Дискретные структуры. Учебный год 2014—2015.

Вопросы уровня «обязательный» для билетов устной части итогового экзамена

1. Определите комбинаторные числа C_n^k, A_n^k, $\overline{C}_n^k$, $\overline{A}_n^k$, числа Стирлинга второго рода и числа Белла.

2. Выпишите и обоснуйте формулу, выражающую количество сочетаний с повторениями через количество сочетаний без повторений. Чётко указывайте при этом, где вы используете [если используете] правила сложения, умножения, равномощности (последнее состоит в том, что если между парой конечных множеств установлена биекция, то объектов в них поровну).

3. Выпишите и обоснуйте формулу для количества сочетаний без повторений. Чётко указывайте при этом, где вы используете [если используете] правила сложения, умножения, равномощности (последнее состоит в том, что если между парой конечных множеств установлена биекция, то объектов в них поровну).

4. Докажите «комбинаторным способом» (не используя формулу, выражающую биномиальные коэффициенты дробями с факториалами) основное рекуррентное соотношение для биномиальных коэффициентов. Чётко указывайте при этом, где вы используете [если используете] правила сложения, умножения, равномощности (последнее состоит в том, что если между парой конечных множеств установлена биекция, то объектов в них поровну).

5. Докажите унимодальность последовательности биномиальных коэффициентов. Обоснуйте формулу бинома Ньютона и полиномиальную формулу.

6. Докажите формулу включений-исключений, используя характеристические функции. Прокомментируйте, какие свойства функций Вы использовали при доказательстве.

7. В курсе мы доказывали, что $(n/e)^n \leqslant n! \leqslant e \cdot (n/2)^n$. Какая из этих оценок, нижняя или верхняя, асимптотически ближе к истинному значению факториала? Докажите нижнюю оценку.

8. В курсе мы доказывали, что $(n/e)^n \leqslant n! \leqslant e \cdot (n/2)^n$. Какая из этих оценок, нижняя или верхняя, асимптотически ближе к истинному значению факториала? Докажите верхнюю оценку.

9. Докажите оценку $\sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k} \leqslant \frac{n^n}{r^r(n-r)^{n-r}}$ в предположении $r \leqslant n/2$.

10. Дайте определения укладки графа на плоскости, планарного графа, хроматического числа. Докажите существование в планарных графах вершин степени $\leqslant 5$ (можно без доказательства пользоваться формулой Эйлера, всё остальное требуется обосновать).

11. Что такое рекуррентное соотношение с постоянными коэффициентами? Как определяется его характеристический многочлен? Что значит «найти общее решение рекуррентного соотношения»? Докажите формулу для общего решения рекуррентного соотношения в предположении, что все корни характеристического многочлена различны.

12. Дайте определение универсальной двоичной последовательности порядка n. Докажите нижнюю оценку длины такой последовательности. Обоснуйте, почему эйлеров цикл в графе де Брёйна порождает универсальную последовательность.

13. Дайте определения эйлеровых и гамильтоновых циклов в графе. Докажите теорему Оре о достаточных условиях существования гамильтонова цикла в графе.

14. Докажите верхнюю оценку числа неизоморфных n-вершинных деревьев вида 4^n (используя переход к правильным скобочным последовательностям).

15. Дайте определение порядка вычета по модулю m. Докажите, что, если d есть порядок элемента $a \in \mathbb{Z}_m \setminus \{0\}$, то все степени $a^0, a^1, a^2, \ldots, a^{d-1}$ попарно различны.

16. Дайте определение порядка вычета по модулю m. Докажите, что, если элемент a в некоторой степени k равен 1 по модулю m, то k делит порядок элемента a. Выведите отсюда, что порядок любого элемента a по модулю m, взаимно простого с модулем, делит $\phi(m)$.

17. Дайте определение первообразного корня по модулю m и индекса элемента a по этому модулю. По каким модулям и для каких элементов можно определить понятие индекса (сформулируйте без доказательства соответствующее утверждение)? Докажите, что индекс произведения двух вычетов равен сумме индексов этих вычетов. Чему равен индекс n-й степени элемента?

18. Дайте определение первообразного корня по модулю m. Сформулируйте критерий существования первообразных корней. Приведите пример модуля, по которому не существует первообразных корней.

19. Дайте определение первообразного корня по модулю m. Докажите теорему, на основе которой можно упрощать проверку того, является ли данный вычет первообразном корнем по простому модулю.

20. Дайте определение порядка вычета по модулю m. Докажите, что порядок произведения двух взаимно простых вычетов по модулю m равен произведению порядков этих вычетов.

