1. Постановка задачи дискретной оптимизации. Локальный поиск.

Задача 1. Поставьте формально задачу оптимизации (укажите множество S и функцию f) для следующей содержательной задачи:

a) (2 балла) Есть несколько контейнеров различного объёма и веса. Требуется выбрать из них несколько контейнеров так, чтобы они влезли в грузовик фиксированной вместительности, а суммарный вес их был как можно больше.

b) (2 балла) Есть несколько городов, изначально не соединённых дорогами. Известна стоимость прокладки пути между любой парой городов. Нужно определить, между какими из городов нужно проложить дороги, так, чтобы из любого города в любой другой можно было доехать (возможно, через другие города). Хочется потратить на строительство как можно меньше денег из федерального бюджета.

c) (2 балла) Та же задача, что в предыдущем пункте, но требуется дополнительно, чтобы возможность доехать из любого города в любой сохранялась даже в случае, когда одна из дорог между произвольной парой городов закрывается на ремонт.

Задача 2. (2 балла) Приведите пример какой-нибудь окрестностной функции для задачи о назначениях.

Задача 3. Определим k-окрестность гамильтонова цикла C в графе как множество всех циклов, которые можно получить удалением k рёбер из C и добавлением других k рёбер. На лекции было показано, что рассмотрение 2-окрестностей не гарантирует достижение глобального оптимума в задаче коммивояжёра при локальном поиске. Покажите то же для k-окрестностей при

a) (2 балла) $k = 3$,

b) (4 балла) $k \leqslant n - 3$, где n --- количество вершин в графе.

Задача 4. (4 балла) Докажите, что для любых двух гамильтоновых циклов C', C'' в полном графе можно найти последовательность гамильтоновых циклов $C_1, C_2, \ldots, C_k$, такую, что $C_1 = C'$, $C_k = C''$, и для каждого i цикл C_{i+1} принадлежит 2-окрестности цикла C_i. То есть рассмотренная на лекции окрестностная функция полна.

2. Оптимизация на системах подмножеств конечного множества. Матроиды. Лемма об изолировании.

Задача 5. (1 балл) В доказательстве леммы об изолировании при определении величины $\alpha(s)$ рассматриваются максимумы вида $\max_{A \in \mathcal{F}, s \notin A} w(A)$. Вопрос: что делать, если таких множеств A в семействе $\mathcal{F}$ не найдётся?

Задача 6. (2 балла) Пусть $G = (V, E)$ — полный граф, каждому ребру которого приписан положительный вес. Пусть $\mathcal{F}$ — семейство всевозможных подмножеств рёбер графа G, которые можно дополнить до гамильтонова цикла в G. Покажите, что при $|V| \geqslant 4$ пара $(V, \mathcal{F})$ не является матроидом.

Задача 7. (2 балла) Докажите аналог леммы об изолировании, при условии, что теперь вес множества определяется не суммой, а произведением весов всех его элементов. Веса всех элементов предполагаются положительными.

Задача 8. (2 балла) Пусть $(S',\,\mathcal{F}')$ и $(S'',\,\mathcal{F}'')$ — матроиды, причём $S' \cap S'' = \varnothing$. Положим $S := S' \cup S''$, $\mathcal{F} := \{A' \cup A'' \mid A' \in \mathcal{F}',\, A'' \in \mathcal{F}''\}$. Докажите, что пара $(S,\,\mathcal{F})$ также является матроидом.

Задача 9. Пусть S — произвольное конечное множество, k — фиксированное натуральное число, $1 \leqslant k \leqslant |S| - 1$. Положим $\mathcal{F} = \{A \subseteq S \mid |A| \leqslant k\}$.

a) (1 балл) Докажите, что пара $(S,\,\mathcal{F})$ — матроид.

b) (4 балла) Положим $n := |S|$. Пусть $P(n,k,N)$ — вероятность того, что в данном матроиде при случайном выборе весов из множества $\{1,\,\ldots,\,N\}$ в задаче поиска допустимого множества максимального веса будет единственное решение. Докажите, что

$$P(n,k,N) = \binom{n}{k} \cdot \sum_{i=1}^{N-1} \left(\left(1 - \frac{i}{N}\right)^k - \left(1 - \frac{i+1}{N}\right)^k \right) \left(\frac{i}{N}\right)^{n-k}.$$

