Дискретные структуры

осень 2013

Александр Дайняк

www.dainiak.com

Основные комбинаторные числа

- Количество размещений без повторений

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- Количество размещений с повторениями

$$\bar{A}_n^k = n^k$$

- Количество сочетаний без повторений

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

- Количество сочетаний с повторениями

$$\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}$$

- A — от *<u>a</u>rrangement*
- C — от *<u>c</u>ombination*

Свойства чисел $\binom{n}{k}$

- Симметричность:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot \big(n-(n-k)\big)!} = \binom{n}{n-k}$$

Свойства чисел $\binom{n}{k}$

- Унимодальность:

$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \binom{n}{2} < \cdots < \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{\lceil n/2 \rceil} > \binom{n}{\lceil n/2 \rceil + 1}$$
$$> \binom{n}{\lceil n/2 \rceil + 2} > \cdots > \binom{n}{n}$$

Доказательство:

$$\frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}}$$

Свойства чисел $\binom{n}{k}$

- Суммы биномиальных коэффициентов:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$$

$$\binom{n}{0}1^n+\binom{n}{1}1^{n-1}\cdot 1+\binom{n}{2}1^{n-2}\cdot 1^2+\cdots+\binom{n}{n}1^n=(1+1)^n$$

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}=0$$

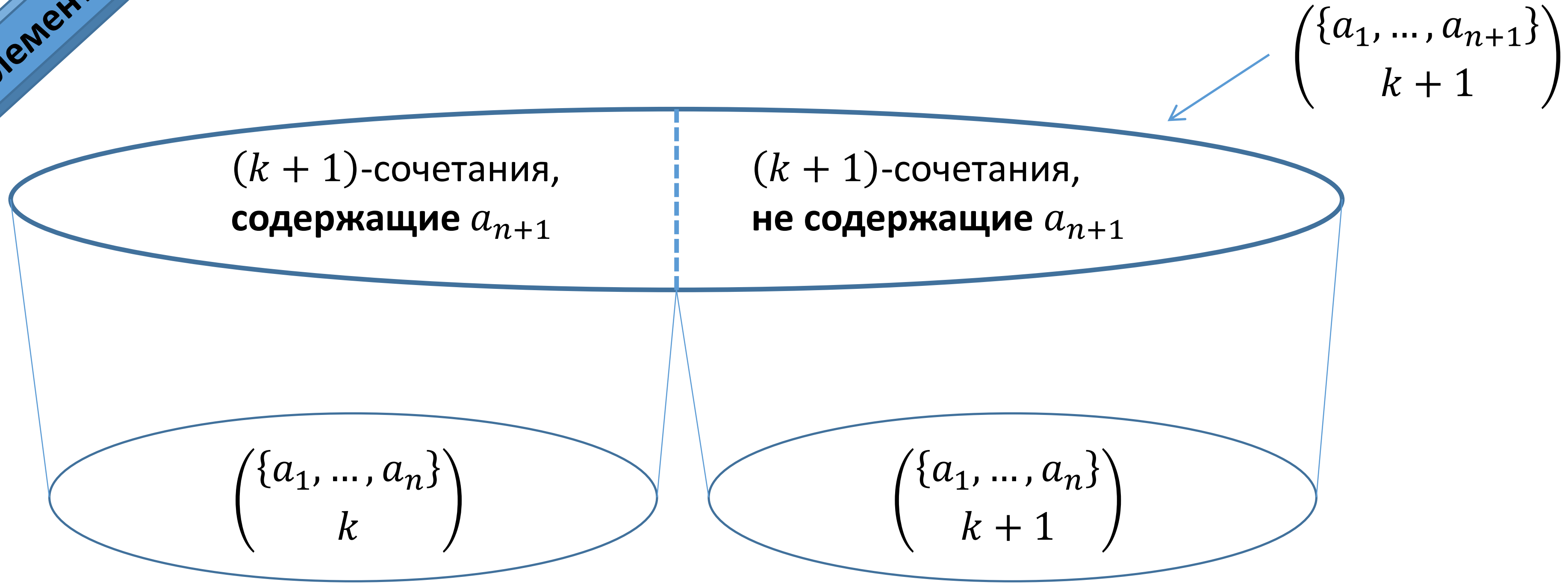
$$\binom{n}{0}1^n+\binom{n}{1}1^{n-1}\cdot(-1)+\binom{n}{2}1^{n-2}\cdot(-1)^2+\cdots+\binom{n}{n}(-1)^n=(1-1)^n$$

