

به نام خدا



اصول شبیه سازی

گزارش از روند حل مسائل

استاد درس

جناب آقای دکتر احمدی

تهیه کنندگان

فاطمه نیک خواه - ۸۸۲۸۰۹۶

علی لشگری - ۸۷۲۵۷۱۷

محمد رضا تأییری - ۸۸۱۲۰۷۶

*[This page intentionally left blank]*

github  
SOCIAL CODING



Fork Source Code on Github

<https://github.com/taesiri/Simulation>

We do love Open Source, Full Source code and project documentation is available on [github.com/taesiri/Simulation](https://github.com/taesiri/Simulation).

*Taesiri:* The source code is published under my Github account just because I was the only person had active Github account at publishing date.

## فهرست مطالب

مختصر اطلاعات فنی در مورد پیاده سازی پروژها	۵
مساله ۱	۶
آنالیز حساسیت	۹
مساله ۲	۱۲
آزمون مربع کای و کالموگروف-اسمیرنف	۱۳
مقایسه دو آزمون	۱۸
مساله ۳	۱۹
آزمون افراز	۱۹

## *A Brief Technical Document on Projects Implementation*

### مختصر اطلاعات فنی در مورد پیاده سازی پروژه‌ها

---

*Total Line of Codes: 1349 (Problem 1 with 467 and Problem 2 with 882) – Calculated with Code Metrics*

*Programming Languages Used: C#, IronPython, IronRuby*

*Application User interface entirely written in WPF using C#*

*Runtime Platform: .Net Framework 4 (Scripting features needs host has IronPython and/or IronRuby Installed)*

---

زبان برنامه نویسی اصلی، زبان C# می باشد. تعداد خطوط نوشته شده در حدود ۱۵۰۰ خط برای هر دو مساله می باشد.

## مسئله ۱

با استفاده از روش مولد همنهشتی آمیخته و با انتخاب پارامترهای مناسب، دنباله ای با حداقل ۱۱۰ عدد تصادفی تولید نمایید. همچنین با انجام آنالیز حساسیت، اثر پارامترهای مختلف را بر طول دنباله و چگالی آن بررسی نمایید.

در شبیه سازی نیازمند روشهایی برای به کارگیری تغییرات تصادفی از طریق تولید برنامه های رایانه ای هستیم. به منظور تولید مقادیر تصادفی نیازمند داشتن روش و برنامه رایانه ای هستیم تا دنباله ای از اعداد تصادفی با توزیع یکنواخت بین صفر و یک تولید کند و هر عدد از سایر اعداد مستقل باشد. اگر فاصله (۰ و ۱) به  $n$  رده یا زیر فاصله مساوی تقسیم شود، انتظار می رود که از  $N$  مشاهده  $N/n$  در هر رده قرار گیرد.

### مولدهای همنهشتی خطی

- $X_0$ : مقدار اولیه هسته
- $a$ : ضریب ثابت مولد
- $c$ : مقدار ثابت مولد
- $m$ : مقدار پیمانه
- نحوه انتخاب مقادیر پارامترها تأثیر فراوانی در خواص آماری از قبیل میانگین، واریانس و طول سیکل دارد. وقتی  $c$  مخالف صفر باشد مولد را مولد همنهشتی آمیخته  $(x_{i+1} = (ax_i + c) \bmod m)$  می نامند و در صورتی که  $c$  برابر صفر باشد مولد همنهشت ضربی  $(x_{i+1} = ax_i \bmod m)$  نامیده می شود.
- برای تراکم بالاتر باید  $m$  بسیار بزرگ باشد.

- اعداد تولید شده  $R_i$  ها باید دارای دو ویژگی اصلی، که عبارت است از : یکنواختی (uniformity) و استقلال (independent) و هم چنین دو ویژگی فرعی، که عبارت است از : چگالی حداکثر (max density) و طول دنباله حداکثر (max period) را داشته باشد.

حالت های بهینه انتخاب پارامترها :

### حالت اول

$$\begin{array}{l}
 C \neq 0 \text{ هم نهشتی آمیخته} \\
 (c, m) = 1 \text{ c نسبت به m اول است} \\
 A = 1 + 4k \\
 M = 2^b
 \end{array}
 \left\{
 \begin{array}{l}
 \leftarrow \text{طول دنباله } m=p=2^b
 \end{array}
 \right.$$

### حالت دوم

$$\begin{array}{l}
 C = 0 \text{ هم نهشتی ضربی} \\
 M = 2^b \\
 x_0 \text{ (هسته) فرد باشد} \\
 a = 5+8k \text{ یا } A = 3+8k
 \end{array}
 \left\{
 \begin{array}{l}
 \leftarrow p = \frac{m}{4} = 2^{b-2}
 \end{array}
 \right.$$

### حالت سوم

$$\begin{array}{l}
 C = 0 \text{ (هم نهشتی ضربی)} \\
 M \text{ عددی اول} \\
 k=m-1 \quad a^k - 1 \mod m = 0
 \end{array}
 \left\{
 \begin{array}{l}
 \leftarrow p = m-1
 \end{array}
 \right.$$

حل :

با انتخاب پارامترهای مسئله به صورت دلخواه و run نمودن برنامه، دنباله ای با اعداد تصادفی تولید می شود.

