Дискретные структуры

МФТИ, весна 2014

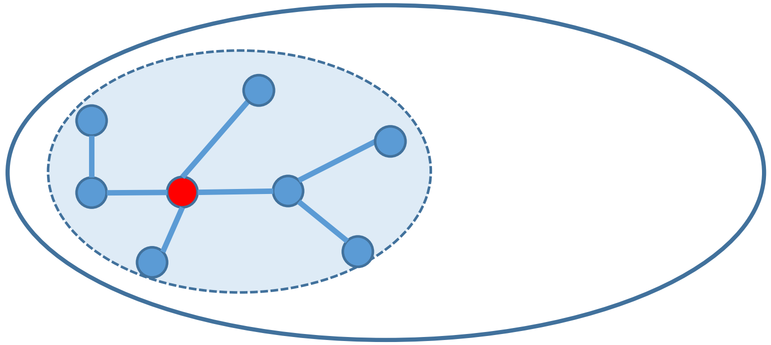
Александр Дайняк

www.dainiak.com

Нелокальность хроматического числа

Обхват графа G — это наименьший размер цикла в графе.
Обозначение: $\mathrm{g}(G)$.

Если $\mathrm{g}(G) > k$, то в G окрестность любой вершины радиуса $\lfloor k/2 \rfloor$ является деревом:

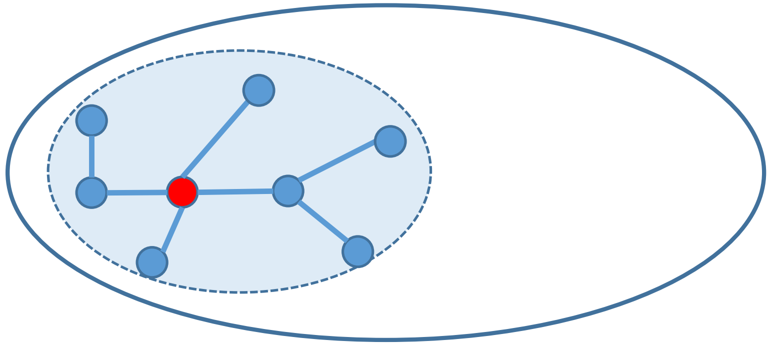


Верно ли, что если обхват графа большой (а значит, маленькие подграфы легко раскрасить), то и сам граф легко раскрасить?

Нелокальность хроматического числа

Обхват графа G — это наименьший размер цикла в графе. Обозначение: $\mathrm{g}(G)$.

Если $\mathrm{g}(G) > k$, то в G окрестность любой вершины радиуса $\lfloor k/2 \rfloor$ является деревом:



Теорема. (P. Erdős '1959)
При любом k существует граф G, для которого $\mathrm{g}(G) > k$ и $\chi(G) > k$.

Доказательство теоремы Эрдёша

Пусть $k \geq 10$. Положим $n := (4k)^{4k}$ и рассмотрим случайный граф G на n вершинах, проводя каждое ребро с вероятностью $p := n^{1/(2k)-1}$.

Введём случайную величину

$$X := \#\text{циклов длины} \leq k \text{ в нашем графе}$$

Используя линейность матожидания, получаем

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=3}^{k} \binom{n}{i} \cdot \frac{(i-1)!}{2} \cdot p^i$$

Выбираем длину цикла

Какие именно вершины участвуют в цикле

Количество способов составить цикл из выбранных вершин

Вероятность того, что все рёбра этого цикла попадут в случайный граф

Доказательство теоремы Эрдёша

- $X \coloneqq \#$циклов длины $\leq k$ в нашем графе

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=3}^{k} \binom{n}{i} \frac{(i-1)!}{2} p^i < \sum_{i=3}^{k} \frac{n^i}{i!} \frac{(i-1)!}{2} p^i < \sum_{i=3}^{k} (np)^i =$$

$$= \sum_{i=3}^{k} \left(n^{1/(2k)}\right)^i < k\sqrt{n}$$

По неравенству Маркова,

$$\Pr\left[X \geq \frac{n}{2}\right] \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{n/2} < \frac{2k}{\sqrt{n}} < \frac{1}{2}$$

