Дискретные структуры

МФТИ, весна 2014

Александр Дайняк

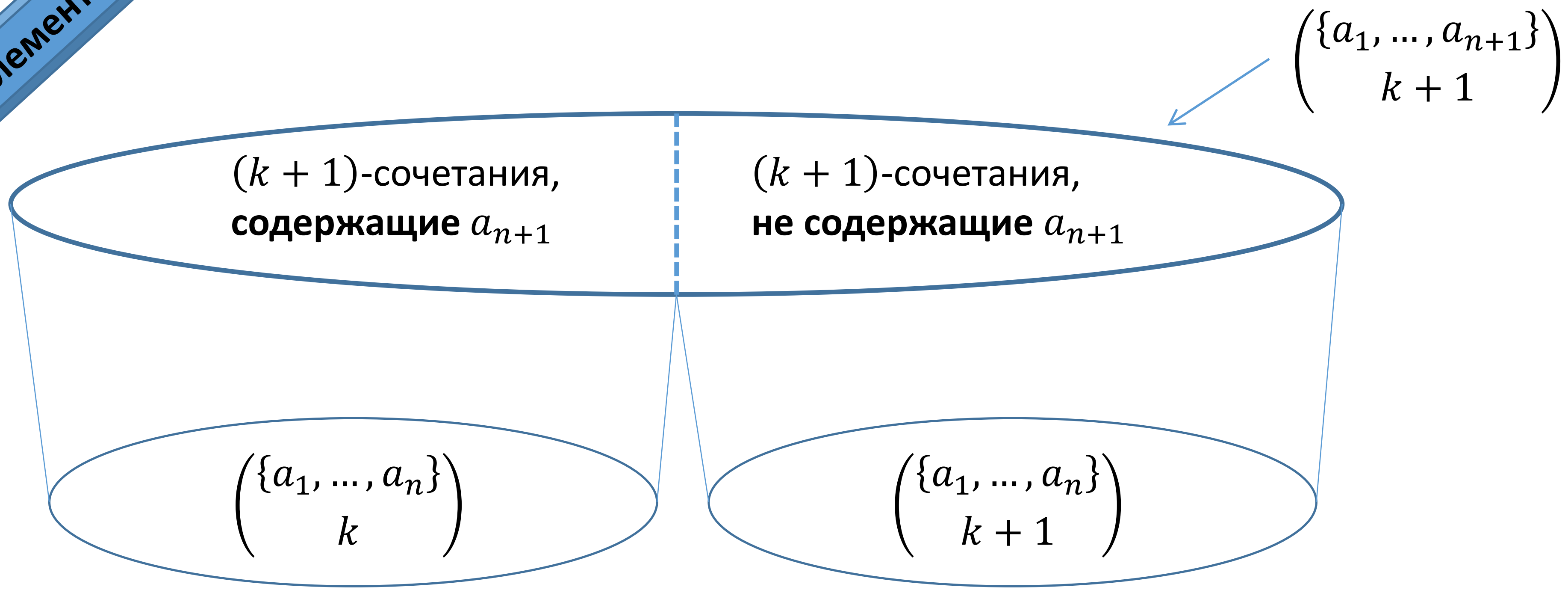
www.dainiak.com

Рекуррентные соотношения: напоминание

- Основное рекуррентное соотношение:

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

Метод выделенного элемента



Линейные рекуррентные соотношения

Задача Леонардо Фибоначчи:

- Зрелая пара кроликов даёт потомство каждый месяц — по новой паре кроликов
- Пара новорождённых кроликов через месяц созревает и может давать потомство
- Вопрос: если человек купил одну пару зрелых кроликов,
  то сколько их у него будет через год?

Линейные рекуррентные соотношения

Формализация задачи:

- Пусть a_k — количество пар через k месяцев
- Пусть $a_k^{\text{зр}}$ — количество «зрелых» пар кроликов,
  $a_k^{\text{нов}}$ — количество новорождённых пар
- Все зрелые пары каждый месяц дают потомство, значит в $(k+1)$-й месяц родятся $a_k^{\text{зр}}$ новых пар. То есть $a_{k+1}^{\text{нов}} = a_k^{\text{зр}}$.
- Кролики, бывшие новорождёнными в k-й месяц, в $(k+1)$-й месяц уже созреют. То есть $a_{k+1}^{\text{зр}} = a_k^{\text{зр}} + a_k^{\text{нов}} = a_k$.
- Аналогично, $a_{k+2}^{\text{нов}} = a_{k+1}^{\text{зр}}$ и $a_{k+2}^{\text{зр}} = a_{k+1}$.

