[Дискретные структуры. Учебный год 2012—2013.]

Задачи составлены коллективом кафедры дискретной математики ФИВТ МФТИ

Среди задач есть такие задачи и отдельные пункты, которые отмечены значком «!». Эти задачи — обязательные для самостоятельного решения. Семинарист может проверить наличие решений этих задач.

Задачи, отмеченные значком «*», имеют повышенную трудность и адресованы интересующимся студентам.

Базовые понятия

Подсчёт

S1.1. Сколько десятизначных чисел, в записи которых имеются хотя бы две одинаковые цифры?

S1.2. В языке программирования MIPT++ имена переменных могут содержать только строчные латинские буквы и цифры. Имя переменной с цифры начинаться не может. Кроме того, в имени обязательно где-нибудь должны идти подряд буквы `mipt`. Сколько различных имён переменных длины 10 в MIPT++?

S1.3. Ответьте на вопросы:

1. Скольким способами можно составить хоровод из n человек?
2. Скольким способами можно составить ожерелье из n бусинок (все бусинки разных цветов)?

В каком случае получается большее число способов?

S1.4$^!$. Профком МФТИ раздаёт студентам гаджеты: каждому студенту по ноутбуку, планшету и смартфону. В профкоме есть 4 смартфона, 5 ноутбуков и 6 планшетов, все разных моделей. Сколькими способами пришедшие в профком трое студентов могут набрать себе гаджетов?

S1.5. У мужа 12 знакомых — 5 женщин и 7 мужчин. У жены тоже 12 (других) знакомых — 7 женщин и 5 мужчин. Сколькими способами можно составить компанию из 6 мужчин и 6 женщин так, чтобы 6 человек пригласил муж и 6 — жена?

S1.6. На клетчатой бумаге изображен квадрат, каждая сторона которого умещает ровно n клеток. Сколько в этом квадрате можно нарисовать различных букв Т? («Ножка» буквы располагается по центру «крышки», длина ножки не меньше единицы, длина крышки не меньше тройки, все линии единичной толщины, повороты не допускаются.)

S1.7. На работу требуются восемь человек: четверо знатоков C++ и четверо знатоков `Python`. Из 31 кандидата, претендующих на вакансии, 10 кандидатов знают только C++, 12 знают только `Python`, а 9 знают оба языка. Сколькими способами можно набрать требуемую команду программистов?

S1.8. Сколькими способами можно переставить буквы слова «каракули» так, чтобы никакие две гласные не стояли рядом?

S1.9$^!$. Есть семь красных, пять зелёных, четыре синих бусинки, и ещё 4 бусинки уникальных цветов. Сколькими способами можно расположить все их в ряд, так, чтобы в нём не оказалось пары соседних бусинок красного цвета?

S1.10. Сколькими способами можно выбрать несколько букв из фразы «око за око, зуб за зуб»? Порядок букв не учитывается. Например, одна из выборок: $\{o,\, o,\, o,\, a,\, a\}$. Пример недопустимой выборки: $\{a,\, a,\, a\}$.

S1.11. В каком из выражений, $(1+x^2-x^3)^{1000}$ или $(1-x^2+x^3)^{1000}$, будет больший коэффициент при x^{17} после раскрытия скобок и приведения подобных членов?

S1.12. Найдите количество решений уравнения $x_1+x_2+\dots+x_k=n$ в целых неотрицательных числах (n фиксировано).

S1.13. Пусть C и D — фиксированные множества, такие, что $C\subseteq D$, $|C|=m$ и $|D|=n$. Найдите количество решений следующих систем:

1. $C\subseteq A\subseteq D$
2. $\begin{cases} A\cap B=C,\\ A\cup B=D\end{cases}$
3$^!$. $\begin{cases} A\cap B\supseteq C,\\ A\cup B\subseteq D\end{cases}$
4$^!$. $\begin{cases} A\setminus B=C,\\ A\cup B\subseteq D\end{cases}$

Тождества с комбинаторными числами

В следующих задачах на вычисление сумм и доказательство тождеств постарайтесь действовать логически, а не алгебраически, если в выражениях нет дробей. Идея следующая: подбирается множество, мощность которого можно посчитать двумя разными способами, первый из которых даст выражение в левой части, а второй — в правой части тождества. Это может быть множество сочетаний, раскрасок и пр.

Если нет других идей, можно действовать алгебраически, используя симметричность биномиальных коэффициентов, формулу бинома и др. Иногда после небольших алгебраических преобразований ясно, как продолжить доказательство в логическом духе.

S1.14. Докажите тождества:

1. $\displaystyle\sum_{j=0}^{k}\binom{m}{j}\binom{n}{k-j}=\binom{n+m}{k}$ (*тождество Коши—Вандермонда*)
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}^2=n^2\binom{2n-2}{n-1}$
4. $\displaystyle\sum_{r=0}^{n-k}\binom{n}{k+r}\binom{m}{r}=\binom{m+n}{n-k}$

$5^!$. $\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}=\binom{n}{m}\binom{m}{k}$

S1.15. Сверните следующие суммы:

1. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(m-1)^i$
2. $\displaystyle\sum_{i=0}^{\lceil n/2\rceil}\binom{n}{2i}$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-m}\binom{n-k}{m}$

$4^!$. $\displaystyle\sum_{k=0}^{m}\binom{n-k}{m-k}$

S1.16. Докажите соотношение для чисел Стирлинга: $\left\{{n+1 \atop k}\right\}=k\left\{{n \atop k}\right\}+\left\{{n \atop k-1}\right\}$.

S1.17. Докажите соотношение для чисел Белла: $B_{n+1}=\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}B_i$.

Нестандартные задачи

S1.18*. Рассмотрим произвольную совокупность 8-мерных векторов с координатами $-1, 0, 1$, у каждого из которых 4 нулевых координаты (и, стало быть, 4 ненулевых) и первая ненулевая координата равна 1. Предположим, что векторы в совокупности попарно неортогональны. Докажите, что размер совокупности не превосходит 70. Придумайте совокупность размера 40.

S1.19*. Пусть $\mathscr{M}=\{M_1,\ldots,M_{15}\}$ — произвольная совокупность, состоящая из пятнадцати пятиэлементных множеств. Положим $R=M_1\cup\cdots\cup M_{15}$. Верно ли, что всегда можно так покрасить элементы R в два цвета, чтобы каждое из множеств $M_1,\ldots,M_{15}$ было неодноцветным (содержало элементы обоих цветов)?

Индукция

S2.1. Докажите тождество: $\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

S2.2. Пусть плоскость разбита на области некоторым количеством прямых. Докажите, что всегда можно так раскрасить области двумя цветами, что любая пара граничащих по отрезку областей будет покрашена в разные цвета.

S2.3$^!$. Шеренга новобранцев стоит перед старшиной. Старшина командует: нале-во! Но по неопытности солдаты поворачиваются в разные стороны — часть влево, часть вправо. После этого каждую секунду происходит следующее. Солдаты, оказавшиеся лицом друг к другу, понимают, что произошла ошибка, и после этого оба разворачиваются в противоположную сторону. Докажите, что через некоторое время повороты прекратятся, то есть, не останется солдат, стоящих лицом друг к другу.

S2.4[!]. Докажите, что $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} < 2$.

S2.5. Пусть p — простое число. Докажите, что $\binom{p}{m}$ делится на p при $m \neq 0, p$. Используя этот факт, докажите индукцией по a *малую теорему Ферма*: для любого любого $a \in [p]$ число $a^p - a$ делится на p.

Формула включений-исключений

S2.6. Сколько существует чисел от 1 до 16500, которые не делятся ни на 3, ни на 5, ни на 11?

S2.7. В аудитории n мест. Перед контрольной каждый из n студентов спрятал на месте, на котором он/она обычно сидит, шпаргалку. Сколькими способами может преподаватель рассадить студентов так, чтобы никто из них не мог воспользоваться своей шпаргалкой?

S2.8[!]. К обеду приглашены n пар враждующих рыцарей. Их нужно рассадить за круглым столом (за столом ровно $2n$ мест) так, чтобы никакие два врага не сидели рядом. Сколькими способами это можно сделать? Мы считаем, что все места различные.

S2.9[!]. *Функция Эйлера* $\phi(n)$ определяется как количество натуральных чисел, меньших n и взаимно простых с n. Докажите формулу $\phi(x) = n \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)$, где произведение берётся по всем простым делителям n.

S2.10. Докажите формулу для чисел Стирлинга 2-го рода: $\left\{ n \atop k \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n$.

Принцип Дирихле

S2.11. В комнате площадью 6 постелили 3 ковра произвольной формы площадью 3 каждый. Докажите, что какие-либо два из них перекрываются по площади, не меньшей 1.