Итог: $\Pr\left[\#\text{циклов длины} \leq k \text{ в графе} \geq \frac{n}{2}\right] < \frac{1}{2}$

Доказательство теоремы Эрдёша

Положим $t \coloneqq \lceil n^{1-1/(4k)} \rceil$ и введём с. в.

$$Y \coloneqq \#\text{н. м. размера } t \text{ в нашем графе}$$

Пользуясь неравенством $1 - p < e^{-p}$ и, помня, что $p = n^{1/(2k)-1}$, выводим

$$\mathbb{E}[Y] = \binom{n}{t}(1-p)^{\binom{t}{2}} < \left(\frac{en}{t}\right)^t e^{-pt(t-1)/2} = \left(t^{-1}ne^{1-p(t-1)/2}\right)^t <$$

$$< \left(t^{-1}ne^{2-pt/2}\right)^t \leq \left(n^{1/(4k)}e^{2-0.5n^{1/(4k)}}\right)^t = \left(4ke^{2-2k}\right)^t < \frac{1}{2}$$

Доказательство теоремы Эрдёша

- $t \coloneqq \left\lceil n^{1-1/(4k)} \right\rceil$
- $Y \coloneqq \#\text{н. м. размера } t \text{ в нашем графе}$
- $\mathbb{E}[Y] < \frac{1}{2}$

Пользуясь неравенством Маркова, получаем

$$\Pr[\text{в графе есть н. м. размера } t] = \Pr[Y \geq 1] \leq \mathbb{E}[Y] < \frac{1}{2}$$

То есть

$$\Pr\left[\alpha(G) \geq n^{1-1/(4k)}\right] < \frac{1}{2}$$

Доказательство теоремы Эрдёша

- $\Pr\left[\#\text{ц. дл.} \leq k \text{ в } G \text{ превосходит } \frac{n}{2}\right] < \frac{1}{2}$
- $\Pr\left[\alpha(G) \geq n^{1-1/(4k)}\right] < \frac{1}{2}$

Вероятность того, что в графе G окажется более $\frac{n}{2}$ циклов длины $\leq k$ или хотя бы одно независимое множество размера $n^{1-1/(4k)}$,

$$< \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Значит, с положительной вероятностью случайный граф G содержит не более $\frac{n}{2}$ циклов длины $\leq k$ и имеет $\alpha(G) < n^{1-1/(4k)}$.

Доказательство теоремы Эрдёша

Мы показали, что существует граф G, в котором не более $\frac{n}{2}$ циклов длины $\leq k$ и при этом $\alpha(G) < n^{1-1/(4k)}$.

Удалим из каждого цикла длины $\leq k$ произвольную вершину.

Останется граф G', для которого

- $\mathrm{g}(G') > k$
- $|G'| \geq \frac{n}{2}$
- $\alpha(G') \leq \alpha(G) < n^{1-1/(4k)}$

Доказательство теоремы Эрдёша

Мы показали, что существует граф G', в котором

- $\mathrm{g}(G') > k$
- $|G'| \geq n/2$
- $\alpha(G') \leq \alpha(G) < n^{1-1/(4k)}$

Имеем

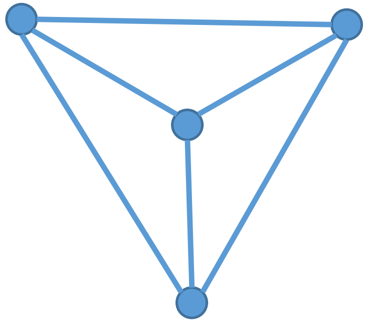
$$\chi(G') \geq \frac{|G'|}{\alpha(G')} > \frac{n/2}{n^{1-1/(4k)}} = 2k$$

Итог: $\mathrm{g}(G') > k$ и $\chi(G') > 2k$, что и требовалось.

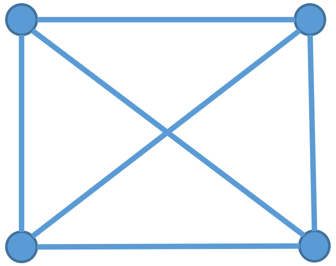
Укладки графов

Пример укладок на плоскости:

- Укладка графа K_4:

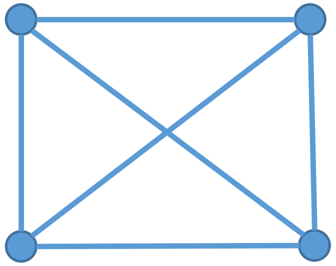


- Изображение графа K_4, не являющееся укладкой:



Планарные графы

Планарный граф — это граф, для которого существует плоская укладка.