## Linear congruential generator

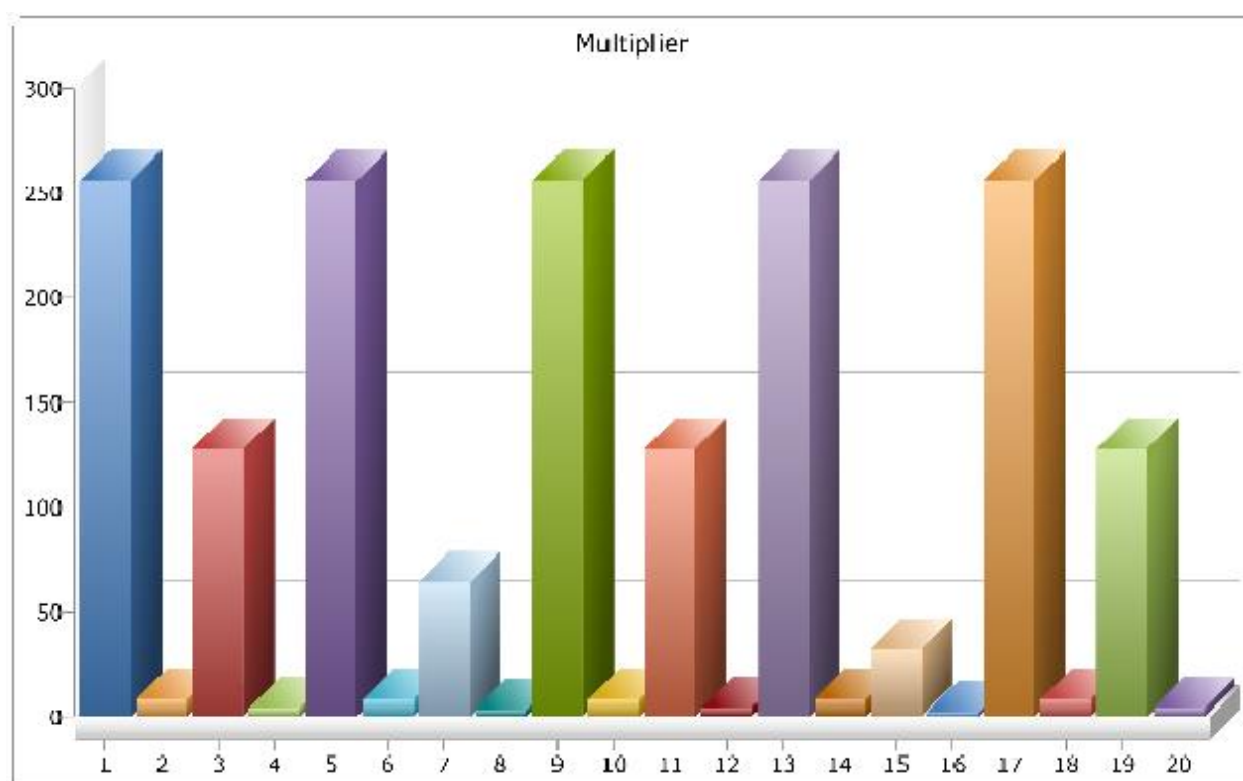
Details	Length	Numbers
Modoluse : 256 Start Value : 12 Multiplier : 3 Incerment : 7	128	0.1679688, 0.53125, 0.6210938, 0.890625, 0.6992188, 0.125, 0.4023438, 0.234375, 0.7304688, 0.21875, 0.6835938, 0.078125, 0.2617188, 0.8125, 0.4648438, 0.421875, 0.2929688, 0.90625, 0.7460938, 0.265625, 0.8242188, 0.5, 0.5273438, 0.609375, 0.8554688, 0.59375, 0.8085938, 0.453125, 0.3867188, 0.1875, 0.5898438, 0.796875, 0.4179688, 0.28125, 0.8710938, 0.640625, 0.9492188, 0.875, 0.6523438, 0.984375, 0.9804688, 0.96875, 0.9335938, 0.828125, 0.5117188, 0.5625, 0.7148438, 0.171875, 0.5429688, 0.65625, 0.9960938, 0.015625, 0.07421875, 0.25, 0.7773438, 0.359375, 0.1054688, 0.34375, 0.05859375, 0.203125, 0.6367188, 0.9375, 0.8398438, 0.546875, 0.6679688, 0.03125, 0.1210938, 0.390625, 0.1992188, 0.625, 0.9023438, 0.734375, 0.2304688, 0.71875, 0.1835938, 0.578125, 0.7617188, 0.3125, 0.9648438, 0.921875, 0.7929688, 0.40625, 0.2460938, 0.765625, 0.3242188, 0, 0.02734375, 0.109375, 0.3554688, 0.09375, 0.3085938, 0.953125, 0.8867188, 0.6875, 0.08984375, 0.296875, 0.9179688, 0.78125, 0.3710938, 0.140625, 0.4492188, 0.375, 0.1523438, 0.484375, 0.4804688, 0.46875, 0.4335938, 0.328125, 0.01171875, 0.0625, 0.2148438, 0.671875, 0.04296875, 0.15625, 0.4960938, 0.515625, 0.5742188, 0.75, 0.2773438, 0.859375, 0.6054688, 0.84375, 0.5585938, 0.703125, 0.1367188, 0.4375, 0.3398438, 0.046875

