Количество правильных раскрасок

Сколько различных *правильных* раскрасок у заданного графа?

В отличие от того, что было раньше, раскраски будем считать разными, даже если они переходят друг в друга при автоморфизме графа.

Число правильных раскрасок графа G в цвета из множества $\{1, \ldots, x\}$, обозначим $\chi(G; x)$.

Количество правильных раскрасок

Примеры:

- $\chi(\overline{K}_n; x) = x^n$
  Каждую вершину независимо от других красим в один из x цветов.
- $\chi(K_n; x) = x \cdot (x-1) \cdot \ldots \cdot (x-n+1)$
  Первую вершину красим в любой из x цветов, вторую — в любой из $(x-1)$ оставшихся цветов, и т.д.
- $\chi(P_n; x) = x \cdot (x-1)^{n-1}$
  Начав красить цепь с концевой вершины, каждую следующую вершину красим в один из $(x-1)$ цветов, отличных от цвета уже окрашенного соседа.

Количество правильных раскрасок

Пусть e —произвольное ребро графа G.
Через $(G - e)$ и G/e обозначают графы, полученные из G удалением и стягиванием e.

Утверждение.

$$\chi(G; x) = \chi(G - e; x) - \chi(G/e\,; x)$$

Количество правильных раскрасок

Доказательство:

Правильные раскраски графа $(G - e)$ можно разбить на два типа:

- Те, в которых вершины-концы e окрашены в разные цвета. Таких раскрасок ровно $\chi(G; x)$.
- Те, в которых вершины-концы e окрашены в один цвет. Таких раскрасок ровно $\chi(G/e\,; x)$.

Значит, $\chi(G - e; x) = \chi(G; x) + \chi(G/e\,; x)$, откуда следует доказываемое утверждение.

Хроматический многочлен

Утверждение.

$$\chi(G;x) = \chi(G-e;x) - \chi(G/e\,;x)$$

Следствие.
Для любого G функция $\chi(G;x)$ является многочленом от x.

Доказательство: индукция по числу рёбер.

Для пустых графов утверждение очевидно.

Если G непуст, и e — произвольное ребро G, то $\chi(G-e;x)$ и $\chi(G/e\,;x)$ — многочлены по предположению. Тогда и $\chi(G;x)$ многочлен.

Свойства хроматического многочлена

Функция $\chi(G; x)$ называется *хроматическим многочленом* графа G.

Если G имеет n вершин, то

$$\chi(K_n; x) \leq \chi(G; x) \leq \chi(\overline{K}_n; x)$$

Старшие члены в $\chi(K_n; x)$ и $\chi(\overline{K}_n; x)$ равны x^n.

Отсюда следует, что старший моном в $\chi(G; x)$ равен x^n.

Натуральные числа, меньшие $\chi(G)$, являются корнями многочлена $\chi(G; x)$.

Свойства хроматического многочлена

Утверждение.
Если G граф на n вершинах с m рёбрами, то коэффициент в $\chi(G; x)$ при x^{n-1} равен $-m$.

Доказательство:
Индукция по $|E(G)|$.

Для пустого графа очевидно.

Пусть $|E(G)| = m > 0$. Имеем

$$\mathrm{coef}_{x^{n-1}}\, \chi(G; x) = \mathrm{coef}_{x^{n-1}}\, \chi(G - e; x) - \mathrm{coef}_{x^{n-1}}\, \chi(G/e\,; x) =$$
$$= -(m-1) - 1 = -m$$