Например, граф  планарный

Утверждение (доказанное осенью).
В любом планарном графе

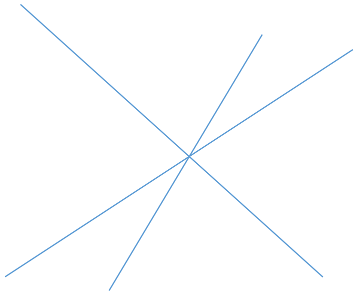
$$\#\text{рёбер} \leq 3 \cdot \#\text{вершин} - 6$$

Число скрещиваний (crossing number)

Число скрещиваний графа G — это

$$\operatorname{cr} G \coloneqq \min_{\substack{T\text{ — изобр. }G\\\text{на плоскости}}} \#\text{пересечений рёбер в }T$$

Замечание: если в изображении k рёбер пересеклись в одной точке, то скрещиваний в этой точке мы насчитаем $\binom{k}{2}$.



«Малыми шевелениями» ситуаций, когда больше двух рёбер пересекаются в одной точке можно избежать, не изменив общее число скрещиваний.

Число скрещиваний (crossing number)

Число скрещиваний графа G — это
$$\operatorname{cr} G := \min_{\substack{T\text{ — изобр. } G\\ \text{на плоскости}}} \#\text{пересечений рёбер в } T$$

Ясно, что $\operatorname{cr} G = 0$ т. и т.т., когда G планарен.

Точное значение $\operatorname{cr} G$ известно в немногих частных случаях.
Остальное — оценки.

Например, известно, что
$$\operatorname{cr} K_n \le \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{n-2}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{n-3}{2}\right\rfloor$$

Быстрых алгоритмов поиска $\operatorname{cr} G$ не известно.

Лемма о видах скрещиваний

Лемма.
Пусть T — изображение простого графа G, в котором ровно $\operatorname{cr} G$ скрещиваний рёбер, и пусть каждая точка плоскости участвует не более чем в одном скрещивании.

Пусть e' и e'' — произвольная пара рёбер, скрещивающихся в T.

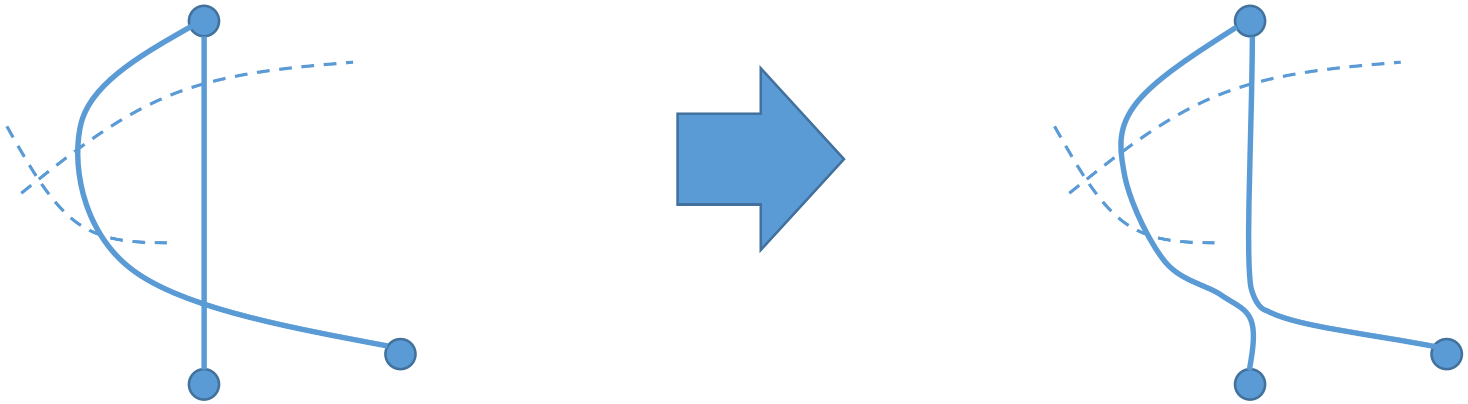
Тогда

- у e' и e'' нет общих концов,
- e' и e'' участвуют лишь в одном скрещивании.

