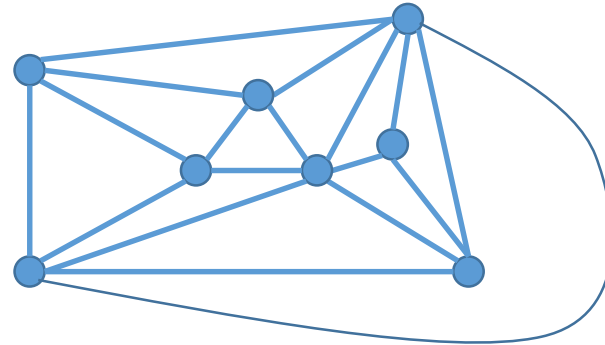
- Граф H является *минором* графа G , если в G есть подграф H' , который можно стянуть к H



- Критерий Вагнера.** Граф планарен тогда и только тогда, когда K_5 и $K_{3,3}$ не являются его минорами.

Триангуляции

Триангуляция — это граф, в укладке которого каждая грань ограничена треугольником (в «графовом», а не геометрическом смысле).



Триангуляции

Утверждение.

Если в планарном графе минимальная длина циклов равна t , то

$$\text{\#рёбер} \leq \frac{t}{t-2} \cdot (\text{\#вершин} - 2)$$

Следствие.

В любом планарном графе на n ($n \geq 3$) вершинах число рёбер не превосходит $(3n - 6)$

Триангуляции

Утверждение.

Если в планарном графе на n вершинах менее $(3n - 6)$ рёбер, то в граф можно добавить ребро, так, чтобы он остался планарным.

Доказательство.

Если в графе менее $(3n - 6)$ рёбер, то в его укладке есть грань, граница которой не является треугольником.

В этой грани можно провести новое ребро.

Триангуляции

Утверждение.

Если в планарном графе на n вершинах менее $(3n - 6)$ рёбер, то в граф можно добавить ребро, так, чтобы он остался планарным.

Утверждение.

В любой триангуляции на n вершинах ровно $(3n - 6)$ рёбер.

Утверждение.

Любой планарный граф является подграфом некоторой триангуляции.

Триангуляции трёхсвязны

Утверждение.

Любая триангуляция (на более чем трёх вершинах) трёхсвязна.

Доказательство.

Пусть G — триангуляция.

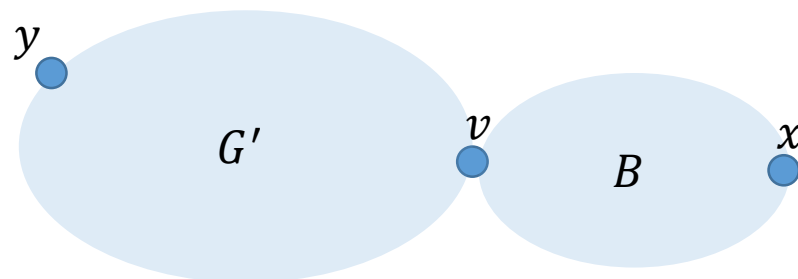
Предположим, что граф G не трёхсвязен, и придём к противоречию.

Триангуляции трёхсвязны

Если G не двухсвязен, то в G есть концевой блок B , имеющий с остальной частью G' графа G единственную общую точку сочленения v . Рассмотрим укладку G , в которой v лежит на внешней грани.

У B и G' есть соответственно вершины x и y ($x, y \neq v$) на внешней грани. При этом $xy \notin E(G)$, но можно добавить ребро xy в укладку.

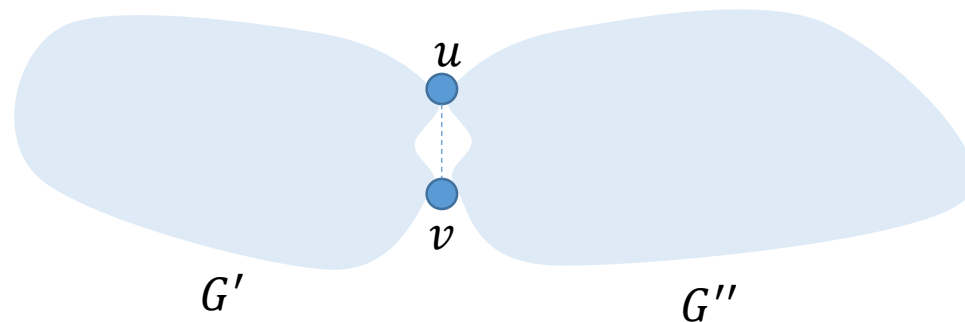
Это противоречит тому, что триангуляция является *максимальным* планарным графом.



