Дискретная оптимизация
весна 2013

Александр Дайняк

http://www.dainiak.com

Задача дискретного максимина

Есть ограниченное количество ресурса N.

Ресурс можно задействовать в m разных областях.

При задействовании x единиц ресурса в i-й области результат равен $f_i(x)$.

Функции f_i возрастающие, величины x_i целые неотрицательные.

<u>Цель:</u> подобрать $x_1, \dots, x_m$, такие, что $\sum_{i=1}^{m} x_i = N$
и максимизировать при этом величину

$$\min_{1 \le i \le m} f_i(x_i)$$

Задача дискретного максимина

Ищем $x_1, \dots, x_m$, т.ч. $\sum_{i=1}^{m} x_i = N$ и $\min\limits_{1 \le i \le m} f_i(x_i) \to \max$.

Положим $I(x_1, \dots, x_m) \coloneqq \left| \operatorname*{Argmin}\limits_{1 \le i \le m} f_i(x_i) \right|$.

Теорема.

- Пусть $x_1^*, \dots, x_m^*$ — оптимальное распределение ресурса, при котором $I(x_1^*, \dots, x_m^*)$ минимально среди всех оптимальных распределений. Тогда
$$\forall j \quad \left(x_j^* > 0 \quad \Rightarrow \quad f_j\left(x_j^* - 1\right) \le \min_{1 \le i \le m} f_i(x_i^*) \right)$$
- Наоборот, если выполнено условие выше, то набор $x_1^*, \dots, x_m^*$ является оптимальным.

Доказательство необходимости

Пусть набор $x_1, \dots, x_m$ таков, что для некоторого j выполнено $x_j > 0$, но при этом $f_j\left(x_j - 1\right) > \min\limits_{1 \le i \le m} f_i(x_i)$.

Возьмём произвольное k, такое, что $f_k(x_k) = \min\limits_{1 \le i \le m} f_i(x_i)$, и рассмотрим набор $x'_1, \dots, x'_m$, в котором

$$x'_i := \begin{cases} x_i, & \text{если } i \notin \{j, k\} \\ x_j - 1, & \text{если } i = j \\ x_k + 1, & \text{если } i = k \end{cases}$$

Если $\min\limits_{1 \le i \le m} f_i(x_i)$ достигался только на $f_k(x_k)$, то $\min\limits_{1 \le i \le m} f_i(x'_i) > \min\limits_{1 \le i \le m} f_i(x_i)$.

Если же $\min\limits_{1 \le i \le m} f_i(x_i)$ достигался не только на $f_k(x_k)$,

то $\min\limits_{1 \le i \le m} f_i(x'_i) = \min\limits_{1 \le i \le m} f_i(x_i)$, зато $I(x'_1, \dots, x'_m) < I(x_1, \dots, x_m)$.

Доказательство достаточности

Пусть набор $x_1^*, \ldots, x_m^*$ таков, что

$$\forall j \quad \left(x_j^* > 0 \quad \Rightarrow \quad f_j\left(x_j^* - 1\right) \leq \min_{1 \leq i \leq m} f_i(x_i^*)\right)$$

Рассмотрим произвольный другой набор $x_1, \ldots, x_m$.

Найдётся такой индекс k, что $x_k < x_k^*$.

Имеем

$$\min_{1 \leq i \leq m} f_i(x_i^*) \geq f_k(x_k^* - 1) \geq f_k(x_k) \geq \min_{1 \leq i \leq m} f_i(x_i)$$

Алгоритм поиска оптимального набора

Начинаем с произвольного набора $x_1, \ldots, x_m$.

while $\exists j \quad \left(x_j > 0 \quad \wedge \quad f_j\left(x_j - 1\right) > \min\limits_{1 \le i \le m} f_i(x_i)\right)$ **do**

$$k \coloneqq \operatorname*{argmin}_{1 \le i \le m} f_i(x_i)$$

$$x_j \coloneqq x_j - 1$$

$$x_k \coloneqq x_k + 1$$

На каждой итерации цикла либо улучшаем значение минимума, либо уменьшаем величину $I(\ldots)$, пока не придём к оптимальному набору.

