Дискретные структуры. Учебный год 2013—2014.

Задачи составлены коллективом кафедры дискретной математики ФИВТ МФТИ

Индукция

Задача 1. Докажите тождество: $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Задача 2. Пусть плоскость разбита на области некоторым количеством прямых. Докажите, что всегда можно так раскрасить области двумя цветами, что любая пара граничащих по отрезку областей будет покрашена в разные цвета.

Задача 3 (д/з)**.** Докажите, что $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} < 2$.

Задача 4. Докажите, что любой набор из n прямых на плоскости, никакие три из которых не пересекаются в одной точке, разбивает плоскость на $\frac{n^2+n+2}{2}$ областей.

Задача 5 (д/з)**.** Уголок — это фигура в форме буквы Г, составленная из трёх соседних клеток клетчатой доски. Докажите, что если из любой доски размера $2^n \times 2^n$ клеток удалить ровно одну клетку в произвольном месте, то все оставшиеся клетки можно покрыть уголками.

Задача 6. *a)* Докажите, что $(8^n - 1)$ делится на 7 при любом $n \in \mathbb{N}$.
b) Докажите, что $(5^{2n-1} + 1)$ делится на 6 при любом $n \in \mathbb{N}$.

Задача 7 (д/з)**.** Будьте осторожны, применяя индукцию: обязательно нужно обосновывать базу индукции и индуктивный переход, и не забывать про вырожденные случаи.

a) Числа n^2+n+41 являются простыми при $n = 1, 2, \ldots, 40$. Но отсюда не следует делать вывод, что так будет при любых n: очевидно, уже при $n = 41$ «закономерность» нарушается. Поэтому, делая далеко идущие выводы на основе частичных данных, нужно подкреплять их строгими доказательствами.

b) «Докажем», что все числа вида $n(n+1)$ нечётны. Сделаем индуктивный переход… Пусть число вида $n(n+1)$ нечётно. Рассмотрим число $(n+1)((n+1)+1) = n^2+3n+2 = n(n+1)+2(n+1)$. Так как $n(n+1)$ нечётно по предположению, а $2(n+1)$ чётно, то и $n(n+1)+2(n+1)$ нечётно. Индуктивный переход выполнен и утверждение «доказано». *Где ошибка?*

c) «Докажем» утверждение: если на плоскости даны n различных прямых, никакие две из которых не параллельны, то все эти n прямых пересекаются в одной точке. Проверим базу индукции: при $n = 1$ и $n = 2$ утверждение, очевидно, выполнено. Теперь рассмотрим общий случай, когда у нас есть прямые $a, b, c, d \ldots$, никакие две из которых не параллельны. Выкинем временно из нашего множества прямых прямую c. По предположению, оставшиеся прямые все пересекаются в некоторой точке P. Теперь выкинем из первоначального множества прямую d. По предположению, все оставшиеся прямые пересекаются в некоторой точке P'. Так как P и P' лежат на прямых a и b, а любая пара различных прямых пересекается не более чем в одной точке, то $P = P'$. Стало быть, *все* наши прямые пересекаются в одной точке, и утверждение «доказано». *Где ошибка?*

Задача 8. Формализуйте рассуждения, которые Вы применяли в предыдущих задачах, следующим образом. Переформулируйте задачу в виде: «доказать, что для любого натурального n выполнено утверждение $P(n)$». Сформулируйте в общем виде утверждение $P(n)$. Покажите, почему из справедливости $P(n)$ вытекает справедливость $P(n+1)$.

Методу индукции родственен *метод потенциалов*. Если нам нужно доказать конечность некоторого процесса (в течение которого система переходит из состояния в состояние), то можно с каждым состоянием системы связать некоторое натуральное число (*потенциал*), которое при переходе между состояниями строго уменьшается. Примените метод потенциалов для решения следующей задачи.

Задача 9 (д/з)**.** Шеренга новобранцев стоит перед старшиной. Старшина командует: нале-во! Но по неопытности солдаты поворачиваются в разные стороны — часть влево, часть вправо. После этого каждую секунду происходит следующее. Солдаты, оказавшиеся лицом друг к другу, понимают, что произошла ошибка, и после этого оба разворачиваются в противоположную сторону. Докажите, что через некоторое время повороты прекратятся, то есть, не останется солдат, стоящих лицом друг к другу.

Принцип Дирихле

Задача 10. Покажите, что на любом собрании найдутся двое, у которых одинаковое число знакомых среди присутствующих.

Задача 11. Апрель 2013 года выдался для программиста Пети напряжённым: он решил 45 задач по информатике, причём каждый день он решал хотя бы по одной задаче. Докажите, что в течение некоторого *непрерывного* периода в апреле Петя решил *ровно* 14 задач.

Задача 12. В комнате площадью 6 постелили 3 ковра произвольной формы площадью 3 каждый. Докажите, что какие-либо два из них перекрываются по площади, не меньшей 1.

Задача 13. *a)* Докажите, что в правильном треугольнике со стороной 1 среди любых пяти точек найдутся две на расстоянии не больше $1/2$.

b) (д/з) Докажите, что если в правильный шестиугольник с расстоянием 1 между параллельными сторонами бросить четыре точки, то среди них найдутся две на расстоянии не больше 0.87.

Задача 14 (д/з)**.** Рассмотрим шахматную доску, у которой удалены две клетки, стоящие в противоположных углах. Можно ли эту доску покрыть доминошками размером 2×1?

Задача 15. На голове любого человека не более 200000 волос. Докажите, что в Москве найдутся 40 жителей, у которых в точности одно и то же число волос.

Задача 16. Докажите, что среди любых n натуральных чисел найдётся поднабор, сумма чисел из которого делится на n.

Задача 17 (д/з)**.** Докажите, что для любого натурального числа n найдется число, которое делится на n и в десятичной записи которого присутствуют только нули и семёрки.

Задача 18. Докажите *теорему Дирихле* о приближении иррациональных чисел рациональными: для любого положительного иррационального α и любого $n \in \mathbb{N}$ существуют такие целые числа $a, b \in [0, n]$, для которых $\left|\frac{a}{b} - \alpha\right| < \frac{1}{nb}$. Иными словами, дробь $\frac{a}{b}$ «хорошо приближает» число α. Для доказательства рассмотрите последовательность $0, \{\alpha\}, \{2\alpha\}, \{3\alpha\}, \ldots, \{n\alpha\}$, где через $\{\ldots\}$ обозначена дробная часть числа, и используйте принцип Дирихле. Кстати, именно теорема Дирихле дала название принципу.

Подсчёт

Задача 19. Сколько десятизначных чисел, в записи которых имеются хотя бы две одинаковые цифры?

Задача 20. В языке программирования `MIPT++` имена переменных могут содержать только строчные латинские буквы и цифры. Имя переменной с цифры начинаться не может. Кроме того, в имени обязательно где-нибудь должны идти подряд буквы `mipt`. Сколько различных имён переменных длины 10 в `MIPT++`?

Задача 21. Сколькими способами можно разложить 20 одинаковых шаров по 5 различным ящикам, так, чтобы

a) в каждом ящике оказалось не менее двух шаров?

b) (д/з) в каждом ящике оказалось не более пяти шаров?

c) (д/з) оказалось не более двух пустых ящиков?

Попробуйте ответить на эти вопросы, используя тот же приём с кодированием, что и при подсчёте числа сочетаний с повторениями на первой лекции.

Задача 22. В сети $2m$ пользовательских чат-клиентов и n серверов. Любая пара пользователей может соединиться через какой-либо из серверов. Количество пар пользователей, которые может обслужить сервер, неограничено. Сколькими способами пользователи могут разбиться на пары общающихся, если способы, отличающиеся наборами обслуживающих серверов, считаются различными?

Задача 23. Сколькими способами можно из чисел $\{1, \dots, 30\}$ выбрать три числа так, чтобы их сумма была чётной?

Задача 24 (д/з)**.** Каждая сторона квадрата разбита на n частей. Сколько можно построить треугольников, вершинами которых являются точки разбиения?

Задача 25. Ответьте на вопросы:

a) Сколькими способами можно составить хоровод из n человек? (Хороводы различны, если хотя бы у одного человека соседи по левую руку различаются.)

b) Сколькими способами можно составить ожерелье из n бусинок (все бусинки разных цветов)? (Ожерелья различны, если их нельзя совместить друг с другом поворотами в пространстве.)

В каком случае получается большее число способов?

Задача 26 (д/з)**.** Профком МФТИ раздаёт студентам гаджеты: каждому студенту по ноутбуку, планшету и смартфону. В профкоме есть 4 ноутбука, 5 планшетов и 6 смартфонов, все разных моделей. Сколькими способами пришедшие в профком трое студентов могут набрать себе гаджетов?

Задача 27. У мужа 12 знакомых — 5 женщин и 7 мужчин. У жены тоже 12 (других) знакомых — 7 женщин и 5 мужчин. Сколькими способами можно составить компанию из 6 мужчин и 6 женщин так, чтобы 6 человек пригласил муж и 6 — жена?

Задача 28. На клетчатой бумаге изображен квадрат, каждая сторона которого умещает ровно n клеток. Сколько в этом квадрате можно нарисовать различных букв Т? («Ножка» буквы располагается по центру «крышки», длина ножки не меньше единицы, длина крышки не меньше тройки, все линии единичной толщины, повороты не допускаются.)

Задача 29. На работу требуются восемь человек: четверо знатоков C++ и четверо знатоков Python. Из 31 кандидата, претендующих на вакансии, 10 кандидатов знают только C++, 12 знают только Python, а 9 знают оба языка. Сколькими способами можно набрать требуемую команду программистов?