Триангуляции трёхсвязны

Итак, G двухсвязен.

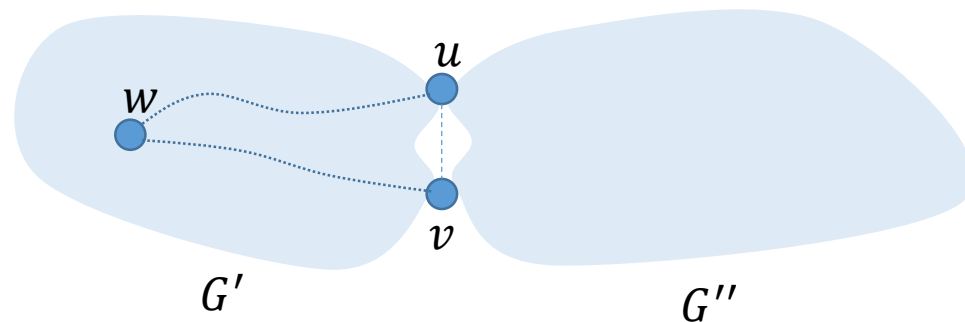
Если G не трёхсвязен, то можно выделить подграф G' , который имеет с остальной частью G'' графа G только две общие вершины u, v .



Триангуляции трёхсвязны

Пусть w — произвольная вершина G' , отличная от u, v .

В двусвязном графе G есть путь из u в v , проходящий через w .
Очевидно, этот путь целиком лежит в G' .

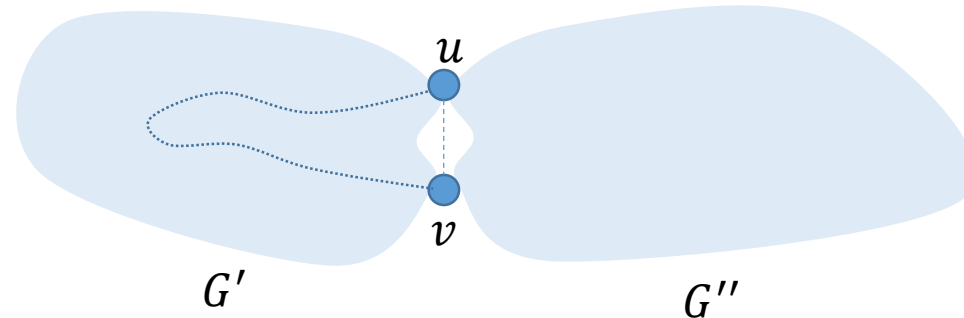


Триангуляции трёхсвязны

В G' есть путь из u в v . Следовательно, граф $(G'' + uv)$ является минором G .

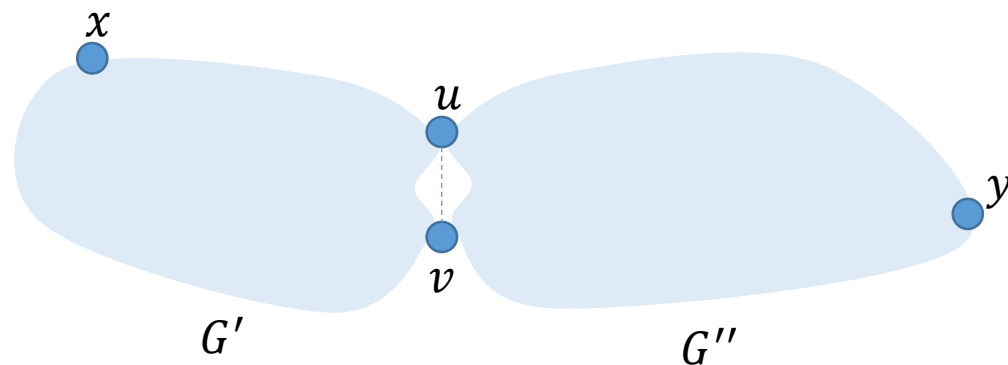
Аналогично, $(G' + uv)$ является минором G .

Т.к. G планарен, то графы $(G' + uv)$ и $(G'' + uv)$ планарны.