S2.12. Докажите, что в правильном треугольнике со стороной 1 среди любых пяти точек найдутся две на расстоянии не больше $1/2$.

S2.13[!]. Рассмотрим шахматную доску, у которой удалены две клетки, стоящие в противоположных углах. Можно ли эту доску покрыть доминошками размером 2×1?

S2.14. Докажите, что среди любых n натуральных чисел найдётся поднабор, сумма чисел из которого делится на n.

S2.15[!]. Докажите, что для любого натурального числа n найдется число, которое делится на n и в десятичной записи которого присутствуют только нули и семерки.

Двойной подсчёт

S3.1. Пусть дано 21 девятиэлементных подмножеств множества $[30] = \{1, \ldots, 30\}$. Докажите, что какой-то элемент из множества $[30]$ содержится по крайней мере в семи подмножествах.

S3.2. Пусть $\mathscr{F}$ это семейство k-элементных подмножеств множества $[n]$.

1. Пусть $l \leqslant k$ и пусть каждое l-элементное множество целиком содержится хотя бы в одном из множеств из $\mathscr{F}$. Докажите, что $|\mathscr{F}| \geqslant \frac{\binom{n}{l}}{\binom{k}{l}}$.
2[!]. Пусть $|\mathscr{F}| = m$. Назовем тенью $\mathscr{F}$ совокупность S всех $(k-1)$-элементных подмножеств $[n]$, которые целиком содержатся хотя бы в одном из множеств $\mathscr{F}$. Докажите, что $|S| \geqslant \frac{km}{n-k+1}$.

Асимптотики

S3.3. Могут ли функции $f(x)$ и $g(x)$ одновременно удовлетворять соотношениям $f(x) = o(g(x))$ и $g(x) = o(f(x))$? Могут ли $f(x)$ и $g(x)$ одновременно удовлетворять соотношениям $f(x) = O(g(x))$ и $g(x) = O(f(x))$? Следует ли из этого, что $f(x) \sim g(x)$?

S3.4. Подберите функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что $f(x) \sim g(x)$, но $e^{f(x)} \neq O(e^{g(x)})$.

S3.5. Найдите константу γ в записи $\binom{4n}{n} = (\gamma + o(1))^n$.

S3.6. Найдите асимптотику следующих величин при $n \to \infty$:

1. $\binom{n^2/2}{n}$,

2$^!$. $\binom{n}{n^\alpha}$ при фиксированном $\alpha \in (0, 1)$,

3$^!$. $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2$.

S3.7. Функция $n(s)$ задана в виде $n := \max\{n_0 \mid n_0! \leqslant s\}$. Найдите асимптотику этой функции при $s \to \infty$.

S3.8. Найдите асимптотику по n функции $s(n) := \min\left\{m \in \mathbb{N} \mid \binom{n}{m} < 2^{\binom{m}{2}}\right\}$.

Рекуррентные соотношения

S4.1. Сколько подмножеств можно выбрать во множестве $[n]$, так, чтобы в этих подмножествах не было соседних натуральных чисел? Найдите асимптотику этого количества.

S4.2. Числа Фибоначчи задаются рекуррентным соотношением $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ и начальными условиями $F_0 = F_1 = 1$. Докажите следующие факты:

1. Для любых $m, n \in \mathbb{N}$ выполнено $F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}$.
2. Для любых $m, n \in \mathbb{N}$ число F_{nm} делится на число F_m.
3$^!$. Любые два соседних числа F_n, F_{n+1} взаимно просты (не имеют общих делителей, отличных от единицы).
4. Каждое натуральное число может быть однозначно представлено в виде суммы чисел Фибоначчи так, что каждое число входит в сумму не более одного раза и что никакие два соседних числа не входят в сумму одновременно.

S4.3$^!$. Найдите общее решение рекуррентного соотношения $a_{n+2} - 7a_{n+1} + 12a_n = 0$.

S4.4. Найдите решение рекуррентного соотношения $a_{n+3} - 9a_{n+2} + 26a_{n+1} - 24a_n = 0$ при условии, что $a_1 = 1$, $a_2 = -3$, $a_3 = -29$.

S4.5. Найдите решение рекуррентной системы:

1. $$\begin{cases} a_{n+1} &= 3a_n + b_n, \\ b_{n+1} &= -a_n + b_n, \\ a_1 &= 14, \\ b_1 &= -6. \end{cases}$$

2$^!$. $$\begin{cases} a_{n+1} &= a_n + -2b_n, \\ b_{n+1} &= a_n + 4b_n, \\ a_1 &= 8, \\ b_1 &= -3. \end{cases}$$

S4.6. На сервере каждый час выполняется одна из задач X, Y и Z. Никакая из задач не выполняется два часа подряд. При этом задача Z настолько ресурсоёмкая, что сразу после неё не может выполняться задача Y, иначе сервер перегревается. Пусть $f(n)$ — количество способов загрузить сервер задачами на n часов? Найдите порядок роста функции $f(n)$.

Комбинаторика слов

S4.7.

1. Вычислите $T_3(6)$.
2$^!$. Вычислите $T_2(2^n)$ для произвольного n.

S4.8. Найдите сумму значений функции Мёбиуса по тем и только тем делителям числа $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_s^{\alpha_s}$, в каноническое разложение которых входит чётное количество простых множителей.

S4.9. Найдите формулу для числа различных циклических последовательностей длины n в алфавите $\{b_1, \dots, b_r\}$, в которых символ b_i встречается n_i раз ($i = \overline{1, n}$).

S4.10. Постройте двоичную последовательность Де Брёйна порядка 3, начинающуюся с 111.

S4.11. Выпишите 5 символов последовательности Туэ—Морса, начиная с тысячного.

Разбиения натуральных чисел

S5.1. За пересылку бандероли надо уплатить 18 копеек. Сколькими способами можно оплатить бандероль марками стоимостью 4, 6 и 10 копеек, если два способа, отличающихся порядком марок, считаются различными?

S5.2. Сколькими способами можно разменять гривенник на монеты в 1, 2, 3 и 5 копеек?

S5.3. Определим $p_k(n)$ как количество неупорядоченных разбиений n на k слагаемых.

1. Найдите $p_1(n)$ и $p_2(n)$.
2. Найдите $p_3(n)$.

S5.4[!]**.** Докажите, что число упорядоченных разбиений числа n на k слагаемых равно $\binom{n-1}{k-1}$

S5.5. Докажите, что количество неупорядоченных разбиений числа n на слагаемые равно количеству разбиений числа $2n$ на n слагаемых (порядок слагаемых не принимается во внимание).

S5.6[!]**.** Индукцией по n докажите, что при $n > k$ количество всех вхождений натурального числа k в упорядоченные разбиения числа n равно $(n-k+3)\cdot 2^{n-k-2}$.

Степенные ряды и производящие функции

S5.7. Найдите радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{k!}{k^k}x^k$.

S5.8. Найдите радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}p(k)x^k$, где $p(n)$ — количество неупорядоченных разибений n на слагаемые.

S5.9. Найдите первые четыре слагаемых формального ряда $\frac{1-x}{1-x^3-x^4}$.

S5.10. Сверните сумму $\sum\limits_{k=0}^{n}k^2C_n^k\left(\dfrac{2}{3}\right)^k$.

S5.11. Для последовательности $\{a_n\}$, заданной рекуррентным соотношением, найдите производящие функции (в общем виде в зависимости от нескольких начальных членов последовательности):

1. $a_{n+3}+5a_{n+2}+3a_{n+1}+7a_n=0$
2[!]. $a_{n+3}+4a_{n+2}+7a_{n+1}+9a_n=0$
3. $2a_{n+4}+5a_{n+3}+3a_{n+2}+2a_{n+1}+4a_n=0$
4[!]. $a_{n+4}+3a_{n+3}+8a_{n+2}+3a_{n+1}+5a_n=0$

S5.12. Из тождества $(1+x)^p(1+x)^{-k-1}=(1+x)^{p-k-1}$ выведите, что

$$\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^sC_{k+s}^sC_p^{n-s}=C_{p-k-1}^n.$$

S5.13[!]**.** Из равенства $(1-x)^{-n}(1-x^h)^n=(1+x+\ldots+x^{h-1})^n$ выведите, что

$$\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^sC_{m-sh}^{n-1}C_n^s=\begin{cases}0, & m>hn-1,\\ 1, & m=hn-1.\end{cases}$$

(Опечатки в условии нет.)

Начала теории групп

В формулировках задач будем использовать в основном мультипликативные обозначения групповых операций.

S6.1. *Группа симметрий* геометрической фигуры — это множество ортогональных преобразований плоскости (пространства), при которых фигура переходит сама в себя. Если фигура является многоугольником или многогранником, то группе симметрий однозначно соответствует некоторая группа перестановок вершин фигуры.

