Основы теории графов

осень 2013

Александр Дайняк

www.dainiak.com

Задача Турана

- Пусть у нас есть пустой граф $G \coloneqq \overline{K}_n$.
- Будем добавлять в G рёбра по одному.
- На каком шаге в графе G точно появится треугольник? А клика на k вершинах?

Иными словами,

- *Сколько рёбер должно быть* в графе на n вершинах, чтобы он *наверняка содержал* клику на k вершинах?
- *Как много рёбер может быть* в графе на n вершинах, *не содержащем* клику на k вершинах?

Задача Турана

Задача Турана — типичный пример задачи из *экстремальной теории графов*.

Общая постановка экстремальных задач обычно такая:

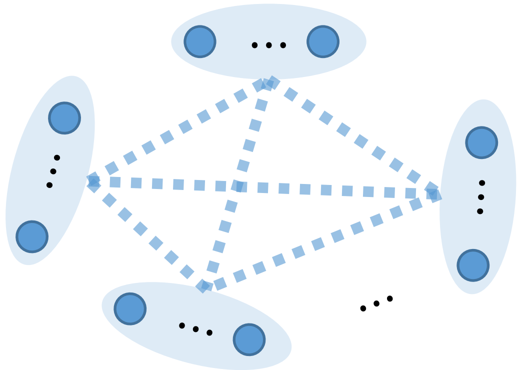
- Как много/мало рёбер/вершин/… может быть в графе, имеющем заданные свойства?
- Как «выглядят» графы, на которых достигаются экстремумы?

Теорема Турана

Теорема. (Turán ’1941)
Пусть G — граф на n вершинах, и $\omega(G) \leq k$. И пусть G имеет наибольшее число рёбер среди всех графов с указанными свойствами.

Тогда G является *полным* k*-дольным графом*, в котором мощности любых двух долей отличаются *не более чем на* 1.

Такие графы называются
графами Турана.



Теорема Турана

Доказательство:

Вначале докажем, что G полный k-дольный.

Заметим, что $\omega(G) = k$, т.к. иначе в G можно было бы добавить произвольное ребро, сохранив неравенство $\omega(G) \leq k$.

Далее докажем, что для любых $u, v, w \in \mathrm{V}(G)$ если $uv, vw \notin E(G)$, то $uw \notin E(G)$.

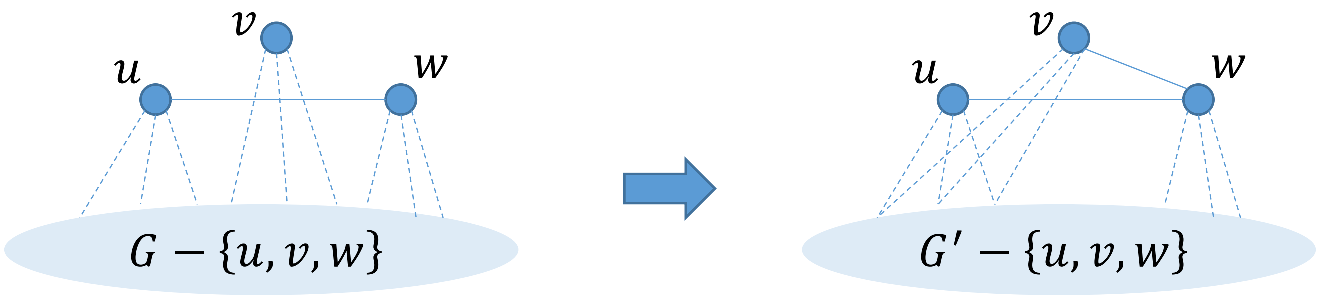
Допустим, это не так, и нашлись u, v, w, такие, что $uv, vw \notin E(G)$ и $uw \in E(G)$. Покажем, что тогда число рёбер в G можно увеличить.

Теорема Турана

Допустим, что $uv, vw \notin E(G)$ и $uw \in E(G)$.

Случай 1: $d(v) < d(u)$.
Тогда рассмотрим граф G', для которого

$$E(G') := E(G - v) \cup \{vx \mid x \in N(u) \text{ в } G\}$$



В G' по-прежнему нет клик размера $(k+1)$, и при этом $\|G'\| = \|G\| - d(v) + d(u) > \|G\|$, противоречие с максимальностью $\|G\|$.

Теорема Турана

Случай 2: $d(v) < d(w)$ — аналогичен *случаю 1*.
Случай 3: $d(v) \geq d(u)$ и $d(v) \geq d(w)$.
Тогда рассмотрим граф G', для которого

$$E(G') \coloneqq E(G - \{u, w\}) \cup \{ux, wx \mid x \in N(v) \text{ в } G\}$$

В G' по-прежнему нет клик размера $(k+1)$, а рёбер строго больше, чем в G:

$$\|G'\| = \|G\| - (d(u) + d(w) - 1) + 2d(v) > \|G\|$$

Теорема Турана

Мы доказали «транзитивность несмежности»: для любых $u, v, w \in V(G)$ если $uv, vw \notin E(G)$, то $uw \notin E(G)$.

