Дискретные структуры

МФТИ, весна 2014

Александр Дайняк

www.dainiak.com

Типичные вопросы экзаменаторов

Теорема Оре.
Если в графе G для любых двух несмежных вершин u, v выполнено
$$\deg u + \deg v \geq |G|,$$
то в G есть гамильтонов цикл.

Возможные вопросы экзаменатора:

- Обязательно ли в графе найдётся гамильтонов цикл, если для любой пары несмежных вершин $\deg u + \deg v \geq |G| - 1$?
  (Останется ли справедливым заключение теоремы, если ослабить одно из условий теоремы?)
- Можно ли распространить эту теорему на мультиграфы (считая, что степень вершины равна числу инцидентных её рёбер)?
  (Останется ли справедливым заключение теоремы, если ослабить одно из условий теоремы?)
- Верно ли, что в любом графе, удовлетворяющем условиям Оре, есть хотя бы два различных гамильтоновых цикла?
  (Можно ли усилить заключение теоремы, не изменяя условий теоремы?)

Типичные вопросы экзаменаторов

Теорема Эйлера о планарных графах.
В любой укладке связного планарного графа на плоскости
$$\#\text{вершин} - \#\text{рёбер} + \#\text{граней} = 2.$$

Возможные вопросы экзаменатора:

- Останется ли равенство верным, если не требовать связности графа?
  (Останется ли справедливым заключение теоремы, если ослабить одно из условий теоремы?)
- Справедливо ли такое же равенство для связных мультиграфов?
  (Останется ли справедливым заключение теоремы, если ослабить одно из условий теоремы?)
- Сформулируйте аналогичное утверждение для графов с k компонентами связности.
  (Сформулировать/доказать теорему для более широкого класса объектов, немного изменив формулировку.)

Каждая теорема порождает несколько задач

Условия большинства (не всех!) доказанных в курсе теорем ослабить без последствий *нельзя*.

Увидев теорему, включающую несколько требований к объекту, *сразу подумайте над примерами* объектов, которые

- удовлетворяют всем требованиям, *кроме* какого-нибудь одного,
- и при этом для которых заключение теоремы *не*верно.

Каждая теорема порождает несколько задач

Заключения многих (не всех!) доказанных в курсе теорем усилить без последствий *нельзя*.

Увидев теорему, заключение которой содержит нестрогое неравенство, *сразу подумайте*:

- в каких случаях неравенство может обращаться в равенство,
- когда неравенство бывает строгим.

О теоремах-оценках

Многие утверждения курса имеют характер оценки какой-то величины, *например*:

- $n! \geq \left(\frac{n}{e}\right)^n$
- $R(s,t) \geq e^{(\ln s)^2/(72 \ln \ln s)}$
- $|\mathcal{F}| \leq \sum_{i=0}^{\mathrm{vc}\,\mathcal{F}} \binom{\|\mathcal{F}\|}{i}$

Ответьте сами себе на вопросы: достижимы ли эти и другие оценки в точности/асимптотически/по порядку?

Достижима ли оценка 10 за курс???

Что вызывает особенное недоумение у экзаменаторов

Записав любую формулировку теоремы или промежуточную выкладку, в которой Вы не до конца уверены, выполните простейший sanity check:

- $n! \overset{?!}{\geq} (en)^n$
- Если $A_1, \ldots, A_k \in 2^{\{1,\ldots,n\}}$ — антицепь, то $\sum_i \frac{1}{|A_i|} \overset{?!}{\leq} 1$
- В любом графе $\sum_v \deg v \overset{?!}{=} |E|$

Большинство бредовых утверждений легко разрушаются, стоит только рассмотреть небольшой конкретный пример или посмотреть, как будут вести себя величины при росте/убывании параметров.

Если студент не выполняет элементарную самопроверку, это расстраивает экзаменатора и сказывается на оценке.

Думать лучше до, чем после

Лучше сказать «не знаю», чем ляпнуть первую пришедшую в голову мысль, в которой Вы не то, что не уверены, а вовсе её не успели обдумать.

Будьте эксплицитны:

- «Я подумаю 5 минут» лучше, чем «Ы-ы-ы…»
- «Я совсем позабыл(а), как доказывать. Но с небольшой подсказкой, думаю, вспомню.» лучше, чем «Ы-ы-ы…»
- «Я не могу доказать неравенство $X > 15$, но могу доказать хотя бы, что $X > 13$» намного лучше, чем «Ы-ы-ы…»

Письменная часть

Формула из формулировки теоремы $\neq$ формулировка теоремы

Пример записей, *не* являющихся формулировками теорем:

- $\operatorname{vc} \mathcal{F}^{(h)} \leq 2dh \log_2 dh$
- $\frac{\operatorname{ex}_H(n)}{n(n-1)/2} \to \frac{\chi(H)-2}{\chi(H)-1}$

Пример корректно сформулированной теоремы:

- Для любого семейства $\mathcal{F}$, т.ч. $\operatorname{vc} \mathcal{F} = d \geq 2$, и для любого $h \geq 2$ выполнено неравенство $\operatorname{vc} \mathcal{F}^{(h)} \leq 2dh \log_2 dh$.

Письменная часть

Обязательные требования к формулировкам теорем:

- Нет «повисших в воздухе» символов
- Все *кванторы* присутствуют на своих местах, *не перепутаны*
- *Критерии* не перепутаны с *необходимыми* либо *достаточными* условиями.
- Чётко разграничено, каких свойств мы требуем от объекта и что мы получаем взамен.

Примеры некорректных формулировок:

- Если $\deg u + \deg v \geq |G|$, то G гамильтонов.
- Для любых $u, v \in V(G)$ $\deg u + \deg v \geq |G| \quad \Leftrightarrow \quad G$ гамильтонов.

Письменная часть

Определения должны быть 100% чёткими.

Примеры некорректных определений:

- Число Рамсея $R(s,t)$ — это такое n, что при раскраске графа K_n в два цвета найдётся клика первого цвета на s вершинах или клика второго цвета на t вершинах.

Проблемы:

- Пропущено слово «минимальное» перед n.
- Неясно, «при любой раскраске» или «при некоторой специально подобранной раскраске».
- Неясно, что красим: вершины или рёбра графов.

Письменная часть

Определения должны быть 100% чёткими.

Примеры некорректных определений:

- Размерность Вапника—Червоненкиса семейства $\mathcal{F}$ — это такое n, что любое множество A, где $|A| = n$, дробится $\mathcal{F}$.

Проблемы:

- Пропущено слово «максимальное» перед n.
- Поставлен квантор $\forall$ вместо $\exists$.
- Не указано, что делать, если максимального n нет.

Не уверен — спроси лектора

В слайдах иногда есть логические пробелы, которые на лекциях восполнялись устно.

Если что-то на слайде неясно, нужно спросить лектора.

Лектора нужно спросить до дня экзамена.

Если есть вопрос, как формулировать определение, чтобы оно было засчитано на письменной части экзамена, спрашивайте.