随机变量和、差、积、商的概率密度函数

科研菜鸟

http://blog.sciencenet.cn/home.php?mod=space&uid=200199

September 28, 2012

问题：设有两随机变量X和Y，其联合概率密度函数为$f(x,y)$，求：$X+Y$、$X-Y$、XY、X/Y的概率密度函数。

1 $X+Y$

解： 设$Z=X+Y$（等号表示在概率意义上相等），则

$$P(Z\le z)=P(X+Y\le z)=P(X\le z-Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{z-y}\mathrm{d}xf(x,y). \quad (1)$$

上式两边对z求导得：

$$\boxed{f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(z-y,y)\mathrm{d}y}, \quad (2)$$

或：

$$\boxed{f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,z-x)\mathrm{d}x}. \quad (3)$$

如果X和Y相互独立，则：

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(z-y)f_Y(y)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x. \quad (4)$$

上式为概率密度函数的卷积运算，通常简记为：

$$f_Z=f_X*f_Y. \quad (5)$$

2 $X-Y$

解：设$Z=X-Y$（等号表示在概率意义上相等），则：

$$P(Z\le z)=P(X-Y\le z)=P(X\le z+Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{z+y}\mathrm{d}xf(x,y). \tag{6}$$

上式两边对z求导得：

$$\boxed{f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(z+y,y)\mathrm{d}y}, \tag{7}$$

或：

$$\boxed{f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,x-z)\mathrm{d}x}. \tag{8}$$

如果X和Y相互独立，则：

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(z+y)f_Y(y)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(x)f_Y(x-z)\mathrm{d}x. \tag{9}$$

3 XY

解：设$Z=XY$（等号表示在概率意义上相等），则：

$$\begin{aligned}P(Z\le z) &= P(XY\le z)\\ &= P(X\le z/Y|Y>0)+P(X\ge z/Y|Y<0)\\ &= \int_{0}^{\infty}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{z/y}\mathrm{d}xf(x,y)+\int_{-\infty}^{0}\mathrm{d}y\int_{z/y}^{\infty}\mathrm{d}xf(x,y).\end{aligned}$$

因此：

$$\boxed{f_Z(z)=\int_{0}^{\infty}f(z/y,y)\frac{\mathrm{d}y}{y}-\int_{-\infty}^{0}f(z/y,y)\frac{\mathrm{d}y}{y}}. \tag{10}$$

如果$\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(z/y,y)}{y}$有限，则上式可简写为：

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(z/y,y)\frac{\mathrm{d}y}{|y|}. \tag{11}$$

4 X/Y

解： 设$Z = X/Y$（等号表示在概率意义上相等），则：

$$
\begin{aligned}
P(Z \leq z) &= P(X/Y \leq z) \\
&= P(X \leq zY|Y > 0) + P(X \geq zY|Y < 0) \\
&= \int_0^{\infty} \mathrm{d}y \int_{-\infty}^{zy} \mathrm{d}x f(x,y) + \int_{-\infty}^{0} \mathrm{d}y \int_{zy}^{\infty} \mathrm{d}x f(x,y).
\end{aligned}
$$

因此：

$$
\boxed{f_Z(z) = \int_0^{\infty} f(zy,y) y \mathrm{d}y - \int_{-\infty}^{0} f(zy,y) y \mathrm{d}y}. \tag{12}
$$

上式可简化为：

$$
\boxed{f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |y| f(zy,y) \mathrm{d}y}. \tag{13}
$$