Линейные рекуррентные соотношения

Мы обосновали соотношения:

- $a_{k+1}^{\text{нов}} = a_k^{\text{зр}}$ и $a_{k+1}^{\text{зр}} = a_k$.
- $a_{k+2}^{\text{нов}} = a_{k+1}^{\text{зр}}$ и $a_{k+2}^{\text{зр}} = a_{k+1}$.

- Получаем

$$a_{k+2} = a_{k+2}^{\text{зр}} + a_{k+2}^{\text{нов}} = a_k + a_{k+1}$$

Линейные рекуррентные соотношения

Теперь всё просто:

$$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \mathbf{233}$$

Последовательность Фибоначчи определяется рекуррентным соотношением $a_k = a_{k-1} + a_{k-2}$ и начальными условиями $a_0 = 1$ и $a_1 = 1$.

Линейные рекуррентные соотношения

Последовательность чисел $a_0, a_1, \ldots$ удовлетворяет линейному рекуррентному соотношению r-го порядка с постоянными коэффициентами, если для всех $k \geq r$ выполнено

$$a_k = c_1 a_{k-1} + c_2 a_{k-2} + \cdots + c_r a_{k-r}$$

Для определения последовательности нужно задать r её первых членов.

Линейные рекуррентные соотношения

Соотношение

$$a_k = c_1 a_{k-1} + c_2 a_{k-2} + \cdots + c_r a_{k-r}$$

можно переписать в виде

$$a_{k+r} - c_1 a_{k+r-1} - c_2 a_{k+r-2} - \cdots - c_r a_k = 0$$

Общий вид рекуррентных соотношений:

$$c_r a_{k+r} + c_{r-1} a_{k+r-1} + \cdots + c_1 a_{k+1} + c_0 a_k = 0$$

Свойства рекуррентных соотношений

Общий вид рекуррентных соотношений:

$$c_r a_{k+r} + c_{r-1} a_{k+r-1} + \cdots + c_1 a_{k+1} + c_0 a_k = 0$$

Если последовательности a'_k и a''_k удовлетворяют р.с.,
то и последовательность $a_k = d' a'_k + d'' a''_k$ тоже ему удовлетворяет:

$$c_r a_{k+r} + \cdots + c_1 a_{k+1} + c_0 a_k =$$

$$= c_r (d' a'_{k+r} + d'' a''_{k+r}) + \cdots + c_0 (d' a'_k + d'' a''_k) =$$

$$= d' (c_r a'_{k+r} + \cdots + c_0 a'_k) + d'' (c_r a''_{k+r} + \cdots + c_0 a''_k) = 0$$

Решение рекуррентных соотношений

Наши задачи на ближайшее время:

- Научиться находить явный вид a_k по рекуррентному соотношению
- Определять порядок роста последовательностей, заданных рекуррентными соотношениями

Решение рекуррентных соотношений

По соотношению

$$c_r a_{k+r} + c_{r-1} a_{k+r-1} + \cdots + c_1 a_{k+1} + c_0 a_k = 0$$

строится его <u>характеристический многочлен</u>

$$c_r x^r + c_{r-1} x^{r-1} + \cdots + c_1 x + c_0$$

Решение рекуррентных соотношений

Пусть λ — любой корень характеристического многочлена, то есть выполнено равенство

$$c_r\lambda^r + c_{r-1}\lambda^{r-1} + \dots + c_1\lambda + c_0 = 0$$

Рассмотрим последовательность $a_k = d\lambda^k$.
Имеем

$$c_r a_{k+r} + c_{r-1}a_{k+r-1} + \dots + c_1 a_{k+1} + c_0 a_k =$$

$$= c_r d\lambda^{k+r} + c_{r-1}d\lambda^{k+r-1} + \dots + c_1 d\lambda^{k+1} + c_0 d\lambda^k =$$

$$= d\lambda^k(c_r\lambda^r + c_{r-1}\lambda^{r-1} + \dots + c_1\lambda + c_0) = 0$$

Решение рекуррентных соотношений

Если $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ — корни характеристического многочлена, то любая последовательность вида

$$a_k = d_1 \cdot \lambda_1^k + \cdots + d_r \cdot \lambda_r^k$$

будет удовлетворять р.с.

$$c_r a_{k+r} + c_{r-1} a_{k+r-1} + \cdots + c_1 a_{k+1} + c_0 a_k = 0$$

Решение рекуррентных соотношений

Если $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ — *различные* корни характеристического многочлена, то последовательность

$$a_k = d_1 \cdot \lambda_1^k + \cdots + d_r \cdot \lambda_r^k$$

является *общим решением р.с.*, то есть *любое конкретное решение р.с. будет иметь такой вид*.