Задача 30. Сколькими способами можно переставить буквы слова «каракули» так, чтобы никакие две гласные не стояли рядом?

Задача 31 (д/з)**.** Есть семь красных, пять зелёных, четыре синих бусинки, и ещё 4 бусинки уникальных цветов. Сколькими способами можно расположить все их в ряд, так, чтобы в нём не оказалось пары соседних бусинок красного цвета?

Задача 32. Сколькими способами можно выбрать несколько букв из фразы «око за око, зуб за зуб»? Порядок букв не учитывается. Например, одна из выборок: $\{о, о, о, а, а\}$. Пример недопустимой выборки: $\{а, а, а\}$.

Задача 33. В каком из выражений, $(1+x^2-x^3)^{1000}$ или $(1-x^2+x^3)^{1000}$, будет больший коэффициент при x^{17} после раскрытия скобок и приведения подобных членов?

Задача 34. Найдите количество решений уравнения $x_1+x_2+\dots+x_k=n$ в целых неотрицательных числах (n фиксировано).

Задача 35. Пусть C и D — фиксированные множества, такие, что $C \subseteq D$, $|C|=m$ и $|D|=n$. Найдите количество решений следующих систем:

a) $C \subseteq A \subseteq D$

b) $\begin{cases} A \cap B = C, \\ A \cup B = D \end{cases}$

c) (д/з) $\begin{cases} A \cap B \supseteq C, \\ A \cup B \subseteq D \end{cases}$

d) (д/з) $\begin{cases} A \setminus B = C, \\ A \cup B \subseteq D \end{cases}$

Свойства комбинаторных чисел. Тождества с комбинаторными числами.

Задача 36 (д/з)**.** Пусть p — простое число. Докажите, что $\binom{p}{m}$ делится на p при $m \neq 0, p$. Используя этот факт, докажите индукцией по a *малую теорему Ферма*: для любого любого $a \in \{1, 2, \dots, p\}$ число $(a^p - a)$ делится на p.

В следующих задачах на вычисление сумм и доказательство тождеств постарайтесь действовать логически, а не алгебраически, если в выражениях нет дробей. Идея следующая: подбирается множество, мощность которого можно посчитать двумя разными способами, первый из которых даст выражение в левой части, а второй — в правой части тождества. Это может быть множество сочетаний, раскрасок и пр.

Если нет других идей, можно действовать алгебраически, используя симметричность биномиальных коэффициентов, формулу бинома и др. Иногда после небольших алгебраических преобразований ясно, как продолжить доказательство в логическом духе.

Задача 37. Докажите тождества:

a) $\displaystyle\sum_{j=0}^{k}\binom{m}{j}\binom{n}{k-j} = \binom{n+m}{k}$ (*тождество Коши—Вандермонда*)

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}^2 = n^2\binom{2n-2}{n-1}$

d) $\displaystyle\sum_{r=0}^{n-k}\binom{n}{k+r}\binom{m}{r} = \binom{m+n}{n-k}$

e) (д/з) $\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k} = \binom{n}{m}\binom{m}{k}$

Задача 38. Сверните следующие суммы:

a) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(m-1)^i$

b) $\displaystyle\sum_{i=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2i}$

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-m}\binom{n-k}{m}$

d) (д/з) $\displaystyle\sum_{k=0}^{m}\binom{n-k}{m-k}$

Задача 39. Докажите соотношение для чисел Стирлинга: $\left\{{n+1 \atop k}\right\} = k\left\{{n \atop k}\right\} + \left\{{n \atop k-1}\right\}$.

Задача 40. Докажите соотношение для чисел Белла: $B_{n+1} = \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}B_i$.

Задача 41. Докажите, что для чисел Белла B_n выполнены неравенства

a) $B_n \leqslant nB_{n-1}$

b) $B_n \leqslant (n-1)B_{n-1} + 1$.

Нестандартные задачи

Задача 42. Рассмотрим произвольную совокупность 8-мерных векторов с координатами $-1, 0, 1$, у каждого из которых 4 нулевых координаты (и, стало быть, 4 ненулевых) и первая ненулевая координата равна 1. Предположим, что векторы в совокупности попарно неортогональны. Докажите, что размер совокупности не превосходит 70. Придумайте совокупность размера 40.

Задача 43. Пусть $\mathscr{M} = \{M_1, \dots, M_{15}\}$ — произвольная совокупность, состоящая из пятнадцати пятиэлементных множеств. Положим $R = M_1 \cup \dots \cup M_{15}$. Верно ли, что всегда можно так покрасить элементы R в два цвета, чтобы каждое из множеств $M_1, \dots, M_{15}$ было неодноцветным (содержало элементы обоих цветов)?

Формула включений-исключений

Задача 44. Сколько существует чисел от 1 до 16500, которые не делятся ни на 3, ни на 5, ни на 11?

Задача 45. В аудитории n мест. Перед контрольной каждый из n студентов спрятал на месте, на котором он/она обычно сидит, шпаргалку. Сколькими способами может преподаватель рассадить студентов так, чтобы никто из них не мог воспользоваться своей шпаргалкой?

Задача 46. В правительстве Анчурии $2n$ министров, которые разбиваются на n пар враждующих друг с другом. Как рассадить их за круглый стол (с $2n$ местами) так, чтобы враждующие рыцари не сидели друг напротив друга? Тот же вопрос, если враждующие рыцари не должны сидеть рядом.

Задача 47 (д/з)**.** *Функция Эйлера* $\phi(n)$ определяется как количество натуральных чисел, меньших n и взаимно простых с n. Докажите формулу $\phi(x) = n\prod_p \left(1-\frac{1}{p}\right)$, где произведение берётся по всем простым делителям n.

Задача 48. Докажите формулу для чисел Стирлинга 2-го рода: $\left\{ n \atop k \right\} = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\binom{k}{j}(k-j)^n$.

Двойной подсчёт

Задача 49. Пусть дано 21 девятиэлементных подмножеств множества $[30] = \{1, \dots, 30\}$. Докажите, что какой-то элемент из множества $[30]$ содержится по крайней мере в семи подмножествах.

Задача 50. Пусть $\mathscr{F} \subseteq \binom{\{1,\dots,n\}}{k}$.

a) Пусть $l \leqslant k$ и пусть каждое l-элементное множество целиком содержится хотя бы в одном из множеств из $\mathscr{F}$. Докажите, что $|\mathscr{F}| \geqslant \frac{\binom{n}{l}}{\binom{k}{l}}$.

b) (д/з) Пусть $|\mathscr{F}| = m$. Назовем тенью $\mathscr{F}$ совокупность S всех $(k-1)$-элементных подмножеств $[n]$, которые целиком содержатся хотя бы в одном из множеств $\mathscr{F}$. Докажите, что $|S| \geqslant \frac{km}{n-k+1}$.

Начала теории графов

Задача 51. Для произвольных $k, l, m, n \in \mathbb{N}$ найдите количество

a) клик размера k в графе K_n,

b) клик размера k в графе $K_{m,n}$,

c) (д/з) независимых множеств размера k в графе K_n,

d) (д/з) независимых множеств размера k в графе $K_{m,n}$,

e) подграфов в K_n, изоморфных $K_{k,l}$,

f) подграфов в $K_{m,n}$, изоморфных $K_{k,l}$.

Будьте внимательны: эти задачи простые, но почти все требуют разбора случаев.

Задача 52. Приведите пример графа на 2013 вершинах, у которого ровно 1147 центральных вершин.

Задача 53. Пусть в графе максимальная степень вершин равна Δ, а радиус равен r. Докажите, что количество вершин в графе не больше $\Delta(\Delta-1)^{r-1}$.

Задача 54. Докажите, что если в графе на n вершинах больше чем $\binom{n-1}{2}$ рёбер, то граф связен.

Задача 55. *Унициклическим* называется связный граф, в котором ровно один цикл. Найдите количество рёбер в n-вершинном унициклическом графе.

Задача 56. Докажите, что если в дереве нет проходных вершин, то листьев у дерева меньше, чем остальных вершин.

Задача 57. Докажите, что граф двудольный т. и т. т., когда в нём нет циклов нечётной длины.

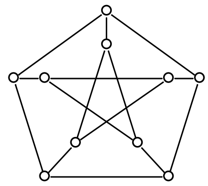
Раскраски

Задача 58. На лекции рассматривался «жадный» алгоритм раскраски графа. Покажите, что качество раскраски, построенной этим алгоритмом, сильно зависит от упорядочения вершин:

a) Покажите, как упорядочить вершины произвольного графа, так, чтобы жадный алгоритм использовал ровно $\chi(G)$ цветов.

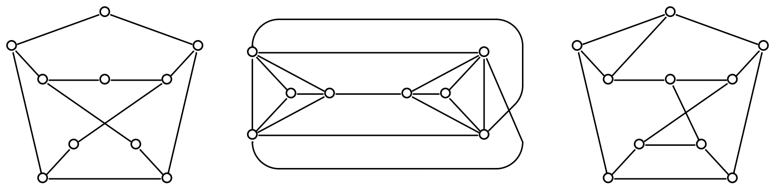
b) Для каждого натурального k предъявите двудольный граф G и такое упорядочение его вершин, что раскраска, построенная жадным алгоритмом, будет задействовать не менее k цветов.

Задача 59. Граф Петерсена, изображённый на рисунке ниже, является одним из классических объектов теории графов.



Докажите, что хроматическое число и хроматический индекс графа Петерсена равны 3 и 4 соответственно.

Задача 60. Найдите хроматическое число и хроматический индекс графов:



1 2(д/з) 3(д/з)

Задача 61. Пусть e — мост в связном графе G, и пусть $|V(G)| \geqslant 3$. Пусть G_1 и G_2 — компоненты, на которые распадается G при удалении e. Докажите, что $\chi(G) = \max\{\chi(G_1), \chi(G_2)\}$.