21. Пусть $p(N; n_1, \ldots, n_s)$ означает количество неупорядоченных разбиений числа N на слагаемые из множества $\{n_1, \ldots, n_s\}$. Докажите простое рекуррентное соотношение для $p(\ldots)$. Чётко указывайте при этом, где вы используете [если используете] правила сложения, умножения, равномощности (последнее состоит в том, что если между парой конечных множеств установлена биекция, то объектов в них поровну).

22. Используя диаграммную технику, докажите какие-нибудь три теоремы о равенствах между количествами неупорядоченных разбиений со специальными свойствами. Чётко указывайте при этом, где вы используете [если используете] правила сложения, умножения, равномощности (последнее состоит в том, что если между парой конечных множеств установлена биекция, то объектов в них поровну).

23. Пусть $P(N; n_1, \ldots, n_s)$ означает количество упорядоченных разбиений числа N на слагаемые из множества $\{n_1, \ldots, n_s\}$. Докажите простое рекуррентное соотношение для $P(\ldots)$.Чётко указывайте при этом, где вы используете [если используете] правила сложения, умножения, равномощности (последнее состоит в том, что если между парой конечных множеств установлена биекция, то объектов в них поровну).

24. Дайте определение формального степенного ряда. Определите произведение и частное (когда оно существует?) формальных степенных рядов. Докажите рациональность производящей функции последовательности, удовлетворяющей линейному рекуррентному соотношению с постоянными коэффициентами.

25. Дайте определение чисел Каталана. Обоснуйте рекуррентное соотношение для чисел Каталана.

26. Сформулируйте «альтернативное» определение группы (существование решений уравнений) и докажите, что оно эквивалентно «основному» определению (существование обратного и нейтрального элементов).

27. Дайте определение подгруппы. Дайте определение симметрической группы. Сформулируйте и докажите теорему Кэли. (Можно использовать любое из даваемых в курсе определений групп.)

28. Дайте определения аддитивной и мультипликативной групп вычетов. Дайте определение порядка элемента группы. Докажите, что у каждого элемента конечной группы есть конечный порядок.

29. Дайте определение поля. Докажите, что в поле для любого a выполнены равенства $a \cdot 0 = a$ и $(-1) \cdot a = -a$. Дайте определение неприводимого (простого) многочлена над заданным полем. Сформулируйте теорему о разложении многочлена на простые. Опишите, как строится конечное поле вида $\mathbb{Z}_p / Q$.

30. Дайте определение хроматического числа. Приведите жадный алгоритм раскраски вершин графа. Приведите пример, показывающий, что алгоритм может раскрасить граф «сколь угодно неоптимально». Докажите оценку $\chi(G) \leqslant \Delta(G) + 1$.

31. Дайте определение двудольного графа, паросочетания, хроматического индекса. Докажите необходимость условий Холла для существования совершенного паросочетания в двудольном графе с равномощными долями.

32. Сформулируйте теорему Дилуорта и выведите из неё теорему Холла о паросочетаниях в двудольных графах.

33. Докажите теорему Рамсея. Дайте определение числа Рамсея $R(s, t)$.

34. Обоснуйте оценку хроматического числа графа: $\chi(G) \geqslant \frac{|V|}{\alpha(G)}$.

35. Докажите формулу Эйлера, связывающую количества вершин, рёбер и граней в укладке планарного связного графа.

36. Из теоремы Холла выведите, что в любом регулярном двудольном графе существует совершенное паросочетание.

37. Выведите теорему Шпернера из теоремы Л—Я—М.

38. Дайте определение чисел Заранкевича в терминах матриц. Докажите верхнюю оценку чисел Заранкевича $Z_2(m)$.

39. Докажите теорему о минимальном количестве антицепей, на которые можно разложить частично упорядоченное множество.

Вопросы для билетов устной части итогового экзамена на уровне «стандартный»

1. Докажите оценку $\binom{n}{k} \lesssim \frac{n^k}{k!} \cdot e^{-O(k^2/n)}$.

2. Докажите неравенства Бонферрони (дополняющие формулу включений-исключений).

3. Сформулируйте теорему «о шести определениях деревьев». Докажите эквивалентность пары таких определений, по выбору экзаменатора.

4. Докажите оценку на количество рёбер в планарном графе с заданной минимальной длиной циклов.

5. Докажите, что графы K_5 и $K_{3,3}$ непланарны. Сформулируйте критерий Вагнера и докажите необходимость условий в этом критерии.

6. Дайте определения укладки графа на плоскости, планарного графа, хроматического числа. Докажите формулу Эйлера для планарных связных графов. Пользуясь без доказательства тем, что в планарных графах существуют вершины степени $\leqslant 5$, докажите теорему о пяти красках.