1. Проверьте, что группа симметрий действительно является группой.
2. Опишите группу симметрий квадрата. Опишите соответствующую группу перестановок вершин квадрата. Рассмотрите два случая: когда квадрат рассматривается как фигура на плоскости, и разрешены только вращения плоскости, и когда квадрат рассмотрен в пространстве.
3[!]. Опишите группу симметрий правильного n-угольника. Как и в предыдущем пункте, рассмотрите два случая. Сколько элементов в полученных группах? Какие у них есть нетривиальные подгруппы?
4. Опишите группу симметрий тетраэдра и куба.

S6.2. Образует ли множество формальных степенных рядов (с действительными коэффициентами) группу относительно сложения? А относительно умножения?

S6.3. Напомним, что *симметрической группой* S_n называется группа всех перестановок на n-элементном множестве. Перестановка σ называется *чётной*, если количество пар $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, таких, что $i < j$ и $\sigma(i) > \sigma(j)$, чётно. Докажите, что множество всех чётных перестановок образует подгруппу в S_n. Она называется *знакопеременной группой* A_n.

S6.4. Элемент b называется *сопряжённым* к элементу a в группе G, если $\exists x \in G$, такой, что $b = x^{-1}ax$. Докажите, что отношение «быть сопряжёнными элементами» рефлексивно, симметрично и транзитивно, т. е. является отношением эквивалентности на G.

S7.1. Подгруппа $H \leqslant G$ называется *нормальной*, если для любого элемента $x \in G$ выполнено $xH = Hx$.

1. Приведите пример нормальной подгруппы в группа $(\mathbb{Z}, +)$ и симметрической группе S_n.
2. Докажите, что если H — нормальная подгруппа группы G, то множество всех смежных классов по H образует группу с операцией $\circ$, в которой операция $\circ$ выполняется так: $(aH) \circ (bH) := (ab)H$.
3$^!$. Докажите обратное п.2 утверждение: если множество смежных классов по H образует группу относительно введённой операции $\circ$, то H является нормальной подгруппой.

S7.2. Построенная в предыдущей задаче группа называется *фактор-группой группы G по подгруппе H* и обозначается G/H.

1. Почему если G конечна, то $|G/H| = \frac{|G|}{|H|}$?
2. Опишите фактор-группу группы $(\mathbb{Z}, +)$ по подгруппе $7\mathbb{Z}$, где $7\mathbb{Z} := \{7k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
3. Опишите фактор-группу группы $(\mathbb{Q}, +)$ по подгруппе $(\mathbb{Z}, +)$.

S7.3$^!$. Пусть $(G, \circ)$ и $(H, \bullet)$ — произвольные группы. Их *прямым произведением* называется множество $\{(g, h) \mid g \in G, h \in H\}$ с операцией, которая парам (g', h') и (g'', h'') сопоставляет пару $(g' \circ g'', h' \bullet h'')$. Докажите, что прямое произведение групп является группой. Эта группа обычно обозначается $G \times H$.

S7.4. Вычислите по модулю 13:

1. $4^6 \cdot 10^4 + 3^{333}$,
2$^!$. $(11^{15} + 15^{11}) \cdot 5^{550}$.

S7.5. *Таблица Кэли* группы G — это таблица, задающая групповую операцию (по строкам и столбцам идут элементы группы, а в клетках таблицы — результат применения операции к соответствующим элементам). Постройте таблицы Кэли для аддитивной группы $\mathbb{Z}_3$ и мультипликативной группы $\mathbb{Z}_5^\times$.

S7.6. Найдите

1. порядок элемента (45276813) в группе S_8,
2. порядок элемента 4 в группе $\mathbb{Z}_7$,
3. порядок элемента 4 в группе $\mathbb{Z}_7^\times$,
4$^!$. порядок элемента (15276843) в группе S_8,
5$^!$. порядок элемента 5 в группе $\mathbb{Z}_7$,
6$^!$. порядок элемента 5 в группе $\mathbb{Z}_7^\times$.

S7.7. Перечислите все подгруппы группы $\mathbb{Z}_6$. Какими элементами эти подгруппы порождаются? Заметьте, что $\mathbb{Z}_2$ и $\mathbb{Z}_3$ не являются подгруппами $\mathbb{Z}_6$, хотя и изоморфны соответствующим подгруппам $\mathbb{Z}_6$.

Многочлены и конечные поля

S8.1. Для каждого из следующих многочленов определите, является ли он неприводимым над соответствующим полем:

1. $x^{66} + 66$ над $\mathbb{Z}_{67}$,
2$^!$. $x^{333} + x^{111} + 2$ над $\mathbb{Z}_3$,
3. $x^3 + x + 1$ над $\mathbb{Z}_2$,
4. $x^3 + x + 1$ над $\mathbb{Z}_3$,
5. $x^4 + x^2 + 1$ над $\mathbb{Z}_2$,
6$^!$. $x^4 + x^3 + x + 2$ над $\mathbb{Z}_3$,
7$^!$. $x^4 + 2$ над $\mathbb{Z}_5$.

S8.2$^!$. Докажите, что в поле $\mathbb{Z}_p/Q$ (где Q — неприводимый над $\mathbb{Z}_p$ многочлен) для любых $a, b \in \mathbb{Z}_p/Q$ справедливо равенство $(a+b)^p = a^p + b^p$.

S8.3. Постройте конечное поле из заданного числа элементов: укажите элементы поля, запишите таблицы сложения и умножения.

1. 4,
2!. 9.

S8.4. Выполните вычисления в конечном поле:

1. $(x+1)\cdot(x^2+1)+x^2 \in \mathbb{Z}_2[x]/(x^3+x+1)$,
2!. $(x^2+1)\cdot(x^2+4x+2)+3x^3+1 \in \mathbb{Z}_5[x]/(x^4+2)$.

S8.5. С помощью алгоритма Евклида найдите наибольший общий делитель многочленов:

1. $3x^2+3,\ 3x^3+4x^2+2x+2 \in \mathbb{Z}_5[x]$,
2!. $x^2+x+1,\ x^3+4x+5 \in \mathbb{Z}_7[x]$.

S8.6. Найдите для заданного элемента поля найдите обратный по умножению:

1. $37 \in \mathbb{Z}_{59}$,
2!. $37 \in \mathbb{Z}_{43}$,
3. $x+1 \in \mathbb{Z}_2[x]/(x^3+x+1)$,
4!. $3x^3+x+2 \in \mathbb{Z}_5[x]/(x^4+2)$.

Основы теории графов

Изоморфизм

Везде далее по умолчанию под «графами» понимаются неориентированные графы без петель и кратных рёбер. Помните, что графы *не предполагаются связными* по умолчанию.

S9.1. Перечислите все попарно неизоморфные

1. графы на четырёх вершинах,
2. связные графы на пяти вершинах с пятью рёбрами,
3!. несвязные графы на пяти вершинах.

В этой задаче нужно выработать какую-нибудь стратегию перебора. В противном случае, велики шансы забыть какой-нибудь граф, либо привести два изоморфных графа. Выберите какой-нибудь параметр (количество рёбер/циклов, длина минимального цикла, количество компонент связности и т. д.), такой, что в зависимости от его значения множество всех графов разбивается на «не очень большое» количество «хорошо обозримых» групп, и в каждой из групп не слишком много графов. Тем самым Вы сводите к минимуму вероятность ошибки, т.к. графы из разных групп заведомо неизоморфны, а внутри одной группы легче отслеживать изоморфизм и полноту.

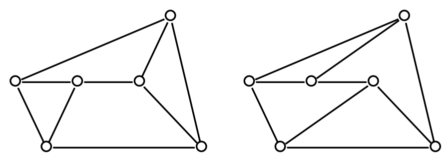
S9.2. Сколько попарно неизоморфных графов, имеющих 8 вершин и 25 рёбер.

S9.3!. Докажите, что если минимальная степень вершин в графе не меньше $\frac{|V|-1}{2}$, то граф связен.

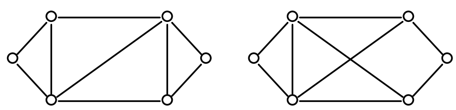
S9.4. Докажите, что в мультиграфе произвольный замкнутый маршрут нечётной длины $\geqslant 3$ содержит простой цикл. Справедливо ли аналогичное утверждение для маршрутов чётной длины?

S9.5. Определите, изоморфны ли графы на рисунках:

1.



2!.



Если Вы хотите доказать, что графы изоморфны, нужно привести конкретный изоморфизм: указать, какая вершина первого графа сопоставляется с какой вершиной второго. А чтобы доказать неизоморфность, нужно подобрать какую-то характеристику, которая должна быть одинаковой у изоморфных графов, и обосновать, что у заданной пары графов она отличается. Выбор такой характеристики — творческая задача, для начала можно попробовать: количество вершин/рёбер/циклов заданной длины, количество вершин заданной степени, наличие какого-то подграфа и т. д.