Заметим, что если на какой-то итерации цикла мы увеличили x_k на единицу, то на всех последующих итерациях x_k не будет уменьшаться. Значит, общее число итераций не больше N.

Алгоритм поиска оптимального набора

while $\exists j \quad \left(x_j > 0 \quad \wedge \quad f_j\left(x_j - 1\right) > \min\limits_{1 \le i \le m} f_i(x_i)\right)$ **do**

$$k \coloneqq \operatorname*{argmin}_{1 \le i \le m} f_i(x_i)$$

$$x_j \coloneqq x_j - 1$$

$$x_k \coloneqq x_k + 1$$

По ходу алгоритма можно хранить значения $f_i(x_i)$ и $f_i(x_i - 1)$ в кучах (с операциями getMin и getMax соответственно).

Если вычисление каждой функции f_i выполнимо за время T,
то сложность алгоритма не превосходит $O\big(N \cdot (T + \log m)\big)$.

Получаем *квазиполиномиальный* алгоритм.

Максимизация сумм функций

Есть ограниченное количество ресурса N.

Ресурс можно задействовать в m разных областях.

При задействовании x единиц ресурса в i-й области результат равен $f_i(x)$.

Функции f_i возрастающие, величины x_i целые неотрицательные.

<u>Цель:</u> подобрать $x_1, \ldots, x_m$, такие, что $\sum_{i=1}^{m} x_i = N$
и максимизировать при этом величину

$$\sum_{i=1}^{m} f_i(x_i)$$

Критерий гросса

Ищем $x_1, \dots, x_m$, т.ч. $\sum_{i=1}^{m} x_i = N$ и $\sum_{i=1}^{m} f_i(x_i) \to \max$.

Пусть все f_i вогнутые, т.е. $f_i(x) - f_i(x-1) \geq f_i(x+1) - f_i(x)$ при $x > 0$.

Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема.

Распределение ресурса $x_1^*, \dots, x_m^*$ оптимально т. и т.т., когда

$$\forall j \quad \left(\quad x_j^* > 0 \quad \Rightarrow \quad f_j\left(x_j^*\right) - f_j\left(x_j^* - 1\right) \geq \max_{1 \leq i \leq m}\left(f_i(x_i^* + 1) - f_i(x_i^*)\right) \quad \right)$$

Критерий гросса

Доказываем, что если распределение ресурса $x_1^*, \dots, x_m^*$ оптимально, то

$$\forall j \quad \left(\quad x_j^* > 0 \quad \Rightarrow \quad f_j\left(x_j^*\right) - f_j\left(x_j^* - 1\right) \geq \max_{1 \leq i \leq m}\left(f_i(x_i^* + 1) - f_i(x_i^*)\right) \quad \right)$$

Допустим, условия нарушены для набора $x_1, \dots, x_m$.
То есть $\exists j, k$ такие, что $x_j > 0$ и $f_j\left(x_j\right) - f_j\left(x_j - 1\right) < f_k(x_k + 1) - f_k(x_k)$.

Рассмотрим набор $x_1', \dots, x_m'$, в котором

$$x_i' := \begin{cases} x_i, & \text{если } i \notin \{j, k\} \\ x_j - 1, & \text{если } i = j \\ x_k + 1, & \text{если } i = k \end{cases}$$

Имеем

$$\sum_{i=1}^{m} f_i(x_i') = \sum_{i=1}^{m} f_i(x_i) - f_k(x_k) - f_j\left(x_j\right) + f_k(x_k + 1) + f_j\left(x_j - 1\right) > \sum_{i=1}^{m} f_i(x_i)$$

Критерий гросса

Доказываем, для оптимальности $x_1^*, \dots, x_m^*$ достаточно, чтобы

$$\forall j \quad \left(\quad x_j^* > 0 \quad \Rightarrow \quad f_j\left(x_j^*\right) - f_j\left(x_j^* - 1\right) \geq \max_{1 \leq i \leq m}\left(f_i(x_i^* + 1) - f_i(x_i^*)\right) \quad \right)$$

Пусть $x_1, \dots, x_m$ — любое другое распределение ресурса.