Решение рекуррентных соотношений

Как находить конкретное решение р.с.:

- Ищем корни характеристического многочлена
- Если все корни различны, мы знаем общее решение:

$$a_k = d_1 \cdot \lambda_1^k + \cdots + d_r \cdot \lambda_r^k$$

- Осталось определить d_i из начальных условий:

$$\begin{cases} d_1 + \cdots + d_r = a_0 \\ d_1 \cdot \lambda_1 + \cdots + d_r \cdot \lambda_r = a_1 \\ \ldots \\ d_1 \cdot \lambda_1^{r-1} + \cdots + d_r \cdot \lambda_r^{r-1} = a_{r-1} \end{cases}$$

Лемма Вандермонда

Утверждение.
Система

$$\begin{cases} d_1 + \cdots + d_r = a_0 \\ d_1 \cdot \lambda_1 + \cdots + d_r \cdot \lambda_r = a_1 \\ \ldots \\ d_1 \cdot \lambda_1^{r-1} + \cdots + d_r \cdot \lambda_r^{r-1} = a_{r-1} \end{cases}$$

имеет решение при любых различных ненулевых числах $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ и любых числах $a_0, \ldots, a_{r-1}$.

Доказательство: достаточно показать, что матрица этой системы невырождена.

Лемма Вандермонда

Имеет место *формула Вандермонда*:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{r-1} & \lambda_2^{r-1} & \cdots & \lambda_r^{r-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le r} (\lambda_j - \lambda_i)$$

Из неё следует, что матрица невырождена при $\lambda_j \neq \lambda_i$.

Доказательство индукцией по r.

База: $r = 1$. Очевидно: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_2 - \lambda_1$.

Лемма Вандермонда

Индуктивный переход:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_r \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \lambda_1^{r-1} & \lambda_2^{r-1} & \cdots & \lambda_r^{r-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 - \lambda_1 & \cdots & \lambda_r - \lambda_1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \lambda_1^{r-1} & \lambda_2^{r-1} - \lambda_1^{r-1} & \cdots & \lambda_r^{r-1} - \lambda_1^{r-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_2 - \lambda_1 & \cdots & \lambda_r - \lambda_1 \\ \lambda_2^2 - \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_r^2 - \lambda_1^2 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \lambda_2^{r-2} - \lambda_1^{r-2} & \cdots & \lambda_r^{r-2} - \lambda_1^{r-2} \\ \lambda_2^{r-1} - \lambda_1^{r-1} & \cdots & \lambda_r^{r-1} - \lambda_1^{r-1} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda_2 - \lambda_1 & \cdots & \lambda_r - \lambda_1 \\ \lambda_2^2 - \lambda_1\lambda_2 & \cdots & \lambda_r^2 - \lambda_1\lambda_r \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \lambda_2^{r-2} - \lambda_1\lambda_2^{r-3} & \cdots & \lambda_r^{r-2} - \lambda_1\lambda_r^{r-3} \\ \lambda_2^{r-1} - \lambda_1\lambda_2^{r-2} & \cdots & \lambda_r^{r-1} - \lambda_1\lambda_r^{r-2} \end{vmatrix} = \left(\prod_{i=2}^{r}(\lambda_i - \lambda_1)\right) \cdot \det\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_2 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_r \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \lambda_2^{r-2} & \lambda_3^{r-2} & \cdots & \lambda_r^{r-2} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le r} (\lambda_j - \lambda_i)$$

Решение рекуррентных соотношений

Допустим теперь, что у х. м. есть кратные корни:

- корень λ_1 кратности s_1,
- …
- корень λ_m кратности s_m

Тогда общее решение р.с. имеет вид:

$$a_k = D_1(k) \cdot \lambda_1^k + \cdots + D_m(k) \cdot \lambda_m^k$$

Где $D_i(k)$ — многочлен степени $(s_i - 1)$, то есть

$$D_i(k) = d_{i,0} + d_{i,1}k + d_{i,2}k^2 + \cdots + d_{i,s_i-1}k^{s_i-1}$$

(доказывать не будем)

Пример

Последовательность $\{a_k\}$ задаётся соотношением

$$a_{k+2} - 8a_k = a_{k+1} - 12a_{k-1}$$

и начальными условиями

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 9 \\ a_2 = 11 \end{cases}$$

Записываем р.с. в стандартном виде:

$$a_{k+3} - a_{k+2} - 8a_{k+1} + 12a_k = 0$$

характеристический многочлен:

$$x^3 - x^2 - 8x + 12 = 0$$

Пример

$x^3 - x^2 - 8x + 12 = (x-2)^2 \cdot (x+3)$, то есть

- корень 2 кратности 2
- корень -3 кратности 1

Отсюда общий вид решения р.с.:

$$a_k = (d_1 k + d_2) \cdot 2^k + d_3 \cdot (-3)^k$$

Находим неизвестные d_1, d_2, d_3 из условий:

$$\begin{cases} (d_1 0 + d_2) \cdot 2^0 + d_3 \cdot (-3)^0 = d_2 + d_3 = 0 \\ (d_1 + d_2) \cdot 2 + d_3 \cdot (-3) = 9 \\ (2d_1 + d_2) \cdot 4 + d_3 \cdot 9 = 11 \end{cases}$$

Пример

Решаем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} d_2 + d_3 = 0 \\ 2d_1 + 2d_2 - 3d_3 = 9 \\ 8d_1 + 4d_2 + 9d_3 = 11 \end{cases}$$

и находим $d_1 = 2$, $d_2 = 1$, $d_3 = -1$. В итоге

$$a_k = (2k + 1) \cdot 2^k - (-3)^k$$

Асимптотика определяется наибольшим по модулю корнем характеристического многочлена:

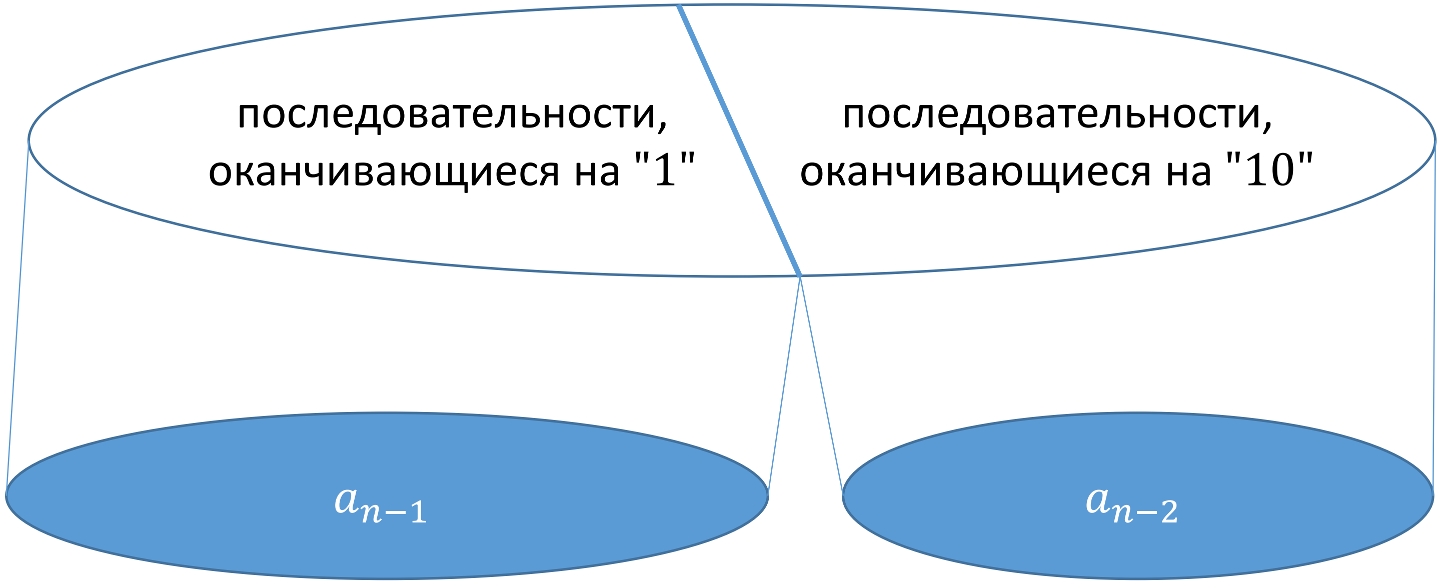
$$a_k \sim -(-3)^k$$

Последовательности с запретами

- Запрещение фиксированных подслов.
  Например, последовательности без пары идущих подряд нулей:
  $$110110101010101111010110$$
- Запрещение подслов специального вида.
  Например, последовательности без подслов вида www:
  $$01101001$$
  $$01101010$$

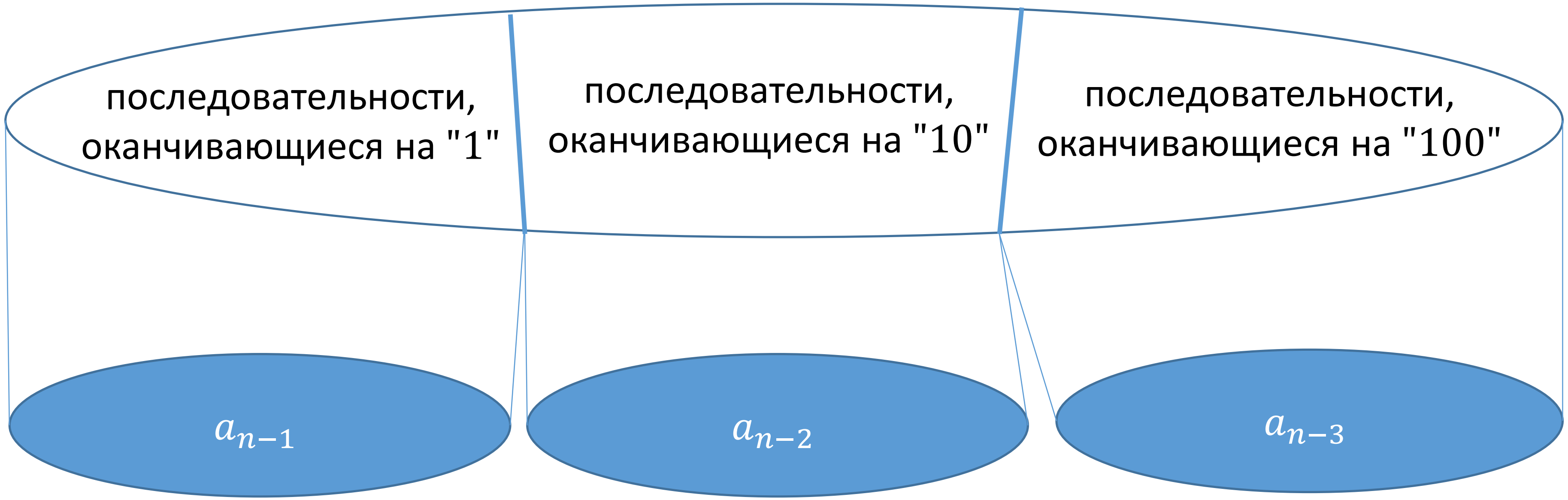
Последовательности с запретами

- Найдём количество двоичных последовательностей длины n с запретом на подслово "00"
  a_n — искомое количество