Триангуляции трёхсвязны

Возьмём укладки графов $(G' + uv)$ и $(G'' + uv)$, в которых ребро uv лежит на границе внешней грани. Из них можно построить укладку G , в которой на внешней грани есть пара вершин x и y , отличных от u, v , и не соединённых ребром. Это противоречит тому, что G — триангуляция.



Укладки двусвязных графов

Утверждение.

В любой укладке двусвязного графа граница каждой грани является простым циклом.

Доказательство:

Если бы граница грани содержала точку сочленения, то она была бы точкой сочленения и во всём графе.

Значит, граница грани двусвязна. Осталось заметить, что любой двусвязный граф, не содержащий θ -подграфа, суть простой цикл.

Укладки трёхсвязных графов

Теорема. (Tutte '1963)

В укладке трёхсвязного планарного графа G подграф B образует границу грани t и т.т., когда выполнены два условия:

- B является порождённым простым циклом в G (то есть у B нет «хорд» в G),
- граф $(G - B)$ связан.

Укладки трёхсвязных графов

Доказательство:

Зафиксируем произвольную плоскую укладку трёхсвязного графа G .

Пусть C — цикл, не являющийся границей грани. Тогда есть непустые множества рёбер внутри C и снаружи C .

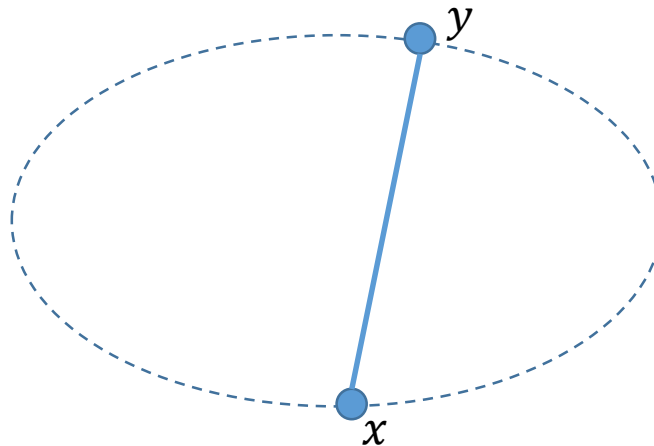
Получаем, что либо у C есть хорда, либо найдутся какие-то вершины u и v внутри и снаружи C соответственно. Любой путь из u в v пересекает C , а значит граф $(G - C)$ не будет связным.

Укладки трёхсвязных графов

Пусть B — цикл, являющийся границей грани.

Можно считать, что B — граница внешней грани укладки G .

Если у B есть хорда xu , то граф $(G - \{x, u\})$ несвязен — противоречие с трёхсвязностью G :



Укладки трёхсвязных графов

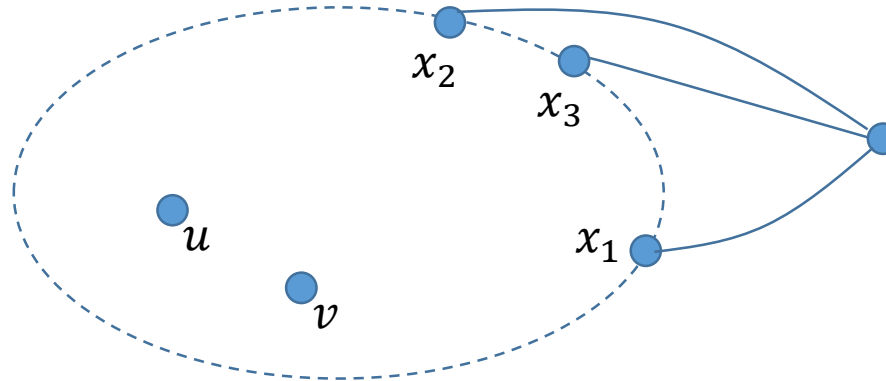
Итак, у B нет хорд. Осталось доказать связность графа $(G - B)$.

Допустим противное. Тогда существуют $u, v \in V(G - C)$, такие, что любой путь из u в v имеет с B общую вершину.

Так как G трёхсвязен, то найдутся пути P_1, P_2, P_3 между u и v без общих внутренних вершин. Пусть x_i — любая из общих вершин пути P_i и цикла B .