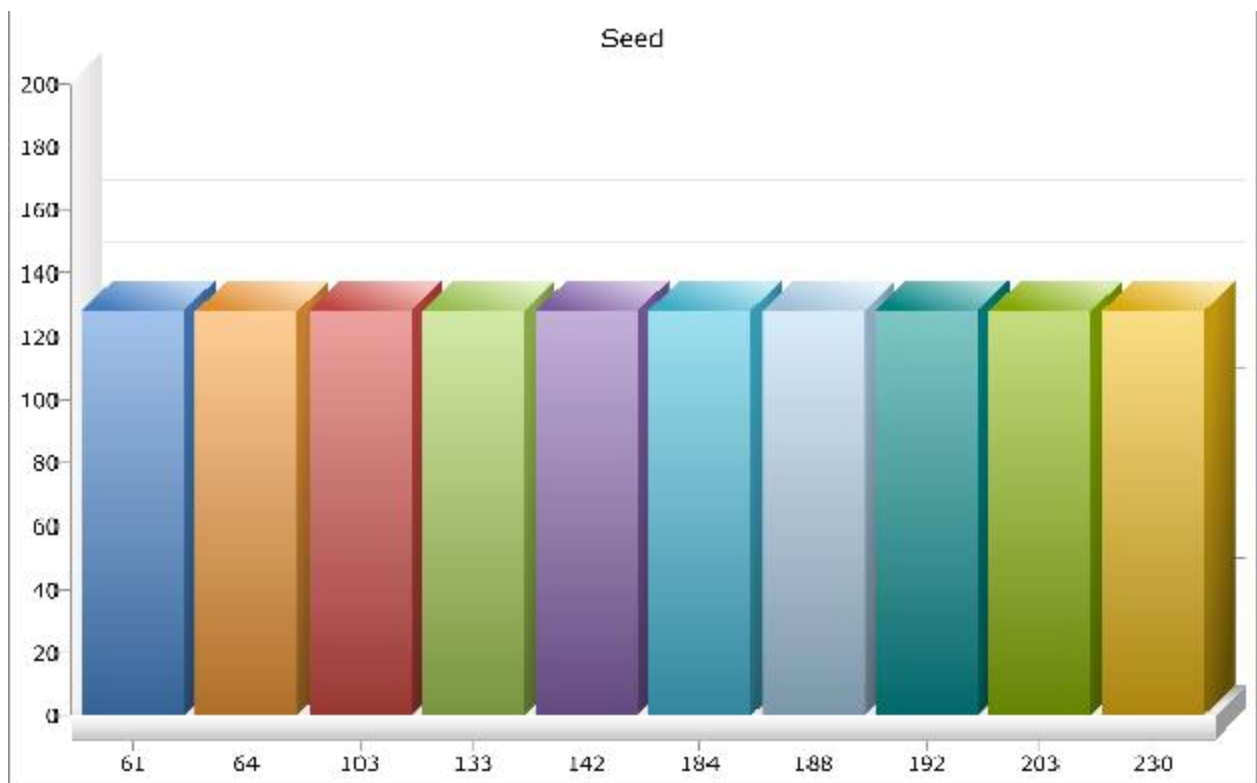
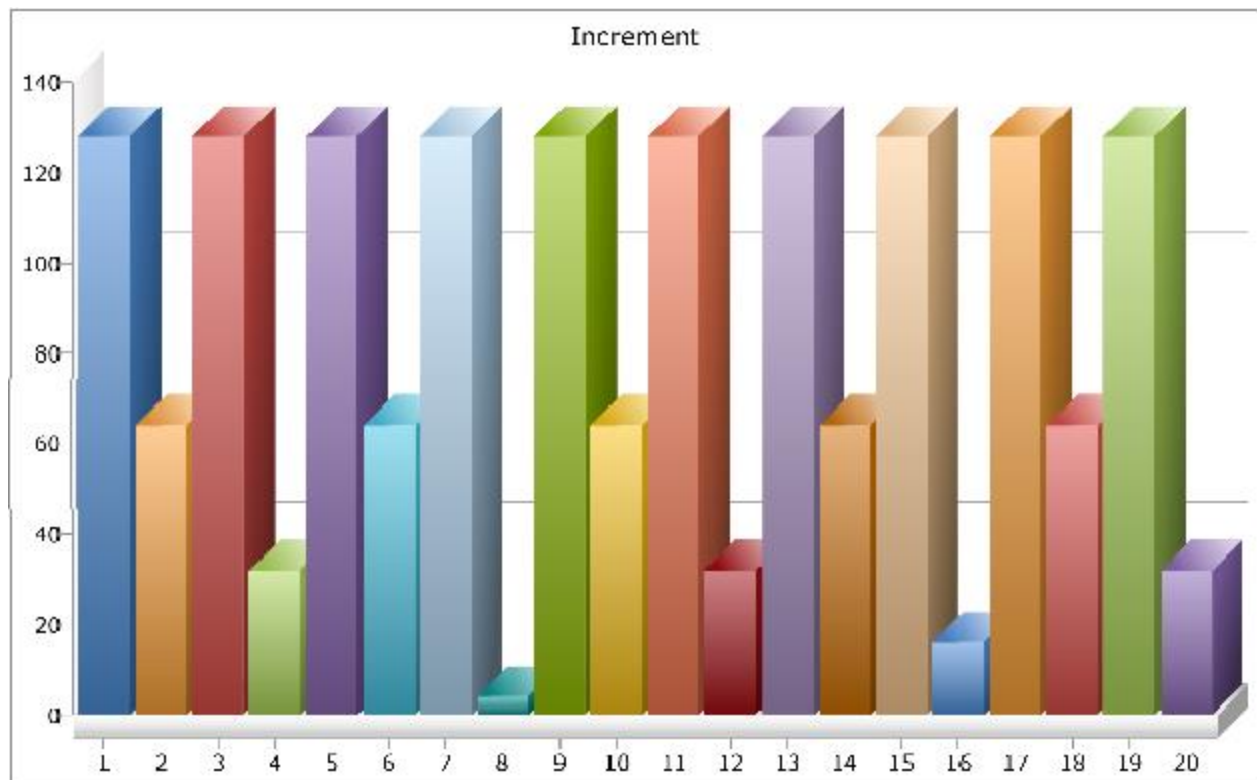