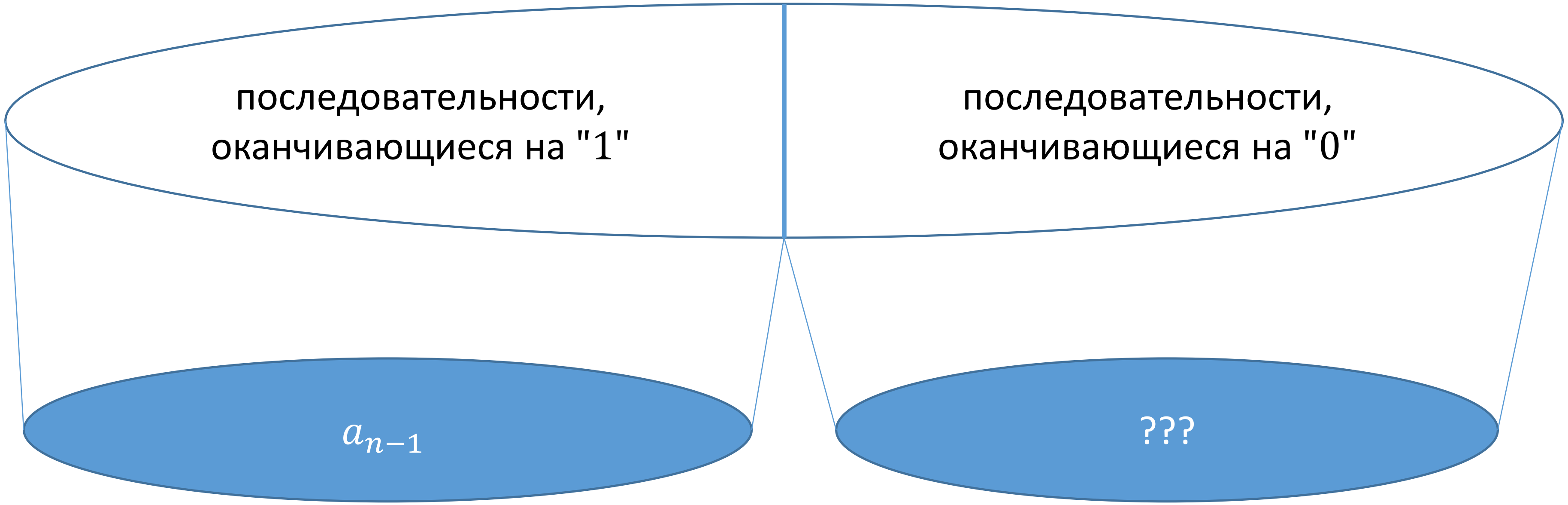
Последовательности с запретами

- Найдём количество двоичных последовательностей длины n с запретом на подслово "000"
  a_n — искомое количество



Последовательности с запретами

- А если запретить подслово "010"?



Последовательности с запретами

- a_n — последовательности длины n без "010"
- b_n — последовательности длины n без "010",
  не оканчивающиеся на "01"

- Мы выяснили, что $a_n = a_{n-1} + b_{n-1}$

Последовательности с запретами

Последовательности длины n без "010",
не оканчивающиеся на "01", могут быть…

- вида $\ldots 0$ — таких b_{n-1} штук
- вида $\ldots 11$ — таких a_{n-2} штук

- Получаем:

$$b_n = b_{n-1} + a_{n-2}$$

Последовательности с запретами

- Итого:
  - $a_n = a_{n-1} + b_{n-1}$
  - $b_n = b_{n-1} + a_{n-2}$

- Замкнутый круг? Нет!

Из второго соотношения: $b_n - b_{n-1} = a_{n-2}$.

Из первого соотношения: $b_{n-1} = a_n - a_{n-1}$.

Следовательно,

$$a_{n-2} = b_n - b_{n-1} = (a_{n+1} - a_n) - (a_n - a_{n-1})$$

Последовательности с запретами

Получили соотношение

$$a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1} - a_{n-2} = 0$$

Из него можно найти асимптотику:

$$a_n \sim \mathrm{const} \cdot \left(\frac{1}{3\sqrt[3]{2}} \left(2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{25 - 3\sqrt{69}} + \sqrt[3]{25 + 3\sqrt{69}} \right) \right)^n \approx$$

$$\approx \mathrm{const} \cdot 1.76^n$$

Рекуррентные оценки

- Пусть $T(n)$ — время работы алгоритма на входных данных размера n
- Часто на время работы алгоритма можно получить рекуррентную оценку вида
$$T(n) \leq a \cdot T(n/c) + b \cdot n^{\gamma}$$
- Как отсюда получить явную оценку без T в правой части?

Пример: сортировка слиянием

Сколько операций сравнения $T(n)$ требуется, чтобы отсортировать массив чисел $b_1, \dots b_n$?