Свойства чисел $\binom{n}{k}$

- Основное рекуррентное соотношение:

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

Метод выделенного элемента



Свойства чисел $\binom{n}{k}$

- Основное рекуррентное соотношение:

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

Соотношение будет справедливым и при $k = n$, если принять соглашения:

$$\binom{n}{k} = 0, \text{ если } k > n \text{ или } k < 0$$

Свойства чисел $\binom{n}{k}$

- Основное рекуррентное соотношение:

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

- Треугольник Паскаля:

$$0 \quad \binom{0}{0} \quad 0 \qquad \longleftarrow \; n = 0$$

$$0 \quad \binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \quad 0 \qquad \longleftarrow \; n = 1$$

$$0 \quad \binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \quad 0 \qquad \longleftarrow \; n = 2$$

$$0 \quad \binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \quad 0 \qquad \longleftarrow \; n = 3$$

$$\dots$$

Свойства чисел $\binom{n}{k}$

- Основное рекуррентное соотношение:

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

- Треугольник Паскаля:

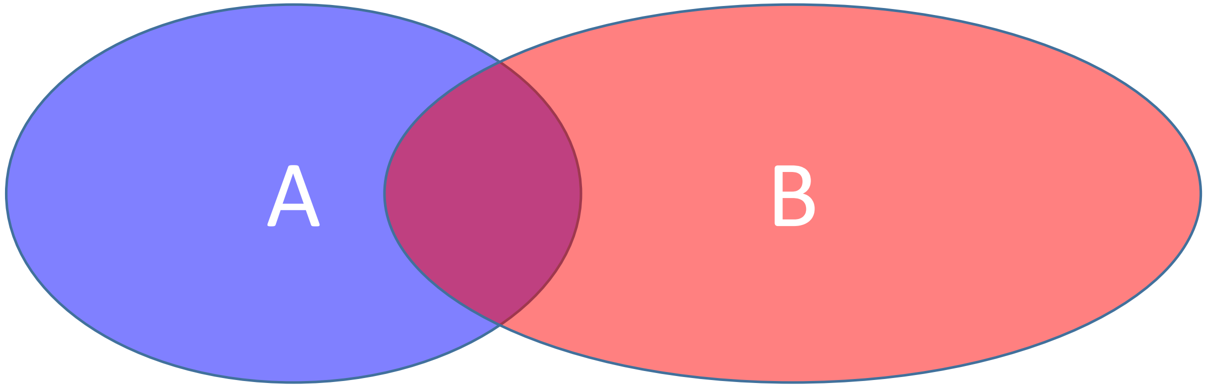
$$\begin{array}{ccccccccccccl}
 & & 0 & & 1 & & 0 & & & & & & \leftarrow n = 0 \\
 & 0 & & 1 & & 1 & & 0 & & & & & \leftarrow n = 1 \\
0 & & 1 & & 2 & & 1 & & 0 & & & & \leftarrow n = 2 \\
0 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & 0 & & & \leftarrow n = 3
\end{array}$$

...

На заметку

- Необходимость «жонглировать» биномиальными коэффициентами возникает часто, полезно помнить их свойства
- Если нужно сравнить два комбинаторных числа, может быть полезным рассмотреть их отношение.
- Часто, если есть рекуррентное соотношение, то можно эффективно вычислять.
- Отождествление частей сложного объекта с простыми объектами того же вида позволяет получать рекуррентные соотношения.
- Метод выделенного элемента.