Задача 10. (2 балла) Пусть S — множество мощности n, а $\mathcal{F}$ — наследственная система подмножеств S. Пусть веса элементов множества S принадлежат множеству $\{1,\,\ldots,\,N\}$. Допустим, что пара $(S,\,\mathcal{F})$ не является матроидом. Какое максимальное значение может принимать разность $\max_{A \in \mathcal{F}} w(A) - w(A')$, где A' — множество, построенное жадным алгоритмом? Дайте ответ в виде функции от величин $n,\, N$. Заметьте, что в описании жадного алгоритма не сказано, как он выбирает элемент в случае, когда ему доступно для выбора несколько самых «тяжёлых» элементов. Поэтому рассмотрите две постановки указанной задачи: первая, когда жадному алгоритму «везёт» в таких случаях, и вторую, когда «не везёт».

3. Задачи о покрытии

Задача 11. Сформулируйте следующие задачи в виде задачи о покрытии. Укажите, чему будут соответствовать строки и столбцы $0, 1$-матрицы. Как связаны размеры матрицы с параметрами задачи (размерность матрицы должна быть полиномиальной)?

a) (1 балл) Задан неориентированный простой граф. Нужно выбрать в графе подмножество вершин, так, чтобы каждая вершина графа либо входила в выбранное подмножество, либо имела по крайней мере t соседей в выбранном подмножестве. Величину t считать небольшой константой!

b) (1 балл) Множество вершин графа называется покрывающим, если у каждого *ребра* графа хотя бы один из концов лежит в этом множестве. Задача: выбрать в графе покрывающее множество вершин минимального размера.

c) (1 балл) На шахматной доске стоят (в некоторой фиксированной расстановке) несколько белых фигур и один чёрный король, находящийся под матом. Нужно выбрать из белых фигур минимальный набор, так, чтобы чёрному королю по-прежнему был мат. при решении задачи следует считать, что никакая из фигур в первоначальной расстановке не «загораживает» другую.

Задача 12. (4 балла) На лекции была доказана теорема о соотношении между мощностью оптимального и жадного покрытий в задаче о невзвешенном покрытии, в случае, когда число единиц в каждой строке матрицы ограничено. Докажите аналогичную теорему для задачи о взвешенном покрытии (на лекции был рассказан жадный алгоритм для неё и формулировка соответствующей теоремы).

Задача 13. (1 балл) На лекции была доказана теорема о связи весов оптимального и жадного покрытий для случая, когда веса строк матрицы ограничены единицей. Как изменится оценка теоремы, если веса строк матрицы берутся из интервала $(0, W]$?

Задача 14. Пусть $G = (V, E)$ — простой граф без изолированных вершин. *Вершинным покрытием* графа G называется подмножество $V' \subseteq V$, такое, что у каждого ребра из E хотя бы один из концов принадлежит V'. Естественно при поиске покрытия добиваться, чтобы мощность множества V' была как можно меньше. Рассмотрим следующий, почти тривиальный, алгоритм построения вершинного покрытия:

$V' = \varnothing$
while not G.coveredBy(V'):
    $e =$chooseAny(E)
    $V' = V' \cup e$
    $V = V \setminus e$
    $G = G|_V$
return V'

Приведите пример графа, для которого мощность построенного алгоритмом покрытия V' окажется вдвое больше, чем размер оптимального покрытия (при любой логике работы функции chooseAny). Докажите затем, что указанный алгоритм *всегда* строит покрытие, не более чем в два раза превосходящее по мощности оптимальное.

Задача 15. (4 балла) Реализуйте описанный на лекции жадный алгоритм построения минимального покрытия для задачи о взвешенном покрытии. Требования к оформлению программы можно посмотреть в отдельном файле. Программа должна принимать на вход текстовый файл `input.txt`, каждая строка которого представляет собой строку матрицы в формате:
`вес\tэлемент1\tэлемент2…\tэлементn\n`

Через `\t` и `\n` обозначены символы табуляции и перевода строки соответственно. Программа должна выводить на стандартный вывод через пробел номера всех строк матрицы, вошедших в покрытие (необязательно по возрастанию). Гарантируется, что при реализации жадного алгоритма так, как указано в лекции, ответ в задаче input.txt единственный с точностью до порядка номеров строк. Строки можно нуменовать как начиная с нуля, так и с единицы.