S9.6. Для произвольных $k, l, m, n \in \mathbb{N}$ найдите количество

1. клик размера k в графе K_n,
2. клик размера k в графе $K_{m,n}$,

3!. независимых множеств размера k в графе K_n,

4!. независимых множеств размера k в графе $K_{m,n}$,

5. подграфов в K_n, изоморфных $K_{k,l}$,

6. подграфов в $K_{m,n}$, изоморфных $K_{k,l}$.

Будьте внимательны: эти задачи простые, но почти все требуют разбора случаев.

S9.7. С помощью графа Де Брёйна постройте двоичную последовательность Де Брёйна порядка 4,

1. начинающуюся с 1011,

2!. заканчивающуюся на 1010.

S9.8. Раскраски вершин графа считаются одинаковыми, если они переходят друг в друга при автоморфизме графа. Применив теорему Редфилда—Пойи, найдите количество различных раскрасок вершин следующих графов в цвета из множества $\{1, \ldots, k\}$:

1. P_n (цепь на n вершинах),

2. дерево с кодом Прюфера $(3, 3, 4, 5, 5)$,

3!. C_n (простой цикл на n вершинах),

4!. дерево с кодом Прюфера $(7, 7, 8, 8, 9, 9, 10, 10)$.

Для каждого графа придётся найти цикловой индекс группы автоморфизмов (см. лекции 8 и 10).

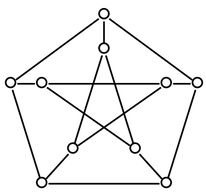
Раскраски, планарность

S10.1. На лекции рассматривался «жадный» алгоритм раскраски графа. Покажите, что качество раскраски, построенной этим алгоритмом, сильно зависит от упорядочения вершин:

1. Покажите, как упорядочить вершины произвольного графа, так, чтобы жадный алгоритм использовал ровно $\chi(G)$ цветов.

2. Для каждого натурального k предъявите двудольный граф G и такое упорядочение его вершин, что раскраска, построенная жадным алгоритмом, будет задействовать не менее k цветов.

S10.2. Граф Петерсена, изображённый на рисунке ниже, является одним из классических объектов теории графов.

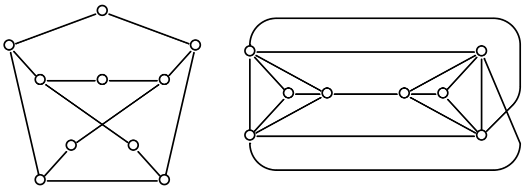


1. Граф Петерсена непланарен — легко заметить, что его можно стянуть к K_5. Докажите непланарность графа Петерсена другим способом, применив утверждение об оценке числа рёбер в планарных графах без циклов малой длины.

2. Найдите в графе Петерсена подграф, стягиваемый к $K_{3,3}$.

3. Докажите, что хроматическое число и хроматический индекс графа Петерсена равны 3 и 4 соответственно.

S10.3. Исследуйте на планарность, найдите хроматическое число и хроматический индекс графов:



1 2! 3!

S11.1. Пусть e — мост в связном графе G, и пусть $|V(G)| \geqslant 3$. Пусть G_1 и G_2 — компоненты, на которые распадается G при удалении e. Докажите, что $\chi(G) = \max\{\chi(G_1),\ \chi(G_2)\}$.

S11.2. Как может измениться хроматическое число графа G, если добавить к графу одно ребро? одну вершину?

S11.3.

1. Пусть даны два графа $G_1 = (V, E_1)$, $G_2 = (V, E_2)$ на одном и том же множестве вершин. Пусть $G = (V, E_1 \cup E_2)$. Докажите, что $\chi(G) \leqslant \chi(G_1)\chi(G_2)$.

2!. Зафиксируем $r_1, r_2 \in \mathbb{N}$. В условиях предыдущего пункта постройте такие G_1, G_2 что $\chi(G_i) = r_i$ и $\chi(G) = r_1 r_2$.

S11.4. Назовём граф $G = (V, E)$ на n вершинах k-критическим, если $\chi(G) = k$, и при этом при удалении любой вершины хроматическое число графа уменьшается. Докажите, что $|E| \geqslant n(k-1)/2$.

S11.5. Задачи на хроматический многочлен:

1. Пусть $G_1, \ldots, G_s$ — компоненты связности графа G. Как вычислить $\chi(G; x)$, зная все $\chi(G_i; x)$?
2. Докажите, что хроматический многочлен любого n-вершинного дерева равен $x(x-1)^{n-1}$.
3$^!$. Докажите, что если $\chi(G; x) = x(x-1)^{|V(G)|-1}$, то G является деревом.
4. m-вершинную цепь за один из концов «прицепили» к одной из вершин n-вершинного графа G. Выразите хроматический многочлен полученного $(m+n-1)$-вершинного графа через хроматический многочлен графа G.
5$^!$. Пусть e — мост в связном графе G. Пусть G_1 и G_2 — графы, на которые распадается G при удалении e. Докажите формулу: $\chi(G; x) = \frac{x-1}{x} \cdot \chi(G_1; x) \cdot \chi(G_2; x)$.
6. Найдите хроматический многочлен n-вершинного простого цикла.

S11.6. Обозначим через $\chi'(G; x)$ количество правильных рёберных раскрасок графа G в цвета из $\{1, \ldots, x\}$. Докажите следующие утверждения:

1$^!$. Функция $\chi'(G; x)$ является многочленом от x.
2$^!$. Старший моном в $\chi'(G; x)$ равен $x^{|E(G)|}$.
3$^!$. Коэффициент при $x^{|E(G)|-1}$ в $\chi'(G; x)$ равен $-\sum_{v \in V(G)} \binom{\deg v}{2}$.

Для этого рассмотрите граф G' — *рёберный граф* графа G. Вершины графа G' соответствуют рёбрам графа G. Пара вершин G' смежна, если соответствующие рёбра графа G имеют общий конец. Остаётся использовать известные с лекции свойства обычного хроматического многочлена.

Теорема Холла

S12.1. Какое минимальное количество ребер можно удалить из графа $K_{n,n}$, чтобы не осталось совершенных паросочетаний?

Гамильтоновы циклы

S12.2. Докажите, что максимальное число попарно непересекающихся по ребрам гамильтоновых циклов в полном графе K_n равно $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$.

S12.3. Пусть $a_1, \ldots, a_k$ — максимальная простая цепь в графе G, причём $k \geqslant 3$ и $\deg a_1 + \deg a_k \geqslant k$. Докажите, что в G есть простой цикл длины k.

Гиперграфы, системы множеств

Системы различных представителей

Пусть $\mathscr{S} = (S_1, \ldots, S_m)$ — семейство множеств (необязательно различных). *Системой различных представителей* для $\mathscr{S}$ называется последовательность $x_1, \ldots, x_m$ *различных* элементов, таких, что $x_i \in S_i$.

S12.4$^!$. Докажите, что у системы $\mathscr{S}$ есть система различных представителей тогда и только тогда, когда для любого $I \subset \{1, \ldots, m\}$ выполнено $\left|\cup_{i \in I} S_i\right| \geqslant |I|$.

S12.5$^!$. Пусть дана совокупность $\mathscr{M} = (M_1, \ldots, M_s)$. Пусть мощность каждого множества совокупности равняется m, а каждый элемент из $\bigcup_{i=1}^{s} M_i$ входит ровно в l множеств M_i. Если $m \geqslant l$, то у совокупности $\mathscr{M}$ есть с. р. п.

S12.6. Пусть A — матрица инцидентности системы из m подмножеств множества $\{1, \ldots, m\}$. Докажите, что $\mathrm{per} A$ суть количество различных с. р. п. для этого набора множеств.

S12.7. Обобщите понятие перманента на неквадратные матрицы, так, чтобы утверждение предыдущей задачи оставалось верным и в случае, когда количество подмножеств меньше m. Можно ли такой обобщённый перманент раскладывать по строке/столбцу?

Системы общих представителей (покрытия)

Пусть $\mathscr{S} = (S_1, \ldots, S_m)$ — семейство множеств (необязательно различных). *Системой общих представителей* для $\mathscr{S}$ называется множество $\{x_1, \ldots, x_t\}$ элементов, таких, что $\forall i \quad S_i \cap \{x_1, \ldots, x_t\} \neq \varnothing$.

S12.8. Обозначим через $\tau(n, m, h) := \max_H \tau(H)$, где максимум берётся по всем h-однородным гиперграфам на n вершинах с m гиперрёбрами. Иными словами, если нам предъявили произвольный гиперграф описанного вида, мы можем гарантировать, что отыщем в нём с. о. п. размера не больше $\tau(n, m, h)$. Докажите соотношения:

1. $\tau(n,m,h) \geqslant \min\left\{m, \left\lfloor \frac{n}{h} \right\rfloor\right\}$,

2!. $\tau(n,m,h) \leqslant n-h+1$.