7. Докажите достаточность условий Холла.

8. Выведите из теоремы Холла неравенство $\chi'(G) \leqslant \Delta(G)$.

9. Докажите формулу Кэли для количества деревьев, используя коды Прюфера. Обязательно обосновать, почему коды Прюфера взаимно однозначно соответствуют деревьям.

10. Дайте определение первообразного корня по модулю m. Докажите теорему о нахождении первообразного корня по модулю $2p^\alpha$, если известен некоторый первообразный корень по модулю p^α.

11. Дайте определение первообразного корня по модулю m. Докажите теорему о нахождении первообразного корня по модулю p^α, если известен некоторый первообразный корень по модулю p.

12. Рассмотрим произвольный вычет a по модулю m такой, что $\mathrm{GCD}(a, m) = 1$. Пусть d — его порядок. Докажите, что для любого целого числа l порядок элемента a^l равен $\frac{d}{\mathrm{GCD}(d,l)}$. Выведите из этого теорему о числе различных первообразных корней по модулю m.

13. Обоснуйте корректность алгоритма Флёри.

14. Докажите теорему Турана о количестве рёбер в графах с ограниченным кликовым числом.

15. Сформулируйте (не доказывая) «арифметическую» (для натуральных чисел) теорему Мёбиуса об обращении. Докажите справедливость формулы для числа циклических слов и выведите из неё асимптотику для числа циклических слов в алфавите фиксированной мощности при стремящейся к бесконечности длине слов.

16. Дайте определение функции Мёбиуса. Докажите лемму о сумме значений функции Мёбиуса по всем делителям натурального числа.

17. Используя без доказательства утверждение о сумме значений функции Мёбиуса по всем делителям натурального числа, докажите «аримфетическую» формулу обращения Мёбиуса.

18. Докажите теорему Эйлера о разности между количествами разбиений натурального числа на чётное и нечётное число различных слагаемых.

19. Без доказательства используя лемму Бёрнсайда, докажите теорему Пойи.

20. Докажите теорему Эйлера—Ферма.

21. Сформулируйте и докажите китайскую теорему об остатках. Приведите пример её применения.

22. Докажите, что любую перестановку можно представить в виде произведения (композиции) транспозиций. Объясните (с обоснованием), как по перестановке быстро определить, чётны или нечётным будет количество транспозиций в таком представлении.

23. Докажите, что любую перестановку можно представить в виде произведения (композиции) непересекающихся циклов.

24. Дайте определение чисел Рамсея. Докажите вероятностную нижнюю оценку, использующую лемму Ловаса.

25. Дайте определение орграфа зависимостей. Приведите пример какого-нибудь набора событий, для которого можно указать нетривиальный орграф зависимостей. Докажите локальную лемму Ловаса в общем случае.

26. Докажите теорему о нижней оценке числа скрещиваний (с помощью вероятностного метода), включая все необходимые для этого леммы, кроме утверждения о максимальном количестве рёбер в планарных графах с заданным числом вершин.

27. Докажите теорему Лубелла—Ямамото—Мешалкина.

28. Докажите теорему Дилуорта о разложении ч. у. м. на цепи.

29. Без доказательства сформулируйте теорему об обращении Мёбиуса на частично упорядоченном множестве. Выведите из неё формулу включений-исключений.

30. Дайте определение чисел Заранкевича в терминах матриц и в терминах графов. Докажите вероятностную нижнюю оценку чисел Заранкевича.

31. Дайте определение чисел Заранкевича в терминах матриц и в терминах графов. Сформулируйте верхнюю и нижнюю алгебраические оценки числа Заранкевича $Z_2(m)$ для чисел m специального вида. Сформулируйте без доказательства теорему Бейкера—Хармана—Пинца и выведите отсюда асимптотику $Z_2(m)$.

32. Дайте определение хроматического многочлена. Докажите рекуррентное соотношение для него и обоснуйте, что это действительно многочлен. Объясните, чему равны коэффициенты этого многочлена при мономах старшей степени и «субстаршей» степени.

Вопросы уровня «продвинутый» для билетов устной части итогового экзамена

1. Докажите теорему Силова о существовании подгрупп заданного порядка, пользуясь без доказательства следующей леммой: если $p \in \mathbb{P}$ и $p \nmid l$, то максимальная степень числа p, на которую делится биномиальный коэффициент $\binom{p^\alpha \cdot l}{p^\beta}$, равна $(\alpha - \beta)$.

2. Сформулируйте теорему Силова о существовании подгрупп заданного порядка. Докажите, что если $p \in \mathbb{P}$ и $p \nmid l$, то максимальная степень числа p, на которую делится биномиальный коэффициент $\binom{p^\alpha \cdot l}{p^\beta}$, равна $(\alpha - \beta)$.

