

Вопросы для самоконтроля по первой лекции

Вопрос 1. Что такое полиномиальный коэффициент?

Вопрос 2. Сколько 3-сочетаний с повторениями можно выбрать из десятиэлементного множества?

Вопрос 3. Расположите в порядке возрастания числа A_7^2 , \overline{A}_7^2 , C_7^2 , \overline{C}_7^2 .

Вопрос 4. Какие из чисел A_7^3 , \overline{A}_7^3 , C_7^3 , \overline{C}_7^3 , $\{3\}$ являются ответами на следующие вопросы:

- a) Сколькими способами можно выдать комплект медалей трём из семи спортсменов?
- b) Сколькими способами студент может выбрать три экзаменационных задачи из семи?
- c) Сколькими способами семь студентов могут разбиться на три группы по изучению английского языка?
- d) Сколько различных трёхзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 7, 8, 9?
- e) Сколькими способами студент может вытянуть билеты на трёх пересдачах по одному и тому же предмету, если всего имеется семь различных экзаменационных билетов?

Вопросы для самоконтроля по второй лекции

Вопрос 5. Во множестве A пять элементов, а во множестве B семь элементов. Чему равно $|A \cup B|$, если $|A \cap B| = 2$?

Вопрос 6. Пусть A — множество всех чётных чисел, не больших ста. Найдите $\mathbb{1}_A(5)$, $\mathbb{1}_A(76)$, $\mathbb{1}_A(510)$?

Вопрос 7. Пусть объект x принадлежит ровно пяти из множеств A_1, A_2, \dots, A_{10} . Чему равно произведение $\prod_{k=1}^7 \mathbb{1}_A(x)$?

Вопрос 8. Вспомнив свойства симметричности и унимодальности биномиальных коэффициентов, а также определения комбинаторных чисел, расставьте в порядке возрастания числа: $\binom{1000}{450}$, $\binom{1000}{670}$, $\overline{A}_{1000}^{450}$, $\overline{C}_{1000}^{450}$.

Вопросы для самоконтроля по третьей лекции

Вопрос 9. Сколько рёбер в графе K_n ? Какой эксцентриситет вершин у этого графа? Какой у него диаметр? Какое у него кликовое число и число независимости?

Вопрос 10. Какими альтернативными способами можно определить класс деревьев, кроме «связные графы без циклов»?

Вопрос 11. Сколько рёбер в дереве на 2013 вершинах?

Вопрос 12. Может ли в дереве на 2013 вершинах найтись независимое множество на 2012 вершинах?

Вопрос 13. Может ли полный двудольный граф быть деревом?

Вопросы для самоконтроля по четвёртой лекции

Вопрос 14. Чему равны хроматическое число и хроматический индекс цепи на 11 вершинах? Тот же вопрос для цикла на 11 вершинах. Чему равно хроматическое число произвольного дерева?

Вопрос 15. В графе, у которого степень всех вершин не превосходит 3, есть цикл длины 2013. Чему равен хроматический индекс этого графа?

Вопрос 16. В графе на 150 вершинах нет независимых множеств размера 11. Почему можно утверждать, что такой граф нельзя правильно раскрасить менее чем пятнадцатью цветами?

Вопрос 17. Приведите пример укладки планарного графа, для которой *не справедлива* формула Эйлера.

Вопрос 18. Бывают ли графы, которые можно уложить на плоскости, но нельзя на сфере?

Вопрос 19. Можно ли уложить на плоскости граф со 100 вершинами и 300 рёбрами?

Вопросы для самоконтроля по пятой лекции

Вопрос 20. Приведите пример планарного графа, хроматическое число которого равно 4. Верно ли, что у любого планарного графа хроматическое число не больше четырёх?

Вопрос 21. Наличие вершин какой степени можно гарантировать в планарном графе?

Вопрос 22. Сформулируйте теорему Холла.