## آنالیز حساسیت ( Sensitivity analysis ) :

مطالعه تاثیرپذیری متغیرهای خروجی از متغیرهای ورودی گفته می‌شود. به عبارت دیگر روشی برای تغییر دادن در ورودی‌های یک مدل آماری به صورت سازمان یافته (سیستماتیک) است که بتوان تاثیرات این تغییرها را در خروجی مدل پیش بینی کرد .

حال می خواهیم بررسی کنیم با تغییر multiplier ، increment و seed چه تغییری بر روی طول دنباله ایجاد خواهد شد، نمودارهای ارائه شده این تغییرات را نشان می دهند.





مشاهده می شود که با تغییر seed تغییری در طول دنباله ایجاد نمی شود هم چنین اثر تغییرات multiplier و increment در طول دنباله در نمودارها مشهود است.

مفهوم چگالی تراکم می باشد و می توان اینطور نتیجه گیری نمود که هر چه طول دنباله افزایش پیدا کند به چگالی آن نیز افزوده خواهد شد .

## مسئله ۲

دنباله ۱۱۰ تایی به دست آمده در مسئله قبل را در نظر بگیرید یکنواختی اعداد تولید شده را با استفاده از آزمون کولمو-اسمیرنف و آزمون مربع کای در سطح معناداری  $\alpha = 0.05$  بررسی کنید. کدام آزمون را برای این مسئله مناسب تر می دانید؟ توضیح دهید.