Обозначим $\lambda \coloneqq \max_{1 \leq i \leq m}\left(f_i(x_i^* + 1) - f_i(x_i^*)\right)$.

Для каждого i докажем, что $f_i(x_i^*) - f_i(x_i) \geq \lambda(x_i^* - x_i)$.

Пусть $x_i^* > x_i$. Тогда, по условию, $f_i(x_i^*) - f_i(x_i^* - 1) \geq \lambda$.

Из вогнутости функции f_i следует

$$f_i(x_i^* - 1) - f_i(x_i^* - 2) \geq f_i(x_i^*) - f_i(x_i^* - 1) \geq \lambda$$

Аналогично, $f_i(x_i^* - 2) - f_i(x_i^* - 3) \geq \lambda, \quad \dots, \quad f_i(x_i + 1) - f_i(x_i) \geq \lambda$.

Критерий гросса

$$\lambda \coloneqq \max_{1\le i\le m}\big(f_i(x_i^*+1)-f_i(x_i^*)\big)$$

Пусть $x_i^* > x_i$. Тогда

$$f_i(x_i^*)-f_i(x_i^*-1)\ge\lambda$$
$$f_i(x_i^*-1)-f_i(x_i^*-2)\ge\lambda$$
$$f_i(x_i^*-2)-f_i(x_i^*-3)\ge\lambda$$
$$\vdots$$
$$f_i(x_i+1)-f_i(x_i)\ge\lambda$$

Сложивэти неравенства и телескопировав, получим

$$f_i(x_i^*)-f_i(x_i)\ge\lambda(x_i^*-x_i)$$

Аналогично (*упражнение*) разбирается случай $x_i^* < x_i$.

Критерий гросса

$$\lambda \coloneqq \max_{1 \le i \le m} \left(f_i(x_i^* + 1) - f_i(x_i^*) \right)$$

Мы доказали, что для каждого i выполнено неравенство

$$f_i(x_i^*) - f_i(x_i) \ge \lambda(x_i^* - x_i)$$

Сложив эти неравенства при $i = 1 \dots m$, получим

$$\sum_{i=1}^{m} f_i(x_i^*) - \sum_{i=1}^{m} f_i(x_i) \ge \lambda \left(\sum_{i=1}^{m} x_i^* - \sum_{i=1}^{m} x_i \right) = \lambda(N - N) = 0$$

Теорема доказана.

Алгоритм на основе теоремы получается, как и в предыдущей задачи.

Детали алгоритма и оценка сложности — упражнение.

Оптимизация произведений

Теорема.

Пусть $x_1, \ldots, x_m$ — положительные числа, такие, что $\sum_{i=1}^{m} x_i = N$
и пусть $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_m$.

Пусть m можно варьировать.

Тогда максимум произведения $\prod_{i=1}^{m} x_i$ достигается на наборах:

- Если $N = 3n$, то $x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 3$.
- Если $N = 3n + 2$, то $x_1 = 2$ и $x_2 = \cdots = x_m = 3$.
- Если $N = 3n + 1$, то $x_1 = x_2 = 2$ и $x_3 = \cdots = x_m = 3$
  или $x_1 = x_2 = \cdots x_{m-1} = 3$ и $x_m = 4$.

Оптимизация произведений

Доказательство:
Пусть $x_1, \dots, x_m$ — произвольный набор, на котором достигается максимум произведения. Очевидно, среди $x_1, \dots, x_m$ нет единиц.