Укладки трёхсвязных графов

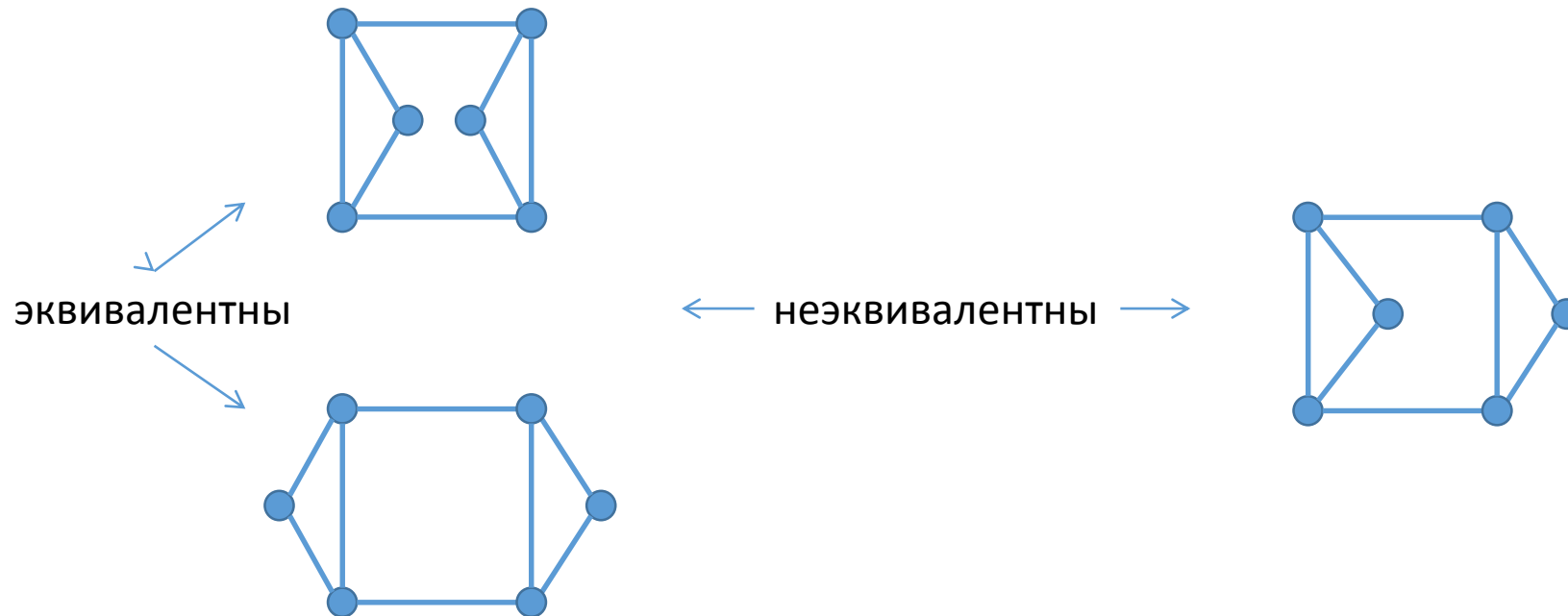
Получаем, что в G есть не пересекающиеся по внутренним вершинам пути из u, v в каждую из вершин x_1, x_2, x_3 . Возьмём точку вне B и соединим её с x_1, x_2, x_3 .



Получили укладку графа, гомеоморфного $K_{3,3}$ — противоречие. Теорема Татта доказана.

Укладки трёхсвязных графов

Две укладки одного графа называются *эквивалентными*, если в них наборы рёбер, ограничивающих грани, совпадают:



Укладки трёхсвязных графов

Из доказанной теоремы Татта сразу следует

Теорема. (Whitney '1933)

Укладка любого *трёхсвязного* планарного графа единственна с точностью до эквивалентности.

Следствие из теоремы Уитни.

Во всех укладках одной и той же триангуляции тройки рёбер, ограничивающих грани, совпадают.

Теорема Вагнера—Фари

Укладка графа называется *прямолинейной*, если каждое ребро графа в этой укладке изображено отрезком прямой.

Теорема (Wagner'1936, Fáry'1948).

У любого планарного графа существует прямолинейная укладка на плоскости.

Для доказательства теоремы нам потребуются три леммы...

Лемма о вершинах степени ≤ 5

Лемма о четырёх вершинах степени ≤ 5 .

В любой триангуляции (в которой не менее четырёх вершин) найдутся четыре вершины, степень каждой из которых не превосходит 5.

Доказательство.