Лемма о видах скрещиваний

Доказательство леммы:

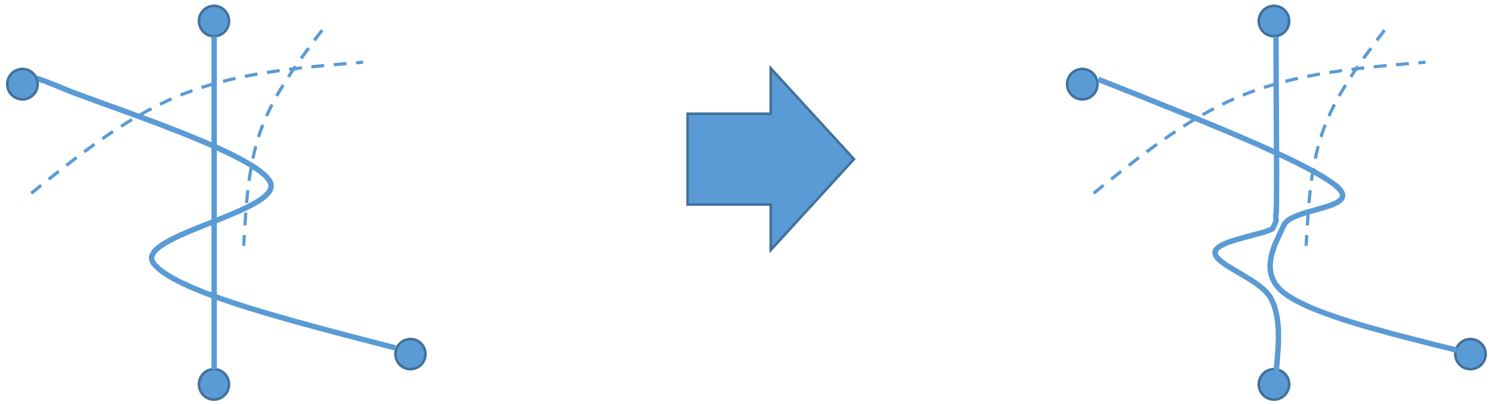
Если бы у e' и e'' был общий конец, то T можно было бы «улучшить» — уменьшить количество скрещиваний:



Лемма о видах скрещиваний

Доказательство леммы:

Если бы e' и e'' участвовали более чем в одном скрещивании, то T можно было бы «улучшить» — уменьшить количество скрещиваний:



Число скрещиваний

Утверждение.

$$\operatorname{cr} G > \|G\| - 3 \cdot |G|$$

Доказательство:
Пусть T — изображение G с минимальным (т. е. равным $\operatorname{cr} G$) числом пересечений рёбер.

Будем стирать по одному ребру до тех пор, пока не получится изображение без пересечений. Это укладка некоторого графа G', где

$$\|G'\| = \|G\| - \#\text{стёртых рёбер} \geq \|G\| - \operatorname{cr} G$$

$$\|G'\| \leq 3 \cdot |G'| - 6 = 3 \cdot |G| - 6$$

Отсюда

$$\|G\| - \operatorname{cr} G \leq 3 \cdot |G| - 6 < 3 \cdot |G|.$$

Число скрещиваний

Утверждение.

$$\operatorname{cr} G > \|G\| - 3 \cdot |G|$$

Следствие.
Например, для K_n получаем

$$\operatorname{cr} K_n \gtrsim \frac{n^2}{2}$$

А можно гораздо лучше…

Число скрещиваний

Теорема.
Для любого G, такого, что $\|G\| \geq 4 \cdot |G|$, имеем

$$\operatorname{cr} G > \frac{\|G\|^3}{64 \cdot |G|^2}$$

Следствие.

Для K_n это даёт нам оценку

$$\operatorname{cr} K_n \gtrsim \frac{n^4}{512}$$

— по порядку совпадает с известной верхней.