### آزمونهای فراوانی

الگوریتم های تست یکنواختی اعداد تصادفی بر پایه تئوری های آماری، یا آزمونهای فرض می باشند. به عنوان مثال در تست توزیع یکنواخت ما دو فرض داریم که یکی بیان می کند که اعداد تصادفی توزیع یکنواخت دارند که ما آن را فرض صفر می نامیم و دیگری بیان می کند که اعداد تصادفی توزیع یکنواخت ندارند و ما آن را  $H_1$  می نامیم که در آمار به عنوان فرض جایگزین شناخته می شود. در این تست آماری علاقه مند به بررسی نتیجه فرض صفر رد کردن آن و یا عدم رد آن هستیم.

توجه: عدم رد فرض صفر دلیلی بر پذیرش این نکته نیست که دیگر نیازی به آزمایشهای بیشتر در زمینه توزیع یکنواخت اعداد تولید شده نمی باشد.

اعداد توزیع یکنواخت دارد  $H_0 : R_i \sim U[0,1]$

اعداد دارای توزیع یکنواخت نیستند  $H_1 : R_i \sim U[0,1]$

(صحت فرض صفر | رد فرض صفر)  $= p$  احتمال خطای نوع اول

(فرض صفر غلط | پذیرش فرض صفر)  $= p$  احتمال خطای نوع دوم

## آزمون مربع کای

فرض کنید  $(Y_1, Y_2, \dots, Y_{k-1})$  یک بردار تصادفی چند جمله ای با پارامترهای  $p_1, p_2, \dots, p_{k-1}, n$  است با میل  $n$  به سمت بی نهایت توزیع متغیر تصادفی زیر به سمت توزیع مربع کای با  $k-1$  درجه آزادی می رود.

$$U = \sum_{i=1}^k \frac{(Y_i - np_i)^2}{np_i}, np_i \geq 5$$

آزمون را فقط در یک نوبت برای کل اعداد نمی توان انجام داد، مثلاً اگر  $N=10000$  عدد تصادفی داشته باشیم باید آن را به  $M=100$  دسته  $n=100$  تایی تقسیم نماییم و برای هر یک از  $M$  دسته آماره  $U$  را با  $k=10$  محاسبه کرد این آماره باید دارای توزیع مربع کای با ۹ درجه آزادی باشد. یعنی ۱۰۰ مقدار  $U$  وجود دارد که مایلیم بدانیم دارای توزیع مربع کای با ۹ درجه آزادی هست یا خیر اگر دلیلی مبنی بر رد داشتن این توزیع مشاهده نشود یعنی دلیلی بر رد توزیع یکنواخت داشتن اعداد تصادفی نیز وجود ندارد. می توان سطح زیر تابع چگالی مربع کای با ۹ درجه آزادی را به ۱۰ سطح مساوی تقسیم نمود و انتظار می رود در هر قسمت به تعداد مساوی از  $U$  ها مشاهده گردد که خود این موضوع را نیز می توان با یک آماره مربع کای با ۹ درجه آزادی بررسی کرد.

## آزمون کالموگروف-اسمیرنف

مبنای این آزمون بر اساس بررسی بیشترین فاصله بین توزیعهای تجمعی تجربی و مورد بررسی است. اگر این فاصله به اندازه کافی کم باشد یعنی دلیلی بر رد نداشتن توزیع مورد نظر مشاهده نمی گردد.

اگر  $X$  متغیری تصادفی باشد  $F(x) = P(X \leq x)$  اگر از متغیر تصادفی  $X$  تعداد  $x_1, x_2, \dots, x_N$  مشاهده به دست آید تابع توزیع تجربی  $X$  به شرح زیر است :

$$F_N(x) = \frac{N(x_i \leq x)}{N}; i = 1, 2, \dots, N$$

در این آزمون قصد بررسی فرضیه آماری  $H_0 = X \sim F$  را داریم

تعریف: تصور کنید  $X_1, X_2, \dots, X_N$  یک نمونه از توزیع احتمال  $F$  باشد به آماره زیر آماره دو طرفه کالموگروف-اسمیرنف گویند و آماره های بعدی آماره های یکطرفه مورد نظر هستند.

$$D = \max_x |F_N(x) - F(x)|; D^+ = \max_x [F_N(x) - F(x)]; D^- = \max_x [F(x) - F_N(x)]$$

حل به روش آزمون مربع کای :

## Chi-Square Uniformity Test

No.	Observation	Expectation	$(O - E)^2 / E$
1	13	12	0.08333334
2	13	12	0.08333334
3	13	12	0.08333334
4	12	12	0
5	13	12	0.08333334
6	13	12	0.08333334
7	13	12	0.08333334
8	13	12	0.08333334
9	12	12	0
10	13	12	0.08333334
Total			0.6666666

Chi Square Test Result : There isn't enough evidence to rejecting the hypothesis!