Пусть $A = \{v_1, \dots, v_k\}$ — клика в G,
и пусть v — любая вершина из $V(G) \setminus A$.

Вершина v не может быть смежна со всеми вершинами из A, иначе было бы $\omega(G) \geq k + 1$.
Также v не может быть несмежна более чем с одной вершиной из A, иначе получаем противоречие с транзитивностью несмежности.

Теорема Турана

Пусть $A = \{v_1, \dots, v_k\}$ — клика в G.

Пусть V_i — все вершины графа G, не смежные с вершиной v_i (сама v_i принадлежит V_i).

Мы показали, что каждая вершина графа G не смежна ровно с одной вершиной клики A, следовательно $V(G) = V_1 \sqcup \cdots \sqcup V_k$.

Из транзитивности несмежности следует, что при каждом i множество V_i независимое, следовательно, G — полный k-дольный граф.

Теорема Турана

Осталось доказать «почти-равномощность» долей графа G.

Положим $n_i := |V_i|$. Имеем

$$\|G\| = \sum_{1\le i<j\le k} n_i n_j = \frac{1}{2}\left((\sum n_i)^2 - \sum n_i^2\right)$$

Следовательно, чтобы величина $\|G\|$ была максимальной, нужно, чтобы сумма $\sum_i n_i^2$ была минимальна при ограничении $\sum_i n_i = |G|$.

Покажем, что $\left|n_i - n_j\right| \le 1$ для любых i и j.

Теорема Турана

Покажем, что $|n_i - n_j| \leq 1$ для любых i и j.

Допустим, что это не так: например, $n_1 - n_2 \geq 2$.

Тогда рассмотрим набор чисел $n_1', \ldots, n_k'$, где $n_1' \coloneqq n_1 - 1$, $n_2' \coloneqq n_2 + 1$, и $n_i' \coloneqq n_i$ при $i > 2$.

Имеем

$$\sum n_i^2 - \sum (n_i')^2 = n_1^2 + n_2^2 - (n_1 - 1)^2 - (n_2 + 1)^2 =$$
$$= 2(n_1 - n_2 - 1) > 0,$$

что противоречит максимальности $\|G\|$.

Теорема Эрдёша—Стоуна

Можно обобщить вопрос Турана с клик на произвольные подграфы:

- Каково максимальное число рёбер в графе на n вершинах, не содержащем заданного подграфа H? Обозначим это число $\mathrm{ex}_H(n)$.

Теорема (Erdős, Stone, Simonovits ’1946, 1966)
Для любого фиксированного H при $n \to \infty$

$$\frac{\mathrm{ex}_H(n)}{n(n-1)/2} \to \frac{\chi(H)-2}{\chi(H)-1}$$

Теорема Эрдёша—Стоуна—Симоновица

Лемма.
Для любых $r, t \in \mathbb{N}$ и любого $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{r}\right)$ при всех достаточно больших n (т.е. для всех n начиная с некоторого $n_0 = n_0(r, t)$) в любом графе на n вершинах с $\left(1 - \frac{1}{r} + \varepsilon\right) \cdot \frac{n^2}{2}$ рёбрами найдётся полный $(r+1)$-дольный подграф, в котором мощность каждой доли не меньше t.

Доказательство леммы: ищем подграф с большой δ

Индукция по r.

- Полный $(r + 1)$-дольный подграф найдётся при $r = 0$ — это просто произвольные $(r + 1)$ вершин.
- Пусть граф G удовлетворяет условиям Леммы, и пусть для всех меньших r утверждение леммы выполнено. Докажем, что в G есть нужный $(r + 1)$-дольный подграф.

Доказательство леммы: ищем подграф с большой δ

Сначала найдём в G подграф, в котором степень каждой вершины большая:

1. Пусть в G есть вершина v, такая, что
$$\deg v < \left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{2}\right) \cdot |G|$$
2. Тогда полагаем $G \coloneqq G - v$ и возвращаемся на шаг 1 (при этом $|G|$, очевидно, уменьшается на единицу).

Вопрос: сколько шагов придётся сделать до остановки (сколько вершин выживет)?