Д-во теоремы о числе скрещиваний

Пусть T — изображение G с $\operatorname{cr} G$ скрещиваниями.

Выберем случайное подмножество вершин $V' \subseteq V(G)$, взяв каждую вершину независимо от других с вероятностью p.

Пусть G' — подграф в G, порождённый V'.

Пусть T' — изображение G', получаемое из T удалением лишних вершин и рёбер.

Тогда

$$\#\text{скрещиваний в } T' \geq \operatorname{cr} G' > \|G'\| - 3 \cdot |G'|$$

Д-во теоремы о числе скрещиваний

$$\mathbb{E}[\#\text{скрещиваний в } T'] > \mathbb{E}[\|G'\|] - 3\,\mathbb{E}[|G'|]$$

Разлагая матожидания в суммы индикаторов, получаем

- $\mathbb{E}[|G'|] = |G| \cdot p$
- $\mathbb{E}[\|G'\|] = \|G\| \cdot p^2$
- $\mathbb{E}[\#\text{скрещиваний в } T'] = \operatorname{cr} G \cdot p^4$

Отсюда

$$\operatorname{cr} G > \|G\| \cdot p^{-2} - 3|G| \cdot p^{-3}$$

Взяв $p \coloneqq \frac{4|G|}{\|G\|}$, получим $\operatorname{cr} G > \frac{\|G\|^3}{64 \cdot |G|^2}$.

Независимые множества и степени вершин

Теорема. (Y. Caro ’1979, V.K. Wei ’1981)
Для любого графа G выполнено неравенство

$$\alpha(G) \geq \sum_{v \in V(G)} \frac{1}{1 + \deg v}$$

Доказательство:

Пусть $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$.

Выберем *случайную перестановку* вершин G (равномерно среди всех $n!$ перестановок).

Независимые множества и степени вершин

σ — случайная перестановка вершин G.

Пусть $\deg v_i = d_i$, и пусть $N(v_i)$ — соседи v_i в G.

Рассмотрим событие

$$A_i \coloneqq \text{все вершины из } N(v_i) \text{ в } \sigma \text{ правее } v_i$$

Имеем

$$\Pr[A_i] = \frac{\#\text{перестановок,благоприятствующих } A_i}{n!} =$$

$$= \frac{1}{n!} \cdot \binom{n}{d_i + 1} \cdot d_i! \cdot (n - d_i - 1)!$$

Выбираем, где в σ стоят v_i и её соседи

Упорядочиваем вершины $N(v_i)$ между собой

Упорядочиваем вершины $V \setminus \left(v_i \cup N(v_i)\right)$

Независимые множества и степени вершин

σ — случайная перестановка вершин G.

Пусть $\deg v_i = d_i$, и пусть $N(v_i)$ — соседи v_i в G.

Имеем

$$\Pr[\text{все вершины из } N(v_i) \text{ в } \sigma \text{ правее } v_i] =$$

$$= \frac{1}{n!} \cdot \binom{n}{d_i + 1} \cdot d_i! \cdot (n - d_i - 1)! = \frac{1}{d_i+1}$$

Отсюда

$$\mathbb{E}[\#\text{вершин, все соседи которых попали правее}] = \sum_{v \in V(G)} \frac{1}{1+\deg v}$$

Независимые множества и степени вершин

При случайном выборе перестановки вершин средний размер множества вершин, все соседи которых попали правее, равно

$$\sum_{v \in V(G)} \frac{1}{1+\deg v}$$

Значит, *существует* перестановка, при которой множество U вершин, все соседи которых стоят в этой перестановке правее, имеет мощность, не меньшую $\sum_{v \in V(G)} \frac{1}{1+\deg v}$.

Независимые множества и степени вершин

Для некоторой перестановки σ_{good} множество U вершин, все соседи которых стоят в σ_{good} правее, имеет мощность, не меньшую чем $\sum_{v \in V(G)} \frac{1}{1+\deg v}$.

Убедимся, что множество U независимое.

Рассмотрим произвольные $v_i, v_j \in U$.

Пусть, скажем, v_i лежит левее v_j в σ_{good}.

Тогда, по построению, $v_i \notin N(v_j)$.

Осталось заметить, что $\alpha(G) \geq |U|$.