Построим рекурсивную процедуру $sort(b_1, \dots b_n)$:

- $sort\left(b_1, \dots b_{\lfloor n/2 \rfloor}\right)$
- $sort\left(b_{\lfloor n/2 \rfloor + 1}, \dots b_n\right)$
- и ещё n операций сравнения для слияния половинок

В итоге

$$T(n) \leq 2 \cdot T(n/2) + n$$

Рекуррентные оценки

Основная теорема.
Если $T(n)$ не убывает на каждом отрезке $[c^k + 1, c^{k+1}]$,
и выполнено

$$T(n) \leq a \cdot T(n/c) + b \cdot n^\gamma$$

то

- $T(n) = O(n^\gamma),$ если $c^\gamma > a$
- $T(n) = O\left(n^{\log_c a}\right),$ если $c^\gamma < a$
- $T(n) = O(n^\gamma \log n),$ если $c^\gamma = a$

Рекуррентные оценки

Предположим, что $n = c^k$ и k раз применим неравенство

$$T(n) \leq b \cdot n^\gamma + a \cdot T(n/c)$$

Получаем:

$$T(n) \leq bn^\gamma + a \cdot T(n/c) \leq bn^\gamma + ab \cdot (n/c)^\gamma + a^2 \cdot T(n/c^2) \leq$$

$$\leq bn^\gamma + ab \cdot (n/c)^\gamma + a^2 b \cdot (n/c^2)^\gamma + a^3 \cdot T(n/c^3) \leq$$

$$\leq \cdots \leq$$

$$\leq bn^\gamma \left(1 + \frac{a}{c^\gamma} + \left(\frac{a}{c^\gamma}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{a}{c^\gamma}\right)^{k-1}\right) + a^k \cdot T\left(n/c^k\right)$$

Продолжение доказательства

Итак,

$$T(n) \leq bn^{\gamma}\left(1 + \frac{a}{c^{\gamma}} + \left(\frac{a}{c^{\gamma}}\right)^{2} + \cdots + \left(\frac{a}{c^{\gamma}}\right)^{k-1}\right) + a^{k} \cdot T(1)$$

Положив $d = \max\{\, b, T(1)\,\}$, получаем

$$a^{k} \cdot T(1) \leq a^{k} \cdot d \cdot \left(n/c^{k}\right)^{\gamma} = dn^{\gamma} \cdot (a/c^{\gamma})^{k}$$

Отсюда

$$T(n) \leq dn^{\gamma}\left(1 + \frac{a}{c^{\gamma}} + \left(\frac{a}{c^{\gamma}}\right)^{2} + \cdots + \left(\frac{a}{c^{\gamma}}\right)^{k}\right)$$

Продолжение доказательства

$$T(n) \le dn^{\gamma}\left(1 + \frac{a}{c^{\gamma}} + \left(\frac{a}{c^{\gamma}}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{a}{c^{\gamma}}\right)^k\right)$$

- Если $c^{\gamma} > a$ то $T(n) = O(n^{\gamma})$
- Если $c^{\gamma} = a$ то $T(n) \le dn^{\gamma}(k+1) = O(n^{\gamma}\log n)$
- Если $c^{\gamma} < a$ то

$$T(n) \le dn^{\gamma}\left(\frac{a}{c^{\gamma}}\right)^k\left(1 + \frac{c^{\gamma}}{a} + \left(\frac{c^{\gamma}}{a}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{c^{\gamma}}{a}\right)^k\right) \le dn^{\gamma}\left(\frac{a}{c^{\gamma}}\right)^k \cdot \mathrm{const} =$$

$$= da^k \cdot \mathrm{const} = O\left(a^{\log_c n}\right) = O\left(n^{\log_c a}\right)$$

Завершение доказательства

Пусть теперь $n \in \left(c^k, c^{k+1}\right)$

Для примера разберём случай $c^\gamma = a$.

Имеем

$$T(n) \leq T\left(c^{k+1}\right) \leq p \cdot \left(c^{k+1}\right)^\gamma \log_c c^{k+1} = pc^\gamma \left(c^k\right)^\gamma (k+1) \leq$$
$$\leq 2pc^\gamma \left(c^k\right)^\gamma k \leq 2pc^\gamma n^\gamma \log_c n$$

Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Пример: сортировка слиянием

Для времени работы алгоритма сортировки слиянием

$$T(n) \leq 2 \cdot T(n/2) + n$$

Если

$$T(n) \leq a \cdot T(n/c) + b \cdot n^{\gamma}$$

то

- $T(n) = O(n^{\gamma})$, если $c^{\gamma} > a$
- $T(n) = O\left(n^{\log_c a}\right)$, если $c^{\gamma} < a$
- $T(n) = O(n^{\gamma} \log n)$, если $c^{\gamma} = a$