

1 Определения

Граф, ориентированный граф, степень вершины, изолированная вершина, висячая вершина, проходная вершина, независимое множество вершин, клика, число независимости, кликовое число, паросочетание, подграф, порождённый подграф, остовный подграф, связный граф, компонента связности, k -связный граф, k -рёберно-связный граф, поток в сети, разрез в сети, пропускная способность разреза, двудольный граф, полный k -дольный граф, полный граф, регулярный граф, k -фактор, маршрут, цепь, цикл, простой цикл, дерево, лес, блок, точка сочленения, мост, правильная вершинная/рёберная раскраска, хроматическое число, хроматический индекс, k -конструируемый граф, планарный граф, грань укладки планарного графа, триангуляция, эйлеров цикл, гамильтонов цикл.

2 Теоремы

- Сформулируйте теорему Форда—Фалкерсона о максимальном потоке.
- Сформулируйте теорему Холла об 1-факторе.
- Сформулируйте теорему о 2-факторе в $2k$ -регулярном графе.
- Сформулируйте вершинную и рёберную теоремы Менгера.
- Сформулируйте теорему о рекурсивном построении двусвязных графов.
- Сформулируйте теорему о рекурсивном построении трёхсвязных графов.
- Сформулируйте теорему о шести свойствах двусвязных графов.
- Сформулируйте теорему о шести свойствах деревьев.
- Сформулируйте теорему Зыкова о графах без треугольников.
- Сформулируйте теорему Брукса.
- Сформулируйте теорему Хайоша.
- Сформулируйте теорему Визинга.
- Сформулируйте теорему Турана.
- Сформулируйте теорему Оре.
- Сформулируйте теорему о максимальном числе рёбер в планарном графе.
- Сформулируйте критерий существования эйлерова цикла в графе.

3 Вопросы для конкретных графов

- В заданном графе укажите компоненты связности, висячие вершины и т. д. (вопрос на понимание основных определений).
- Постройте с помощью алгоритма Форда—Фалкерсона максимальный поток в заданной сети.
- Для заданного двусвязного графа постройте последовательность двусвязных графов (начинающуюся с простого цикла), к нему приводящую.
- Для заданного графа постройте его остовное дерево наименьшего веса.
- Для данного графа найдите точное значение его хроматического числа и хроматического индекса. Обоснуйте соответствующие верхние и нижние оценки.

4 Разные вопросы

- Какая связь между суммой степеней вершин графа и числом его рёбер?
- Запишите формально требования к потоку в сети. Что такое разрез в сети и что такое его пропускная способность?
- Приведите пример сети, в которой есть ровно 2011 различных максимальных потоков.
- Приведите пример двудольного графа, в котором нет совершенного паросочетания, и покажите, что для этого графа не выполняются условия Холла.
- Приведите пример графа, в котором есть 2-фактор, но нет 1-фактора.
- Может ли у графа на 2011 вершинах существовать 3-фактор?
- Приведите пример связного графа, не являющегося 2-связным.
- Приведите пример 2-связного графа, не являющегося 3-связным.
- Приведите пример 3-связного графа, не являющегося полным.
- Приведите пример 2011-рёберно-связного графа, не являющегося 2-связным.
- Покажите, что если в графе нет циклов, то число компонент связности в нём равно разности числа вершин и рёбер.
- Опишите деревья, в которых ровно 3 висячие вершины.
- В чём отличие алгоритмов Краскала и Прима?
- Докажите, что хроматическое число любого графа равняется максимуму из хроматических чисел блоков этого графа.
- Докажите, что хроматическое число любого графа не меньше кликового числа и не больше отношения числа вершин к числу независимости.
- Приведите пример графа без треугольников с хроматическим числом 4.
- Верно ли, что у любого трёхсвязного графа хроматическое число не меньше 3?
- Укажите какой-нибудь 4-конструируемый граф, не являющийся полным.
- Для каждого $k > 1$ приведите пример графа G , у которого $\Delta(G) = k$ и $\chi'(G) = k + 1$.
- Приведите пример трёхсвязного графа, в котором нет гамильтонова цикла.
- Приведите примеры графов, в которых есть гамильтонов цикл, но нет эйлера цикла, и наоборот.
- Верно ли, что если в графе есть гамильтонов цикл, то сам граф по крайней мере 2-связный?
- Для любого n приведите пример графа на n вершинах, у которого для любых двух несмежных u, v выполнено $\deg u + \deg v \geq n - 1$.
- Докажите формулу Эйлера: в любой укладке связного планарного графа сумма количеств вершин и граней на два больше, чем количество рёбер.
- Какое максимальное число рёбер может быть в графе на 2011 вершинах, не содержащем клик размера 11?