Задача 62. Как может измениться хроматическое число графа G, если добавить к графу одно ребро? одну вершину?

Задача 63. *a)* Пусть даны два графа $G_1 = (V, E_1)$, $G_2 = (V, E_2)$ на одном и том же множестве вершин. Пусть $G = (V, E_1 \cup E_2)$. Докажите, что $\chi(G) \leqslant \chi(G_1)\chi(G_2)$.

b) (д/з) Зафиксируем $r_1, r_2 \in \mathbb{N}$. В условиях предыдущего пункта постройте такие G_1, G_2 что $\chi(G_i) = r_i$ и $\chi(G) = r_1 r_2$.

Задача 64 (д/з)**.** Назовём граф $G = (V, E)$ на n вершинах k-критическим, если $\chi(G) = k$, и при этом при удалении любой вершины хроматическое число графа уменьшается. Докажите, что $|E| \geqslant n(k-1)/2$.

Хроматический многочлен

Задача 65. Обозначим через $\chi(G; k)$ количество правильных раскрасок графа G в цвета из множества $\{1, \ldots, k\}$.

a) Докажите, что для любого простого графа G и любого его ребра e выполнено равенство $\chi(G; k) = \chi(G - e; k) - \chi(G/e; k)$.

b) Покажите, что $\chi(K_n; x) = x(x-1) \cdot \ldots \cdot (x-k+1)$. Сделайте отсюда вывод, что при любом фиксированном G величина $\chi(G; x)$ является многочленом степени k от x.

Задача 66. Задачи на хроматический многочлен:

a) Пусть $G_1, \ldots, G_s$ — компоненты связности графа G. Как вычислить $\chi(G; x)$, зная все $\chi(G_i; x)$?

b) Докажите, что хроматический многочлен любого n-вершинного дерева равен $x(x-1)^{n-1}$.

c) Докажите, что $\chi(G; x)$ имеет степень $|G|$ и коэффициент при x^n равен единице.

d) (д/з) Докажите, что коэффициент в $\chi(G; x)$ при x^{n-1} равен $-\|G\|$.

e) (д/з) Докажите, что если $\chi(G;\,x) = x(x-1)^{|V(G)|-1}$, то G является деревом.

f) m-вершинную цепь за один из концов «прицепили» к одной из вершин n-вершинного графа G. Выразите хроматический многочлен полученного $(m+n-1)$-вершинного графа через хроматический многочлен графа G.

g) (д/з) Пусть e — мост в связном графе G. Пусть G_1 и G_2 — графы, на которые распадается G при удалении e. Докажите формулу: $\chi(G;\,x) = \frac{x-1}{x} \cdot \chi(G_1;\,x) \cdot \chi(G_2;\,x)$.

h) Найдите хроматический многочлен n-вершинного простого цикла.

Задача 67. Обозначим через $\chi'(G;\,x)$ количество правильных рёберных раскрасок графа G в цвета из $\{1,\,\ldots,\,x\}$. Докажите следующие утверждения:

a) (д/з) Функция $\chi'(G;\,x)$ является многочленом от x.

b) (д/з) Старший моном в $\chi'(G;\,x)$ равен $x^{|E(G)|}$.

c) (д/з) Коэффициент при $x^{|E(G)|-1}$ в $\chi'(G;\,x)$ равен $-\sum_{v\in V(G)}\binom{\deg v}{2}$.

Для этого рассмотрите граф G' — *рёберный граф* графа G. Вершины графа G' соответствуют рёбрам графа G. Пара вершин G' смежна, если соответствующие рёбра графа G имеют общий конец. Остаётся использовать известные с лекции свойства обычного хроматического многочлена.

Планарность

Задача 68. Докажите, что граф Петерсена непланарен, не используя критерии Вагнера и Понтрягина—Куратовского.

Задача 69. Исследуйте на планарность графы из задач предыдущего раздела.

Теорема Холла и системы различных представителей

Задача 70. Какое минимальное количество ребер можно удалить из графа $K_{n,n}$, чтобы не осталось совершенных паросочетаний?

Пусть $\mathscr{S} = (S_1,\,\ldots,\,S_m)$ — семейство множеств (необязательно различных). *Системой различных представителей* для $\mathscr{S}$ называется последовательность $x_1,\,\ldots,\,x_m$ *различных* элементов, таких, что $x_i \in S_i$.

Задача 71 (д/з)**.** Докажите, что у системы $\mathscr{S}$ есть система различных представителей тогда и только тогда, когда для любого $I \subset \{1,\ldots,m\}$ выполнено $|\cup_{i\in I} S_i| \geqslant |I|$.

Задача 72 (д/з)**.** Пусть дана совокупность $\mathscr{M} = (M_1,\ldots,M_s)$. Пусть мощность каждого множества совокупности равняется m, а каждый элемент из $\bigcup_{i=1}^{s} M_i$ входит ровно в l множеств M_i. Если $m \geqslant l$, то у совокупности $\mathscr{M}$ есть с. р. п.

Задача 73. Пусть A — матрица инцидентности системы из m подмножеств множества $\{1,\ldots,m\}$. Докажите, что $\operatorname{per} A$ суть количество различных с. р. п. для этого набора множеств.

Задача 74. Обобщите понятие перманента на неквадратные матрицы, так, чтобы утверждение предыдущей задачи оставалось верным и в случае, когда количество подмножеств меньше m. Можно ли такой обобщённый перманент раскладывать по строке/столбцу?

Системы общих представителей (покрытия)

Пусть $\mathscr{S} = (S_1,\,\ldots,\,S_m)$ — семейство множеств (необязательно различных). *Системой общих представителей* для $\mathscr{S}$ называется множество $\{x_1,\,\ldots,\,x_t\}$ элементов, таких, что $\forall i \quad S_i \cap \{x_1,\,\ldots,\,x_t\} \neq \varnothing$.

Задача 75. Обозначим через $\tau(n,m,h) := \max_H \tau(H)$, где максимум берётся по всем h-однородным гиперграфам на n вершинах с m гиперрёбрами. Иными словами, если нам предъявили произвольный гиперграф описанного вида, мы можем гарантировать, что отыщем в нём с. о. п. размера не больше $\tau(n,m,h)$. Докажите соотношения:

a) $\tau(n,m,h) \geqslant \min\{m, \lfloor \frac{n}{h} \rfloor\}$,
b) (д/з) $\tau(n,m,h) \leqslant n-h+1$.

Задача 76. Найдите глубину следующих матриц и установите, находит ли жадный алгоритм оптимальное покрытие для каждой из матриц. Для матриц пп. 3 и 4 найдите также хроматическое число соответствующих гиперграфов.

$$\underset{1}{\begin{pmatrix}0110\\0011\\1001\\1100\end{pmatrix}} \quad \underset{2}{\begin{pmatrix}111000\\100100\\010010\\001001\end{pmatrix}} \quad \underset{3\text{(д/з)}}{\begin{pmatrix}11110000001111\\00111100111100\\11000111100110\\11111110000000\\00000001111111\end{pmatrix}} \quad \underset{4}{\begin{pmatrix}1010010\\1001001\\0101010\\0010110\\0100101\end{pmatrix}}$$

Задача 77 (д/з)**.** Пусть даны 0,1-матрицы A и B. Матрица C получена заменой в матрице B каждой единицы на матрицу A, а каждого нуля — на матрицу из нулей (того же размера, что и A). Докажите, что $\tau(C) \leqslant \tau(A)\tau(B)$.

Задача 78. Пусть $l < k$. Положим величину $M(n,k,l)$ равной минимальному количеству таких k-элементных подмножеств множества $\{1,\dots,n\}$, что любое l-элементное подмножество $\{1,\dots,n\}$ целиком содержится хотя бы в одном из них.
a) Найдите $M(n,k,1)$.
b) Докажите, что $M(n,3,2) \lesssim \frac{\ln 3}{6} n^2$. (На самом деле, справедлива асимптотика $M(n,3,2) \sim \frac{n^2}{6}$.)
c) (д/з) Докажите, что $M(4n,2n,n) \leqslant \left(\frac{27}{16} + o(1)\right)^n$.
d) (д/з) Докажите, что $M(n,k,l) \geqslant \binom{n}{l} / \binom{k}{l}$.

Задача 79. Докажите, что если в h-однородном гиперграфе менее 2^{h-1} рёбер, то у него есть правильная раскраска в два цвета.

Гамильтоновы и эйлеровы циклы

Задача 80. Докажите, что максимальное число попарно непересекающихся по ребрам гамильтоновых циклов в полном графе K_n равно $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$.

Задача 81. Пусть $a_1,\dots,a_k$ — максимальная простая цепь в графе G, причём $k \geqslant 3$ и $\deg a_1 + \deg a_k \geqslant k$. Докажите, что в G есть простой цикл длины k.

Задача 82. Постройте двоичную последовательность Де Брёйна порядка 3, начинающуюся с 111.

Задача 83. С помощью графа Де Брёйна постройте двоичную последовательность Де Брёйна порядка 4,
a) начинающуюся с 1011,
b) (д/з) заканчивающуюся на 1010.