Вычисление мощностей множеств

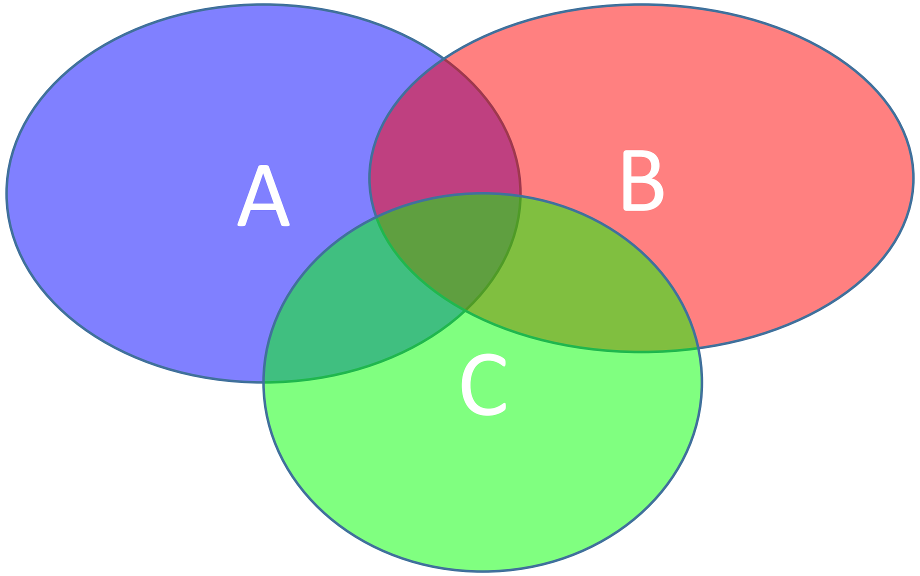


$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \setminus B| = |A| - |A \cap B|$$

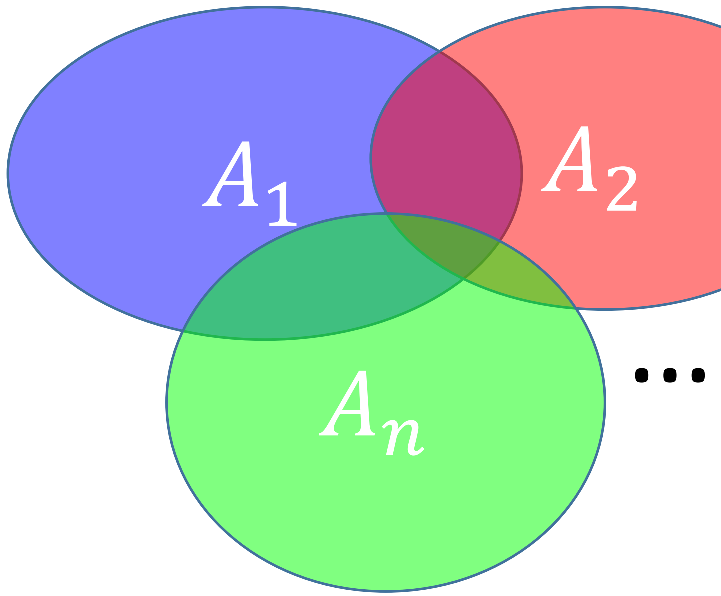
Формула включений-исключений

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$



Формула включений-исключений

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| =$$
$$= |A_1| + \dots + |A_n| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \dots - |A_{n-1} \cap A_n| +$$
$$+|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \dots + (-1)^{k+1} \cdot \left|A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}\right| + \dots + (-1)^{n+1} \cdot |A_1 \cap \dots \cap A_n|$$



Характеристическая функция множества

$$\mathbb{1}_A(x) \coloneqq \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A \\ 0, & \text{если } x \notin A \end{cases}$$

- $\mathbb{1}_{A \cap B}(x) = \mathbb{1}_A(x) \cdot \mathbb{1}_B(x)$
- $\mathbb{1}_{\bar{A}}(x) = 1 - \mathbb{1}_A(x)$
- $|A| = \sum_x \mathbb{1}_x(x)$

Вывод формулы включений-исключений

$$\mathbb{1}_{A_1\cup\cdots\cup A_n}(x) = 1 - \left(1 - \mathbb{1}_{A_1}(x)\right)\left(1 - \mathbb{1}_{A_2}(x)\right)\cdot \ldots \cdot\left(1 - \mathbb{1}_{A_n}(x)\right)$$

$$= \mathbb{1}_{A_1}(x) + \cdots + \mathbb{1}_{A_n}(x) - \mathbb{1}_{A_1}(x)\cdot\mathbb{1}_{A_2}(x) - \mathbb{1}_{A_1}(x)\cdot\mathbb{1}_{A_3}(x) - \cdots$$

$$- \mathbb{1}_{A_{n-1}}(x)\cdot\mathbb{1}_{A_n}(x) + \cdots + (-1)^{n+1}\cdot\mathbb{1}_{A_1}(x)\cdot\mathbb{1}_{A_2}(x)\cdot\ldots\cdot\mathbb{1}_{A_n}(x)$$

