

Задание по третьей лекции. Крайний срок сдачи: 17 марта, 23:59MSK

Для зачёта по заданию нужно набрать в сумме хотя бы 7 баллов. Любые вопросы задавайте по почте.

1. Сформулируйте следующие задачи в виде задачи о покрытии. Укажите, чему будут соответствовать строки и столбцы 0, 1-матрицы. Как связаны размеры матрицы с параметрами задачи (размерность матрицы должна быть полиномиальной)?
 - (a) (1 балл) Задан неориентированный простой граф. Нужно выбрать в графе подмножество вершин, так, чтобы каждая вершина графа либо входила в выбранное подмножество, либо имела по крайней мере t соседей в выбранном подмножестве. Величину t считать небольшой константой!
 - (b) (1 балл) Множество вершин графа называется покрывающим, если у каждого ребра графа хотя бы один из концов лежит в этом множестве. Задача: выбрать в графе покрывающее множество вершин минимального размера.
 - (c) (1 балл) На шахматной доске стоят (в некоторой фиксированной расстановке) несколько белых фигур и один чёрный король, находящийся под матом. Нужно выбрать из белых фигур минимальный набор, так, чтобы чёрному королю по-прежнему был мат. при решении задачи следует считать, что никакая из фигур в первоначальной расстановке не «загораживает» другую.
2. (4 балла) На лекции была доказана теорема о соотношении между мощностью оптимальной и жадного покрытий в задаче о невзвешенном покрытии, в случае, когда число единиц в каждой строке матрицы ограничено. Докажите аналогичную теорему для задачи о взвешенном покрытии (на лекции был рассказан жадный алгоритм для неё и формулировка соответствующей теоремы).
3. (1 балл) На лекции была доказана теорема о связи весов оптимального и жадного покрытий для случая, когда веса строк матрицы ограничены единицей. Как изменится оценка теоремы, если веса строк матрицы берутся из интервала $(0, W]$?
4. (4 балла) Реализуйте описанный на лекции жадный алгоритм построения минимального покрытия для задачи о взвешенном покрытии. Требования к оформлению программы можно посмотреть в отдельном файле. Программа должна принимать на вход текстовый файл `input.txt`, каждая строка которого представляет собой строку матрицы в формате:

`вес\tэлемент1\tэлемент2...\tэлементn\n`.

Через `\t` и `\n` обозначены символы табуляции и перевода строки соответственно. Программа должна выводить на стандартный вывод через пробел номера всех строк матрицы, вошедших в покрытие (необязательно по возрастанию). Гарантируется, что при реализации жадного алгоритма так, как указано в лекции, ответ в задаче `input.txt` единственный с точностью до порядка номеров строк. Строки можно нумеровать как начиная с нуля, так и с единицы.

Веса строк матрицы — положительные целые числа от 1 до 65535.