Задача Турана

Задача 84. Можно рассмотреть обобщение задачи Турана, вместо клик заданного размера запретив другие подграфы. Обозначим через $\mathrm{ex}_H(n)$ максимальное количество рёбер в n-вершинном графе, который не содержит подграфов, изоморфных H. Так, например, $\mathrm{ex}_{K_{m+1}}(n)$ — это в точности число рёбер в графе Турана на n вершинах с кликовым числом m. Докажите следующие соотношения:
a) (д/з) Если H_1 — подграф H_2, то $\mathrm{ex}_{H_1}(n) \leqslant \mathrm{ex}_{H_2}(n)$.
b) (д/з) Если $H = H_1 \cup H_2$, где $V(H_1) \cap V(H_2) = \varnothing$, то $\mathrm{ex}_H(n) \geqslant \max\{\mathrm{ex}_{H_1}(n), \mathrm{ex}_{H_2}(n)\}$.
c) $\mathrm{ex}_{P_k}(n) \gtrsim \frac{k-2}{2} \cdot n$, где P_k — цепь на k вершинах.
d) $\mathrm{ex}_{C_{2k+1}}(n) \gtrsim \frac{n^2}{4}$, где C_{2k+1} — цикл на $(2k+1)$ вершинах.
e) $\mathrm{ex}_{K_{1,m}}(n) \sim \frac{m-1}{2} \cdot n$.

Асимптотики

Задача 85. Могут ли функции $f(x)$ и $g(x)$ одновременно удовлетворять соотношениям $f(x)=o(g(x))$ и $g(x)=o(f(x))$? Могут ли $f(x)$ и $g(x)$ одновременно удовлетворять соотношениям $f(x)=O(g(x))$ и $g(x)=O(f(x))$? Следует ли из этого, что $f(x)\sim g(x)$?

Задача 86. Подберите функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что $f(x)\sim g(x)$, но $e^{f(x)}\neq O(e^{g(x)})$.

Задача 87. Найдите константу γ в записи $\binom{4n}{n}=(\gamma+o(1))^n$.

Задача 88. Найдите асимптотику следующих величин при $n\to\infty$:
- *a)* $\binom{n^2/2}{n}$,
- *b)* (д/з) $\binom{n}{n^\alpha}$ при фиксированном $\alpha\in(0,1)$,
- *c)* (д/з) $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2$.

Задача 89. Функция $n(s)$ задана в виде $n:=\max\{n_0 \mid n_0!\leqslant s\}$. Найдите асимптотику этой функции при $s\to\infty$.

Задача 90. Найдите асимптотику по n следующих функций:
- *a)* $f(n):=\min\left\{m\in\mathbb{N} \mid \binom{n}{m}<2^{\binom{m}{2}}\right\}$,
- *b)* (д/з) $f(n)=\max\{s \mid s!\cdot 2^s<n\}$.

Разбиения натуральных чисел

Задача 91. За пересылку бандероли надо уплатить 18 копеек. Сколькими способами можно оплатить бандероль марками стоимостью 4, 6 и 10 копеек, если два способа, отличающихся порядком марок, считаются различными?

Задача 92. Сколькими способами можно разменять гривенник на монеты в 1, 2, 3 и 5 копеек?

Задача 93. Определим $p_k(n)$ как количество неупорядоченных разбиений n на k слагаемых.
- *a)* Найдите $p_1(n)$ и $p_2(n)$.
- *b)* Найдите $p_3(n)$.

Задача 94 (д/з)**.** Докажите, что число упорядоченных разбиений числа n на k слагаемых равно $\binom{n-1}{k-1}$

Задача 95. Докажите, что количество неупорядоченных разбиений числа n на слагаемые равно количеству разбиений числа $2n$ на n слагаемых (порядок слагаемых не принимается во внимание).

Задача 96 (д/з)**.** Индукцией по n докажите, что при $n>k$ количество всех вхождений натурального числа k в упорядоченные разбиения числа n равно $(n-k+3)\cdot 2^{n-k-2}$.

Изоморфизм графов

Везде далее по умолчанию под «графами» понимаются неориентированные графы без петель и кратных рёбер. Помните, что графы *не предполагаются связными* по умолчанию.

Задача 97. Перечислите все попарно неизоморфные
- *a)* графы на четырёх вершинах,
- *b)* связные графы на пяти вершинах с пятью рёбрами,
- *c)* (д/з) несвязные графы на пяти вершинах.

В этой задаче нужно выработать какую-нибудь стратегию перебора. В противном случае, велики шансы забыть какой-нибудь граф, либо привести два изоморфных графа. Выберите какой-нибудь параметр (количество рёбер/циклов, длина минимального цикла, количество компонент связности и т. д.), такой, что в зависимости от его значения множество всех графов разбивается на «не очень большое» количество «хорошо обозримых» групп, и в каждой из групп не слишком много графов. Тем самым Вы сводите к минимуму вероятность ошибки, т.к. графы из разных групп заведомо неизоморфны, а внутри одной группы легче отслеживать изоморфизм и полноту.

Задача 98. Найдите количество попарно неизоморфных графов, имеющих 8 вершин и 25 рёбер.

Начала теории групп

В формулировках задач будем использовать в основном мультипликативные обозначения групповых операций.

Задача 99. *Группа симметрий* геометрической фигуры — это множество ортогональных преобразований плоскости (пространства), при которых фигура переходит сама в себя. Если фигура является многоугольником или многогранником, то группе симметрий однозначно соответствует некоторая группа перестановок вершин фигуры.

a) Проверьте, что группа симметрий действительно является группой.

b) Опишите группу симметрий квадрата относительно поворотов. Опишите соответствующую группу перестановок вершин квадрата. Рассмотрите два случая: когда квадрат рассматривается как фигура на плоскости, и разрешены только вращения плоскости, и когда квадрат рассмотрен в пространстве.

c) (д/з) Опишите группу симметрий правильного n-угольника. Как и в предыдущем пункте, рассмотрите два случая. Сколько элементов в полученных группах? Какие у них есть нетривиальные подгруппы?

d) Опишите группу симметрий тетраэдра и куба.

Задача 100. Образует ли множество формальных степенных рядов (с действительными коэффициентами) группу относительно сложения? А относительно умножения?

Задача 101. Напомним, что *симметрической группой* S_n называется группа всех перестановок на n-элементном множестве. Перестановка σ называется *чётной*, если количество пар $i, j \in \{1,\dots,n\}$, таких, что $i < j$ и $\sigma(i) > \sigma(j)$, чётно. Докажите, что множество всех чётных перестановок образует подгруппу в S_n. Она называется *знакопеременной группой* A_n.

Задача 102. Элемент b называется *сопряжённым* к элементу a в группе G, если $\exists x \in G$, такой, что $b = x^{-1}ax$. Докажите, что отношение «быть сопряжёнными элементами» рефлексивно, симметрично и транзитивно, т. е. является отношением эквивалентности на G.

Задача 103. Подгруппа $H \leqslant G$ называется *нормальной*, если для любого элемента $x \in G$ выполнено $xH = Hx$.

a) Приведите пример нормальной подгруппы в группе $(\mathbb{Z},+)$ и симметрической группе S_n.

b) Докажите, что если H — нормальная подгруппа группы G, то множество всех смежных классов по H образует группу с операцией $\circ$, в которой операция $\circ$ выполняется так: $(aH)\circ(bH) := (ab)H$.

c) (д/з) Докажите обратное п.2 утверждение: если множество смежных классов по H образует группу относительно введённой операции $\circ$, то H является нормальной подгруппой.

Задача 104. Построенная в предыдущей задаче группа называется *фактор-группой группы G по подгруппе H* и обозначается G/H.

a) Почему если G конечна, то $|G/H| = \frac{|G|}{|H|}$?

b) Опишите фактор-группу группы $(\mathbb{Z},+)$ по подгруппе $7\mathbb{Z}$, где $7\mathbb{Z} := \{7k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

c) Опишите фактор-группу группы $(\mathbb{Q},+)$ по подгруппе $(\mathbb{Z},+)$.

Задача 105 (д/з). Пусть $(G, \circ)$ и $(H, \bullet)$ — произвольные группы. Их *прямым произведением* называется множество $\{(g, h) \mid g \in G,\, h \in H\}$ с операцией, которая парам (g', h') и (g'', h'') сопоставляет пару $(g' \circ g'',\, h' \bullet h'')$. Докажите, что прямое произведение групп является группой. Эта группа обычно обозначается $G \times H$.

Задача 106. Вычислите по модулю 13:

a) $4^6 \cdot 10^4 + 3^{333}$,

b) (д/з) $(11^{15} + 15^{11}) \cdot 5^{550}$.

Задача 107. *Таблица Кэли* группы G — это таблица, задающая групповую операцию (по строкам и столбцам идут элементы группы, а в клетках таблицы — результат применения операции к соответствующим элементам). Постройте таблицы Кэли для аддитивной группы $\mathbb{Z}_3$ и мультипликативной группы $\mathbb{Z}_5^\times$.

Задача 108. Найдите

a) порядок элемента (45276813) в группе S_8,

b) порядок элемента 4 в группе $\mathbb{Z}_7$,

c) порядок элемента 4 в группе $\mathbb{Z}_7^\times$,

d) (д/з) порядок элемента (15276843) в группе S_8,

e) (д/з) порядок элемента 5 в группе $\mathbb{Z}_7$,

f) (д/з) порядок элемента 5 в группе $\mathbb{Z}_7^\times$.

Задача 109. Перечислите все подгруппы группы $\mathbb{Z}_6$. Какими элементами эти подгруппы порождаются? Заметьте, что $\mathbb{Z}_2$ и $\mathbb{Z}_3$ не являются подгруппами $\mathbb{Z}_6$, хотя и изоморфны соответствующим подгруппам $\mathbb{Z}_6$.