حل به روش آزمون کالموگروف-اسمیرنف :

## Kolmogorov-Smirnov Uniformity Test

i	R(i)	i/n	(i-1)/n	(i)/n - Ri	Ri - (i-1)/n
1	0	0.0078125	0	0.0078125	0
2	0.01171875	0.015625	0.0078125	0.00390625	0.00390625
3	0.015625	0.0234375	0.015625	0.0078125	0
4	0.02734375	0.03125	0.0234375	0.00390625	0.00390625
5	0.03125	0.0390625	0.03125	0.0078125	0
6	0.04296875	0.046875	0.0390625	0.00390625	0.00390625
7	0.046875	0.0546875	0.046875	0.0078125	0
8	0.05859375	0.0625	0.0546875	0.00390625	0.00390625
9	0.0625	0.0703125	0.0625	0.0078125	0
10	0.07421875	0.078125	0.0703125	0.00390625	0.00390625
11	0.078125	0.0859375	0.078125	0.0078125	0
12	0.08984375	0.09375	0.0859375	0.00390625	0.00390625
13	0.09375	0.1015625	0.09375	0.0078125	0
14	0.1054688	0.109375	0.1015625	0.00390625	0.00390625
15	0.109375	0.1171875	0.109375	0.0078125	0
16	0.1210938	0.125	0.1171875	0.00390625	0.00390625
17	0.125	0.1328125	0.125	0.0078125	0
18	0.1367188	0.140625	0.1328125	0.00390625	0.00390625
19	0.140625	0.1484375	0.140625	0.0078125	0
20	0.1523438	0.15625	0.1484375	0.00390625	0.00390625
21	0.15625	0.1640625	0.15625	0.0078125	0
22	0.1679688	0.171875	0.1640625	0.00390625	0.00390625
23	0.171875	0.1796875	0.171875	0.0078125	0
24	0.1835938	0.1875	0.1796875	0.00390625	0.00390625
25	0.1875	0.1953125	0.1875	0.0078125	0
26	0.1992188	0.203125	0.1953125	0.00390625	0.00390625
27	0.203125	0.2109375	0.203125	0.0078125	0
28	0.2148438	0.21875	0.2109375	0.00390625	0.00390625
29	0.21875	0.2265625	0.21875	0.0078125	0
30	0.2304688	0.234375	0.2265625	0.00390625	0.00390625
31	0.234375	0.2421875	0.234375	0.0078125	0
32	0.2460938	0.25	0.2421875	0.00390625	0.00390625
33	0.25	0.2578125	0.25	0.0078125	0
34	0.2617188	0.265625	0.2578125	0.00390625	0.00390625
35	0.265625	0.2734375	0.265625	0.0078125	0
36	0.2773438	0.28125	0.2734375	0.00390625	0.00390625

