Основы теории графов

осень 2013

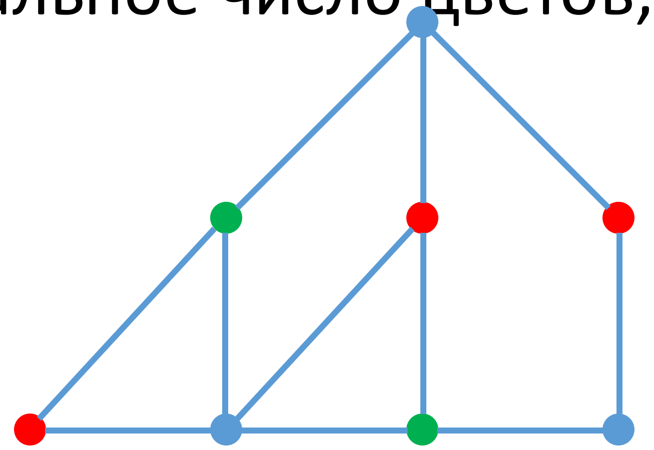
Александр Дайняк

www.dainiak.com

Раскраски вершин

- *Раскраска вершин* графа G в k цветов — это отображение $\phi: V(G) \to \{1, 2, \ldots, k\}$
- Вершинная раскраска ϕ называется *правильной*, если
$$\forall v' \forall v'' \left(v'v'' \in \mathrm{E}(G) \;\Rightarrow\; \phi(v') \neq \phi(v'') \right)$$

Хроматическое число $\chi(G)$ — это минимальное число цветов, в которое можно правильно раскрасить вершины графа G.



Списочное хроматическое число

Пусть для каждой вершины v графа G указан конечный список $L_v \subseteq \mathbb{N}$ — цвета, в которые разрешается красить v.

Правильная списочная раскраска графа G (для набора списков $\{L_v\}_{v \in V(G)}$) — это отображение $\phi: V(G) \to \mathbb{N}$, которое

- является правильной раскраской в обычном понимании,
- каждая вершина покрашена в цвет из своего списка: $\phi(v) \in L_v$

Списочное хроматическое число

Списочное хроматическое число графа G — это такое минимальное k, что правильная списочная раскраска G существует для *любого* набора списков $\{L_v\}_{v \in V(G)}$, удовлетворяющего условию $\forall v \; |L_v| = k$.

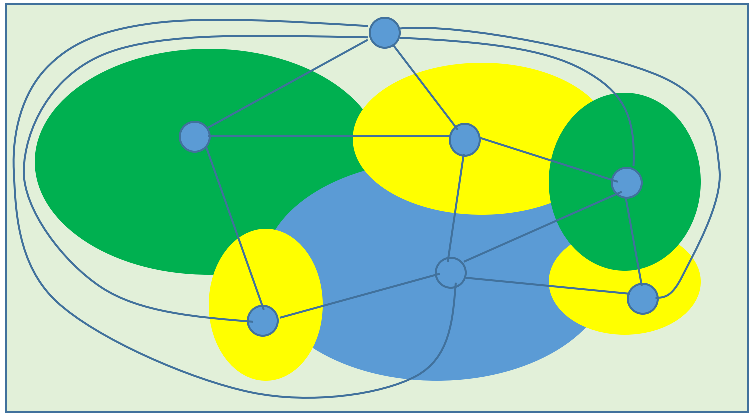
Обозначение: $\chi_l(G)$.

Очевидно, $\chi_l(G) \geq \chi(G)$ (поскольку можно взять все списки равными $\{1,2,\ldots,k\}$).

Раскраски планарных графов

Задачу о раскраске карт можно переформулировать на языке раскрасок, рассмотрев планарный граф, *двойственный* карте:

- Сколькими цветами можно правильно раскрасить любой планарный граф?



Раскраски планарных графов

Теорема (Four Color Theorem).
$\chi(G) \leq 4$ для любого планарного графа G.

История:

Постановка задачи: Гютри (сер. XVIII века)

Первые «доказательства»: Кемпе, Тейт (1880-е)

Первое доказательство: Хакен, Аппель (1976)

Признанные доказательства: Хакен, Аппель (1989), Робертсон, Сандерс, Сеймур, Томас (1997)

Списочные раскраски планарных графов

Теорема. (Thomassen ’1994)
$\chi_l(G) \le 5$ для любого планарного графа G.

Теорема. (Voigt ’1993)
Существуют планарные графы с $\chi = 3$ и $\chi_l = 5$.

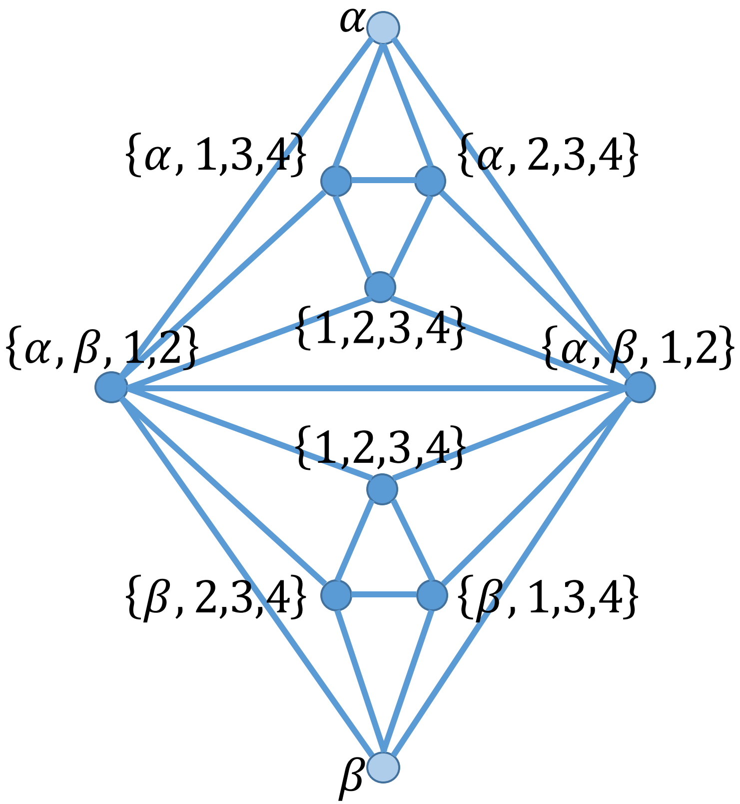
Теорема. (N. Alon — M. Tarsi ’1992)
$\chi_l(G) \le 3$ для любого двудольного планарного графа G.

Теорема Войгт

Теорема. (M. Voigt)
Существуют планарные графы с $\chi = 3$ и $\chi_l = 5$.