Вопрос 23. Почему из теоремы Кёнига о хроматическом индексе следует, что в любом двудольном регулярном графе есть совершенное паросочетание?

Вопросы для самоконтроля по шестой лекции

Вопрос 24. Где в доказательстве корректности алгоритма Флёри используется лемма об отсутствии мостов в связных графах с чётными степенями вершин?

Вопрос 25. Приведите пример графа, в котором есть гамильтонов цикл, но который не удовлетворяет условиям Оре.

Вопрос 26. Обязательно ли в 50-регулярном графе на 100 вершинах есть гамильтонов цикл?

Вопрос 27. Сколько вершин в графе Де Брёйна, по которому строится универсальная последовательность Де Брёйна порядка 2013?

Вопрос 28. Как устроен граф на 10 вершинах с максимальным числом рёбер, в котором нет клик размера 4?

Вопросы для самоконтроля по седьмой лекции

Вопрос 29. В графе на 10 вершинах нет клик размера 5. Какое максимальное число рёбер может быть у такого графа?

Вопрос 30. Как можно из теоремы Турана получить оценку *минимального* числа рёбер в графе без *независимых множеств* заданного размера?

Вопрос 31. Сформулируйте теорему Эрдёша—Стоуна—Симоновица.

Вопрос 32. Что такое правильная раскраска гиперграфа?

Вопрос 33. Что такое вершинное покрытие гиперграфа, как ещё оно называется? Что такое глубина матрицы?

Вопрос 34. Приведите верхнюю оценку мощности «жадного» покрытия матрицы (с нижним ограничением на число единиц в столбце). Переформулируйте эту теорему в терминах покрытий гиперграфов.

Вопрос 35. На лекции строится матрица, на которой жадный алгоритм работает «очень неоптимально». Сколько всего единиц в этой матрице (при каждом a)?

Вопрос 36. Что такое перманент?

Вопросы для самоконтроля по восьмой лекции

Вопрос 37. Различные или одинаковые циклические слова соответствуют словам $aabba$ и $baaab$?

Вопрос 38. Пусть μ — функция Мёбиуса. Найдите значения $\mu(1)$, $\mu(1000)$, $\mu(1001)$.

Вопрос 39. Почему $\sum_{k=1}^n \mu(k) \leq n$?

Вопрос 40. Как вычислить количество неупорядоченных разбиений числа 50?

Вопрос 41. Сколько упорядоченных разбиений числа 5?

Вопрос 42. Постройте диаграмму разбиения $13 = 5 + 3 + 2 + 2 + 1$. Постройте диаграмму, двойственную к предыдущей. Какому разбиению она соответствует?

Вопрос 43. Пусть $p_{\text{различн}}(N)$ обозначает количество неупорядоченных разбиений числа N на различные слагаемые. Почему из теоремы Эйлера о разбиениях следует, что $p_{\text{различн}}(1001)$ чётно?

Вопросы для самоконтроля по девятой лекции

Вопрос 44. Какие из следующих функций растут линейно по n ? Какие полилогарифмически? Какие полиномиально? Какие экспоненциально? Какие сверхэкспоненциально? Какие квазилинейно?

a) 2^{n^2}

b) $n!$

c) $\ln n!$

d) $\binom{n}{43}$

e) $\left(\sqrt[3]{n}\right)^n$

f) $\log_2 n + \sqrt{n}$

g) $\log_7 \sqrt{n}$

h) $e^{\log_5 n}$

Вопрос 45. Для каких из следующих функций f , g можно написать, что $f = O(g)$ при $n \rightarrow \infty$? Для каких пар функций $f = o(g)$? Для каких пар $f = \Omega(g)$? Для каких пар $f = \Theta(g)$?

a) $f(n) = n!$, $g(n) = 2^{n^2}$

b) $f(n) = \log_2 n$, $g(n) = \log_3 n$

c) $f(n) = (\ln n)^2$, $g(n) = \ln \ln n$

d) $f(n) = n^3 + n^2 + 1$, $g(n) = 18n^2 + 3n^3 + \ln n$

e) $f(n) = \ln \binom{3n}{n}$, $g(n) = 15n$

f) $f(n) = \ln \binom{3n}{n}$, $g(n) = \binom{4n}{n}$

Вопросы для самоконтроля по десятой лекции

Вопрос 46. Какие автоморфизмы есть у графа K_n , у цепи на n вершинах, у графа $K_{n,n}$?