Многочлены и конечные поля

Задача 110. Для каждого из следующих многочленов определите, является ли он неприводимым над соответствующим полем:

a) $x^{66} + 66$ над $\mathbb{Z}_{67}$,

b) (д/з) $x^{333} + x^{111} + 2$ над $\mathbb{Z}_3$,

c) $x^3 + x + 1$ над $\mathbb{Z}_2$,

d) $x^3 + x + 1$ над $\mathbb{Z}_3$,

e) $x^4 + x^2 + 1$ над $\mathbb{Z}_2$,

f) (д/з) $x^4 + x^3 + x + 2$ над $\mathbb{Z}_3$,

g) (д/з) $x^4 + 2$ над $\mathbb{Z}_5$.

Задача 111 (д/з). Докажите, что в поле $\mathbb{Z}_p/Q$ (где Q — неприводимый над $\mathbb{Z}_p$ многочлен) для любых $a, b \in \mathbb{Z}_p/Q$ справедливо равенство $(a + b)^p = a^p + b^p$.

Задача 112. Постройте конечное поле из заданного числа элементов: укажите элементы поля, запишите таблицы сложения и умножения.

a) 4,

b) (д/з) 9.

Задача 113. Выполните вычисления в конечном поле:

a) $(x+1)\cdot(x^2+1) + x^2 \in \mathbb{Z}_2[x]/(x^3 + x + 1)$,

b) (д/з) $(x^2+1)\cdot(x^2+4x+2) + 3x^3 + 1 \in \mathbb{Z}_5[x]/(x^4 + 2)$.

Задача 114. С помощью алгоритма Евклида найдите наибольший общий делитель многочленов:

a) $3x^2 + 3,\ 3x^3 + 4x^2 + 2x + 2 \in \mathbb{Z}_5[x]$,

b) (д/з) $x^2 + x + 1,\ x^3 + 4x + 5 \in \mathbb{Z}_7[x]$.

Задача 115. Найдите для заданного элемента поля найдите обратный по умножению:

a) $37 \in \mathbb{Z}_{59}$,

b) (д/з) $37 \in \mathbb{Z}_{43}$,

c) $x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]/(x^3 + x + 1)$,

d) (д/з) $3x^3 + x + 2 \in \mathbb{Z}_5[x]/(x^4 + 2)$.

Теорема Редфилда—Пойи

Задача 116. Будем рассматривать всевозможные, не только правильные, раскраски вершин графа. Раскраски будем считать одинаковыми, если они переходят друг в друга при автоморфизме графа. Применив теорему Редфилда—Пойи, найдите асимптотику количества различных раскрасок вершин следующих графов в цвета из множества $\{1,\dots,k\}$ при $k\to\infty$:

a) P_n (цепь на n вершинах),

b) граф, полученный присоединением к одной из вершин цикла C_n пяти листьев,

c) граф трёхмерного куба.

Рекуррентные соотношения

Задача 117. Сколько подмножеств можно выбрать во множестве $[n]$, так, чтобы в этих подмножествах не было соседних натуральных чисел? Найдите асимптотику этого количества.

Задача 118. Числа Фибоначчи задаются рекуррентным соотношением $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$ и начальными условиями $F_0=F_1=1$. Докажите следующие факты:

a) Для любых $m,n\in\mathbb{N}$ выполнено $F_{n+m}=F_{n-1}F_m+F_nF_{m+1}$.

b) Для любых $m,n\in\mathbb{N}$ число F_{nm} делится на число F_m.

c) (д/з) Любые два соседних числа F_n, F_{n+1} взаимно просты (не имеют общих делителей, отличных от единицы).

d) Каждое натуральное число может быть однозначно представлено в виде суммы чисел Фибоначчи так, что каждое число входит в сумму не более одного раза и что никакие два соседних числа не входят в сумму одновременно.

Задача 119 (д/з)**.** Найдите общее решение рекуррентного соотношения $a_{n+2}-7a_{n+1}+12a_n=0$.

Задача 120. Найдите решение рекуррентного соотношения $a_{n+3}-9a_{n+2}+26a_{n+1}-24a_n=0$ при условии, что $a_1=1$, $a_2=-3$, $a_3=-29$.

Задача 121. Найдите решение рекуррентной системы:

a) $\begin{cases} a_{n+1} &=& 3a_n+b_n,\\ b_{n+1} &=& -a_n+b_n,\\ a_1 &=& 14,\\ b_1 &=& -6.\end{cases}$

b) (д/з) $\begin{cases} a_{n+1} &=& a_n+-2b_n,\\ b_{n+1} &=& a_n+4b_n,\\ a_1 &=& 8,\\ b_1 &=& -3.\end{cases}$

Задача 122. На сервере каждый час выполняется одна из задач X, Y и Z. Никакая из задач не выполняется два часа подряд. При этом задача Z настолько ресурсоёмкая, что сразу после неё не может выполняться задача Y, иначе сервер перегревается. Пусть $f(n)$ — количество способов загрузить сервер задачами на n часов? Найдите порядок роста функции $f(n)$.

Комбинаторика слов

Задача 123. *a)* Вычислите $T_3(6)$.

b) (д/з) Вычислите $T_2(2^n)$ для произвольного n.

Задача 124. Найдите сумму значений функции Мёбиуса по тем и только тем делителям числа $n=p_1^{\alpha_1}\dots p_s^{\alpha_s}$, в каноническое разложение которых входит чётное количество простых множителей.

Задача 125. Найдите формулу для числа различных циклических последовательностей длины n в алфавите $\{b_1, \ldots, b_r\}$, в которых символ b_i встречается n_i раз ($i = \overline{1, n}$).

Задача 126. Выпишите 5 символов последовательности Туэ—Морса, начиная с тысячного.

Степенные ряды и производящие функции

Задача 127. Найдите радиус сходимости степенного ряда $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{k^k} x^k$.

Задача 128. Найдите радиус сходимости степенного ряда $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} p(k) x^k$, где $p(n)$ — количество неупорядоченных разбиений n на слагаемые.

Задача 129. Найдите первые четыре слагаемых формального ряда $\frac{1-x}{1-x^3-x^4}$.

Задача 130. Сверните сумму $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} \left(\frac{2}{3}\right)^k$.

Задача 131. Для последовательности $\{a_n\}$, заданной рекуррентным соотношением, найдите производящие функции (в общем виде в зависимости от нескольких начальных членов последовательности):

a) $a_{n+3} + 5a_{n+2} + 3a_{n+1} + 7a_n = 0$

b) (д/з) $a_{n+3} + 4a_{n+2} + 7a_{n+1} + 9a_n = 0$

c) $2a_{n+4} + 5a_{n+3} + 3a_{n+2} + 2a_{n+1} + 4a_n = 0$

d) (д/з) $a_{n+4} + 3a_{n+3} + 8a_{n+2} + 3a_{n+1} + 5a_n = 0$

Задача 132. Из тождества $(1+x)^p(1+x)^{-k-1} = (1+x)^{p-k-1}$ выведите, что

$$\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \binom{k+s}{s} \binom{p}{n-s} = \binom{p-k-1}{n}.$$

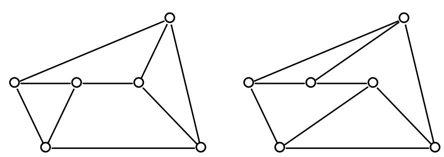
Задача 133 (д/з)**.** Из равенства $(1-x)^{-n}(1-x^h)^n = (1+x+\ldots+x^{h-1})^n$ выведите, что

$$\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \binom{m-sh}{n-1} \binom{n}{s} = \begin{cases} 0, & m > hn-1, \\ 1, & m = hn-1. \end{cases}$$

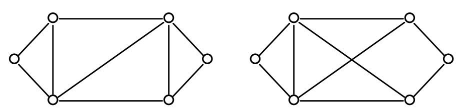
(Опечатки в условии нет.)

Задача 134. Определите, изоморфны ли графы на рисунках:

a)



b) (д/з)



Если Вы хотите доказать, что графы изоморфны, нужно привести конкретный изоморфизм: указать, какая вершина первого графа сопоставляется с какой вершиной второго. А чтобы доказать неизоморфность, нужно подобрать какую-то характеристику, которая должна быть одинаковой у изоморфных графов, и обосновать, что у заданной пары графов она отличается. Выбор такой характеристики — творческая задача, для начала можно попробовать: количество вершин/рёбер/циклов заданной длины, количество вершин заданной степени, наличие какого-то подграфа и т. д.

Аддитивная комбинаторика

Напомним, что если A и B — подмножества абелевой группы, то суммой A и B называется множество

$$A+B := \{a+b \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

Пусть A — произвольное подмножество абелевой группы G. Назовём k-кратной суммой (или просто k-суммой) множества A следующее множество:

$$kA := \underbrace{A+A+\ldots+A}_{k\text{раз}}.$$

Задача 135. Пусть G — произвольная абелева группа. Докажите, что для любых непустых $A, B \subseteq G$ верны следующие неравенства:

a) $|A| \leqslant |A+A| \leqslant \frac{|A|(|A|+1)}{2}$.

b) $\max\{|A|, |B|\} \leqslant |A+B| \leqslant |A||B|$.

c) $|A-B| \leqslant \frac{|A-C||B-C|}{|C|}$ для произвольного непустого подмножества $C \subseteq G$. Это неравенство называется *неравенство треугольника Ружи*.

Указание: Для доказательства последнего пункта следует заметить, что для любых заданных $a \in A, b \in B$ выполнено тождество $a-b=(a-c)+(c-b)$ (здесь $c \in C$ — произвольный элемент).

Задача 136. Даны произвольные непустые $A, B \subseteq G$. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны (т. е. если выполнено одно из них, то выполнены и все остальные):

a) $|A+B|=|A|$,

b) $|A-B|=|A|$,

c) $|A+nB-mB|=|A|$ для хотя бы одной пары натуральных чисел (m,n),

d) $|A+nB-mB|=|A|$ для любых натуральных m и n,

e) (д/з) существует подгруппа $H \subseteq G$, такая, что B является подмножеством некоторого смежного класса по H, а A есть объединение смежных классов по этой же подгруппе.