3. Сформулируйте в общем виде задачу о подсчёте количества раскрасок конфигураций, неэквивалентных относительно группы перестановок. Приведите пример такой задачи. Докажите лемму Бёрнсайда.

4. Сформулируйте в общем виде задачу о подсчёте количества раскрасок конфигураций, неэквивалентных относительно группы перестановок. Приведите пример такой задачи. Используя без доказательства лемму Бёрнсайда, докажите теорему Редфилда—Пойи.

5. Сформулируйте обобщённую формулу бинома и примените её, чтобы представить функцию $\sqrt{1+x}$ в виде степенного ряда. Дайте определение чисел Каталана. Пользуясь без доказательства тем, что производящая функция последовательности чисел Каталана удовлетворяет уравнению $x \cdot (F(x))^2 = F(x) - 1$, выведите формулу, выражающую числа Каталана через биномиальные коэффициенты.

6. Дайте определение чисел Каталана. Обоснуйте рекуррентное соотношение для чисел Каталана. Обоснуйте, что производящая функция последовательности чисел Каталана удовлетворяет уравнению $x \cdot (F(x))^2 = F(x) - 1$. Используя метод производящих функций, выведите формулу, выражающую числа Каталана через биномиальные коэффициенты (представлением функции $\sqrt{1+x}$ в виде ряда польуйтесь без доказательства).

7. Сформулируйте теорему Эйлера о разности между количествами разбиений натурального числа на чётное и нечётное число различных слагаемых. Докажите с её помощью рекуррентное соотношение для количества неупорядоченных разбиений натуральных чисел. *Без доказательства* можно использовать формулу разложения логарифма в ряд, а также то, что производящая функция для количества неупорядоченных разбиений равна $\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k}$.

8. Докажите, что производящая функция для количества неупорядоченных разбиений равна $\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k}$.

9. Дайте определение неприводимого (простого) многочлена над заданным полем. Сформулируйте теорему о числе простых нормированных многочленов над $\mathbb{Z}_p$. Докажите, что если $d_1, d_2, \ldots$ — последовательность степеней таких многочленов, то $\frac{1}{1-pt} = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-t^{d_i}}$.

10. Дайте определение неприводимого (простого) многочлена над заданным полем. Сформулируйте и докажите теорему о числе простых нормированных многочленов над $\mathbb{Z}_p$, используя без доказательства тот факт, что, если $d_1, d_2, \ldots$ — последовательность степеней таких многочленов, то $\frac{1}{1-pt} = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-t^{d_i}}$.

11. Дайте определение чисел Рамсея. Сформулируйте теорему Франкла—Уилсона о числе независимости и кликовом числе «явного рамсеевского графа» (алгебраический метод). Обоснуйте строго только оценку числа независимости у «графа Франкла—Уилсона».

12. Дайте определение чисел Рамсея. Сформулируйте теорему Франкла—Уилсона о числе независимости и кликовом числе «явного рамсеевского графа» (алгебраический метод). Обоснуйте строго только оценку кликового числа у «графа Франкла—Уилсона».

13. Дайте определение чисел Рамсея. Сформулируйте теорему Франкла—Уилсона о числе независимости и кликовом числе «явного рамсеевского графа» (алгебраический метод). Используя без обоснований оценку на число независимости и кликовое число «графа Франкла—Уилсона», завершите доказательство теоремы.

14. Дайте определение хроматического числа и обхвата. Поясните, почему если обхват графа большой, то «локальное хроматическое число» у него маленькое. Докажите теорему Эрдёша о существовании графов с большим обхватом и хроматическим числом. [Значения параметров в доказательстве теоремы можно переписать заранее из теорлистка.] В доказательстве пропустите (лишь сформулировав) обоснование, что с хорошей вероятностью случайный граф будет содержать небольшое количество коротких циклов.

15. Дайте определение хроматического числа и обхвата. Поясните, почему если обхват графа большой, то «локальное хроматическое число» у него маленькое. Докажите теорему Эрдёша о существовании графов с большим обхватом и хроматическим числом. [Значения параметров в доказательстве теоремы можно переписать заранее из теорлистка.] В доказательстве пропустите (лишь сформулировав) обоснование, что с хорошей вероятностью случайный граф не будет содержать «больши́х» независимых множеств.

16. Сформулируйте критерий существования первообразных корней. Докажите, что существует первообразный корень по модулю числа p при любом простом p.

17. Дайте определение чисел Заранкевича в терминах матриц и в терминах графов. Докажите нижнюю оценку чисел Заранкевича $Z_2(m)$.