S12.9. Найдите глубину следующих матриц и установите, находит ли жадный алгоритм оптимальное покрытие для каждой из матриц. Для матриц пп. 3 и 4 найдите также хроматическое число соответствующих гиперграфов.

$$\underset{1}{\begin{pmatrix}0110\\0011\\1001\\1100\end{pmatrix}} \quad \underset{2}{\begin{pmatrix}111000\\100100\\010010\\001001\end{pmatrix}} \quad \underset{3^!}{\begin{pmatrix}11110000001111\\00111100111100\\11000111100110\\11111110000000\\00000001111111\end{pmatrix}} \quad \underset{4}{\begin{pmatrix}1010010\\1001001\\0101010\\0010110\\0100101\end{pmatrix}}$$

S12.10!. Пусть даны 0,1-матрицы A и B. Матрица C получена заменой в матрице B каждой единицы на матрицу A, а каждого нуля — на матрицу из нулей (того же размера, что и A). Докажите, что $\tau(C) \leqslant \tau(A)\tau(B)$.

S12.11. Пусть $l < k$. Положим величину $M(n,k,l)$ равной минимальному количеству таких k-элементных подмножеств множества $\{1,\dots,n\}$, что любое l-элементное подмножество $\{1,\dots,n\}$ целиком содержится хотя бы в одном из них.

1. Найдите $M(n,k,1)$.
2. Докажите, что $M(n,3,2) \lesssim \frac{\ln 3}{6}n^2$. (На самом деле, справедлива асимптотика $M(n,3,2) \sim \frac{n^2}{6}$.)

3!. Докажите, что $M(4n,2n,n) \leqslant \left(\frac{27}{16}+o(1)\right)^n$.

4!. Докажите, что $M(n,k,l) \geqslant \binom{n}{l}/\binom{k}{l}$.

S12.12. Докажите, что если в h-однородном гиперграфе менее 2^{h-1} рёбер, то у него есть правильная раскраска в два цвета.

Аддитивная комбинаторика

Напомним, что если A и B — подмножества абелевой группы, то суммой A и B называется множество

$$A+B := \{a+b \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

Пусть A — произвольное подмножество абелевой группы G. Назовём k-кратной суммой (или просто k-суммой) множества A следующее множество:

$$kA := \underbrace{A+A+\ldots+A}_{k\,\text{раз}}.$$

S13.1. Пусть G — произвольная абелева группа. Докажите, что для любых непустых $A,\, B \subseteq G$ верны следующие неравенства:

1. $|A| \leqslant |A+A| \leqslant \frac{|A|(|A|+1)}{2}$.
2. $\max\{|A|,|B|\} \leqslant |A+B| \leqslant |A||B|$.
3. $|A-B| \leqslant \frac{|A-C||B-C|}{|C|}$ для произвольного непустого подмножества $C \subseteq G$. Это неравенство называется *неравенство треугольника Ружи*.

Подсказка: Для доказательства последнего пункта следует заметить, что для любых заданных $a \in A, b \in B$ выполнено тождество $a-b = (a-c)+(c-b)$ (здесь $c \in C$ — произвольный элемент).

S13.2. Даны произвольные непустые $A,\, B \subseteq G$. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны (т. е. если выполнено одно из них, то выполнены и все остальные):

1. $|A+B| = |A|$,
2. $|A-B| = |A|$,
3. $|A+nB-mB| = |A|$ для хотя бы одной пары натуральных чисел (m,n),
4. $|A+nB-mB| = |A|$ для любых натуральных m и n,

5!. существует подгруппа $H \subseteq G$, такая, что B является подмножеством некоторого смежного класса по H, а A есть объединение смежных классов по этой же подгруппе.

Подсказка: Рассмотрите множество $Sym(A) = \{h \in G : \{h\}+A = A\}$, которое называется ***группой симметрии*** множества A.

S13.3. Даны произвольные непустые $A,\, B \subseteq G$. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны:

1. $|A+B| = |A||B|$,
2. $|A-B| = |A||B|$,

3. $|\{(a_1,a_2,b_1,b_2)\in A\times A\times B\times B : a_1+b_1=a_2+b_2\}|=|A||B|$,
4. $|\{(a_1,a_2,b_1,b_2)\in A\times A\times B\times B : a_1-b_1=a_2-b_2\}|=|A||B|$,
5$^!$. $|A\cap(x-B)|=1$ для любых $x\in A+B$,
6$^!$. $|A\cap(B+y)|=1$ для любых $y\in A-B$,
7$^!$. $(A-A)\cap(B-B)=\{0\}$.

Подсказка: При решении обоснуйте и используйте следующий факт: если A и B таковы, что $|A+B|=|A||B|$, то для любого элемента $z\in A+B$ существует единственная пара $(a,b)\in A\times B$, для которой $z=a+b$.

S13.4$^!$. Не используя теорему Коши—Давенпорта, докажите, что, если для некоторых непустых подмножеств $A,B\subsetneq \subsetneq \mathbb{Z}_p$ выполнено равенство $|A+B|=|A|$, то хотя бы одно из множеств A или B состоит ровно из одного элемента.

Подсказка: Используйте результат задачи 13.2.

S13.5$^!$. Рассмотрим произвольное поле $\mathbb{F}$ и ненулевой полином $P\in\mathbb{F}[x_1,x_2,\ldots,x_n]$ от $n\geqslant 1$ переменных и любое непустое подмножество $S\subset\mathbb{F}$. Выберем элементы $s_1,s_2,\ldots,s_n$ случайно, независимо, равномерно из множества S. Докажите, что

$$\Pr[P(s_1,s_2,\ldots,s_n)=0]\leqslant\frac{\deg P}{|S|}.$$

Подсказка: Используйте метод математической индукции по количеству переменных в многочлене P. Рассмотрите для произвольного $s\in S$ многочлен $Q(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})=P(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},s)$. Это утверждение принадлежит Липтону, ДеМилло, Шварцу и Зиппелю.

S13.6. Рассмотрим произвольное поле $\mathbb{F}$ и ненулевой полином $P\in\mathbb{F}[x_1,\ldots,x_n]$ от $n\geqslant 1$ переменных и непустые подмножества $S_1,S_2,\ldots,S_n\subset F$. Определим полиномы $g_i(x_1,\ldots,x_n)=\prod_{s\in S_i}(x_i-s), 1\leqslant i\leqslant n$. Предположим, что P обнуляется на множестве $S_1\times S_2\times\ldots\times S_n$. Докажите, что существуют полиномы $h_i(x_1,x_2,\ldots,x_n), \deg h_i\leqslant \deg P-\deg g_i$, $1\leqslant i\leqslant n$, такие, что $P=\sum_{i=1}^n h_ig_i$. При помощи этого утверждения получите альтернативное доказательство теоремы Алона.

Подсказка: Проведите индукцию по степени многочлена P. Разделите P на многочлен g_1 с остатком, затем разделите остаток на многочлен g_2 и т.д. В конце останется показать, что остаточный многочлен равен нулю.

S13.7. Рассмотрим произвольное поле $\mathbb{F}$ и ненулевой полином $h\in\mathbb{F}[x_1,\ldots,x_n]$ от $n\geqslant 1$ переменных. Пусть $A_1,A_2,\ldots,A_n\subset\mathbb{F}$ — произвольные подмножества и параметр $K>0$, удовлетворяют условию $\sum_{i=1}^n|A_i|=K+n+\deg h$. Предположим, что многочлен $(x_1+x_2+\ldots+x_n)^K h(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ имеет ненулевой коэффициент при мономе $x_1^{|A_1|-1}x_2^{|A_2|-1}\cdots x_n^{|A_n|-1}$. Тогда

$$|\{a_1+a_2+\ldots+a_n:\ a_i\in A_i, 1\leqslant i\leqslant n, h(a_1,a_2,\ldots,a_n)\neq 0\}|\geqslant K+1.$$

Подсказка: От противного. Обозначим множество в левой части доказываемого неравенства через B. Допустим, что $|B|\leqslant K$. Рассмотрите многочлен $Q(x_1,\ldots,x_n)=h(x_1,\ldots,x_n)\prod_{b\in B}(x_1+x_2+\ldots+x_n-b)$. Он имеет степень $\deg Q=|B|+\deg h\leqslant K+\deg h$ и, по построению, обнуляется на $A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$. Выведите из этого противоречие с теоремой Алона.