37	0.28125	0.2890625	0.28125	0.0078125	0
38	0.2929688	0.296875	0.2890625	0.00390625	0.00390625
39	0.296875	0.3046875	0.296875	0.0078125	0
40	0.3085938	0.3125	0.3046875	0.00390625	0.00390625
41	0.3125	0.3203125	0.3125	0.0078125	0
42	0.3242188	0.328125	0.3203125	0.00390625	0.00390625
43	0.328125	0.3359375	0.328125	0.0078125	0
44	0.3398438	0.34375	0.3359375	0.00390625	0.00390625
45	0.34375	0.3515625	0.34375	0.0078125	0
46	0.3554688	0.359375	0.3515625	0.00390625	0.00390625
47	0.359375	0.3671875	0.359375	0.0078125	0
48	0.3710938	0.375	0.3671875	0.00390625	0.00390625
49	0.375	0.3828125	0.375	0.0078125	0
50	0.3867188	0.390625	0.3828125	0.00390625	0.00390625
51	0.390625	0.3984375	0.390625	0.0078125	0
52	0.4023438	0.40625	0.3984375	0.00390625	0.00390625
53	0.40625	0.4140625	0.40625	0.0078125	0
54	0.4179688	0.421875	0.4140625	0.00390625	0.00390625
55	0.421875	0.4296875	0.421875	0.0078125	0
56	0.4335938	0.4375	0.4296875	0.00390625	0.00390625
57	0.4375	0.4453125	0.4375	0.0078125	0
58	0.4492188	0.453125	0.4453125	0.00390625	0.00390625
59	0.453125	0.4609375	0.453125	0.0078125	0
60	0.4648438	0.46875	0.4609375	0.00390625	0.00390625
61	0.46875	0.4765625	0.46875	0.0078125	0
62	0.4804688	0.484375	0.4765625	0.00390625	0.00390625
63	0.484375	0.4921875	0.484375	0.0078125	0
64	0.4960938	0.5	0.4921875	0.00390625	0.00390625
65	0.5	0.5078125	0.5	0.0078125	0
66	0.5117188	0.515625	0.5078125	0.00390625	0.00390625
67	0.515625	0.5234375	0.515625	0.0078125	0
68	0.5273438	0.53125	0.5234375	0.00390625	0.00390625
69	0.53125	0.5390625	0.53125	0.0078125	0
70	0.5429688	0.546875	0.5390625	0.00390625	0.00390625
71	0.546875	0.5546875	0.546875	0.0078125	0
72	0.5585938	0.5625	0.5546875	0.00390625	0.00390625
73	0.5625	0.5703125	0.5625	0.0078125	0
74	0.5742188	0.578125	0.5703125	0.00390625	0.00390625
75	0.578125	0.5859375	0.578125	0.0078125	0
76	0.5898438	0.59375	0.5859375	0.00390625	0.00390625
77	0.59375	0.6015625	0.59375	0.0078125	0
78	0.6054688	0.609375	0.6015625	0.00390625	0.00390625



79	0.609375	0.6171875	0.609375	0.0078125	0
80	0.6210938	0.625	0.6171875	0.00390625	0.00390625
81	0.625	0.6328125	0.625	0.0078125	0
82	0.6367188	0.640625	0.6328125	0.00390625	0.00390625
83	0.640625	0.6484375	0.640625	0.0078125	0
84	0.6523438	0.65625	0.6484375	0.00390625	0.00390625
85	0.65625	0.6640625	0.65625	0.0078125	0
86	0.6679688	0.671875	0.6640625	0.00390625	0.00390625
87	0.671875	0.6796875	0.671875	0.0078125	0
88	0.6835938	0.6875	0.6796875	0.00390625	0.00390625
89	0.6875	0.6953125	0.6875	0.0078125	0
90	0.6992188	0.703125	0.6953125	0.00390625	0.00390625
91	0.703125	0.7109375	0.703125	0.0078125	0
92	0.7148438	0.71875	0.7109375	0.00390625	0.00390625
93	0.71875	0.7265625	0.71875	0.0078125	0
94	0.7304688	0.734375	0.7265625	0.00390625	0.00390625
95	0.734375	0.7421875	0.734375	0.0078125	0
96	0.7460938	0.75	0.7421875	0.00390625	0.00390625
97	0.75	0.7578125	0.75	0.0078125	0
98	0.7617188	0.765625	0.7578125	0.00390625	0.00390625
99	0.765625	0.7734375	0.765625	0.0078125	0
100	0.7773438	0.78125	0.7734375	0.00390625	0.00390625
101	0.78125	0.7890625	0.78125	0.0078125	0
102	0.7929688	0.796875	0.7890625	0.00390625	0.00390625
103	0.796875	0.8046875	0.796875	0.0078125	0
104	0.8085938	0.8125	0.8046875	0.00390625	0.00390625
105	0.8125	0.8203125	0.8125	0.0078125	0
106	0.8242188	0.828125	0.8203125	0.00390625	0.00390625
107	0.828125	0.8359375	0.828125	0.0078125	0
108	0.8398438	0.84375	0.8359375	0.00390625	0.00390625
109	0.84375	0.8515625	0.84375	0.0078125	0
110	0.8554688	0.859375	0.8515625	0.00390625	0.00390625
111	0.859375	0.8671875	0.859375	0.0078125	0
112	0.8710938	0.875	0.8671875	0.00390625	0.00390625
113	0.875	0.8828125	0.875	0.0078125	0
114	0.8867188	0.890625	0.8828125	0.00390625	0.00390625
115	0.890625	0.8984375	0.890625	0.0078125	0
116	0.9023438	0.90625	0.8984375	0.00390625	0.00390625
117	0.90625	0.9140625	0.90625	0.0078125	0
118	0.9179688	0.921875	0.9140625	0.00390625	0.00390625
119	0.921875	0.9296875	0.921875	0.0078125	0
120	0.9335938	0.9375	0.9296875	0.00390625	0.00390625