Пусть в графе n вершин. Имеем

$$\sum_{v \in V} (6 - d(v)) = 6n - 2|E| = 6n - 2(3n - 6) = 12.$$

Так как $(6 - d(v)) \leq 3$, то в сумме выше по крайней мере 4 положительных слагаемых.

Лемма о триангулировании многоугольника

Лемма о триангулировании многоугольника.

Любой многоугольник можно разбить диагоналями на треугольники.

Доказательство.

Достаточно указать, как провести хотя бы одну диагональ.

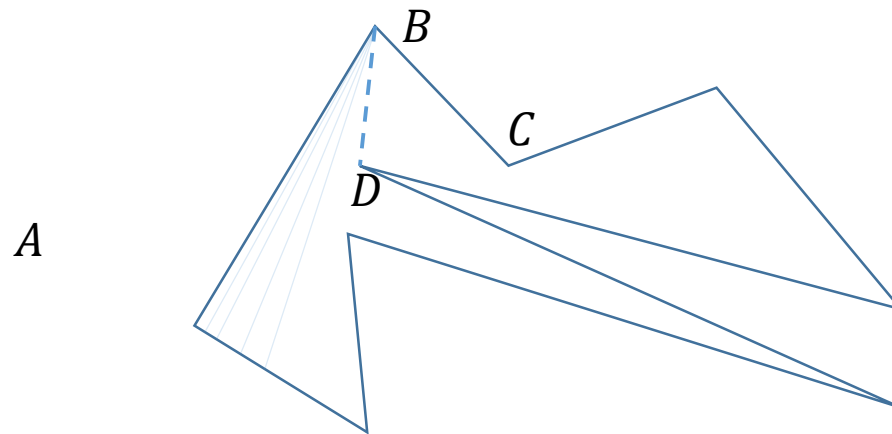
Рассмотрим произвольную тройку A, B, C последовательных вершин многоугольника.

Если можно провести диагональ AC , то это и сделаем, а если нельзя, то поступим так...

Лемма о триангулировании многоугольника

Будем вращать луч BA в направлении стороны BC до тех пор, пока на него не попадёт какая-либо вершина многоугольника D (если таких вершин несколько, возьмём ближайшую к B).

Отрезок BD и будет искомой диагональю.

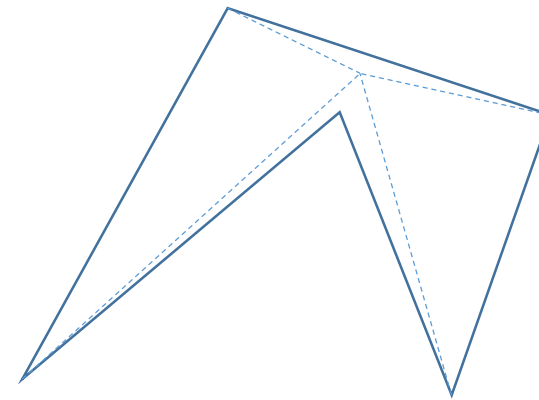


Лемма об обзоре пятиугольника

Лемма об обзоре пятиугольника.

Внутри любого пятиугольника найдётся точка, такая, что отрезки, соединяющие её с вершинами пятиугольника, полностью лежат внутри него.

(То же утверждение справедливо и для четырёхугольника)



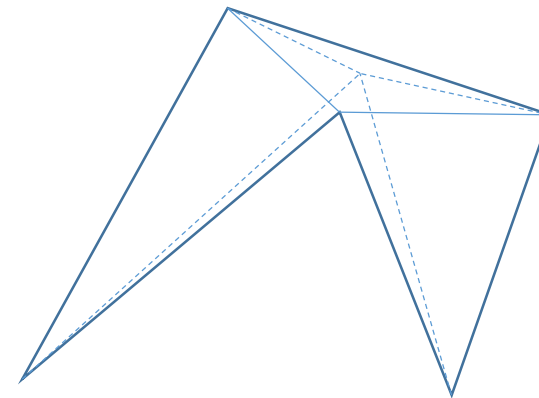
Лемма об обзоре пятиугольника

Доказательство.

Пятиугольник, по предыдущей лемме, можно разбить на треугольники.

По принципу Дирихле, найдётся вершина пятиугольника, принадлежащая всем трём треугольникам.

Рядом с этой вершиной можно взять искомую точку.