Указание: Рассмотрите множество $Sym(A)=\{h \in G : \{h\}+A=A\}$, которое называется ***группой симметрии*** множества A.

Задача 137. Даны произвольные непустые $A, B \subseteq G$. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны:

a) $|A+B|=|A||B|$,

b) $|A-B|=|A||B|$,

c) $|\{(a_1,a_2,b_1,b_2) \in A\times A\times B\times B : a_1+b_1=a_2+b_2\}|=|A||B|$,

d) $|\{(a_1,a_2,b_1,b_2) \in A\times A\times B\times B : a_1-b_1=a_2-b_2\}|=|A||B|$,

e) (д/з) $|A\cap(x-B)|=1$ для любых $x \in A+B$,

f) (д/з) $|A\cap(B+y)|=1$ для любых $y \in A-B$,

g) (д/з) $(A-A)\cap(B-B)=\{0\}$.

Указание: При решении обоснуйте и используйте следующий факт: если A и B таковы, что $|A+B|=|A||B|$, то для любого элемента $z \in A+B$ существует единственная пара $(a,b) \in A\times B$, для которой $z=a+b$.

Задача 138 (д/з)**.** Не используя теорему Коши—Давенпорта, докажите, что, если для некоторых непустых подмножеств $A, B \subsetneq \mathbb{Z}_p$ выполнено равенство $|A+B|=|A|$, то хотя бы одно из множеств A или B состоит ровно из одного элемента.

Указание: Используйте результат задачи 13.2.

Задача 139 (д/з)**.** Рассмотрим произвольное поле $\mathbb{F}$ и ненулевой полином $P \in \mathbb{F}[x_1,x_2,\ldots,x_n]$ от $n \geqslant 1$ переменных и любое непустое подмножество $S \subset \mathbb{F}$. Выберем элементы $s_1,s_2,\ldots,s_n$ случайно, независимо, равномерно из множества S. Докажите, что

$$\Pr[P(s_1,s_2,\ldots,s_n)=0] \leqslant \frac{\deg P}{|S|}.$$

Указание: Используйте метод математической индукции по количеству переменных в многочлене P. Рассмотрите для произвольного $s \in S$ многочлен $Q(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})=P(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},s)$. Это утверждение принадлежит Липтону, ДеМилло, Шварцу и Зиппелю.

Задача 140. Рассмотрим произвольное поле $\mathbb{F}$ и ненулевой полином $P \in \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n]$ от $n \geqslant 1$ переменных и непустые подмножества $S_1, S_2, \ldots, S_n \subset F$. Определим полиномы $g_i(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{s \in S_i}(x_i - s), 1 \leqslant i \leqslant n$. Предположим, что P обнуляется на множестве $S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$. Докажите, что существуют полиномы $h_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \deg h_i \leqslant \deg P - \deg g_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, такие, что $P = \sum_{i=1}^n h_i g_i$. При помощи этого утверждения получите альтернативное доказательство теоремы Алона.

Указание: Проведите индукцию по степени многочлена P. Разделите P на многочлен g_1 с остатком, затем разделите остаток на многочлен g_2 и т.д. В конце останется показать, что остаточный многочлен равен нулю.

Задача 141. Рассмотрим произвольное поле $\mathbb{F}$ и ненулевой полином $h \in \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n]$ от $n \geqslant 1$ переменных. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset \mathbb{F}$ — произвольные подмножества и параметр $K > 0$, удовлетворяют условию $\sum_{i=1}^n |A_i| = K + n + \deg h$. Предположим, что многочлен $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^K h(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеет ненулевой коэффициент при мономе $x_1^{|A_1|-1} x_2^{|A_2|-1} \cdots x_n^{|A_n|-1}$. Тогда

$$|\{a_1 + a_2 + \ldots + a_n : a_i \in A_i, 1 \leqslant i \leqslant n, h(a_1, a_2, \ldots, a_n) \neq 0\}| \geqslant K + 1.$$

Указание: От противного. Обозначим множество в левой части доказываемого неравенства через B. Допустим, что $|B| \leqslant K$. Рассмотрите многочлен $Q(x_1, \ldots, x_n) = h(x_1, \ldots, x_n) \prod_{b \in B}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n - b)$. Он имеет степень $\deg Q = |B| + \deg h \leqslant K + \deg h$ и, по построению, обнуляется на $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$. Выведите из этого противоречие с теоремой Алона.

Задача 142. Для произвольных подмножеств $A, B \subseteq \mathbb{Z}_p$ определим так называемую ***частичную сумму*** A и B следующим образом:

$$A \hat{+} B = \{a + b \mid a \in A,\, b \in B,\, a \neq b\}.$$

Докажите аналог теоремы Коши—Давенпорта для частичных сумм:

$$|A \hat{+} B| \geqslant \min\{|A| + |B| - 3,\, p\}.$$

Если $A \neq B$, то это неравенство можно немного улучшить:

$$|A \hat{+} B| \geqslant \min\{|A| + |B| - 2,\, p\}.$$

Указание: Неравенство можно вывести из предыдущей задачи, применив её результат с многочленом $h(x_1, x_2) = x_1 - x_2$ и параметром $K = |A| + |B| - 3$.

Экстремальная, и не только, теория графов

Задача 143. Пусть Γ — конечная группа (с мультипликативными обозначениями), и пусть $A \subseteq \Gamma$. *Граф Кэли* для группы Γ, порождённый множеством A — это орграф с множеством вершин Γ и множеством рёбер $\{(v, v \cdot a) \mid v \in \Gamma, a \in A\}$. Графы Кэли играют важную роль как в комбинаторной теории групп, так и в теории графов.

a) (д/з) Постройте граф Кэли для симметрической группы S_3, порождённый множеством из одной перестановки $(1 \to 2, 2 \to 1, 3 \to 3)$.

b) (д/з) Докажите, что граф Кэли — ориентированный граф, в котором для любой вершины v выполнено равенство $d^+(v) = d^-(v) = |A|$.

c) (д/з) Из предыдущего пункта выведите, что k-регулярные n-вершинные графы существуют для любого чётного k и любого $n > k$.

d) Докажите, что графы Кэли *вершинно-транзитивные*. Это означает, что для любых двух вершин u, v найдётся автоморфизм графа Кэли, который переводит u в v.

e) Пусть граф Кэли порождён одноэлементным множеством $A = \{a\}$. Докажите, что *обхват* графа (т. е. наименьшая длина циклов в графе) равна порядку элемента a в группе.

Задача 144. Найдите асимптотику количества рёбер в графе Турана на n вершинах с фиксированным кликовым числом, при $n \to \infty$.

Задача 145 (д/з). Докажите, что $\mathrm{ex}_{K_{2,2}}(n) = \mathrm{ex}_{C_4}(n) \lesssim n\sqrt{n}/2$. Для этого можно воспользоваться верхней оценкой чисел Заранкевича. Совсем напрямую не получится (ведь числа Заранкевича определяются для двудольных графов), но можно применить конструкцию, называемую *двойным двудольным покрытием (bipartite double cover)*. Двойным двудольным покрытием графа G называется двудольный граф, доли которого — это две копии множества $V(G)$, и ребро идёт между вершинами u и v, если прообразы этих вершин были соединены в графе G.

Теория Рамсея

Задача 146. Напомним, что числом Рамсея $R(s,t)$ называется такое минимальное N, что в любой раскраске рёбер графа K_N в два цвета (скажем, в красный и синий) найдётся красная клика на s вершинах или синяя клика на t вершинах (возможно, что и обе одновременно). Теорема Рамсея утверждает, что указанное N всегда существует. Докажите аналогичное утверждение для трёх цветов.

a) Докажите равенства $R(s_1, s_2, 1) = 1$ и $R(s_1, s_2, 2) = R(s_1, s_2)$.

b) Покажите, что если $R(s_1, s_2, s_3)$ — трёхцветное число Рамсея, то $R(s_1, s_2, s_3) \leqslant R(s_1, R(s_2, s_3))$.

c) (д/з) Докажите, что $R(s_1, s_2, s_3) \leqslant R(s_1 - 1, s_2, s_3) + R(s_1, s_2 - 1, s_3) + R(s_1, s_2, s_3 - 1)$.

d) Установите, какой из предыдущих двух пунктов даёт лушую асимптотическую оценку для чисел $R(s,s,s)$ при $s \to \infty$.

Задача 147. Докажите, что если оба числа $R(s-1,t)$ и $R(s,t-1)$ чётные, то $R(s,t) \leqslant R(s-1,t) + R(s,t-1) - 1$, — то есть в этом случае доказанную на лекции оценку можно улучшить на единицу.

Задача 148. Докажите соотношения:

a) $R(3,3) = 6$,

b) (д/з) $R(3,4) = 9$,

c) (д/з) $R(4,4) \leqslant 18$.

Задача 149. На лекции с помощью вероятностного метода была доказана оценка $R(s,s) \gtrsim \frac{1}{e\sqrt{2}} \cdot s \cdot (\sqrt{2})^s$. Вам предлагается доказать оценку в $\sqrt{2}$ раз лучше.

a) (д/з) Покажите, что если M — матожидание количества s-вершинных клик/независимых множеств в случайном n-вершинном графе, то $R(s,s) > n - M$.

b) (д/з) Докажите, что если строить граф на n вершинах, случайно проводя/не проводя каждое ребро с вероятностью $1/2$, то матожидание числа множеств размера s, на которых образуется клика или независимое множество, равно $\binom{n}{s} \cdot 2^{1-\binom{s}{2}}$.

c) (д/з) Убедитесь, что при $n \sim \frac{1}{e} \cdot s \cdot (\sqrt{2})^s$ выполнется неравенство $M \lesssim \frac{n}{s}$. Тогда из результатов пп. 1 и 2 будет следовать, что $R(n,s) \gtrsim n - \frac{n}{s} \sim n$. Нетрудно видеть, что это даёт нужную оценку чисел Рамсея.