- Все x_i не превосходят 4, иначе можно заменить такое x_i на пару сомножителей $2(x_i - 2)$, увеличив значение $\prod_{i=1}^{m} x_i$.
- Среди $x_1, \dots, x_m$ не больше одной четвёрки, иначе можно заменить $4 \cdot 4$ на $2 \cdot 3 \cdot 3$, увеличив значение $\prod_{i=1}^{m} x_i$.
- Среди $x_1, \dots, x_m$ не больше двух двоек, иначе можно заменить $2 \cdot 2 \cdot 2$ на $3 \cdot 3$, увеличив значение $\prod_{i=1}^{m} x_i$.
- Среди $x_1, \dots, x_m$ нет одновременно двойки и четвёрки, иначе можно $2 \cdot 4$ заменить на $3 \cdot 3$.

Оптимизация произведений

Теорема-упражнение.

Пусть $x_1, \dots, x_m$ — положительные числа, такие, что $\sum_{i=1}^{m} x_i = N$ и пусть $x_1 \le x_2 \le \dots \le x_m$.

Пусть m можно варьировать.

Тогда максимум произведения $\prod_{i=1}^{m} x_i^i$ достигается только на наборах из единиц, двоек и троек.

Линейное программирование

Общая форма задачи ЛП:

- $c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \to \min$ или $\to \max$
- $a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1, \quad \ldots, \quad a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m$
- $a'_{1,1}x_1 + \cdots + a'_{1,n}x_n \geq b'_1, \quad \ldots, \quad a'_{m',1}x_1 + \cdots + a'_{m',n}x_n \geq b'_{m'}$
- $a''_{1,1}x_1 + \cdots + a''_{1,n}x_n \leq b''_1, \quad \ldots, \quad a''_{m'',1}x_1 + \cdots + a''_{m'',n}x_n \leq b''_{m''}$

Стандартная форма задачи ЛП:

- $c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \to \min$ или $\to \max$
- $a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1, \quad \ldots, \quad a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m$
- $x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$

Векторная форма записи задач ЛП

- $\boldsymbol{cx} \to \max$
- $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ или $A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$ и т.д.
- $\boldsymbol{x} \geq 0$

Переход от общей формы к стандартной

- От неравенств переходим к равенствам, вводя новые переменные: неравенство вида $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \geq b$ заменяется парой неравенств
$$\begin{cases} a_1x_1 + \cdots + a_nx_n - y = b \\ y \geq 0 \end{cases}$$
- Чтобы все переменные сделать неотрицательными, переменную вида x заменяем везде на $(y - z)$, где $y \geq 0$ и $z \geq 0$.

Формы задач ЛП

Общая форма задачи ЛП:

- Оптимизируется линейная форма
- Любые линейные ограничения на x_i

Стандартная форма задачи ЛП:

- Ограничения типа равенства
- Неотрицательность значений переменных

Каноническая форма задачи ЛП:

- Ограничения типа неравенства
- Неотрицательность значений переменных

Что ещё можно задать линейными ограничениями

- Ограничения вида $\max\{x_1, \ldots, x_k\} \leq x_l$ можно задать системой

$$\begin{cases} x_l - x_1 \geq 0 \\ \vdots \\ x_l - x_k \geq 0 \end{cases}$$

- Ограничения вида $x_l \geq |x_k|$ можно задать системой

$$\begin{cases} x_l \geq x_k \\ x_l \geq -x_k \end{cases}$$

- От равенство $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$ можно задать системой

$$\begin{cases} a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \geq b \\ a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \leq b \end{cases}$$

Свойства решений задач ЛП

- Линейные ограничения на $x_1, \dots, x_n$ задают в пространстве $\boldsymbol{R}^n$ либо пустое множество (если им нельзя удовлетворить), либо многогранник (возможно, неограниченный).
- Если оптимум в задаче ЛП существует, то он достигается на одной из вершин многогранника.
- Вершины многогранника определяются подмножествами из n линейно независимых ограничений.

Резюме

- Основная идея в оптимизации максимина и суммы вогнутых функций — уравнивание.
- Некоторые задачи многокритериальной оптимизации решаются довольно просто, квазиполиномиальными алгоритмами.
- Есть много эквивалентных форм задач ЛП, можно рассматривать любую.
- Задачи ЛП имеют естественную геометрическую интерпретацию.