Теорема Вагнера—Фари

Доказательство теоремы. Индукцией по n докажем более сильное утверждение:

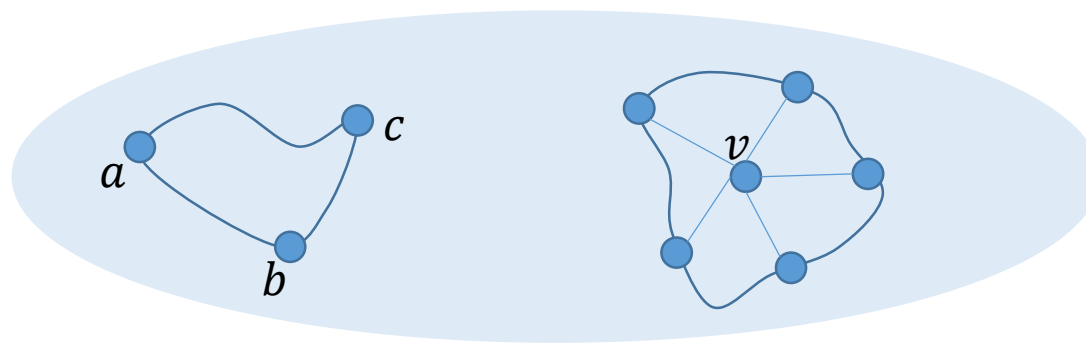
«Пусть a, b, c — вершины какой-нибудь грани в некоторой укладке триангуляции на n вершинах. Тогда существует *прямолинейная* укладка той же триангуляции, в которой вершины a, b, c лежат на границе *внешней* грани.»

Теорема Вагнера—Фари

База $n = 3$ очевидна.

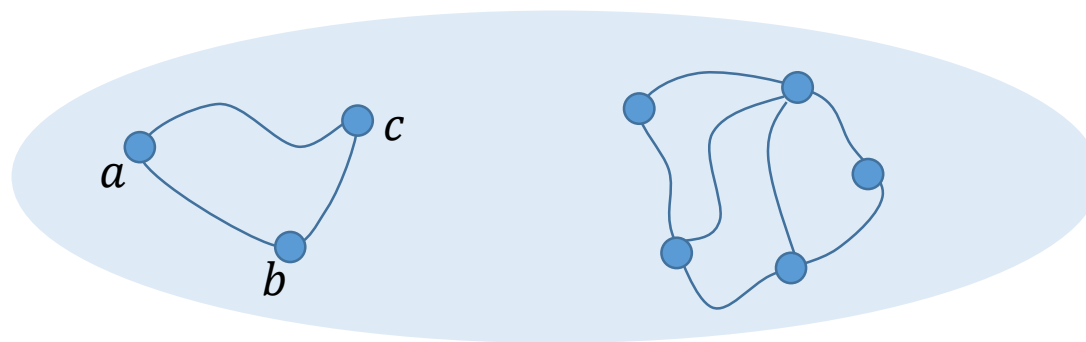
Пусть $n \geq 4$ и G — триангуляция, $|G| = n$. Пусть a, b, c — произвольные вершины какой-нибудь грани в одной из укладок G .

В G найдётся вершина v , такая, что $d(v) \leq 5$ и $v \notin \{a, b, c\}$.



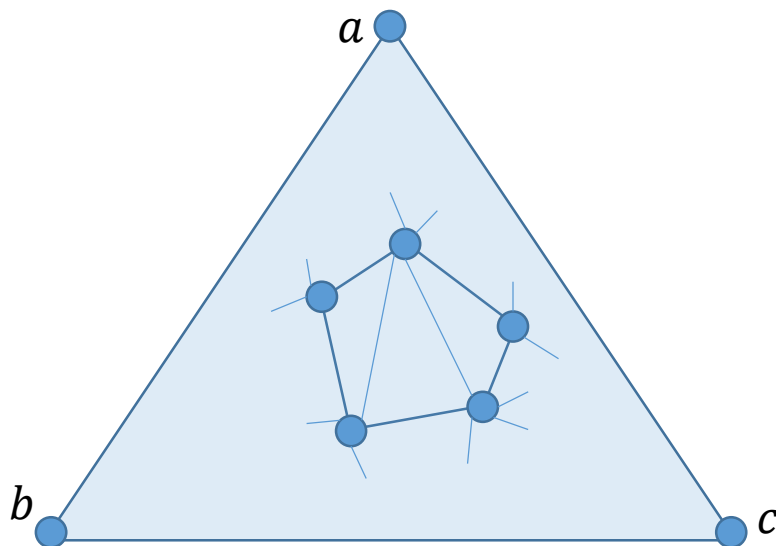
Теорема Вагнера—Фари

Пусть G' — триангуляция, полученная из G удалением v и добавлением рёбер между бывшими соседями v .