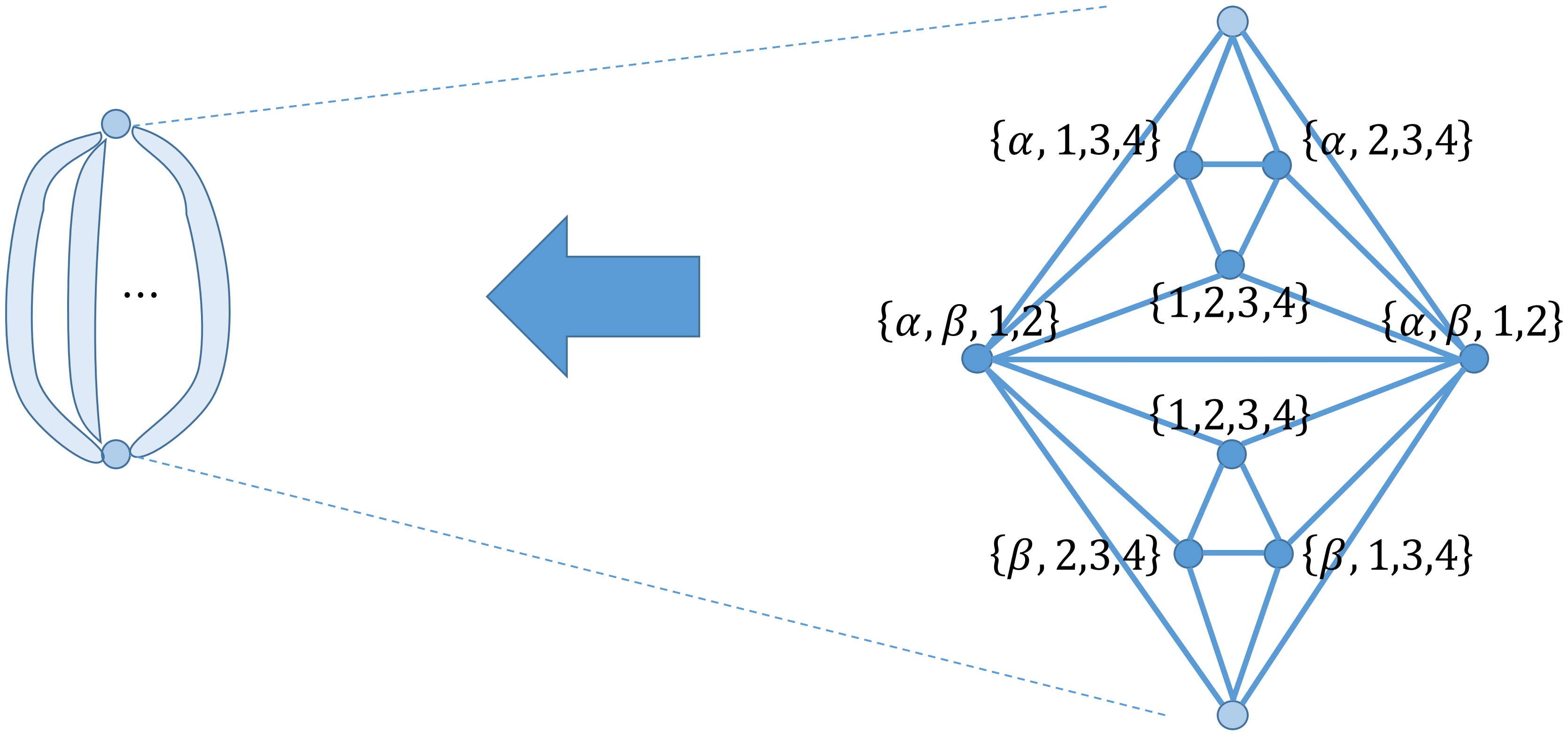
Доказательство:
Для каждого $\alpha \in \{5,6,7,8\}$ и $\beta \in \{9,10,11,12\}$ определим граф $G_{\alpha,\beta}$ (со списками допустимых цветов), изображённый справа.

У него нет правильной списочной раскраски.



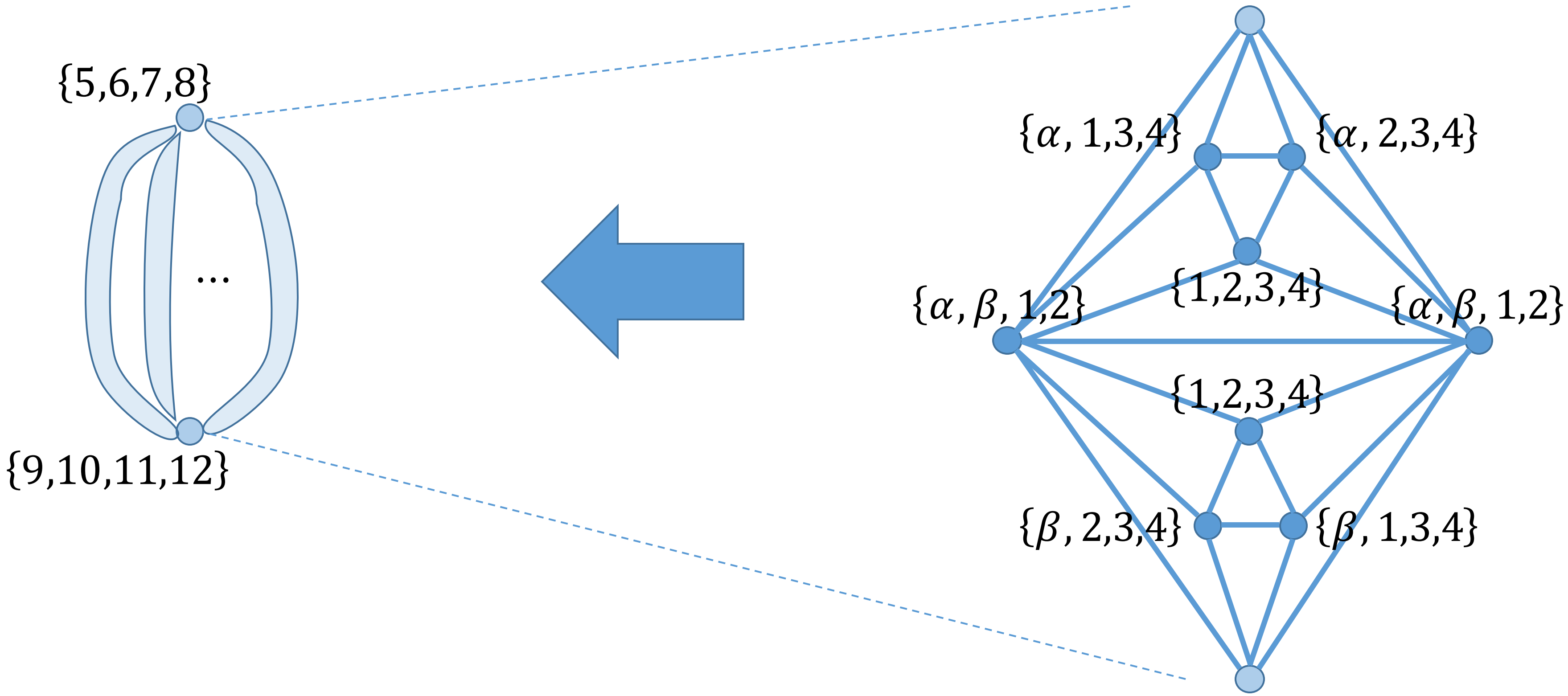
Теорема Войгт

Возьмём все 16 графов $G_{\alpha,\beta}$ для различных α, β и отождествим у них верхние и нижние вершины. Получим граф G:



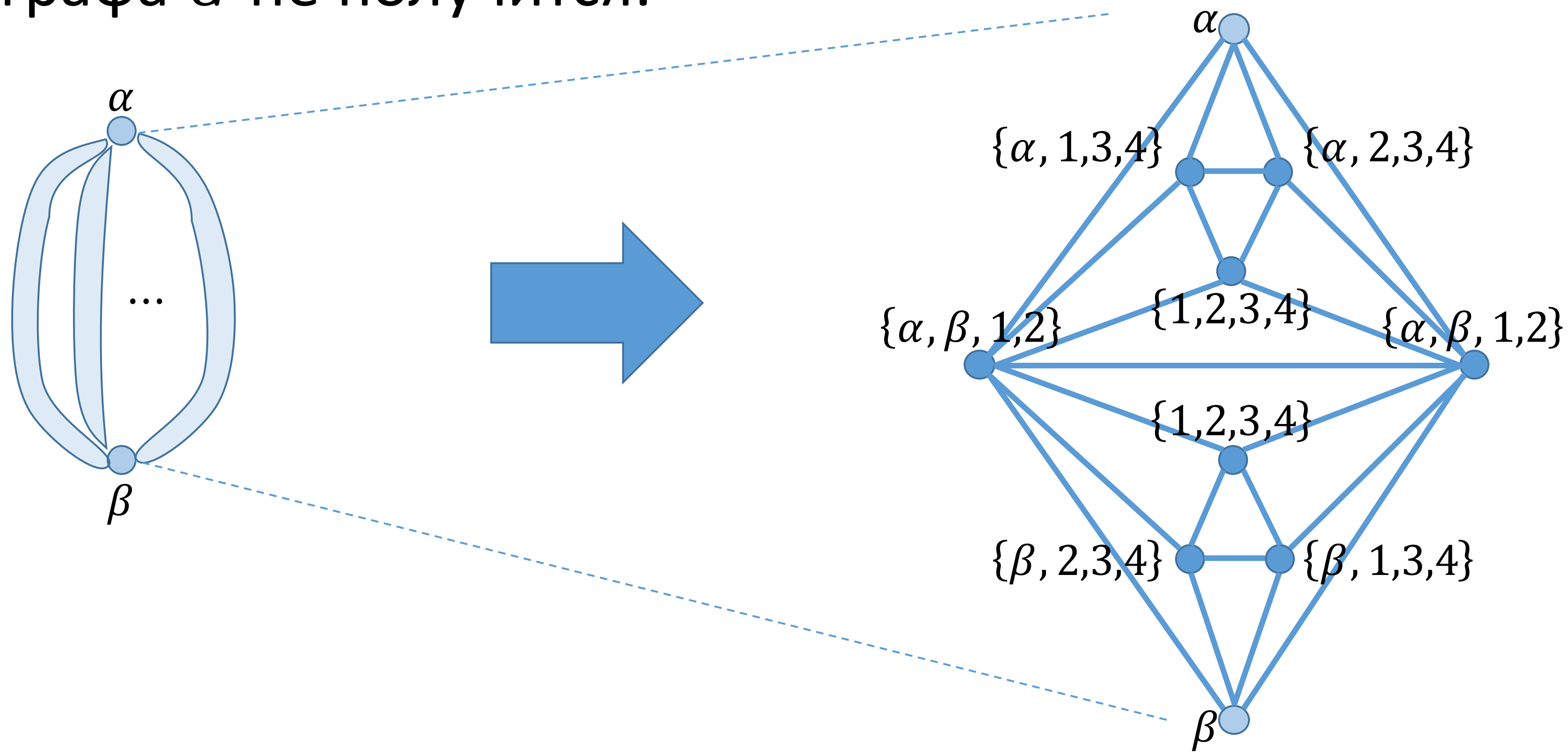
Теорема Войгт

Для верхней и нижней вершин G укажем списки $\{5,6,7,8\}$ и $\{9,10,11,12\}$ соответственно.



Теорема Войгт

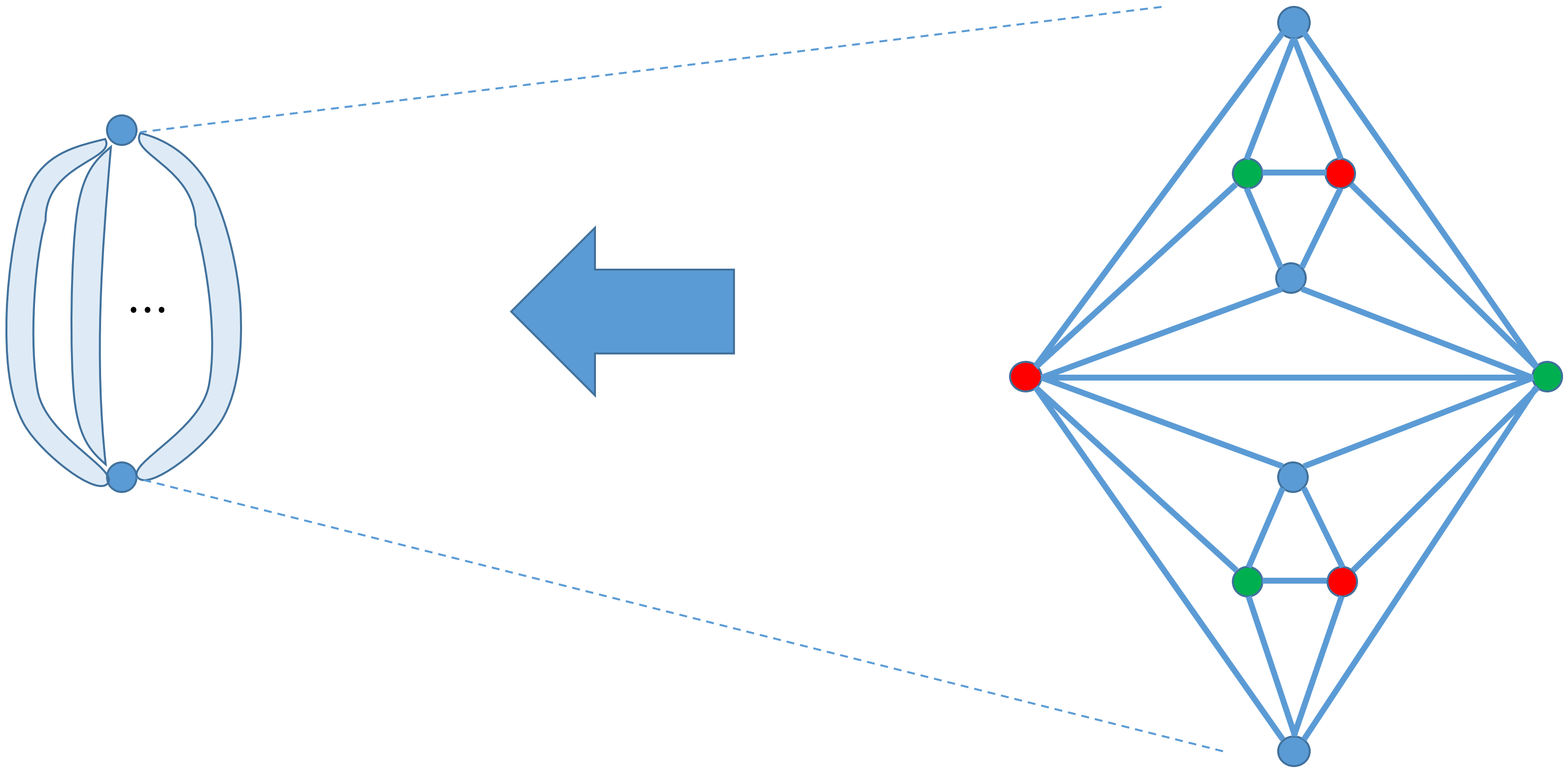
Тогда при любом выборе цветов α и β для верхней и нижней вершин G один из подграфов совпадёт с $G_{\alpha,\beta}$ и достроить раскраску графа G не получится.