Вопрос 47. Образует ли группу относительно сложения множество всех нечётных чисел? А множество чётных чисел?

Вопрос 48. Этот вопрос использует мультипликативные обозначения. Пусть G — группа, и $a, b \in G$. Убедитесь, что $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

Вопрос 49. Чему равна композиция перестановок $1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 5, 5 \rightarrow 3$ и $1 \rightarrow 5, 2 \rightarrow 4, 3 \rightarrow 1, 4 \rightarrow 3, 5 \rightarrow 2$? Запишите перестановки, обратные к данным.

Вопросы для самоконтроля по одиннадцатой лекции

Вопрос 50. Сколько элементов в группах \mathbb{Z}_{12} и \mathbb{Z}_{12}^\times ?

Вопрос 51. Что такое порядок элемента?

Вопрос 52. Что такое циклическая группа?

Вопрос 53. Найдите $\phi(15)$.

Вопрос 54. Почему остаток от деления 5^{16} на 17 равен единице?

Вопрос 55. Придумайте какую-нибудь группу порядка 120. Наличие подгрупп каких порядков в ней можно утверждать, исходя из теоремы Силова? Почему у этой группы не может быть подгрупп порядка 7?

Вопрос 56. Опишите смежный класс элемента 2012 в группе $(\mathbb{Z}, +)$ по подгруппе $2\mathbb{Z}$. Через $2\mathbb{Z}$ обозначена подгруппа всех чётных чисел.

Вопросы для самоконтроля по двенадцатой лекции

Вопрос 57. Что такое поле?

Вопрос 58. Чему равен остаток от деления многочлена $x^4 + 7x + 1$ на многочлен $x^2 + 5$? Многочлены рассматриваются как элементы множества $\mathbb{Z}_9[x]$.

Вопрос 59. Что такое неприводимый многочлен? Почему многочлен $x^{28} + 28$ не является неприводимым над \mathbb{Z}_{29} ?

Вопрос 60. Что такое нормированный многочлен? Сколько нормированных многочленов степени 4, неприводимых над \mathbb{Z}_7 ?

Вопрос 61. Пользуясь малой теоремой Ферма, найдите обратный по умножению элемент к 5 в поле \mathbb{Z}_{11} .

Вопросы для самоконтроля по тринадцатой лекции

Вопрос 62. Найдите количество циклов в перестановках $1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 5, 5 \rightarrow 3$ и $1 \rightarrow 5, 2 \rightarrow 4, 3 \rightarrow 1, 4 \rightarrow 3, 5 \rightarrow 2$.

Вопрос 63. С помощью теоремы Редфилда—Пойи найдите количество неэквивалентных раскрасок вершин квадрата в красный, синий и зелёный цвета. Раскраски считаются эквивалентными, если существует поворот *трёхмерного* пространства, совмещающий их.

Вопросы для самоконтроля по лекции «Рекуррентные соотношения»

Вопрос 64. Почему сразу можно заключить, что определитель приведённой ниже матрицы отличен от нуля?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 25 & 9 \\ 1 & 8 & 125 & 27 \end{pmatrix}$$

Вопрос 65. Какой характеристический многочлен у рекуррентного соотношения $a_{n+2} - a_{n+3} + 4a_{n-1} = 0$?

Вопрос 66. Как определяется последовательность чисел Фибоначчи?

Вопросы для самоконтроля по лекции «Производящие функции»

Вопрос 67. Какая производящая функция у последовательности $1, 1, \dots, 1, \dots$? Чему равен радиус сходимости соответствующего ряда?