Вывод формулы включений-исключений

$|A_1 \cup \dots \cup A_n| =$

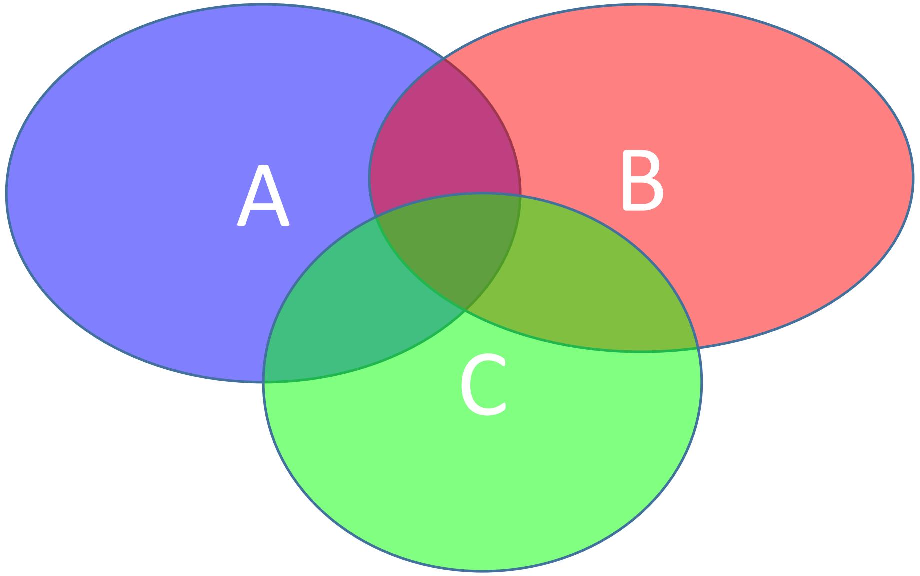
$$= \sum_x \left(\mathbb{1}_{A_1}(x) + \dots + \mathbb{1}_{A_n}(x) - \mathbb{1}_{A_1 \cap A_2}(x) - \mathbb{1}_{A_1 \cap A_3}(x) - \dots - \mathbb{1}_{A_{n-1} \cap A_n}(x) + \dots + (-1)^{n+1} \cdot \mathbb{1}_{A_1 \cap \dots \cap A_n}(x) \right)$$

$$= |A_1| + \dots + |A_n| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \dots - |A_{n-1} \cap A_n| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \dots +$$

$$+(-1)^{k+1} \cdot \left|A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}\right| + \dots + (-1)^{n+1} \cdot |A_1 \cap \dots \cap A_n|$$

Неравенства Бонферрони: три множества

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$



Неравенства Бонферрони

- $|A_1 \cup \cdots \cup A_n| \leq |A_1| + \cdots + |A_n|$

- $|A_1 \cup \cdots \cup A_n| \geq |A_1| + \cdots + |A_n| - |A_1 \cap A_2| - \cdots - |A_{n-1} \cap A_n|$
- $|A_1 \cup \cdots \cup A_n| \leq |A_1| + \cdots + |A_n| - |A_1 \cap A_2| - \cdots - |A_{n-1} \cap A_n| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \cdots + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n|$

- $|A_1 \cup \cdots \cup A_n| \geq \cdots$

Лемма

$\forall m \ \ \forall k \in \{0, \dots, m\}$

$$\binom{m}{k} \geq \binom{m}{k-1} - \binom{m}{k-2} + \binom{m}{k-3} - \cdots + (-1)^{k-1}\binom{m}{0}$$

Проверка в экстремальном (крайнем, граничном) случае:

$$\binom{m}{m} \overset{?}{\geq} \binom{m}{m-1} - \binom{m}{m-2} + \binom{m}{m-3} - \cdots + (-1)^{m-1}\binom{m}{0}$$

Верно:

$$\binom{m}{m} - \binom{m}{m-1} + \binom{m}{m-2} - \binom{m}{m-3} + \cdots + (-1)^{m}\binom{m}{0} = (1-1)^m = 0$$

Доказательство леммы

$\forall m \;\; \forall k \in \{0, \dots, m\}$

$$\binom{m}{k} \geq \binom{m}{k-1} - \binom{m}{k-2} + \binom{m}{k-3} - \dots + (-1)^{k-1}\binom{m}{0}$$

- Если $m \leq 1$ или $k \leq 1$, легко проверяется.