Теорема Войгт

Итак, мы обосновали, что $\chi_l(G) > 4$.

В то же время, $\chi(G) = 3$:



Теорема Томассена

Теорема. (C. Thomassen)
$\chi_l(G) \leq 5$ для любого планарного графа G.

Доказательство:
Квазитриангуляция — это планарный граф, границы всех граней которого являются простыми циклами, причём границы всех внутренних граней — треугольники.

Утверждение теоремы достаточно доказать для квазитриангуляций.

Теорема Томассена

Индукцией по $|G|$ докажем утверждение:

«Пусть G — квазитриангуляция, и C — цикл, ограничивающий внешнюю грань G. Пусть

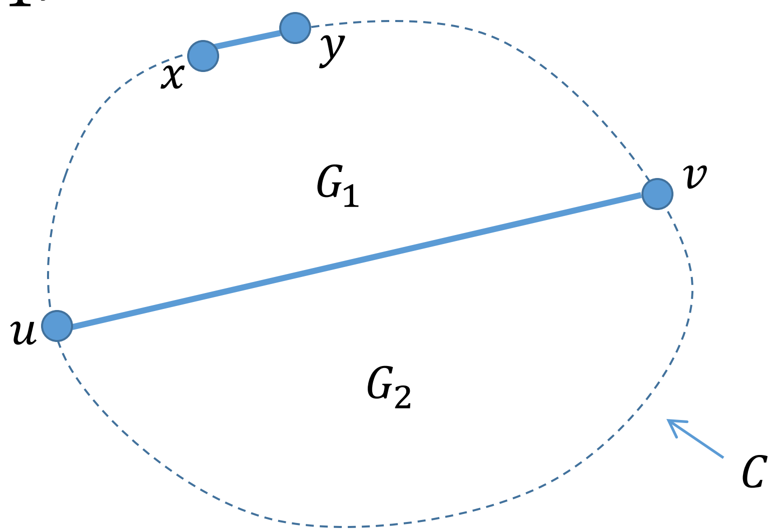
- две смежные вершины $x, y \in C$ уже окрашены в цвета α и β соответственно,
- вершинам из $(C - \{x, y\})$ приписаны списки допустимых цветов размера не менее 3,
- вершинам из $(G - C)$ приписаны списки допустимых цветов размера не менее 5.

Тогда для вершин из $V(G) \setminus \{x, y\}$ можно выбрать цвета из их списков, так, чтобы получилась правильная раскраска графа G.»

Теорема Томассена

При $|G| = 3$ утверждение очевидно.
Пусть $|G| > 3$ и утверждение выполнено для всех квазитриангуляций меньшего размера.

Вначале рассмотрим случай, когда у цикла C, ограничивающего внешнюю грань, есть хорда $uv \in E(G) \setminus E(C)$. Она разбивает укладку G на части G_1 и G_2. Подграф G_1, по предположению, можно раскрасить. Цвета u и v тем самым определятся. Теперь, по предположению, можно докрасить и подграф G_2.

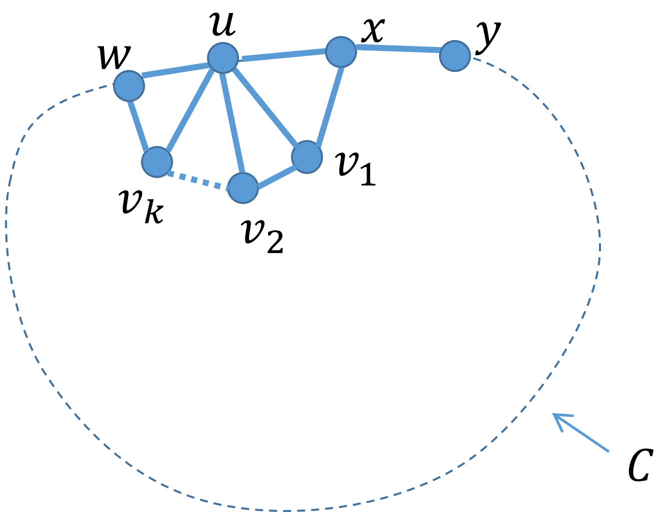


Теорема Томассена

Теперь рассмотрим случай, когда у C нет хорд.

Пусть u — отличный от y сосед x на C.
Пусть w — сосед u на C, отличный от x (возможно, $w = y$),
а $v_1, \dots, v_k$ — все остальные соседи u в графе G.
Граф $G' = G - u$ является квазитриангуляцией.
В списке L_u есть два цвета γ, δ, отличные от α.
В G' для вершин v_i возьмём списки $L_{v_i} \setminus \{\gamma, \delta\}$,
где L_{v_i} — списки для v_i в графе G.
По предположению, граф G' можно
раскрасить в цвета из списков.

Осталось окрасить u в один из
цветов γ, δ, отличных от цвета w.



Нелокальность хроматического числа

- Мы знаем простую оценку: $\chi(G) \geq \omega(G)$
- В планарных графах нет K_5, то есть для них $\omega(G) \leq 4$.
  А по теореме о четырёх красках, для планарных графов имеем $\chi(G) \leq 4$.
- Можно ли в общем случае утверждать, что если $\omega(G)$ мало́, то и $\chi(G)$ мало́? —Нет!

Теорема Зыкова—Мыцельского

Теорема. (Зыков ’1949, Mycielski ’1955)
При любом $k \geq 2$ существует связный граф G_k, для которого $\omega(G_k) = 2$ и $\chi(G_k) = k$.

Доказательство:
Построим последовательность $\{G_k\}_{k=2}^{\infty}$ по индукции.