121	0.9375	0.9453125	0.9375	0.0078125	0
122	0.9492188	0.953125	0.9453125	0.00390625	0.00390625
123	0.953125	0.9609375	0.953125	0.0078125	0
124	0.9648438	0.96875	0.9609375	0.00390625	0.00390625
125	0.96875	0.9765625	0.96875	0.0078125	0
126	0.9804688	0.984375	0.9765625	0.00390625	0.00390625
127	0.984375	0.9921875	0.984375	0.0078125	0
128	0.9960938	1	0.9921875	0.00390625	0.00390625
Max				0.0078125	0.00390625

KS Test Result :  $\text{Max}[D+, D-] = 0.0078125$

There isn't enough evidence to rejecting the hypothesis!

### مقایسه دو آزمون مربع کای و آزمون کالموگروف-اسمیرنف:

آزمون k-S تک تک مشاهدات را در نظر می گیرد، ولی کای دو مشاهدات را رده بندی کرده و بدین ترتیب تعدادی از داده ها حذف شده و دقت کم می شود.

در مواردی که تعداد مشاهدات کم است، k-S به دلیل دقیق بودن قابل اعمال است، ولی کای دو بیشتر برای نمونه های بزرگ کاربرد دارد.

در کای دو امکان برآورد پارامترها از طریق مشاهده نیز وجود دارد (با تغییر آزمون) ولی k-S این انعطاف پذیری را ندارد.

کای دو هم در مورد داده های پیوسته و هم گسسته قابل به کارگیری است، ولی k-S تنها برای مواردی که تابع توزیع تجمعی جهشی نیست، قابل به کارگیری است.

### مسئله ۳

استقلال اعداد مندرج در دنباله ۱۱۰ تایی فوق را با استفاده از آزمون های افراز، فاصله و همبستگی بررسی کنید. در صورت نیاز  $\alpha = 0.05$  در نظر بگیرید.

#### آزمون افراز

یک مجموعه  $K$  عضوی را به چند طریق می توان به  $m$  زیرمجموعه غیر تهی افراز کرد؟

پاسخ عدد استرلینگ است  $\left\{ \begin{matrix} k \\ m \end{matrix} \right\}$  برای محاسبه عدد استرلینگ از روابط زیر استفاده می کنیم.

$$\left\{ \begin{matrix} k \\ 0 \end{matrix} \right\} = 0, \left\{ \begin{matrix} k \\ 1 \end{matrix} \right\} = 1, \left\{ \begin{matrix} k \\ 2 \end{matrix} \right\} = 2^{k-1} - 1$$

$$\left\{ \begin{matrix} k \\ k-1 \end{matrix} \right\} = \binom{k}{2}, \left\{ \begin{matrix} k \\ k \end{matrix} \right\} = 1, \left\{ \begin{matrix} k \\ m \end{matrix} \right\} = m \left\{ \begin{matrix} k-1 \\ m \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} k-1 \\ m-1 \end{matrix} \right\}$$

فرض می کنیم یک دنباله  $n$  رقمی متشکل از مجموعه های  $5$  رقمی متوالی به صورت

$$Y_{5(j-1)+1}, Y_{5(j-1)+2}, \dots, Y_{5(j-1)+5}; j = 1, 2, \dots, n/5$$

یکسان یا متفاوت بودن ارقام موجود در یک مجموعه  $5$  رقمی چند حالت ممکن است روی دهد:

$$abcde, aabcd, aabbc, aaabc, aaabb, aaaab, aaaaa$$

که می توان دو دسته  $aabbc, aaabc$  و همچنین دو دسته  $aaabb, aaaab$  را ترکیب کرد.

اگر دنباله ای از اعداد تصادفی به  $n$  دسته  $k$  رقمی تجزیه شود و قصد بررسی مختلف بودن ارقام موجود در هر دسته را داشته باشیم، اگر تعداد ارقام در پایه عددی را با  $d$  نمایش دهیم احتمال اینکه ارقام موجود در دسته  $k$

$$تایی از m رقم مختلف باشد از رابطه  $p_m = \frac{d(d-1)\dots(d-m+1)}{d^k} \left\{ \begin{matrix} k \\ m \end{matrix} \right\}$  محاسبه می گردد.$$

حل مسئله با استفاده از آزمون افراز :

## Poker Test

Combination	Observation	Expectation	$(O - E)^2 / E$
1	0	0	NaN
2	0	0	NaN
3	0	1	1
4	0	11	11
5	1	41	39.02439
6	20	51	18.84314
7	67	22	92.04546
8	40	2	722
Total	128	128	NaN

[PokerResult]