S13.8. Для произвольных подмножеств $A,B\subseteq\mathbb{Z}_p$ определим так называемую ***частичную сумму*** A и B следующим образом:

$$A\hat{+}B=\{a+b\mid a\in A,\ b\in B,\ a\neq b\}.$$

Докажите аналог теоремы Коши—Давенпорта для частичных сумм:

$$|A\hat{+}B|\geqslant\min\{|A|+|B|-3,\ p\}.$$

Если $A\neq B$, то это неравенство можно немного улучшить:

$$|A\hat{+}B|\geqslant\min\{|A|+|B|-2,\ p\}.$$

Подсказка: Неравенство можно вывести из предыдущей задачи, применив её результат с многочленом $h(x_1,x_2)= =x_1-x_2$ и параметром $K=|A|+|B|-3$.

Экстремальная, и не только, теория графов

S14.1. Пусть Γ — конечная группа (с мультипликативными обозначениями), и пусть $A\subseteq\Gamma$. *Граф Кэли* для группы Γ, порождённый множеством A — это орграф с множеством вершин Γ и множеством рёбер $\{(v,\ v\cdot a)\mid v\in\Gamma,\ a\in A\}$. Графы Кэли играют важную роль как в комбинаторной теории групп, так и в теории графов.

1[!]. Постройте граф Кэли для симметрической группы S_3, порождённый множеством из одной перестановки $(1 \to 2, 2 \to 1, 3 \to 3)$.

2[!]. Докажите, что граф Кэли — ориентированный граф, в котором для любой вершины v выполнено равенство $d^+(v) = d^-(v) = |A|$.

3[!]. Из предыдущего пункта выведите, что k-регулярные n-вершинные графы существуют для любого чётного k и любого $n > k$.

4. Докажите, что графы Кэли *вершинно-транзитивные*. Это означает, что для любых двух вершин u, v найдётся автоморфизм графа Кэли, который переводит u в v.

5. Пусть граф Кэли порождён одноэлементным множеством $A = \{a\}$. Докажите, что *обхват* графа (т. е. наименьшая длина циклов в графе) равна порядку элемента a в группе.

S14.2. Найдите асимптотику количества рёбер в графе Турана на n вершинах с фиксированным кликовым числом, при $n \to \infty$.

S14.3. Можно рассмотреть обобщение задачи Турана, вместо клик заданного размера запретив другие подграфы. Обозначим через $\mathrm{ex}_H(n)$ максимальное количество рёбер в n-вершинном графе, который не содержит подграфов, изоморфных H. Так, например, $\mathrm{ex}_{K_{m+1}}(n)$ — это в точности число рёбер в графе Турана на n вершинах с кликовым числом m. Докажите следующие соотношения, предполагая в асимптотиках, что $n \to \infty$, а все остальные параметры фиксированы.

1[!]. Если H_1 — подграф H_2, то $\mathrm{ex}_{H_1}(n) \leqslant \mathrm{ex}_{H_2}(n)$.

2[!]. Если $H = H_1 \cup H_2$, где $V(H_1) \cap V(H_2) = \varnothing$, то $\mathrm{ex}_H(n) \geqslant \max\{\mathrm{ex}_{H_1}(n), \mathrm{ex}_{H_2}(n)\}$.

3[!]. $\mathrm{ex}_{P_k}(n) \gtrsim \frac{k-2}{2} \cdot n$, где P_k — цепь на k вершинах.

4. $\mathrm{ex}_{C_{2k+1}}(n) \gtrsim \frac{n^2}{4}$, где C_{2k+1} — цикл на $(2k+1)$ вершинах.

5. $\mathrm{ex}_{K_{1,m}}(n) \sim \frac{m-1}{2} \cdot n$.

Для справки. Знаменитая теорема Эрдёша—Стоуна—Симоновица утверждает, что для любого фиксированного H при $n \to \infty$ выполнено соотношение $\frac{\mathrm{ex}_H(n)}{n^2/2} \sim \frac{\chi(H)-2}{\chi(H)-1}$. То есть, если мы запрещаем графу иметь некоторый фиксированный подграф H, то доля рёбер, которые при этом можно провести, по отношению к числу всевозможных рёбер, определяется хроматическим числом графа H. Удивительно, что хроматическое число возникает в этой задаче! Доказательство теоремы можно прочесть в интернете. (Этой теоремой нельзя пользоваться при доказательстве п. 4.)

S14.4[!]. Докажите, что $\mathrm{ex}_{K_{2,2}}(n) = \mathrm{ex}_{C_4}(n) \lesssim n\sqrt{n}/2$. Для этого можно воспользоваться верхней оценкой чисел Заранкевича. Совсем напрямую не получится (ведь числа Заранкевича определяются для двудольных графов), но можно применить конструкцию, называемую *двойным двудольным покрытием (bipartite double cover)*. Двойным двудольным покрытием графа G называется двудольный граф, доли которого — это две копии множества $V(G)$, и ребро идёт между вершинами u и v, если прообразы этих вершин были соединены в графе G.

Теория Рамсея

S15.1. Напомним, что числом Рамсея $R(s,t)$ называется такое минимальное N, что в любой раскраске рёбер графа K_N в два цвета (скажем, в красный и синий) найдётся красная клика на s вершинах или синяя клика на t вершинах (возможно, что и обе одновременно). Теорема Рамсея утверждает, что указанное N всегда существует. Докажите аналогичное утверждение для трёх цветов.

1. Докажите равенства $R(s_1,s_2,1) = 1$ и $R(s_1,s_2,2) = R(s_1,s_2)$.

2. Покажите, что если $R(s_1,s_2,s_3)$ — трёхцветное число Рамсея, то $R(s_1,s_2,s_3) \leqslant R(s_1, R(s_2,s_3))$.

3[!]. Докажите, что $R(s_1,s_2,s_3) \leqslant R(s_1-1,s_2,s_3) + R(s_1,s_2-1,s_3) + R(s_1,s_2,s_3-1)$.

4. Установите, какой из предыдущих двух пунктов даёт лушую асимптотическую оценку для чисел $R(s,s,s)$ при $s \to \infty$.

S15.2. Докажите, что если оба числа $R(s-1,t)$ и $R(s,t-1)$ чётные, то $R(s,t) \leqslant R(s-1,t) + R(s,t-1) - 1$, — то есть в этом случае доказанную на лекции оценку можно улучшить на единицу.

S15.3. Докажите соотношения:

1. $R(3,3) = 6$,

2[!]. $R(3,4) = 9$,

3[!]. $R(4,4) \leqslant 18$.

S15.4. На лекции с помощью вероятностного метода была доказана оценка $R(s,s) \gtrsim \frac{1}{e\sqrt{2}} \cdot s \cdot (\sqrt{2})^s$. Вам предлагается доказать оценку в $\sqrt{2}$ раз лучше.

1[!]. Покажите, что если M — матожидание количества s-вершинных клик/независимых множеств в случайном n-вершинном графе, то $R(s,s) > n - M$.

2[!]. Докажите, что если строить граф на n вершинах, случайно проводя/не проводя каждое ребро с вероятностью $1/2$, то матожидание числа множеств размера s, на которых образуется клика или независимое множество, равно $\binom{n}{s} \cdot 2^{1-\binom{s}{2}}$.

3[!]. Убедитесь, что при $n \sim \frac{1}{e} \cdot s \cdot (\sqrt{2})^s$ выполнется неравенство $M \lesssim \frac{n}{s}$. Тогда из результатов пп. 1 и 2 будет следовать, что $R(n,s) \gtrsim n - \frac{n}{s} \sim n$. Нетрудно видеть, что это даёт нужную оценку чисел Рамсея.

S16.1. В доказательстве нижней оценки чисел Рамсея строится «случайный граф» в результате простой процедуры независимого выбора для каждого ребра: добавлять его в граф либо не добавлять. Пусть вероятность добавления ребра равна $\frac{1}{2}$. Скажем, что случайный граф *почти наверное обладает каким-либо свойством*, если вероятность того, что граф этим свойством обладает, стремится к единице, когда число вершин n стремится к бесконечности. Докажите следующее:

1. случайный граф почти наверное связен,
2. диаметр случайного графа почти наверное равен 2,
3[!]. в случайном графе почти наверное нет клики размера $100 \ln n$,
4[!]. хроматическое число случайного графа почти наверное не меньше $\frac{n}{100 \ln n}$,
5. каким бы ни был *фиксированный* граф H, случайный граф почти наверное содержит порождённый подграф, изоморфный H.

S16.2. Верно ли, что если случайный граф почти наверное обладает свойством P_1 и почти наверное обладает свойством P_2, то он почти наверное обладает одновременно конъюнкцией этих свойств?