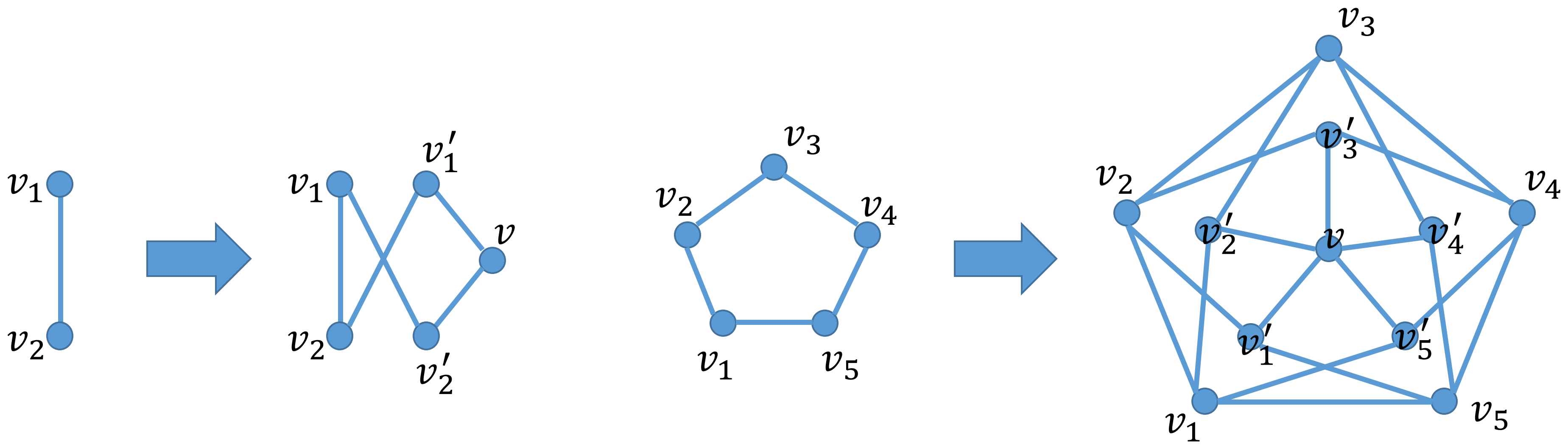
Для начала, возьмём $G_2 \coloneqq K_2$.

Теорема Зыкова—Мыцельского

Пусть $G_k = (V_k, E_k)$, и пусть $V_k = \{v_1, \dots, v_n\}$.

Тогда $G_{k+1} = (V_{k+1}, E_{k+1})$, где

- $V_{k+1} = V_k \cup \{v_1', \dots, v_n'\} \cup \{v\}$
- $E_{k+1} = E_k \cup \{v_i' v\}_{i=1}^{n} \cup \left\{v_i' v_j \mid v_i v_j \in E_k\right\}$

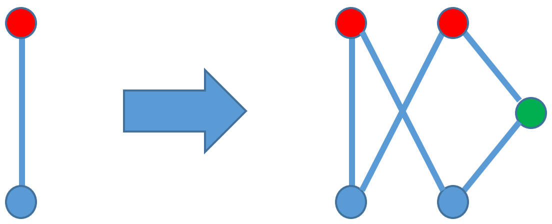


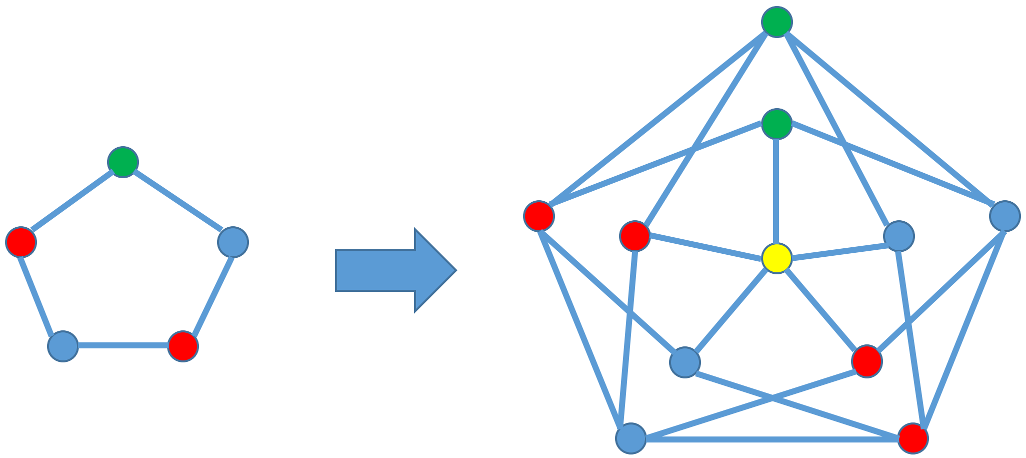
Теорема Зыкова—Мыцельского

Пусть ϕ_k — раскраска G_k в цвета $\{1, \dots, t\}$.

Тогда раскраску ϕ_{k+1} графа G_{k+1} можно построить так: $\phi_{k+1}(v_i) = \phi_{k+1}(v_i') \coloneqq \phi_k(v_i)$ и $\phi_{k+1}(v) \coloneqq t + 1$.

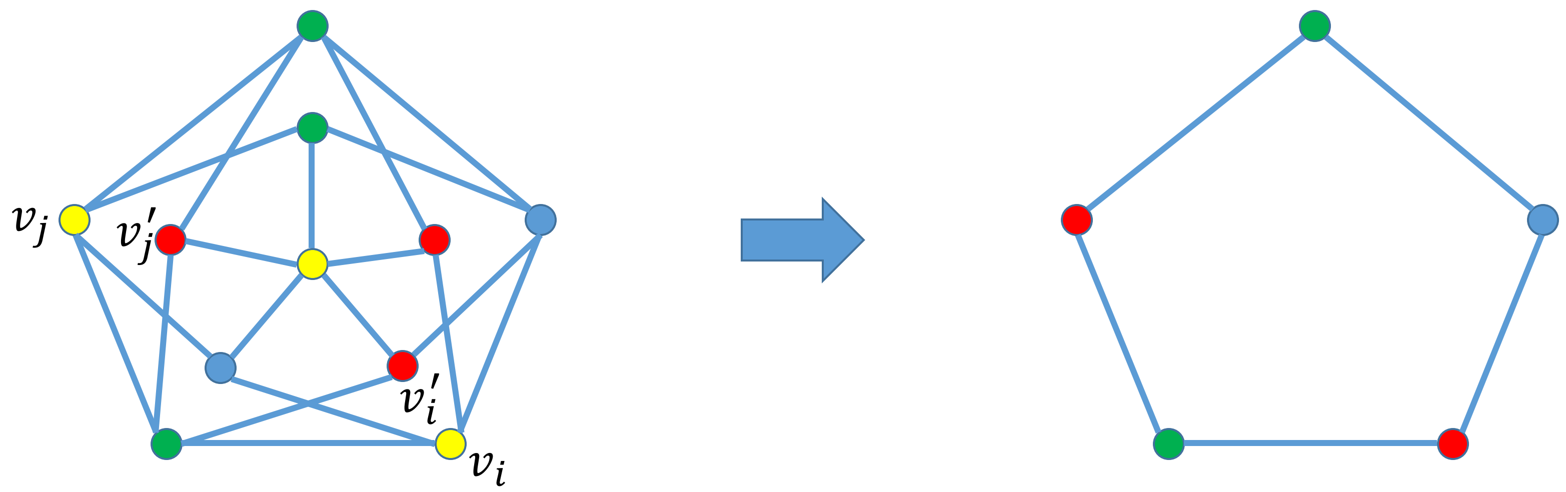
Следовательно, $\chi(G_{k+1}) \leq \chi(G_k) + 1$.