Задача 150. В доказательстве нижней оценки чисел Рамсея строится «случайный граф» в результате простой процедуры независимого выбора для каждого ребра: добавлять его в граф либо не добавлять. Пусть вероятность добавления ребра равна $\frac{1}{2}$. Скажем, что случайный граф *почти наверное обладает каким-либо свойством*, если вероятность того, что граф этим свойством обладает, стремится к единице, когда число вершин n стремится к бесконечности. Докажите следующее:

a) случайный граф почти наверное связен,

b) диаметр случайного графа почти наверное равен 2,

c) (д/з) в случайном графе почти наверное нет клики размера $100 \ln n$,

d) (д/з) хроматическое число случайного графа почти наверное не меньше $\frac{n}{100 \ln n}$,

e) каким бы ни был *фиксированный* граф H, случайный граф почти наверное содержит порождённый подграф, изоморфный H.

Задача 151. Верно ли, что если случайный граф почти наверное обладает свойством P_1 и почти наверное обладает свойством P_2, то он почти наверное обладает одновременно конъюнкцией этих свойств?

Задача 152 (д/з). Игральная кость брошена два раза. Пусть X_1, X_2 — количества очков, выпавших при этих испытаниях. Рассмотрим события (символ «|» здесь означает «делит»):

$$A_1 = \{2|X_1, 3|X_2\},\ A_2 = \{3|X_1, 2|X_2\},\ A_3 = \{X_2|X_1\},$$
$$A_4 = \{X_1|X_2\},\ A_5 = \{2|(X_1 + X_2)\},\ A_6 = \{3|(X_1 + X_2)\}.$$

Приведите пример двух неизоморфных друг другу орграфов зависимостей для множества событий $A_1, \ldots, A_6$.

Лемма Ловаса

Задача 153. Напомним определения. Гиперграф называется *k-равномерным* (или *k-однородным*), если каждое ребро имеет мощность k. Гиперграф называется *k-регулярным*, если каждая вершина содержится ровно в k рёбрах. Раскраска вершин гиперграфа *правильная*, если никакое ребро в ней не одноцветно. Докажите, что при $k \geqslant 10$ вершины любой k-регулярный k-равномерный гиперграф можно раскрасить правильно в два цвета.

Задача 154. Пусть есть три вида событий: $A_1, \ldots, A_m$, $B_1, \ldots, B_m$ и $C_1, \ldots, C_m$. Пусть на каждое событие вида A могут влиять не больше n_{AB} событий вида B и не более n_{AC} событий вида C. Аналогично введём величины $n_{BA}, n_{BC}, n_{CA}, n_{CB}$. Убедитесь, что для выполнения неравенства

$$\Pr\left[\bigcap_i \left(\overline{A_i} \cap \overline{B_i} \cap \overline{C_i}\right)\right] > 0$$

достаточно, чтобы нашлись числа $a, b, c \in (0,1)$, такие, что $\Pr[A_i] \leqslant a(1-b)^{n_{AB}}(1-c)^{n_{AC}}$, $\Pr[B_i] \leqslant b(1-a)^{n_{BA}}(1-c)^{n_{BC}}$ и $\Pr[C_i] \leqslant c(1-a)^{n_{CA}}(1-b)^{n_{CB}}$. Заметьте, что это частный случай леммы Ловаса.

Задача 155. Классическая *теорема Ван дер Вардена* утверждает, что для любых k, r существует такое число N, что как бы ни были покрашены числа $\{1, 2, 3, \ldots, N\}$ в r цветов, среди них можно будет указать k чисел одного цвета, образующих арифметическую прогрессию длины k. Минимальное такое число N называется числом Ван дер Вардена и обозначается $W(k, r)$. Докажите, что $W(k, 2) \geqslant \frac{1}{6} \cdot \frac{2^k}{k}$.

Задача 156 (д/з). *Литералом* называется логическая переменная либо её отрицание. *Конъюнктивной нормальной формой* (КНФ) называют любую конъюнкцию нескольких дизъюнкций литералов. Пример КНФ: $x_1(\overline{x_2} \vee \overline{x_3})(x_3 \vee \overline{x_4})$. Одна из стандартных задач, изучаемых в теории сложности, состоит в том, чтобы для заданной КНФ найти набор значений переменных, на котором она обращается в единицу, либо установить отсутствие такого набора. Если такой набор существует, то КНФ называется выполнимой, а иначе — невыполнимой. Докажите, что выполнимой является любая КНФ, в каждой дизъюнкции которой ровно k литералов, и каждая дизъюнкция имеет общие переменные не более чем с 2^{k-2} другими дизъюнкциями.

Задача 157 (д/з). Пусть каждой вершин простого графа G сопоставлен «список допустимых цветов» размера $10d$. Пусть $\Delta(G) \leqslant d$. Докажите, что можно так раскрасить вершины графа (каждую вершину в один из допустимых для неё цветов), так, чтобы смежные вершины получили разные цвета (то есть раскраска является правильной в стандартном понимании).

Несколько задач из комбинаторной геометрии

В следующих четырёх задачах поможет нижняя оценка на число скрещиваний в графе с заданным количеством вершин и рёбер.

Задача 158. Докажите, что при $\delta \geqslant 8$ число скрещиваний у графа на n вершинах с минимальной степенью вершин δ не меньше $(\delta/8)^3 n$.

Задача 159. Пусть на плоскости заданы l прямых, и n точек. Докажите, что число инциденций (то есть пар вида (прямая, точка на прямой)) в полученной конфигурации не превосходит $c \cdot ((nl)^{2/3} + n + l)$, где c — некоторая абсолютная константа. Это утверждение называется теоремой Семереди—Троттера.

a) Рассмотрите граф, в котором вершины соответствуют точкам конфигурации, и две вершины соединены ребром, если точки лежат на какой-либо прямой рядом (не разделены другой точкой). Пусть m — число рёбер в этом графе. Покажите, что число инциденций не превосходит $(m+l)$.

b) Покажите, что число скрещиваний построенного графа не превосходит l^2.

c) Применив теорему о числе скрещиваний, завершите доказательство теоремы Семереди—Троттера.

Задача 160 (д/з). Пусть даны n точек плоскости. Пусть $2 \leqslant k \leqslant \sqrt{n}$. Докажите, что число прямых, каждая из которых содержит по крайней мере k из этих точек, не превосходит cn^2/k^3. Это утверждение также принадлежит Семереди и Троттеру.

Задача 161. Докажите теорему Спенсера—Семереди—Троттера: для любых n точек плоскости количество пар точек, находящихся на расстоянии 1, не превосходит $cn^{4/3}$.

a) Рассмотрите граф, в котором вершины соответствуют точкам, а рёбра обпределяются следующим образом. Нарисуем окружности единичного радиуса с центрами в точках. Некоторые из точек попадут на окружности с центрами в других точках (как раз если между точками было единичное расстояние). Оставим лишь те окружности, на которые попало не менее трёх точек. Соединим пару вершин графа ребром, если соответствующие точки попадают на какую-либо из окружностей друг за другом (не разделены третьей точкой). Покажите, что число скрещиваний полученного графа не превосходит $2n^2$.

b) Пусть в полученном графе m рёбер. Покажите, что число пар точек на единичном расстоянии не превосходит $(m+O(n))$, и завершите доказательство теоремы, применив теорему о числе скрещиваний.

Задача 162. Используя теорему Семереди—Троттера, докажите следующий факт. Существует такая константа $\gamma > 0$, что $\max\{|A+A|, |A\cdot A|\} \geqslant \gamma \cdot |A|^{5/4}$ для любого конечного множества $A \subset \mathbb{R}$.

a) Рассмотрим семейство прямых $\mathscr{L}$ на плоскости, задаваемых уравнениями вида $y = a'x - a'a''$, где $a', a'' \in A$. Рассмотрим множество $\mathscr{P}$ точек вида (b, c), где $b \in A+A$ и $c \in A \cdot A$. Каковы мощности семейств $\mathscr{L}$ и $\mathscr{P}$?

b) Убедитесь, что каждая прямая из $\mathscr{L}$ содержит по крайней мере $|A|$ точек из $\mathscr{P}$. Это значит, что общее количество инциденций между прямыми из $\mathscr{L}$ и точками из $\mathscr{P}$ не меньше чем $|A|^3$.

c) Запишите оценку общего количества инциденций между прямыми из $\mathscr{L}$ и точками из $\mathscr{P}$, даваемую теоремой Семереди—Троттера.

d) Сравните оценки предыдущих двух пунктов и выведите из них требуемой неравенство.

Задача 163 (д/з). Пусть в круге единичного радиуса разбросаны n точек. Докажите, что число пар этих точек, находящихся друг от друга на расстоянии $\leqslant \sqrt{2}$, не меньше чем $\frac{n^2-3n}{6}$. Для этого рассмотрите граф, в котором вершины соответствуют точкам, и пара вершин смежна, если расстояние между точками не больше $\sqrt{2}$. Покажите, что число независимости такого графа мало и воспользуйтесь теоремой Турана.

Частично упорядоченные множества. Булев куб.