Вопрос 68. Выпишите четыре первых члена ряда для $(1+x)^{1/3}$ пользуясь обобщённой формулой бинома Ньютона.

Вопрос 69. Чему равен четвёртый член в последовательности чисел Каталана?

Вопросы для самоконтроля по лекции «Теоремы о пересечении множеств»

Вопрос 70. Сформулируйте теорему Эрдёша—Ко—Радо.

Вопрос 71. Как устроено семейство множеств (гиперграф), на котором достигается оптимум в теореме Альсведе—Хачатряна?

Вопрос 72. Сформулируйте теорему Фишера. Каким методом эта теорема доказывается?

Вопросы для самоконтроля по теме «Теорема Рамсея. Числа Рамсея.»

Вопрос 73. Что такое числа Рамсея? Чему равно $R(s, 2)$?

Вопрос 74. Чему равна вероятность того, что в случайном графе на n вершинах, в котором каждое ребро проводится с вероятностью $\frac{1}{2}$, появится клика на фиксированном подмножестве из k вершин?

Вопрос 75. Как асимптотически соотносятся между собой нижние оценки диагональных чисел Рамсея, полученные вероятностным (неконструктивным) и алгебраическим (конструктивным) подходами? Равны по порядку? Логарифмы равны по порядку?

Вопросы для самоконтроля по теме «Проблема Заранкевича»

Вопрос 76. Что такое постулат Бертрана? Как его можно асимптотически усилить?

Вопрос 77. Что такое $Z_{a,b}(m, n)$?

Вопрос 78. Выпишите верхнюю оценку $Z_2(m)$.

Вопрос 79. Как соотносятся нижние оценки чисел $Z_2(m)$, полученные вероятностным (неконструктивным) и алгебраическим (конструктивным) подходами?

Вопрос 80. Сколько единиц в матрице, которая была с помощью алгебраической конструкции построена на лекции для доказательства нижней оценки чисел Заранкевича? Каких размеров эта матрица?

Вопросы для самоконтроля по теме «Лемма Ловаса»

Вопрос 81. Пусть событие A не зависит от группы событий B_1, \dots, B_5 . Всегда ли из этого следует, что $\Pr[A \mid (B_1 \cup B_4) \cap \overline{B_3}] = \Pr[A]$? Всегда ли из этого следует, что $\Pr[B_1 \mid A \cap B_2] = \Pr[B_1]$?

Вопрос 82. Сформулируйте лемму Ловаса в общем и симметричном случае.

Вопрос 83. Оценку какого порядка даёт лемма Ловаса для чисел Рамсея $R(s, 3)$?

Вопрос 84. Пусть есть три вида событий: $A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_m$ и C_1, \dots, C_m . Пусть на каждое событие вида A могут влиять не больше n_{AB} событий вида B и не более n_{AC} событий вида C . Аналогично введём величины $n_{BA}, n_{BC}, n_{CA}, n_{CB}$. Убедитесь, что для выполнения неравенства

$$\Pr \left[\bigcap_i (\overline{A_i} \cap \overline{B_i} \cap \overline{C_i}) \right] > 0$$

достаточно, чтобы нашлись числа $a, b, c \in (0, 1)$, такие, что $\Pr[A_i] \leq a(1-b)^{n_{AB}}(1-c)^{n_{AC}}$, $\Pr[B_i] \leq b(1-a)^{n_{BA}}(1-c)^{n_{BC}}$ и $\Pr[C_i] \leq c(1-a)^{n_{CA}}(1-b)^{n_{CB}}$. Заметьте, что это частный случай леммы Ловаса.

Вопросы для самоконтроля по теме «Применения вероятностного метода»

Вопрос 85. Сформулируйте теорему Эрдёша о графах с большим хроматическим числом и обхватом. Почему из того, что обхват графа большой, следует «лёгкость локальной раскрашиваемости» графа?