Теорема Зыкова—Мыцельского

По раскраске ϕ_{k+1} графа G_{k+1} в t цветов можно построить раскраску ϕ_k графа G_k:
$\phi_k(v_i) \coloneqq \phi_{k+1}(v_i)$, если $\phi_{k+1}(v_i) \neq \phi_{k+1}(v)$, и $\phi_k(v_i) \coloneqq \phi_{k+1}(v_i')$ иначе.



Раскраска ϕ_k является правильной раскраской графа G_k в $(t-1)$ цветов.
Отсюда $\chi(G_k) \leq \chi(G_{k+1}) - 1$, следовательно, $\chi(G_{k+1}) = \chi(G_k) + 1$.
Так как $\chi(G_2) = 2$, получаем $\forall k \;\; \chi(G_k) = k$.

Теорема Зыкова—Мыцельского

Покажем, что в графах G_{k+1} нет треугольников при условии, что их нет в G_k:

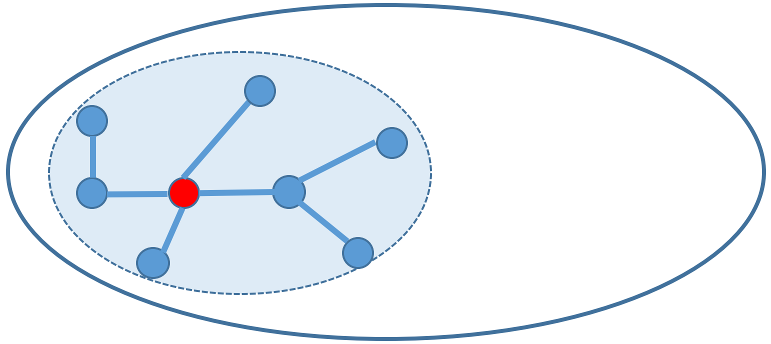
- Треугольник в G_{k+1} не может содержать более одной вершины среди $\{v'_i\}_{i=1}^n$.
- Треугольник в G_{k+1} не может содержать v,
  так как v смежна только с вершинами $\{v'_i\}_{i=1}^n$.
- Треугольник в G_{k+1} не может содержать только вершины из $\{v_i\}_{i=1}^n$,
  т.к. в G_k нет треугольников
- Значит, если в G_{k+1} есть треугольник, то он имеет вид $\{v_p, v_q, v'_r\}$.
  Но тогда вершины $\{v_p, v_q, v_r\}$ образуют треугольник в G_k — противоречие.

Т.к. в G_2 нет треугольников, то их нет ни в одном G_k.

Нелокальность хроматического числа

Обхват графа G — это наименьший размер цикла в графе. Обозначение: $g(G)$.

Если $g(G) > k$, то в G окрестность любой вершины радиуса $\lfloor k/2 \rfloor$ является деревом:



Теорема. (P. Erdős ’1959)
При любом k существует граф G, для которого $g(G) > k$ и $\chi(G) > k$.

Доказательство теоремы Эрдёша

Пусть $k \geq 10$. Положим $n \coloneqq (4k)^{4k}$ и рассмотрим случайный граф G на n вершинах, проводя каждое ребро с вероятностью $p \coloneqq n^{1/(2k)-1}$.

Введём случайную величину

$$X \coloneqq \#\text{циклов длины} \leq k \text{ в нашем графе}$$

Используя линейность матожидания, получаем

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=3}^{k} \binom{n}{i} \cdot \frac{(i-1)!}{2} \cdot p^i$$

Выбираем длину цикла

Какие именно вершины участвуют в цикле

Количество способов составить цикл из выбранных вершин

Вероятность того, что все рёбра этого цикла попадут в случайный граф

Доказательство теоремы Эрдёша

- $X \coloneqq \#$циклов длины $\leq k$ в нашем графе

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=3}^{k} \binom{n}{i} \frac{(i-1)!}{2} p^i < \sum_{i=3}^{k} \frac{n^i}{i!} \frac{(i-1)!}{2} p^i < \sum_{i=3}^{k} (np)^i =$$

$$= \sum_{i=3}^{k} \left(n^{1/(2k)}\right)^i < k\sqrt{n}$$

По неравенству Маркова,

$$\Pr\left[X \geq \frac{n}{2}\right] \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{n/2} < \frac{2k}{\sqrt{n}} < \frac{1}{2}$$

Итог: $\Pr\left[\#\text{циклов длины} \leq k \text{ в графе} \geq \frac{n}{2}\right] < \frac{1}{2}$

Доказательство теоремы Эрдёша

Положим $t \coloneqq \lceil n^{1-1/(4k)} \rceil$ и введём с. в.

$$Y \coloneqq \#\text{н. м. размера } t \text{ в нашем графе}$$

Пользуясь неравенством $1 - p < e^{-p}$ и, помня, что $p = n^{1/(2k)-1}$, выводим

$$\mathbb{E}[Y] = \binom{n}{t}(1-p)^{\binom{t}{2}} < \left(\frac{en}{t}\right)^t e^{-pt(t-1)/2} = \left(t^{-1} n e^{1-p(t-1)/2}\right)^t <$$

$$< \left(t^{-1} n e^{2-pt/2}\right)^t \le \left(n^{1/(4k)} e^{2-0.5n^{1/(4k)}}\right)^t = \left(4k e^{2-2k}\right)^t < \frac{1}{2}$$

Доказательство теоремы Эрдёша

- $t := \lceil n^{1-1/(4k)} \rceil$
- $Y := \#\text{н. м. размера } t \text{ в нашем графе}$
- $\mathbb{E}[Y] < \frac{1}{2}$

Пользуясь неравенством Маркова, получаем

$$\Pr[\text{в графе есть н. м. размера } t] = \Pr[Y \geq 1] \leq \mathbb{E}[Y] < \frac{1}{2}$$

То есть

$$\Pr\left[\alpha(G) \geq n^{1-1/(4k)}\right] < \frac{1}{2}$$

Доказательство теоремы Эрдёша

- $\Pr\left[\#\text{ц. дл.} \leq k \text{ в } G \text{ превосходит } \frac{n}{2}\right] < \frac{1}{2}$
- $\Pr\left[\alpha(G) \geq n^{1-1/(4k)}\right] < \frac{1}{2}$

Вероятность того, что в графе G окажется более $\frac{n}{2}$ циклов длины $\leq$ k или хотя бы одно независимое множество размера $n^{1-1/(4k)}$,

$$< \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Значит, с положительной вероятностью случайный граф G содержит не более $\frac{n}{2}$ циклов длины $\leq k$ и имеет $\alpha(G) < n^{1-1/(4k)}$.

Доказательство теоремы Эрдёша

Мы показали, что существует граф G, в котором не более $\frac{n}{2}$ циклов длины $\leq k$ и при этом $\alpha(G) < n^{1-1/(4k)}$.