Теорема Вагнера—Фари

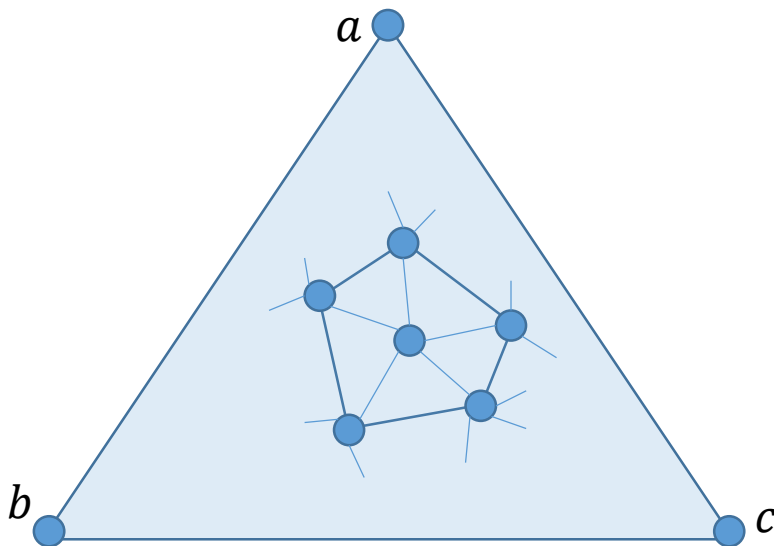
Т.к. $|G'| = n - 1$, то по предположению индукции, найдётся прямолинейная укладка G' , в которой вершины a, b, c лежат на границе внешней грани (а значит, добавленные при построении G' рёбра *не* лежат на границе внешней грани).



Теорема Вагнера—Фари

Удалим добавленные при построении G' рёбра из укладки. В образовавшуюся при этом грань можно добавить вершину v по лемме об обзоре пятиугольника.

Получим искомую прямолинейную укладку G .



Теорема Татта

Теорема. (Tutte '1963)

У любого трёхсвязного планарного графа существует такая прямолинейная укладка на плоскости, в которой каждая грань ограничена *выпуклым* многоугольником.

Теорема называется ещё «теоремой о пружинках/резинках» из-за того, как укладка в этой теореме может быть получена.

Теорема Татта

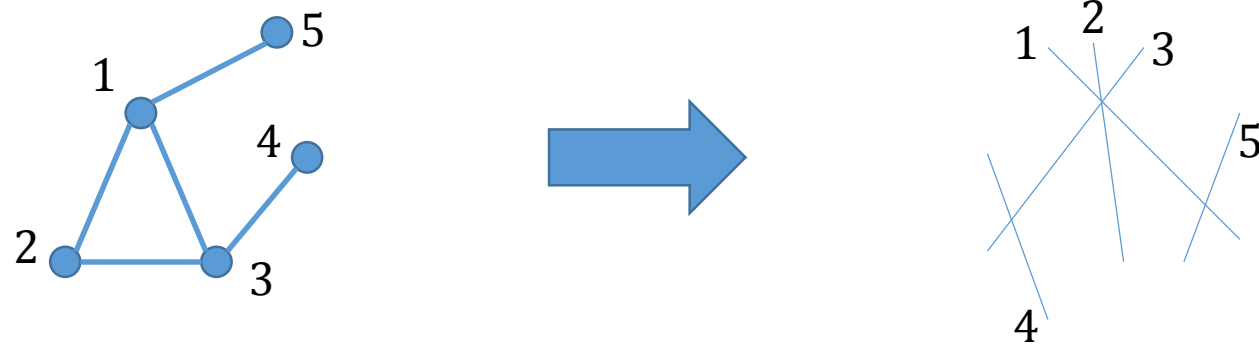
Пусть Γ — множество вершин трёхсвязного графа, составляющих границу одной из граней в какой-нибудь укладке.

Тогда укладку Татта можно получить, если закрепить вершины множества Γ в вершинах произвольного выпуклого многоугольника, и представить, что рёбра графа стремятся стянуться, как резинки. Полученная при стабилизации такой физической системы картинка и будет искомой укладкой.