Вопрос 86. Что такое число скрещиваний? Сформулируйте «тривиальную» (линейную по числу рёбер) и «нетривиальную» (доказанную с помощью вероятностного метода) нижнюю оценку на число скрещиваний.

Вопрос 87. Почему можно считать, что в упаковке с минимальным числом скрещиваний каждая пара рёбер пересекается лишь в одной точке?

Вопрос 88. Сформулируйте теорему Вей о нижней оценке числа независимости через степени вершин. Сколько перестановок вершин графа удовлетворяют условию, что в этих перестановках соседи некоторой фиксированной вершины v лежат «правее» неё?

Вопросы для самоконтроля по теме «Частично упорядоченные множества»

Вопрос 89. Что такое цепь в ЧУМе? Что такое антицепь? Что такое максимальная цепь в булеане?

Вопрос 90. Сформулируйте теорему Лубелла—Ямамото—Мешалкина.

Вопрос 91. Сформулируйте теорему Шпернера. Приведите пример антицепи, на которой оценка теоремы достигается.

Вопрос 92. Сформулируйте теоремы о разложении ЧУМ на цепи и антицепи.

Вопрос 93. Как в выводе теоремы Холла из теоремы о разложении ЧУМ связан исходный граф (для которого формулируются условия Холла) и вспомогательное ЧУМ?

Вопрос 94. Теорема Шпернера оценивает мощность максимальной антицепи в булеане. На какое минимальное число цепей, исходя из этой теоремы, можно разложить булеан?

Вопрос 95. Пусть максимальный размер антицепи в некотором ЧУМе равен k ; назовём элемент ЧУМа «хорошим», если он входит хотя бы в одну антицепь размера k . Пусть дано разложение ЧУМа на k цепей. Почему на каждой из этих цепей найдётся хотя бы по одному «хорошему» элементу?

Вопрос 96. В продолжение предыдущего вопроса. На каждой из этих цепей выберем минимальный (на ней) «хороший» элемент. Почему множество выбранных элементов будет образовывать антицепь?

Вопросы для самоконтроля по теме «Теорема Алона и её применения»

Вопрос 97. Сформулируйте теоремы Алона, Коши—Давенпорта, Алона—Фюреди, Алона—Фридланда—Калаи.

Вопрос 98. Покажите, что условия $|S_i| \geq t_i + 1$ в формулировке теоремы Алона являются в некотором смысле оптимальными: если хотя бы для одного i ослабить условие до $|S_i| = t_i$, то существование нужного набора x_1, \dots, x_m уже нельзя гарантировать в общем случае.

Вопрос 99. Пусть $A, B \subset \mathbb{Z}_{11}$ и $A = \{1, 4, 6\}$, $B = \{2, 5, 7\}$. Выпишите все элементы множества $(A + B)$.

Вопрос 100. В любом ли простом 4-регулярном графе найдётся 3-регулярный подграф?

Вопросы для самоконтроля по теме «Размерность Вапника—Червоненкиса»

Вопрос 101. Пусть $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1, 2, 3\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}\}$. Чему равна проекция $\mathcal{F}|_{\{1, 2\}}$? Дробится ли множество $\{1, 2\}$ семейством \mathcal{F} ?

Вопрос 102. Что такое размерность Вапника—Червоненкиса?

Вопрос 103. Сформулируйте теорему о верхней оценке мощности семейства с заданным доменом и VC-размерностью.

Вопрос 104. Сформулируйте теорему об оценке мощности проекции.

Вопрос 105. Теорему об оценке размерности измельчения семейства.

Вопрос 106. Что такое ε -сеть?

Вопрос 107. Конечна или бесконечна VC-размерность семейства всех треугольников на плоскости?

Вопрос 108. Сформулируйте теорему Хаусслера—Вельцля.

Вопрос 109. Сформулируйте геометрическое следствие теоремы Хаусслера—Вельцля.