Удалим из каждого цикла длины $\leq k$ произвольную вершину.

Останется граф G', для которого

- $\mathrm{g}(G') > k$
- $|G'| \geq \frac{n}{2}$
- $\alpha(G') \leq \alpha(G) < n^{1-1/(4k)}$

Доказательство теоремы Эрдёша

Мы показали, что существует граф G', в котором

- $\mathrm{g}(G') > k$
- $|G'| \geq n/2$
- $\alpha(G') \leq \alpha(G) < n^{1-1/(4k)}$

Имеем

$$\chi(G') \geq \frac{|G'|}{\alpha(G')} > \frac{n/2}{n^{1-1/(4k)}} = 2k$$

Итог: $\mathrm{g}(G') > k$ и $\chi(G') > 2k$, что и требовалось.

Следствия теоремы Эрдёша

Теорема. (P. Erdős ’1959)
При любом k существует граф G, для которого $g(G) > k$ и $\chi(G) > k$.

Следствие.
При любом k существует граф, для которого $g(G) > k$ и $\kappa(G) > k$.

Доказательство:
Пусть G — граф, у которого $g(G) > k$ и $\chi(G) > 4k$.

В G есть подграф G', для которого $\delta(G') \geq \chi(G) - 1 \geq 4k$.

По теореме Мадера, в G' есть $(k+1)$-связный подграф G''.

Совершенные графы

Граф называется *совершенным*, если любой его порождённый подграф H удовлетворяет условию $\chi(H) = \omega(H)$.

Теорема. (Lovász ’1972)
Граф G является совершенным, если и только если любой его порождённый подграф H удовлетворяет условию

$$|H| \leq \alpha(H) \cdot \omega(H).$$

Доказательство. Необходимость следует из того, что в совершенном графе для любого порождённого подграфа H имеем

$$|H| \leq \alpha(H)\chi(H) = \alpha(H)\omega(H).$$

Доказательство теоремы Ловаса

Доказательство достаточности:

Пусть G — *не совершенный* граф. Нужно показать, что найдётся порождённый $H \subseteq G$, для которого неравенство $|H| \leq \alpha(H)\omega(H)$ нарушится.

Будем считать, что каждый порождённый подграф *отличный от самого* G, совершенный.
Так что требуется доказать, что $|G| > \alpha(G)\omega(G)$.

Для любого непустого независимого множества $A \subset V(G)$ выполнены равенства

$$\chi(G - A) = \omega(G - A) = \omega(G),$$

так как иначе оказалось бы, что $\chi(G) = \omega(G)$.

Доказательство теоремы Ловаса

Обозначим $\alpha \coloneqq \alpha(G),\ \omega \coloneqq \omega(G)$.

Пусть $A_0 = \{v_1, \dots, v_\alpha\}$ — н.м. максимального размера в G.

Для каждого j раскраска графа $\left(G - v_j\right)$ порождает разбиение множества $V\left(G - v_j\right)$ на независимые множества $A_{j,1}, \dots, A_{j,\omega}$.

Заметим, что любая клика размера ω в G пересекается со *всеми, кроме одного* из множеств $A_0, A_{1,1}, \dots, A_{1,\omega}, \dots, A_{\alpha,1}, \dots, A_{\alpha,\omega}$.

Доказательство теоремы Ловаса

$A_0 = \{v_1, \dots, v_\alpha\}$ — н.м. размера α в G.

$V(G - v_j) = A_{j,1} \sqcup \dots \sqcup A_{j,\omega}$ при $j = 1, \dots, \alpha$.

Пусть K — клика размера ω в G.

Если $K \cap A_0 = \emptyset$, то $\forall j \;\; K \subseteq V(G - v_j)$ и следовательно

$|K \cap A_{j,l}| = 1$ для любых j, l.

Если $K \cap A_0 = \{v_s\}$, то

при $j \neq s \;\; |K \cap A_{j,l}| = 1$ при всех l;

$|K \cap A_{s,l}| = 1$ при всех l, кроме одного.

Доказательство теоремы Ловаса

$A_0 = \{v_1, \dots, v_\alpha\}$ — н.м. размера α в G.

$V(G - v_j) = A_{j,1} \sqcup \cdots \sqcup A_{j,\omega}$ при $j = 1, \dots, \alpha$.

Пусть B_0 — клика размера ω в графе $(G - A_0)$.
Аналогично определим клики $B_{i,j}$ в $(G - A_{i,j})$.

Занумеруем набор множеств $B_0, B_{1,1}, \dots, B_{\alpha,\omega}$ индексами $B_0, B_1, \dots, B_{\alpha\omega}$. И $A_0, A_{1,1}, \dots, A_{\alpha,\omega}$ занумеруем индексами $A_0, A_1, \dots, A_{\alpha\omega}$.

Получаем, что $|A_i \cap B_j| = \begin{cases} 1, \text{если } i \neq j \\ 0, \text{если } i = j \end{cases}$

Лемма Гаспаряна

Лемма. (Gasparian ’1996)
Пусть $X_1, \dots, X_m, Y_1, \dots, Y_m$ — подмножества множества $\{v_1, \dots, v_n\}$, такие, что

$$|X_i \cap Y_j| = \begin{cases} 1, \text{если } i \neq j \\ 0, \text{если } i = j \end{cases}$$

Тогда $m \leq n$.

Непосредственно из леммы Гаспаряна следует неравенство $\alpha(G)\omega(G) + 1 \leq |G|$, что доказывает теорему Ловаса.

Доказательство леммы Гаспаряна

Рассмотрим матрицу $\boldsymbol{X}^{m\times n} = \{x_{i,j}\}$, в которой $x_{i,j} = 1$, если $X_i \ni v_j$ и $x_{i,j} = 0$ иначе.

Аналогично введём $\boldsymbol{Y}^{n\times m} = \{y_{i,j}\}$, в которой $y_{i,j} = 1$, если $v_i \in Y_j$ и $y_{i,j} = 0$ иначе.

Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} x_{i,k} y_{k,j} = \#\{k \mid v_k \in X_i \cap Y_j\} = \begin{cases} 1, \text{если } i \neq j \\ 0, \text{если } i = j \end{cases}$$

Доказательство леммы Гаспаряна

$$\sum_{k=1}^{n} x_{i,k} y_{k,j} = \#\{k \mid v_k \in X_i \cap Y_j\} = \begin{cases} 1, \text{если } i \neq j \\ 0, \text{если } i = j \end{cases}$$

Следовательно,

$$\boldsymbol{XY} = \begin{pmatrix} 0\,1 & \cdots & 1 \\ 1\,0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1\,1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Таким образом, ранг матрицы $\boldsymbol{XY}$ равен m.

Следовательно, ранги $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$ не меньше m.

А значит, $n \geq m$. Лемма доказана.

Совершенные графы

Теорема. (L. Lovász ’1972)
Граф G является совершенным, если и только если любой его порождённый подграф H удовлетворяет условию

$$|H| \leq \alpha(H) \cdot \omega(H).$$

Следствие.
Граф, дополнительный к совершенному, также является совершенным.

