Возможные темы для исследований

1 Экстремальные задачи на графах

В самом общем виде постановка типичной экстремальной задачи такова: задан граф с некоторыми известными значениями каких-либо параметров (например, известно число вершин и рёбер в графе). Спрашивается, в каком диапазоне может лежать некоторый другой параметр этого графа (например, хроматическое или кликовое число и т. д.). К примеру, знаменитая теорема Турана как раз отвечает на вопрос такого рода: «сколь велико может быть число рёбер в графе, у которого n вершин, а размер максимальной клики равен k?» Задачу оценки чисел Рамсея тоже можно переформулировать подобным образом: «как много вершин может быть в графе с числом независимости p и кликовым числом q?». Меня, в первую очередь, интересуют оценки *количества независимых множеств* в графах: как много и как мало может быть независимых множеств в графе из заданного класса? Оказывается, эти вопросы связаны с некоторыми задачами теоретической химии, сложности алгоритмов. См., например, статью [1], в которой оценка числа независимых множеств позволяет получить оценку времени работы алгоритма раскраски.

2 Обратные задачи для параметров графов

Наиболее часто встречаются в теории графов задачи, связанные с вычислением и оценкой каких-либо параметров графа. Можно поставить и обратную задачу: дано число n, существует ли граф (из заданного класса), у которого заданный параметр в точности равен n? Например, известно, что любое достаточно большое натуральное число является числом независимых множеств некоторого двудольного графа [2]. В то же время аналогичный вопрос для деревьев пока остаётся без ответа.

3 Модели схем с различными ограничениями

Любая булева функция может быть реализована некоторой схемой в базисе из конъюнкции, дизъюнкции и отрицания. Весь вопрос в том, насколько большой может быть это схема. Такие задачи рассматриваются с шестидесятых годов прошлого века, и большой прогресс в них был получен отечественными учёными. Однако, классические модели схем уже не вполне адекватно описывают современные интегральные схемы, и возникают новые модели, «схватывающие» некоторые особенности реальных схем. Отсюда возникает масса задач оценивания сложности схем в таких моделях как для конкретных булевых функций (например, линейной функции), так и для «самой сложной» функции. В качестве хорошего введения можно посмотреть книгу [3].

Список литературы

[1] Eppstein D. Small maximal independent sets and faster exact graph coloring // J. Graph Algorithms and Applications (special issue for WADS'01) 2003. 7(2). P. 131–140.

[2] Linek V. Bipartite graphs can have any number of independent sets // Discrete Mathematics. 1989. 2(76). P. 131–136.

[3] Wegener I. The Complexity of Boolean Functions. 1987. (скачать)