5 Вопросы по доказательствам основных теорем

- Как строится остаточная сеть в алгоритме Форда—Фалкерсона?
- Алгоритм Форда—Фалкерсона останавливается, когда не может найти путь из источника в сток в остаточной сети. Как по этой остаточной сети построить разрез минимальной пропускной способности в исходной сети?

- Как строится сеть по двудольному графу в доказательстве теоремы Холла?
- Как в доказательстве теоремы Холла из условий Холла следует оценка на пропускную способность разрезов в соответствующей сети?
- Выведите из теоремы Холла, что любой регулярный двудольный граф можно разложить на непересекающиеся совершенные паросочетания.
- Как в теореме о 2-факторе в $2k$ -регулярном графе строится двудольный регулярный граф по исходному регулярному графу?
- Почему теорему о 2-факторе в $2k$ -регулярном графе можно доказывать только для связных графов?
- Почему из существования 2-фактора в $2k$ -регулярном графе следует, что любой $2k$ -регулярный граф можно представить в виде объединения непересекающихся 2-факторов?
- Объясните, как в доказательстве вершинной теоремы Менгера строится сеть по графу. Как связана пропускная способность разрезов в этой сети со связностью исходного графа?
- Объясните, как в доказательстве рёберной теоремы Менгера строится сеть по графу. Как связана пропускная способность разрезов в этой сети с рёберной связностью исходного графа?
- Докажите эквивалентность каких-либо трёх из шести свойств двусвязных графов.
- Докажите, что если к k -связному графу добавить новую вершину и соединить её по крайней мере с k старыми, то получится k -связный граф.
- Докажите лемму о веере.
- Проведите индуктивный переход в теореме о существовании цикла через произвольные k вершин k -связного графа.
- Докажите, что получаемая в теореме о конструировании двусвязных графов последовательность графов содержит именно двусвязные графы.
- Докажите, что в теореме о конструировании двусвязных графов для любого двухсвязного графа можно построить приводящую к нему последовательность.
- Докажите, что получаемая в теореме о конструировании 3-связных графов последовательность графов содержит именно 3-связные графы.
- Докажите, что в теореме о конструировании 3-связных графов для любого трёхсвязного графа можно построить приводящую к нему последовательность.
- Докажите эквивалентность каких-либо трёх из шести определений дерева.
- Какого вида пары деревьев подсчитываются при доказательстве формулы Кэли?
- Выведите соотношение, связывающее величины $T(n, k)$ и $T(n, k - 1)$ из доказательства формулы Кэли.
- Используя соотношение между $T(n, k)$ и $T(n, k - 1)$, закончите доказательство формулы Кэли.
- Докажите корректность алгоритма Краскала построения остовного дерева минимального веса.
- Докажите корректность следующего алгоритма построения минимального остовного дерева. *Удаляем последовательно из исходного графа рёбра, так, чтобы получающийся граф оставался связным. При этом на каждом шаге удаляем ребро наибольшего возможного веса.*
- Докажите, что хроматическое число каждого из графов G_i в теореме Зыкова не превосходит i .
- Докажите, что хроматическое число каждого из графов G_i в теореме Зыкова не меньше i .
- Докажите, что хроматическое число графа по порядку не превосходит корня из удвоенного числа рёбер.

- Докажите, что в любом двусвязном неполном графе G при $\Delta(G) \geq 3$ найдётся пара несмежных вершин, имеющих общего соседа, удаление которых из графа не нарушает его связность.
- Докажите (пользуясь утверждением выше) теорему Брукса.
- Докажите, что хроматическое число любого k -конструируемого графа не меньше k .
- Докажите теорему Хайоша о существовании k -конструируемого подграфа.
- Обоснуйте Замечание о существовании α/β -цепи в доказательстве теоремы Визинга.
- Как строится последовательность раскрасок c_1, \dots, c_k в доказательстве теоремы Визинга?
- Докажите, что экстремальный граф из теоремы Турана должен быть полным k -многодольным.
- В предположении, что уже доказано, что экстремальный граф из теоремы Турана полный k -многодольный, докажите, что число долей равно $(k-1)$, а их мощности отличаются не более чем на единицу.