Совершенные графы

Примеры совершенных графов:

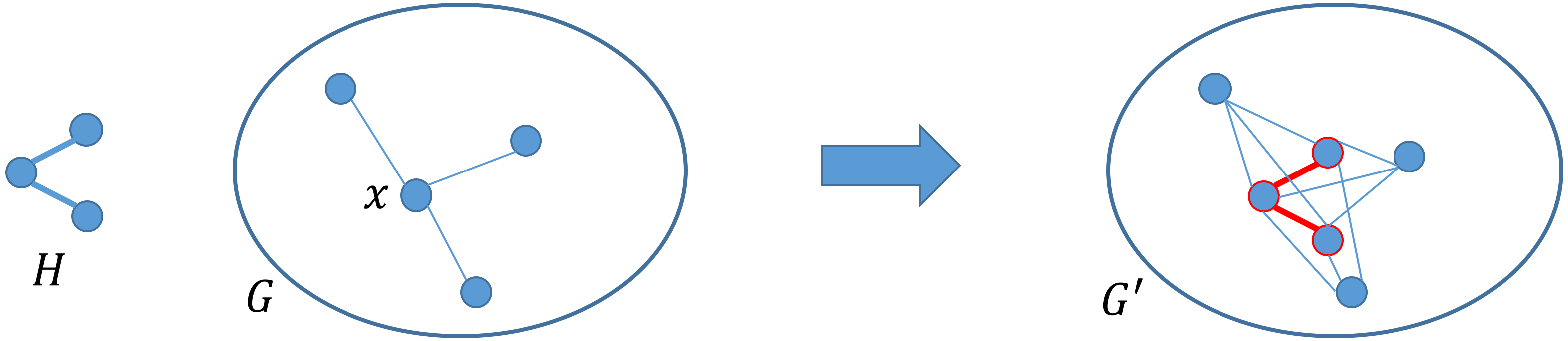
- Двудольные графы
- Интервальные графы ($V =$ отрезки на прямой, $E =$ пары пересекающихся отрезков)
- Графы сравнимости ($V =$ элементы ч.у.м., $E =$ пары сравнимых элементов)
- Дистанционно-наследственные графы (расстояния между вершинами не меняются при переходе к связным порождённым подграфам)
- Графы, каждый блок которых совершенный
- Дополнения совершенных графов

Совершенные графы

Введём операцию *подстановки графа H вместо вершины x графа G*. (Считаем, что $V(G) \cap V(H) = \emptyset$)

Результатом операции является граф G':

- $V(G') = V(G - x) \cup V(H)$
- $E(G') = E(G - x) \cup E(H) \cup \{uv \mid u \in V(H), v \in V(G), vx \in E(G)\}$



Теорема: если G и H совершенны, то таков и G'.

Совершенные графы

Циклы на нечётном числе вершин, не меньшем 5, несовершенны, так как для них $\chi = 3, \omega = 2$.

Оказывается, это «минимальные несовершенные графы»:

Теорема. (Strong Perfect Graph Theorem)
Граф является совершенным тогда и только тогда, когда ни в нём, ни в его дополнении нет порождённых подграфов, являющихся циклами нечётной длины не менее 5.

Хроматический многочлен

Рассмотрим теперь вопрос о *числе* раскрасок.

Сколько различных раскрасок в (не более чем) x цветов существует у заданного графа G?

Обозначим это число через $\chi(G; x)$.

Утверждение. Имеют место равенства:

- $\chi(\overline{K}_n; x) = x^n$
- $\chi(K_n; x) = x(x-1)(x-2) \cdot \ldots \cdot (x-n+1)$

Хроматический многочлен

Утверждение. Для любого ребра uv графа G справедливо соотношение

$$\chi(G; x) = \chi(G - uv; x) - \chi(G/uv; x)$$

Доказательство:
Раскраски графа $(G - uv)$ бывают двух типов:

- в которых u и v одного цвета — таких раскрасок ровно $\chi(G/$

Хроматический многочлен

Утверждение. Для любого ребра uv графа G справедливо соотношение

$$\chi(G;x) = \chi(G - uv;x) - \chi(G/uv;x)$$

Следствие. Для любого G величина $\chi(G;x)$ является многочленом от x.

Доказательство: рекурсивно применяя формулу из Утверждения, в конце концов придём к полным или пустым графам, для которых $\chi(\ldots;x)$ являются многочленами.

Свойства хроматического многочлена

- Если $G_1, \ldots, G_m$ — компоненты графа G, то

$$\chi(G; x) = \prod_{i=1}^{m} \chi(G_i; x)$$

Доказательство:
Раскраска графа G получается независимым выбором раскрасок компонент этого графа.

Свойства хроматического многочлена

- Если графы G_1 и G_2 имеют ровно одну общую вершину, то

$$\chi(G_1 \cup G_2; x) = \frac{1}{x} \cdot \chi(G_1; x) \cdot \chi(G_2; x)$$

Доказательство: Пусть $V(G_1) \cap V(G_2) = \{v\}$.

Сначала раскрасим G_2 любым из $\chi(G_2; x)$ способов. Вершина v при этом получит некоторый цвет $c \in \{1, \dots, x\}$.

Раскрасок графа G_1 в x цветов, в которых v имеет цвет c, имеется ровно $\frac{\chi(G_1; x)}{x}$.

Свойства хроматического многочлена

- Если графы G_1 и G_2 имеют ровно одну общую вершину, то
$$\chi(G_1 \cup G_2; x) = \frac{1}{x} \cdot \chi(G_1; x) \cdot \chi(G_2; x)$$
- **Следствие.** Если $B_1, \dots, B_m$ — блоки связного графа G, то
$$\chi(G; x) = x^{1-m} \cdot \prod_{i=1}^{m} \chi(B_i; x)$$

(Доказательство индукцией по числу блоков.)

Свойства хроматического многочлена

- Если $B_1, \ldots, B_m$ — блоки связного графа G, то
$$\chi(G;x) = x^{1-m} \cdot \prod_{i=1}^{m} \chi(B_i;x)$$
- **Следствие.**
Если G — дерево, то $\chi(G;x) = x(x-1)^{\|G\|}$.

Доказательство:
В дереве каждое ребро является блоком. Остаётся заметить, что $\chi(K_2;x) = x(x-1)$.

Свойства хроматического многочлена

- $\deg \chi(G; x) = |G|$
- Свободный член в $\chi(G; x)$ равен 0
- Коэффициент в $\chi(G; x)$ при $x^{|G|}$ равен 1
- Коэффициент при $x^{|G|-1}$ равен $-\|G\|$

Доказательства этих свойств проводятся индукцией по $|G|$ с использованием основного рекуррентного соотношения.

Свойства хроматического многочлена

Нетривиальные свойства (без доказательства):

- Для графа на n вершинах с k компонентами связности коэффициенты в $\chi(G; x)$ при $x^n, x^{n-1}, \ldots, x^k$ ненулевые, и их знаки чередуются
- Модули ненулевых коэффициентов хроматического многочлена образуют унимодальную последовательность