Доказательство леммы: ищем подграф с большой δ

Пусть процесс завершился и мы пришли к графу на n' вершинах. Тогда количество рёбер, которые мы удалили из G, не превосходит

$$\sum_{k=n'+1}^{n} \left(1 - \tfrac{1}{r} + \tfrac{\varepsilon}{2}\right) \cdot k = \left(1 - \tfrac{1}{r} + \tfrac{\varepsilon}{2}\right) \cdot \frac{(n - n')(n + n' + 1)}{2}$$

$$\leq \left(1 - \tfrac{1}{r} + \tfrac{\varepsilon}{2}\right) \cdot \frac{n^2 - {n'}^2}{2} + \frac{n - n'}{2}$$

Доказательство леммы: ищем подграф с большой δ

Мы пришли к графу на n' вершинах, количество рёбер в котором не менее чем

$$\|G\| - \left(\left(1 - \tfrac{1}{r} + \tfrac{\varepsilon}{2}\right) \cdot \frac{n^2 - {n'}^2}{2} + \frac{n - n'}{2}\right) \geq$$

$$\geq \left(1 - \tfrac{1}{r} + \varepsilon\right) \cdot \frac{n^2}{2} - \left(1 - \tfrac{1}{r} + \tfrac{\varepsilon}{2}\right) \cdot \frac{n^2 - {n'}^2}{2} - \frac{n - n'}{2}$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{n^2}{2} + \left(1 - \tfrac{1}{r} + \tfrac{\varepsilon}{2}\right) \cdot \frac{{n'}^2}{2} - \frac{n - n'}{2}$$

С другой стороны, рёбер в нём не более чем ${n'}^2/2$.

Доказательство леммы: ищем подграф с большой δ

Получаем неравенство

$$\frac{{n'}^2}{2} \geq \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{n^2}{2} + \left(1 - \tfrac{1}{r} + \tfrac{\varepsilon}{2}\right) \cdot \frac{{n'}^2}{2} - \frac{n - n'}{2}$$

Отсюда

$$\left(\tfrac{1}{r} - \tfrac{\varepsilon}{2}\right) \cdot {n'}^2 - n' \geq \frac{\varepsilon n^2}{2} - n$$

И следовательно ${n'}^2 \geq \frac{\varepsilon n^2}{2} - n$.

Доказательство леммы: ищем подграф с большой δ

$$n'^2 \geq \frac{\varepsilon n^2}{2} - n$$

Главный вывод: n' неограниченно растёт при росте n.

Поэтому будем доказывать лемму в предположении, что мы уже преобразовали G так, что $\delta(G) \geq \left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{2}\right) \cdot |G|$.

Доказательство леммы: применяем индуктивное предположение

- Полагаем, что $\delta(G) \geq \left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{2}\right) \cdot |G|$.

Обозначим $\hat{t} \coloneqq \lceil 4t/\varepsilon \rceil$.

Т.к. количество рёбер в G не меньше

$$\frac{1}{2} \cdot |G| \cdot \delta(G) > \frac{|G|^2}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{r-1} + \frac{\varepsilon}{2}\right),$$

то, по предположению индукции, при достаточно большом $|G|$ в G найдётся полный r-дольный подграф с долями $A_1, \dots, A_r$, где $|A_i| = \hat{t}$ для каждого i.

Доказательство леммы: ищем недостающую долю

- $\delta(G) \geq \left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{2}\right) \cdot |G|$.
- В G есть полный r-дольный подграф с долями $A_1, \dots, A_r$, где $|A_i| = \hat{t} = \lceil 4t/\varepsilon \rceil$.

Пусть $A \coloneqq V(G) \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_r)$.

Пусть A_{good} — множество всех таких $v \in A$, что для каждого $i \in \{1, \dots, r\}$ из v в A_i идут не менее чем t рёбер.

Доказательство леммы: ищем недостающую долю

- $\delta(G) \geq \left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{2}\right) \cdot |G|$.
- В G есть полный r-дольный подграф с долями $A_1, \dots, A_r$, где $|A_i| = \hat{t} = \lceil 4t/\varepsilon \rceil$.
- $A_{\mathrm{good}} \coloneqq \{v \in A \mid \quad \forall i \quad |N(v) \cap A_i| \geq t\}$

Количество пар *несмежных* вершин из $A \times (A_1 \cup \dots \cup A_r)$ не превосходит

$$|A_1 \cup \dots \cup A_r| \cdot \big(|G| - \delta(G)\big) \leq r\hat{t} \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{\varepsilon}{2}\right) \cdot |G|$$

Это же количество пар вершин не меньше

$$\big(|A| - |A_{\mathrm{good}}|\big) \cdot (\hat{t} - t) = \big(|G| - r\hat{t} - |A_{\mathrm{good}}|\big) \cdot (\hat{t} - t)$$

Доказательство леммы: ищем недостающую долю

- $\delta(G) \geq \left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{2}\right) \cdot |G|$.
- В G есть полный r-дольный подграф с долями $A_1, \dots, A_r$, где $|A_i| = \hat{t} = \lceil 4t/\varepsilon \rceil$.
- $A_{\text{good}} \coloneqq \{v \in A \mid \quad \forall i \quad |N(v) \cap A_i| \geq t\}$