Пусть выполнено при всех $k \leq m \leq \widehat{m}$. Тогда

$$\binom{\widehat{m}}{k} \quad \geq \binom{\widehat{m}}{k-1} - \binom{\widehat{m}}{k-2} + \binom{\widehat{m}}{k-3} - \dots + (-1)^{k-2}\binom{\widehat{m}}{1} + (-1)^{k-1}\binom{\widehat{m}}{0}$$

$$\binom{\widehat{m}}{k-1} \geq \binom{\widehat{m}}{k-2} - \binom{\widehat{m}}{k-3} + \binom{\widehat{m}}{k-4} - \dots + (-1)^{k-2}\binom{\widehat{m}}{0}$$

$$\boxed{\binom{a}{b} + \binom{a}{b-1} = \binom{a+1}{b}}$$

$$\binom{\widehat{m}+1}{k} \geq \binom{\widehat{m}+1}{k-1} - \binom{\widehat{m}+1}{k-2} + \binom{\widehat{m}+1}{k-3} - \dots + (-1)^{k-2}\binom{\widehat{m}+1}{1} + (-1)^{k-1}\binom{\widehat{m}+1}{0}$$

Доказательство неравенств Бонферрони

Пусть k нечётно.

- $$|A_1 \cup \dots \cup A_n| \overset{?}{\leq} |A_1| + \dots + |A_n| -$$
  $$-|A_1 \cap A_2| - \dots - |A_{n-1} \cap A_n| +$$
  $$+|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \dots + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n| +$$
  $$\vdots$$
  $$+|A_1 \cap \dots \cap A_k| + \dots + |A_{n-k-1} \cap A_{n-k-2} \cap \dots \cap A_n|$$

Доказательство неравенств Бонферрони

- $$\mathbb{1}_{A_1\cup\dots\cup A_n}(x) \overset{?}{\leq} \mathbb{1}_{A_1}(x) + \dots + \mathbb{1}_{A_n}(x) -$$
  $$-\mathbb{1}_{A_1}(x)\cdot\mathbb{1}_{A_2}(x) - \dots - \mathbb{1}_{A_{n-1}}(x)\cdot\mathbb{1}_{A_n}(x) +$$
  $$+\mathbb{1}_{A_1}(x)\cdot\mathbb{1}_{A_2}(x)\cdot\mathbb{1}_{A_3}(x) + \dots + \mathbb{1}_{A_{n-2}}(x)\cdot\mathbb{1}_{A_{n-1}}(x)\cdot\mathbb{1}_{A_n}(x) - \dots +$$
  $$\vdots$$
  $$+\mathbb{1}_{A_1}(x)\cdot\mathbb{1}_{A_2}(x)\cdot\ldots\cdot\mathbb{1}_{A_k}(x) + \dots + \mathbb{1}_{A_{n-k-1}}(x)\cdot\mathbb{1}_{A_{n-k-2}}(x)\cdot\ldots\cdot\mathbb{1}_{A_n}(x)$$

Доказательство неравенств Бонферрони

$\forall m \ \ \forall k \in \{0, \dots, m\}$

$$\binom{m}{k} \geq \binom{m}{k-1} - \binom{m}{k-2} + \binom{m}{k-3} - \cdots + (-1)^{k-1}\binom{m}{0}$$

При нечётных k имеем

$$1 \leq \binom{m}{1} - \binom{m}{2} + \binom{m}{3} - \cdots + \binom{m}{k}$$

На заметку

- Концепция характеристической (индикаторной) функции
- Алгебра может быть «неожиданно полезна» в комбинаторике
- Иногда полезно «менять масштаб»
- Полезное равенство может дать целую серию полезных неравенств