Веса строк матрицы — положительные целые числа от 1 до 65535.

4. Метаэвристические алгоритмы

Задача 16. Предложите какие-нибудь разумные функции мутации и скрещивания в генетических алгоритмах решения следующих задач. Оцените время вычисления значений этих функций относительно размера их аргументов.

a) (2 балла) Найти клику как можно большего размера в заданном графе. Размер клики — это число вершин в ней.

b) (2 балла) Найти паросочетание как можно большего веса в заданном двудольном графе.

c) (2 балла) Задача о взвешенном покрытии матрицы.

Задача 17. (4 балла) Запрограммируйте генетический алгоритм, решающий задачу о взвешенном покрытии матриц. Программа должна принимать на вход текстовый файл `input.txt`, каждая строка которого, начиная со второй, представляет собой строку матрицы в формате:
`вес\tэлемент1\tэлемент2…\tэлементn\n`

Веса строк матрицы — положительные целые числа от 1 до 65535. Через `\t` и `\n` обозначены символы табуляции и перевода строки соответственно. Первая строка входного файла содержит через пробел два числа: максимально допустимое количество итераций генетического алгоритма и «терпимый» вес покрытия (если алгоритм доходит до покрытия такого или меньшего веса, то останавливается и выводит результат).

Программа должна выводить на стандартный вывод через пробел номера всех строк матрицы, вошедших в покрытие (необязательно по возрастанию). Строки нужно нуменовать, начиная с нуля.

Обязательное требование к программе: функции мутации и скрещивания должны быть выделены в отдельные функии программы. Кроме того, нужно прокомментировать в тексте программы, как эти функции работают.

5. Выпуклые задачи дискретной оптимизации

Задача 18. (3 балла) Опишите алгоритм решения задачи максимизации суммы функций при ограниченном ресурсе. Оцените время работы полученного алгоритма в худшем случае.

Задача 19. (3 балла) Докажите теорему о максимизации произведения вида $\prod_i x_i^i$ с 16-го слайда лекции.

Задача 20. (4 балла) Запрограммируйте алгоритм решения задачи максимина *либо* максимизации суммы. Какую из двух задач программа решает, должно быть указано в комментарии в исходном коде. Баллы Программа должна принимать на вход текстовый файл `input.txt`, i-я строка которого имеет вид:
`f_i(0) f_i(1) … f_i(N)`

То есть через пробел перечислены значения функции f_i во всех точках от нуля до N. Все значения целочисленные неотрицательные. Программа должна выводить на стандартный вывод через пробел значения всех переменных в оптимальном распределении.

6. Линейное программирование

Задача 21. (4 балла) Установите LPSolve или любой другой решатель задач линейного программирования и решите с его помощью следующую задачу, предварительно приведя её к стандартной форме:

$$\begin{gathered} x_1 - 2013x_2 + x_3 - 3x_4 \to \min, \\ |x_1 - 214| \leqslant x_3 - x_2, \\ \max\{x_1,\, x_2,\, 3x_3\} \leqslant x_4, \\ 5x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leqslant 2013, \\ x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4 \geqslant 0. \end{gathered}$$

В ответе напишите оптимальное значение целевой функции и переменных, на которых оно достигается.

7. Исчерпывающий перебор

Задача 22. (4 балла) Напишите программу, которая перебирает всевозможные неизоморфные графы на девяти вершинах (всего таких графов 274668) в соответствии с алгоритмом Рида, и считает сумму количеств рёбер в этих графах. Программа не принимает на вход никаких данных и выдаёт на стандартный вывод единственное число: суммарное количество рёбер во всех графах.

Задача 23. (4 балла) Напишите программу, которая перебирает всевозможные неизоморфные корневые деревья на 16 вершинах (см. также эту ссылку) в соответствии с алгоритмом Рида. Программа не принимает на вход никаких данных и выдаёт на стандартный вывод единственное число: количество деревьев.