Имеем

$$\left(|G| - r\hat{t} - \left|A_{\text{good}}\right|\right) \cdot (\hat{t} - t) \leq r\hat{t} \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{\varepsilon}{2}\right) \cdot |G|.$$

Отсюда

$$\left|A_{\text{good}}\right| \geq \frac{\left(\frac{\varepsilon}{2} \cdot r\hat{t} - t\right) \cdot |G| - r\hat{t}(\hat{t} - t)}{\hat{t} - t} \geq \frac{t \cdot |G| - r\hat{t}^2}{\hat{t}}$$

Доказательство леммы: ищем недостающую долю

- В G есть полный r-дольный подграф с долями $A_1, \dots, A_r$, где $|A_i| = \hat{t} = \lceil 4t/\varepsilon \rceil$.
- $A_{\text{good}} \coloneqq \{v \in A \mid \quad \forall i \quad |N(v) \cap A_i| \geq t\}$

Имеем $\left|A_{\text{good}}\right| \geq (t \cdot |G| - r\hat{t}^2)/\hat{t}$.

Поскольку $t, r, \hat{t}$ — константы, а $|G|$ растёт, то можно добиться, чтобы

$$\left|A_{\text{good}}\right| > \binom{\hat{t}}{t}^r \cdot (t-1).$$

Доказательство леммы: ищем недостающую долю

- В G есть полный r-дольный подграф с долями $A_1, \dots, A_r$, где $|A_i| = \hat{t}$.
- $A_{\text{good}} := \{v \in A \mid \quad \forall i \quad |N(v) \cap A_i| \geq t\}$
- $|A_{\text{good}}| > \binom{\hat{t}}{t}^r \cdot (t-1)$.

Удалим из G произвольные рёбра, так, чтобы выполнялось условие

$$\forall v \in A_{\text{good}} \quad \forall i \quad |N(v) \cap A_i| = t$$

Доказательство леммы: ищем недостающую долю

- В G есть полный r-дольный подграф с долями $A_1, \dots, A_r$, где $|A_i| = \hat{t}$.
- $A_{\mathrm{good}} \coloneqq \{v \in A \mid \quad \forall i \quad |N(v) \cap A_i| = t\}$
- $|A_{\mathrm{good}}| > \binom{\hat{t}}{t}^r \cdot (t-1)$.

При $v \in A_{\mathrm{good}}$ число различных вариантов для множества

$N(v) \cap (A_1 \sqcup \dots \sqcup A_r)$ равно $\binom{\hat{t}}{t}^r$.

По принципу Дирихле, в A_{good} найдутся t вершин, у которых окрестности в $(A_1 \cup \dots \cup A_r)$ совпадают.
Эти вершины и составят множество A_{r+1}.

Теорема Эрдёша—Стоуна

Теорема (Erdős, Stone, Simonovits ’1946, 1966)
Для любого фиксированного H при $n \to \infty$ имеем

$$\frac{\mathrm{ex}_H(n)}{n(n-1)/2} \to \frac{\chi(H)-2}{\chi(H)-1}$$

Переформулировка теоремы.
Для любого фиксированного графа H и любого $\varepsilon > 0$ при всех достаточно больших n в любом n-вершинном графе G, таком, что

$$\|G\| \geq \left(1 - \frac{1}{\chi(H)-1} + \varepsilon\right) \cdot \frac{n^2}{2},$$

найдётся подграф, изоморфный H.

С другой стороны, найдётся n-вершинный граф с числом рёбер

$$\geq \left(1 - \frac{1}{\chi(H)-1} - \varepsilon\right) \cdot \frac{n^2}{2}$$

в котором нет подграфов, изоморфных H.

Доказательство теоремы Эрдёша—Стоуна: существование графа без H

Рассмотрим полный $(\chi(H)-1)$-дольный граф G, в котором каждая доля имеет размер $\sim \frac{|G|}{\chi(H)-1}$.

Граф G не содержит подграфов, изоморфных H,
поскольку $\chi(G) < \chi(H)$.

При этом

$$\|G\| \sim \binom{\chi(H)-1}{2} \cdot \left(\frac{|G|}{\chi(H)-1}\right)^2 = \frac{|G|^2}{2} \cdot \frac{\chi(H)-2}{\chi(H)-1}$$

Доказательство теоремы Эрдёша—Стоуна: наличие H в графе с большим числом рёбер

Пусть теперь G — большой произвольный граф, такой, что

$$\|G\| \geq \left(1 - \frac{1}{\chi(H) - 1} + \varepsilon\right) \cdot \frac{|G|^2}{2}.$$

По Лемме (применённой с $r \coloneqq \chi(H) - 1$ и $t \coloneqq |H|$),
в G есть полный $\chi(H)$-дольный подграф G' с мощностью каждой доли $\geq |H|$. Очевидно, что $H \subseteq G'$.