Задача 164. Пусть $A_1, \ldots, A_k \in 2^{\{1,2,\ldots,n\}}$ и $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_k$. Докажите, что количество способов, которыми можно дополнить $A_1, \ldots, A_k$ до максимальной цепи в булеане, равно $|A_1|!(n-|A_k|!) \cdot \prod\limits_{i=2}^{k}(|A_i|-|A_{i-1}|)!$.

Задача 165. Линейным упорядочением ч. у. м. $(S, \preceq)$ называется ч. у. м. $(S, \preceq')$, в котором любая пара элементов сравнимы и $a \preceq b$ влечёт $a \preceq' b$. Докажите, что булеан $2^{\{1,\ldots,n\}}$ можно линейно упорядочить не менее чем $\prod\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}!$ способами. Асимптотически это не меньше, чем $e^{(1-o(1))n^2/2}$.

Задача 166. *a)* Сколько существует неизоморфных трёхэлементных ч. у. м.?

b) (д/з) Тот же вопрос для четырёхэлементных ч. у. м.

c) (д/з) Докажите, что количество неизоморфных ч. у. м. мощности n асимптотически не меньше, чем $2^{\frac{n^2}{4}(1-o(1))}$. Для этого можно, например, оценить снизу число неизоморфных двудольных графов.

Задача 167. Докажите, что из любой числовой последовательности длины $(nm+1)$ можно выделить неубывающую подпоследовательность длины $(m+1)$ или невозрастающую подпоследовательность длины $(n+1)$. Для этого рассмотрите специальное частично упорядоченное множество и используйте теорему о разложении на цепи и антицепи.

Задача 168. Докажите, что если $A_1, \ldots, A_m$ — антицепь в булеане $2^{\{1,\ldots,n\}}$, и $\forall i\, |A_i| \leqslant k$, то $m \leqslant \binom{n}{k}$. Приведите пример антицепи размера в точности $\binom{n}{k}$.

Системы множеств со специальными свойствами

Задача 169. Подмножество рёбер гиперграфа $S_1, \ldots, S_m$ называется *подсолнухом (sunflower)* с m лепестками, если существует такое (возможно, пустое) множество Y, что $\forall i, j\; S_i \cap S_j = Y$. Докажите, что если в k-однородном гиперграфе строго больше чем $k!(m-1)^k$ рёбер, то в нём найдётся подсолнух с m лепестками. Примените индукцию по k.

a) Случай $k=1$ тривиален. Далее можно считать, что $k \geqslant 2$.

b) Пусть $A_1, \ldots, A_t$ — максимальное подмножество попарно непересекающихся рёбер гиперграфа. Если $t \geqslant m$, то искомый подсолнух у нас есть. Пусть далее $t < m$.

c) Рассмотрите множество $B := \bigcup_i A_i$. Оценив мощность B и заметив, что B пересекается с любым ребром гиперграфа, докажите, что найдётся элемент $x \in B$, содержащийся более чем в $(k-1)!(m-1)^{k-1}$ рёбрах гиперграфа.

d) Примените предположение индукции к гиперграфу $E' := \{e \setminus \{x\} \mid e \in E,\, e \ni x\}$.

Задача 170. Докажите *лемму Гаспаряна*: если $X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_m \subseteq \{1, \ldots, n\}$, такие, что $|X_i \cap Y_j| = 1 - \delta_{ij}$, то $m \leqslant n$. (Здесь через δ_{ij} обозначена дельта Кронекера.) Для этого рассмотрите матрицы M_X и M_Y — $(m \times n)$-матрицы инцидентности семейств $X_1, \ldots, X_m$ и $Y_1, \ldots, Y_m$. Рассмотрите произведение $M_X(M_Y^T)$, и заметьте, что полученная матрица невырождена.

Задача 171. *(v, k, λ)-дизайном* называется k-однородный гиперграф на v вершинах, в котором каждая пара вершин входит одновременно ровно в λ рёбер. Рёбра такого гиперграфа часто называются *блоками*, а сам граф — *блок-дизайном*. Докажите, что в любом (v, k, λ)-дизайне каждая вершина принадлежит ровно r блокам, где r удовлетворяет следующим соотношениям:

a) $r(k-1) = \lambda(v-1)$. Для этого зафиксируйте любую вершину w и посчитайте двумя способами количество пар вида (x, e), в которых $\{w, x\} \subseteq e \in E$ и $x \neq w$. Через E обозначено множество рёбер гиперграфа.

b) (д/з) $|E| \cdot k = vr$. Для этого посчитайте двумя способами количество пар вида (x, e), в которых $x \in e \in E$.

Задача 172 (д/з)**.** На лекциях, в доказательстве нижней оценки чисел Заранкевича рассматривалась матрица, которая строилась на основе алгебраической конструкции. Если посмотреть на эту матрицу, как на матрицу инцидентности гиперграфа (блок-дизайна), то каковы параметры v, k, λ у этого дизайна?

Семейство множеств $\mathscr{F}$ называется *наследственным*, если для любого $A \in \mathscr{F}$ и любого $B \subset A$ выполнено $B \in \mathscr{F}$. Наследственными являются, например, семейство всех независимых множеств графа, семейство линейно независимых множеств столбцов/строк матрицы и т. д.

Задача 173. Докажите, что если $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2 \subset 2^{\{1,\ldots,n\}}$ — наследственные семейства, то $|\mathscr{F}_1 \cap \mathscr{F}_2| \geqslant \frac{|\mathscr{F}_1| \cdot |\mathscr{F}_2|}{2^n}$. Это утверждение называется теоремой Клейтмана. Доказательство можно провести индукцией по n.

Размерность Вапника—Червоненкиса

Задача 174. Найдите VC-размерность следующих конечных семейств:

a) $\{\{1,2,3\}, \{4,5,6\}, \{1,2,4\}, \{1,2,5\}, \{2,3,6\}, \{3,4,5\}, \{3,4,6\}, \{2,4,5,6\}\}$,

b) (д/з) $\{\{1,2,3\}, \{3,4,5\}, \{1,2,4\}, \{1,2,5\}, \{2,4,5\}, \{2,3,5\}, \{2,6,7\}, \{3,4,6,7\}\}$.

Задача 175. Установите, конечна или бесконечна VC-размерность следующих семейств множеств:

a) $\{\{1,\ldots,k\} \mid k\in\mathbb{N}\}$,
b) (д/з) $\{\{k,\, k+1,\, k+2,\, \ldots\} \mid k\in\mathbb{N}\}$,
c) $\{\{k, 2k, 3k, \ldots\} \mid k\in\mathbb{N}\}$,
d) (д/з) $\{\{k,\, k^2,\, k^3, \ldots\} \mid k\in\mathbb{N}\}$,
e) (д/з) $\{\{k_1k_2, 2k_1k_2, 3k_1k_2, \ldots\} \mid k_1,k_2\in\mathbb{N}\}$.

Задача 176. Пусть $\mathscr{F}$ — семейство с VC-размерностью d, такое, что мощность любого множества из $\mathscr{F}$ не превосходит r. Докажите, что
a) найдутся такие $A,B\in\mathscr{F}$, для которых $|A\cap B|\leqslant r-d$,
b) (д/з) найдутся такие $A,B\in\mathscr{F}$, для которых $|A\cap B|\geqslant d-1$.

Задача 177. Пусть $\mathscr{F}\subset 2^{\{1,\ldots,n\}}$ и $|\mathscr{F}|=n$. Докажите, что для любого $k\in\{0,\ldots,n-1\}$ найдётся множество A, такое, что $|A|=k$ и $|F|_A|>k$. Можно использовать индукцию по k. Отметим, что при $k=n-1$ это утверждение называется теоремой Бонди (Bondy).

Задача 178. Пусть $\mathscr{F}\subset 2^{\{1,\ldots,n\}}$ — семейство с VC-размерностью d. Докажите, что существуют наследственные семейства $\mathscr{F}',\mathscr{F}''\subset 2^{\{1,\ldots,n\}}$, имеющие VC-размерность d, и такие, что
a) $|\mathscr{F}'|\leqslant|\mathscr{F}|$,
b) $|\mathscr{F}''|\geqslant|\mathscr{F}|$.

Задачи для повторения

Задача 179. Пусть $\mathscr{F}\subset 2^{\{1,\ldots,10\}}$, и пусть VC-размерность $\mathscr{F}$ равна 5. Какова максимальная мощность $\mathscr{F}$? Приведите пример совокупности максимально возможной мощности.

Задача 180. Пусть множество точек P и множество прямых L таковы, что $|P|=|L|=10^{12}$ и $I(P,L)=2\cdot10^{16}$. Докажите, что среди этих множеств можно выбрать по меньшей мере 10^4 точек, через каждую из которых проходят не менее 10^4 прямых. Докажите также, что не меньше 10^4 прямых, на каждой из которых находится не менее 10^4 точек.

Задача 181. Рассмотрим ч. у. м. с элементами $\{(n,(-2)^n): n=1,2,\ldots,10001\}$, в котором отношение порядка вводится так: $(n,(-2)^n)\preceq(m,(-2)^m)$ тогда и только тогда, когда одновременно $n\leqslant m$ и $(-2)^n\leqslant(-2)^m$. На какое минимальное число цепей можно разложить это ч. у. м.?

Задача 182. Пусть P — подполе конечного поля $\mathbb{F}$. Докажите, что для произвольных элементов $c,d\in\mathbb{F}$ множество $A=c+dP:=\{c+dx: x\in P\}$ удовлетворяет одновременно равенствам $|A+A|=|A|$, $|A\cdot A|=|A|$ тогда и только тогда, когда $c\in dP:=\{dx:\ x\in P\}$.

Задача 183. Постройте пример 3-однородного гиперграфа на 16 вершинах, в котором не меньше 105 рёбер, и у любой пары рёбер есть общая вершина.