

## Основы теории графов. Осень 2010. Экзаменационные вопросы.

1. Что такое доминирующее/независимое множество? Что такое покрытие (покрывающее множество)?
2. Указать какое-либо/максимальное/минимальное доминирующее/независимое/покрывающее множество в заданном графе.
3. Какой максимальный/минимальный размер независимого/доминирующего/покрывающего множества может быть для графа на  $n$  вершинах?
4. Какой формулой связаны размеры минимального покрытия и максимального независимого множества в графе?
5. Что такое дерево? Как связаны число вершин и рёбер произвольного дерева?
6. В каком случае существует дерево, матрица попарных расстояний между листьями в котором равна заданной?
7. Как в доказательстве теоремы Зарецкого осуществляется переход к матрице меньшего порядка? Как пересчитываются при этом элементы исходной матрицы?
8. Всегда ли в доказательстве теоремы Зарецкого в преобразованной матрице с элементами  $(a_{ij} - c_i - c_j)$  найдутся две совпадающие строки? Почему?
9. Обоснуйте необходимость трёх условий на матрицу в формулировке теоремы Зарецкого.
10. Во всяком ли дереве есть висячая вершина (лист)? Какое максимальное/минимальное количество листьев может быть в дереве на  $n$  вершинах?
11. Приведите алгоритм Краскала для построения минимального остовного дерева. Какой матроид соответствует этой задаче?
12. Приведите пример планарного и непланарного графов. Любой ли планарный граф можно нарисовать так, чтобы его рёбра изображались отрезками прямых? Как по укладке планарного графа построить другую его укладку, в которой заданная грань перешла бы во внешнюю?
13. Докажите формулу Эйлера для связных планарных графов.
14. Пусть планарный граф имеет ровно  $k$  компонент связности. Приведите для него формулу, аналогичную формуле Эйлера.
15. Приведите верхнюю оценку для количества рёбер в планарном графе на  $n$  вершинах. На каких графах она достигается?
16. Докажите, что граф  $K_5$  непланарен
17. Докажите, что граф  $K_{3,3}$  непланарен.
18. Сформулируйте критерий Куратовского. Докажите пункт а) леммы об удалении концов ребра, и сформулируйте пункт б) этой леммы.
19. Сформулируйте критерий Куратовского. Докажите лемму о графах Куратовского.
20. Докажите, что в любом планарном графе есть вершина степени не больше пяти.
21. Приведите пример планарного графа, в котором нет вершин степени меньше пяти.

22. Докажите теорему о пяти красках.
23. Дайте определения рода, толщины и числа скрещиваний графа. Приведите известные вам оценки этих величин для графа  $K_n$ .
24. Докажите нижнюю оценку для толщины графа  $K_n$ .
25. Сформулируйте теорему Брукса. Приведите пример графа с возможно меньшим числом вершин, для которого оценка теоремы Брукса достигается. Докажите, что для любого  $k$  найдётся граф максимальной степени вершин в котором совпадает с хроматическим числом графа и равно  $k$ .
26. В доказательстве теоремы Брукса рассматриваются компоненты, порождённые вершинами двух цветов. Как доказывается, что эти компоненты должны быть простыми путями?
27. Что такое правильная рёберная раскраска графа? Как оценивается сверху и снизу рёберное хроматическое число через максимальную степень вершины?
28. В доказательстве теоремы Визинга вводится понятие  $\alpha|\beta$  пути. Пусть  $G$  — граф, а  $xy$  — его ребро. Допустим, что если рёбра графа  $G$  нельзя правильно раскрасить в  $\Delta + 1$  цвет, а рёбра графа  $G - xy$  можно. Пусть при вершине  $x$  отсутствует цвет  $\alpha$ , а при вершине  $y$  отсутствует цвет  $\beta$ . Покажите, что тогда  $\alpha|\beta$  путь, начинающийся в  $y$ , должен заканчиваться в  $x$ .
29. Сформулируйте теорему Визинга. Как в доказательстве этой теоремы строится последовательность раскрасок  $c_i$ ?
30. Для заданной сети примените алгоритм Форда-Фалкерсона для поиска максимального потока. Укажите соответствующий минимальный разрез.
31. Какие графы называются  $k$ -связными? Для произвольного  $k$  приведите пример  $k$ -связного графа, не являющегося  $(k + 1)$ -связным.
32. Какие графы называются рёберно  $k$ -связными? Для произвольного  $k$  приведите пример рёберно  $k$ -связного графа, не являющегося рёберно  $(k + 1)$ -связным.
33. Сформулируйте теорему Татта об укладке трёхсвязных планарных графов.
34. Выведите вершинную теорему Менгера из теоремы о целочисленном потоке.
35. Выведите рёберную теорему Менгера из теоремы о целочисленном потоке.
36. Сформулируйте теорему Холла о существовании паросочетания в двудольном графе. Обоснуйте необходимость условий Холла.
37. Выведите достаточность условий Холла для существования паросочетания в двудольном графе из теоремы о целочисленном потоке.
38. Чему равно рёберное хроматическое число (хроматический индекс) двудольного графа, максимальная степень вершин в котором равна  $k$ ?
39. Что такое эйлеров цикл? В каких графах существуют эйлеровы циклы? Приведите пример графа без эйлеровых циклов.
40. Опишите алгоритм Флэри поиска эйлерова цикла. Обоснуйте корректность работы алгоритма.
41. Что такое  $k$ -фактор графа? Докажите, что любой регулярный двудольный граф имеет 1-фактор.

42. Докажите теорему о существовании 2-фактора в произвольном  $2k$ -регулярном графе.
43. Докажите теорему Грэхема—Поллака о разложении полного графа на полные двудольные. Приведите пример оптимального такого разложения.
44. Что такое гамильтонов цикл? Сформулируйте достаточные условия Оре гамильтоновости графа. Любую ли задачу из класса NP можно свести к задаче проверки существования гамильтонова цикла в графе?
45. Докажите теорему Асратяна—Хачатряна о достаточных условиях гамильтоновости графа.
46. Докажите теорему Хватала о достаточных условиях гамильтоновости графа.
47. Приведите определение матроида и хотя бы два примера матроидов. Докажите, что при любом выборе весов элементов матроида жадный алгоритм корректно решает соответствующую оптимизационную задачу.
48. Дайте определение класса NP. Что такое NP-трудная задача? Сформулируйте теорему Кука.
49. Докажите NP-трудность задачи проверки, содержит ли заданный граф клику заданного размера. По КНФ ... постройте вход для задачи КЛИКА.
50. Докажите NP-трудность задачи проверки, существует ли раскраска заданного графа в три цвета. Что можно сказать об аналогичном вопросе для двух цветов? По КНФ ... постройте вход для задачи 3-РАСКРАСКА.