S16.3[!]. Игральная кость брошена два раза. Пусть X_1, X_2 — количества очков, выпавших при этих испытаниях. Рассмотрим события (символ «$|$» здесь означает «делит»):

$$A_1 = \{2|X_1,\, 3|X_2\},\ A_2 = \{3|X_1,\, 2|X_2\},\ A_3 = \{X_2|X_1\},$$
$$A_4 = \{X_1|X_2\},\ A_5 = \{2|(X_1+X_2)\},\ A_6 = \{3|(X_1+X_2)\}.$$

Приведите пример двух неизоморфных друг другу орграфов зависимостей для множества событий $A_1, \ldots, A_6$.

Лемма Ловаса

S16.4. Напомним определения. Гиперграф называется k-*равномерным* (или k-*однородным*), если каждое ребро имеет мощность k. Гиперграф называется k-*регулярным*, если каждая вершина содержится ровно в k рёбрах. Раскраска вершин гиперграфа *правильная*, если никакое ребро в ней не одноцветно. Докажите, что при $k \geqslant 10$ вершины любой k-регулярный k-равномерный гиперграф можно раскрасить правильно в два цвета.

S16.5. Пусть есть три вида событий: $A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_m$ и $C_1, \ldots, C_m$. Пусть на каждое событие вида A могут влиять не больше n_{AB} событий вида B и не более n_{AC} событий вида C. Аналогично введём величины $n_{BA}, n_{BC}, n_{CA}, n_{CB}$. Убедитесь, что для выполнения неравенства

$$\Pr\left[\bigcap_i (\overline{A_i} \cap \overline{B_i} \cap \overline{C_i})\right] > 0$$

достаточно, чтобы нашлись числа $a, b, c \in (0,1)$, такие, что $\Pr[A_i] \leqslant a(1-b)^{n_{AB}}(1-c)^{n_{AC}}$, $\Pr[B_i] \leqslant b(1-a)^{n_{BA}}(1-c)^{n_{BC}}$ и $\Pr[C_i] \leqslant c(1-a)^{n_{CA}}(1-b)^{n_{CB}}$. Заметьте, что это частный случай леммы Ловаса.

S16.6. Классическая *теорема Ван дер Вардена* утверждает, что для любых k, r существует такое число N, что как бы ни были покрашены числа $\{1,2,3,\ldots,N\}$ в r цветов, среди них можно будет указать k чисел одного цвета, образующих арифметическую прогрессию длины k. Минимальное такое число N называется числом Ван дер Вардена и обозначается $W(k,r)$. Докажите, что $W(k,2) \geqslant \frac{1}{6} \cdot \frac{2^k}{k}$.

S16.7[!]. *Литералом* называется логическая переменная либо её отрицание. *Конъюнктивной нормальной формой* (КНФ) называют любую конъюнкцию нескольких дизъюнкций литералов. Пример КНФ: $x_1(\overline{x_2} \vee \overline{x_3})(x_3 \vee \overline{x_4})$. Одна из стандартных задач, изучаемых в теории сложности, состоит в том, чтобы для заданной КНФ найти набор значений переменных, на котором она обращается в единицу, либо установить отсутствие такого набора. Если такой набор существует, то КНФ называется выполнимой, а иначе — невыполнимой. Докажите, что выполнимой является любая КНФ, в каждой дизъюнкции которой ровно k литералов, и каждая дизъюнкция имеет общие переменные не более чем с 2^{k-2} другими дизъюнкциями.

S16.8[!]. Пусть каждой вершин простого графа G сопоставлен «список допустимых цветов» размера $10d$. Пусть $\Delta(G) \leqslant d$. Докажите, что можно так раскрасить вершины графа (каждую вершину в один из допустимых для неё цветов), так, чтобы смежные вершины получили разные цвета (то есть раскраска является правильной в стандартном понимании).

Несколько задач из комбинаторной геометрии

В следующих четырёх задачах поможет нижняя оценка на число скрещиваний в графе с заданным количеством вершин и рёбер.

S17.1. Докажите, что при $\delta \geqslant 8$ число скрещиваний у графа на n вершинах с минимальной степенью вершин δ не меньше $(\delta/8)^3 n$.

S17.2. Пусть на плоскости заданы l прямых, и n точек. Докажите, что число инциденций (то есть пар вида (прямая, точка на прямой)) в полученной конфигурации не превосходит $c \cdot ((nl)^{2/3} + n + l)$, где c — некоторая абсолютная константа. Это утверждение называется теоремой Семереди—Троттера.

1. Рассмотрите граф, в котором вершины соответствуют точкам конфигурации, и две вершины соединены ребром, если точки лежат на какой-либо прямой рядом (не разделены другой точкой). Пусть m — число рёбер в этом графе. Покажите, что число инциденций не превосходит $(m+l)$.
2. Покажите, что число скрещиваний построенного графа не превосходит l^2.
3. Применив теорему о числе скрещиваний, завершите доказательство теоремы Семереди—Троттера.

S17.3$^!$. Пусть даны n точек плоскости. Пусть $2 \leqslant k \leqslant \sqrt{n}$. Докажите, что число прямых, каждая из которых содержит по крайней мере k из этих точек, не превосходит cn^2/k^3. Это утверждение также принадлежит Семереди и Троттеру.

S17.4. Докажите теорему Спенсера—Семереди—Троттера: для любых n точек плоскости количество пар точек, находящихся на расстоянии 1, не превосходит $cn^{4/3}$.

1. Рассмотрите граф, в котором вершины соответствуют точкам, а рёбра обпределяются следующим образом. Нарисуем окружности единичного радиуса с центрами в точках. Некоторые из точек попадут на окружности с центрами в других точках (как раз если между точками было единичное расстояние). Оставим лишь те окружности, на которые попало не менее трёх точек. Соединим пару вершин графа ребром, если соответствующие точки попадают на какую-либо из окружностей друг за другом (не разделены третьей точкой). Покажите, что число скрещиваний полученного графа не превосходит $2n^2$.
2. Пусть в полученном графе m рёбер. Покажите, что число пар точек на единичном расстоянии не превосходит $(m + O(n))$, и завершите доказательство теоремы, применив теорему о числе скрещиваний.

S17.5. Используя теорему Семереди—Троттера, докажите следующий факт. Существует такая константа $\gamma > 0$, что $\max\{|A+A|, |A\cdot A|\} \geqslant \gamma \cdot |A|^{5/4}$ для любого конечного множества $A \subset \mathbb{R}$.

1. Рассмотрим семейство прямых $\mathscr{L}$ на плоскости, задаваемых уравнениями вида $y = a'x - a'a''$, где $a', a'' \in A$. Рассмотрим множество $\mathscr{P}$ точек вида (b, c), где $b \in A+A$ и $c \in A \cdot A$. Каковы мощности семейств $\mathscr{L}$ и $\mathscr{P}$?
2. Убедитесь, что каждая прямая из $\mathscr{L}$ содержит по крайней мере $|A|$ точек из $\mathscr{P}$. Это значит, что общее количество инциденций между прямыми из $\mathscr{L}$ и точками из $\mathscr{P}$ не меньше чем $|A|^3$.
3. Запишите оценку общего количества инциденций между прямыми из $\mathscr{L}$ и точками из $\mathscr{P}$, даваемую теоремой Семереди—Троттера.
4. Сравните оценки предыдущих двух пунктов и выведите из них требуемой неравенство.

S17.6$^!$. Пусть в круге единичного радиуса разбросаны n точек. Докажите, что число пар этих точек, находящихся друг от друга на расстоянии $\leqslant \sqrt{2}$, не меньше чем $\frac{n^2-3n}{6}$. Для этого рассмотрите граф, в котором вершины соответствуют точкам, и пара вершин смежна, если расстояние между точками не больше $\sqrt{2}$. Покажите, что число независимости такого графа мало и воспользуйтесь теоремой Турана.

Частично упорядоченные множества. Булев куб.

S17.7. Пусть $A_1, \ldots, A_k \in 2^{\{1,2,\ldots,n\}}$ и $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_k$. Докажите, что количество способов, которыми можно дополнить $A_1, \ldots, A_k$ до максимальной цепи в булеане, равно $|A_1|!(n - |A_k|!) \cdot \prod_{i=2}^{k} (|A_i| - |A_{i-1}|)!$.

S17.8. Линейным упорядочением ч. у. м. $(S, \preceq)$ называется ч. у. м. $(S, \preceq')$, в котором любая пара элементов сравнимы и $a \preceq b$ влечёт $a \preceq' b$. Докажите, что булеан $2^{\{1,\ldots,n\}}$ можно линейно упорядочить не менее чем $\prod_{k=0}^{n} \binom{n}{k}!$ способами. Асимптотически это не меньше, чем $e^{(1-o(1))n^2/2}$.

S17.9.