Представления планарных графов

Теорема (Chalopin, Gonçalves '2009).

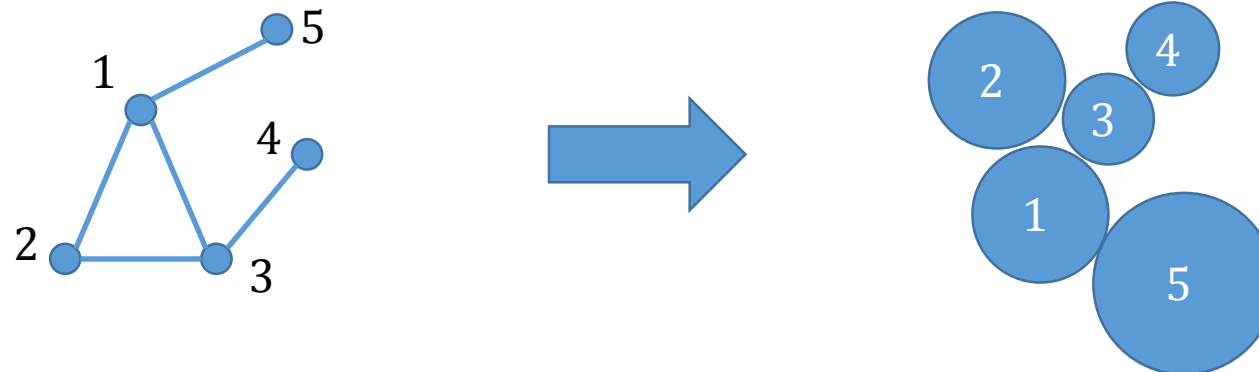
Любой планарный граф может быть представлен следующим образом: вершинам графа соответствуют отрезки на плоскости, рёбрам — пары пересекающихся отрезков:



Представления планарных графов

Теорема (Коебе '1936).

Любой планарный граф может быть представлен следующим образом: вершинам графа соответствуют круги на плоскости, рёбрам — пары касающихся кругов:



Минорно-замкнутые классы

Класс графов *минорно-замкнутый* или *минорно-наследственный*, если вместе с каждым графом содержит все его миноры.

Примеры:

- Класс графов, укладываемых на заданной поверхности
- Класс графов, не содержащих простые циклы, длина которых больше заданной

Минорно-замкнутые классы

Класс планарных графов, благодаря теореме Вагнера, может быть описан в терминах *запрещённых миноров*: граф планарен т. и т.т., когда среди его миноров нет K_5 и $K_{3,3}$.

Класс графов, не содержащих простые циклы длины более l , описывается ещё проще: граф принадлежит классу т. и т.т., когда цикл на $(l + 1)$ вершинах не является минором графа.

Минорно-замкнутые классы

А можно ли описать класс графов, укладываемых на торе, в терминах запрещённых миноров? — Да, можно!

Теорема. (Seymour, Robertson '2004)

Любой минорно-замкнутый класс графов может быть описан **конечным** множеством запрещённых миноров.

(Доказательство — больше сотни страниц.)

Минорно-замкнутые классы

Теорема.

Для любого *фиксированного* графа H существует алгоритм, который по входному графу G за время $O(|G|^3)$ проверяет, является ли H его минором.

Следствие.

Для любого минорно-замкнутого класса графов задача распознавания принадлежности этому классу является полиномиально разрешимой.

Минорно-замкнутые классы

Следствие.

Для любой фиксированной поверхности Π существует полиномиальный алгоритм, распознающий по входному графу, можно ли уложить его на Π без пересечений ребёр.

Не стоит обольщаться:

Константа в O в оценке сложности алгоритма астрономически большая.

Минорно-замкнутые классы

Не стоит обольщаться:

Множество запрещённых миноров для класса графов, укладываемых на торе, содержит более 16000 элементов.

В то же время,

для проверки планарности, «тороидальности» и некоторых других «укладываемостей» известны алгоритмы, *линейные* по времени.

Характеристики непланарных графов

- *Число скрещиваний* графа — минимальное число пересечений рёбер графа при укладке на плоскости
- *Толщина* графа — минимальное число планарных подграфов, на которые можно разбить граф
- *Род* графа — минимальный род поверхности, на которую можно уложить граф без пересечений рёбер
- *Искажённость* — наименьшее число рёбер, удаление которых делает граф планарным