1. Сколько существует неизоморфных трёхэлементных ч. у. м.?
2[!]. Тот же вопрос для четырёхэлементных ч. у. м.
3[!]. Докажите, что количество неизоморфных ч. у. м. мощности n асимптотически не меньше, чем $2^{\frac{n^2}{4}(1-o(1))}$. Для этого можно, например, оценить снизу число неизоморфных двудольных графов.

S17.10. Докажите, что из любой числовой последовательности длины $(nm+1)$ можно выделить неубывающую подпоследовательность длины $(m+1)$ или невозрастающую подпоследовательность длины $(n+1)$. Для этого рассмотрите специальное частично упорядоченное множество и используйте теорему о разложении на цепи и антицепи.

S17.11. Докажите, что если $A_1, \ldots, A_m$ — антицепь в булеане $2^{\{1,\ldots,n\}}$, и $\forall i\, |A_i| \leqslant k$, то $m \leqslant \binom{n}{k}$. Приведите пример антицепи размера в точности $\binom{n}{k}$.

Системы множеств со специальными свойствами

S18.1. Подмножество рёбер гиперграфа $S_1, \ldots, S_m$ называется *подсолнухом (sunflower)* с m лепестками, если существует такое (возможно, пустое) множество Y, что $\forall i, j\, S_i \cap S_j = Y$. Докажите, что если в k-однородном гиперграфе строго больше чем $k!(m-1)^k$ рёбер, то в нём найдётся подсолнух с m лепестками. Примените индукцию по k.

1. Случай $k = 1$ тривиален. Далее можно считать, что $k \geqslant 2$.
2. Пусть $A_1, \ldots, A_t$ — максимальное подмножество попарно непересекающихся рёбер гиперграфа. Если $t \geqslant m$, то искомый подсолнух у нас есть. Пусть далее $t < m$.
3. Рассмотрите множество $B := \bigcup_i A_i$. Оценив мощность B и заметив, что B пересекается с любым ребром гиперграфа, докажите, что найдётся элемент $x \in B$, содержащийся более чем в $(k-1)!(m-1)^{k-1}$ рёбрах гиперграфа.
4. Примените предположение индукции к гиперграфу $E' := \{e \setminus \{x\} \mid e \in E,\, e \ni x\}$.

S18.2. Докажите *лемму Гаспаряна*: если $X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_m \subseteq \{1, \ldots, n\}$, такие, что $|X_i \cap Y_j| = 1 - \delta_{ij}$, то $m \leqslant n$. (Здесь через δ_{ij} обозначена дельта Кронекера.) Для этого рассмотрите матрицы M_X и M_Y — $(m \times n)$-матрицы инцидентности семейств $X_1, \ldots, X_m$ и $Y_1, \ldots, Y_m$. Рассмотрите произведение $M_X(M_Y^T)$, и заметьте, что полученная матрица невырождена.

S18.3. (v, k, λ)*-дизайном* называется k-однородный гиперграф на v вершинах, в котором каждая пара вершин входит одновременно ровно в λ рёбер. Рёбра такого гиперграфа часто называются *блоками*, а сам граф — *блок-дизайном*. Докажите, что в любом (v, k, λ)-дизайне каждая вершина принадлежит ровно r блокам, где r удовлетворяет следующим соотношениям:

1. $r(k-1) = \lambda(v-1)$. Для этого зафиксируйте любую вершину w и посчитайте двумя способами количество пар вида $(x,\, e)$, в которых $\{w, x\} \subseteq e \in E$ и $x \neq w$. Через E обозначено множество рёбер гиперграфа.
2[!]. $|E| \cdot k = vr$. Для этого посчитайте двумя способами количество пар вида $(x,\, e)$, в которых $x \in e \in E$.

S18.4[!]. На лекциях, в доказательстве нижней оценки чисел Заранкевича рассматривалась матрица, которая строилась на основе алгебраической конструкции. Если посмотреть на эту матрицу, как на матрицу инцидентности гиперграфа (блок-дизайна), то каковы параметры $v,\ k,\ \lambda$ у этого дизайна?

Семейство множеств $\mathscr{F}$ называется *наследственным*, если для любого $A \in \mathscr{F}$ и любого $B \subset A$ выполнено $B \in \mathscr{F}$. Наследственными являются, например, семейство всех независимых множеств графа, семейство линейно независимых множеств столбцов/строк матрицы и т. д.

S18.5. Докажите, что если $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2 \subset 2^{\{1,\ldots,n\}}$ — наследственные семейства, то $|\mathscr{F}_1 \cap \mathscr{F}_2| \geqslant \frac{|\mathscr{F}_1| \cdot |\mathscr{F}_2|}{2^n}$. Это утверждение называется теоремой Клейтмана. Доказательство можно провести индукцией по n.

Размерность Вапника—Червоненкиса

S19.1. Найдите VC-размерность следующих конечных семейств:

1. $\{\{1,2,3\}, \{4,5,6\}, \{1,2,4\}, \{1,2,5\}, \{2,3,6\}, \{3,4,5\}, \{3,4,6\}, \{2,4,5,6\}\}$,
2[!]. $\{\{1,2,3\}, \{3,4,5\}, \{1,2,4\}, \{1,2,5\}, \{2,4,5\}, \{2,3,5\}, \{2,6,7\}, \{3,4,6,7\}\}$.

S19.2. Установите, конечна или бесконечна VC-размерность следующих семейств множеств:

1. $\{\{1, \ldots, k\} \mid k \in \mathbb{N}\}$,
2[!]. $\{\{k,\, k+1,\, k+2,\, \ldots\} \mid k \in \mathbb{N}\}$,
3. $\{\{k,\, 2k,\, 3k,\, \ldots\} \mid k \in \mathbb{N}\}$,
4[!]. $\{\{k,\, k^2,\, k^3,\, \ldots\} \mid k \in \mathbb{N}\}$,

5!. $\{\{k_1k_2, 2k_1k_2, 3k_1k_2, \ldots\} \mid k_1, k_2 \in \mathbb{N}\}$.

S19.3. Пусть $\mathscr{F}$ — семейство с VC-размерностью d, такое, что мощность любого множества из $\mathscr{F}$ не превосходит r. Докажите, что

1. найдутся такие $A, B \in \mathscr{F}$, для которых $|A \cap B| \leqslant r - d$,
2!. найдутся такие $A, B \in \mathscr{F}$, для которых $|A \cap B| \geqslant d - 1$.

S19.4. Пусть $\mathscr{F} \subset 2^{\{1,\ldots,n\}}$ и $|\mathscr{F}| = n$. Докажите, что для любого $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ найдётся множество A, такое, что $|A| = k$ и $|F|_A| > k$. Можно использовать индукцию по k. Отметим, что при $k = n - 1$ это утверждение называется теоремой Бонди (Bondy).

S19.5. Пусть $\mathscr{F} \subset 2^{\{1,\ldots,n\}}$ — семейство с VC-размерностью d. Докажите, что существуют наследственные семейства $\mathscr{F}', \mathscr{F}'' \subset 2^{\{1,\ldots,n\}}$, имеющие VC-размерность d, и такие, что

1. $|\mathscr{F}'| \leqslant |\mathscr{F}|$,
2. $|\mathscr{F}''| \geqslant |\mathscr{F}|$.

Задачи для повторения

S20.1. Пусть $\mathscr{F} \subset 2^{\{1,\ldots,10\}}$, и пусть VC-размерность $\mathscr{F}$ равна 5. Какова максимальная мощность $\mathscr{F}$? Приведите пример совокупности максимально возможной мощности.

S20.2. Пусть множество точек P и множество прямых L таковы, что $|P| = |L| = 10^{12}$ и $I(P, L) = 2 \cdot 10^{16}$. Докажите, что среди этих множеств можно выбрать по меньшей мере 10^4 точек, через каждую из которых проходят не менее 10^4 прямых. Докажите также, что не меньше 10^4 прямых, на каждой из которых находится не менее 10^4 точек.

S20.3. Рассмотрим ч. у. м. с элементами $\{(n, (-2)^n) : n = 1, 2, \ldots, 10001\}$, в котором отношение порядка вводится так: $(n, (-2)^n) \preceq (m, (-2)^m)$ тогда и только тогда, когда одновременно $n \leqslant m$ и $(-2)^n \leqslant (-2)^m$. На какое минимальное число цепей можно разложить это ч. у. м.?

S20.4. Пусть P — подполе конечного поля $\mathbb{F}$. Докажите, что для произвольных элементов $c, d \in \mathbb{F}$ множество $A = c + dP := \{c + dx : x \in P\}$ удовлетворяет одновременно равенствам $|A + A| = |A|$, $|A \cdot A| = |A|$ тогда и только тогда, когда $c \in dP := \{dx : x \in P\}$.

S20.5. Постройте пример 3-однородного гиперграфа на 16 вершинах, в котором не меньше 105 рёбер, и у любой пары рёбер есть общая вершина.