Тагир Фархутдинов, ДЗ3 вариант 2

Задача 1 a) Данная последовательность не является марковской цепью, поскольку в общем случае должно быть выполнено, например

$$f(S_n^+ = x \mid S_{n-1}^+ = y,\ S_{n-2}^+ = z) = f(S_n^+ = x \mid S_{n-1}^+ = y).$$

Положим $y = 0,\ z > 0$. Тогда для $x > 0$

$$f(S_n^+ = x \mid S_{n-1}^+ = 0,\ S_{n-2}^+ = z) = f_{z+\eta(z)+\xi_n}(x) = f_{\eta(z)+\xi_n}(x - z).$$

Здесь $\eta(z)$ – независимая от ξ_n случайная величина с распределением $p(x)\theta(-x-z)/\int_{-\infty}^{-z} p(x)dx$.

В частности при $x = 0$ для равномерной плотности $p(x) = 1/2$ на $[-1, 1]$ имеется существенная зависимость от $z \in [0, 1]$

$$P(S_n^+ = 0 \mid S_{n-1}^+ = 0,\ S_{n-2}^+ = z) = P\{z + \eta(z) + \xi_n \le 0\} = \frac{3+z}{4}.$$

b) Такая последовательность не будет марковской цепью. Покажем, что в общем случае

$$f_{\eta_n}(x \mid (\eta_{n-1}, \eta_{n-2}, \eta_{n-3}) = (y, y, z)) \ne f_{\eta_n}(x \mid (\eta_{n-1}, \eta_{n-2}, \eta_{n-3}) = (y, z, z)), \quad y > z$$

Эти случаи соответствуют обновлению максимума на предпоследнем и на последнем шаге соответственно. Поэтому можно переписать эти выражения:

$$f_{\xi_n+\zeta}(x - y) \ne f_{\xi_n}(x - y), \quad x > y$$

$$P\{\xi_n + \zeta \le 0\} \ne P(\xi_n \le 0), \quad x = y$$

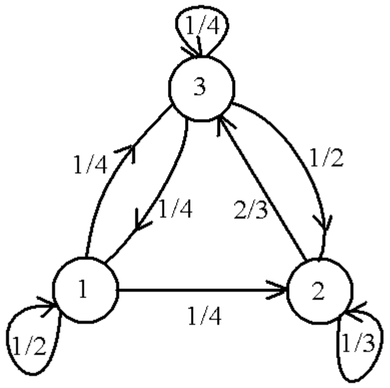
Независимая величина ζ здесь имеет плотность $p(x)\theta(-x)/F_\xi(0)$. В качестве примера снова возьмем равномерную плотность $p(x) = 1/2$ на $[-1, 1]$. Для нее выражения выше упростятся до

$$\frac{1 - (x - y)}{2} < \frac{1}{2}, \quad x - y \in (0, 1].$$

$$\frac{3}{4} > \frac{1}{2}, \quad x = y$$

Эти неравенства завершают доказательство.

Задача 2 a) Все три состояния цепи образуют один класс существенных, ненулевых, следовательно, возвратных, непериодических, и следовательно, эргодических.



b) В силу эргодичности цепи предельное распределение существует и ищется в виде $P^T x = x$. Имеем $(P^T - I)x = 0$, с учетом нормировки легко найти собственный вектор $p^T(\infty) = \begin{pmatrix} \frac{8}{39} & \frac{15}{39} & \frac{16}{39} \end{pmatrix}$. Понятно, что все строки матрицы $\lim_{n\to\infty} P^n$ будут совпадать со строкой $p^T(\infty)$.

c) Можно разложить $p(0)$ в линейную комбинацию собственных векторов матрицы P^T, тогда

$$p^T(n) = (P^T)^n p(0) = (P^T)^n (p_0(0) + p_1(0) + p_2(0)) = \lambda_0^n p_0(0) + \lambda_1^n p_1(0) + \lambda_2^n p_2(0).$$

Одно собственное значение и собственный вектор нам известны: $\lambda_0 = 1$, $\nu_0 = \begin{pmatrix} \frac{8}{39} & \frac{15}{39} & \frac{16}{39} \end{pmatrix}^T$. Два других: $\lambda_{1,2} = \frac{1}{24}\left(1 \pm \sqrt{61}\right)$ и соответствующие собственные векторы, например, такие:

$$\nu_{1,2} = \frac{1}{624}\begin{pmatrix} -\frac{11}{\sqrt{61}} \mp 1 & \frac{1}{\sqrt{61}} \pm 1 & \frac{10}{\sqrt{61}} \end{pmatrix}^T$$

Разложение начального состояния по собственным векторам имеет вид

$$p(0) = \nu_0 - \left(5\sqrt{61} + 37\right)\nu_1 - \left(5\sqrt{61} - 37\right)\nu_2$$

О единице перед ν_0 можно было догадаться заранее. В итоге

$$p(n) = \nu_0 - \left(\frac{1}{24} + \frac{\sqrt{61}}{24}\right)^n \left(5\sqrt{61}+37\right)\nu_1 - \left(\frac{1}{24} - \frac{\sqrt{61}}{24}\right)^n \left(5\sqrt{61}-37\right)\nu_2.$$

d) Для этого достаточно найти самое большое по модулю собственное число матрицы P. Это $\lambda_2 = \frac{1}{24}\left(1+\sqrt{61}\right)$. Для произвольной матричной нормы и некоторого $C>0$ получим

$$\|P^n - P^\infty\| \le C\left(\frac{1+\sqrt{61}}{24}\right)^n.$$

Задача 3 Матрица, описанная в условии задачи имеет вид, где введены обозначения $a = p_{11}$, $b = p_{12} = p_{13}$ в силу необходимой стохастичности. Причем также $a = 1-2b$.

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_{11} & p_{12} \\ p_{13} & p_{12} & p_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$$

Матрица вероятностей перехода за n шагов может быть легко вычислена с помощью диагонализации матрицы $P = \Omega\Lambda\Omega^{-1}$. Тогда $P^n = \Omega\Lambda^n\Omega^{-1}$. Одно собственное значение $\lambda_0 = 1$ и соответствующий собственный вектор $\left(\frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\right)$ очевидны. Другое собственное значение $\lambda_{1,2} = \lambda = a-b = 1-3b$ вырожденно и ему соответствует двумерное инвариантное подпространство, в котором можно выбрать векторы $(\frac{1}{3}\ \frac{-1}{3}\ 0)^T$ и $(0\ \frac{1}{3}\ \frac{-1}{3})^T$ в качестве базисных. Получаем ответ

$$P^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+2\lambda^n}{3} & \frac{1-\lambda^n}{3} & \frac{1-\lambda^n}{3} \\ \frac{1-\lambda^n}{3} & \frac{1+2\lambda^n}{3} & \frac{1-\lambda^n}{3} \\ \frac{1-\lambda^n}{3} & \frac{1-\lambda^n}{3} & \frac{1+2\lambda^n}{3} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что пределом такой матрицы при $n \to \infty$ будет являться матрица, все элементы которой равны $1/3$.

Задача 4 Производящая функция по определению имеет вид $f(t) = Et^\xi = \sum p(i)t^i$, где $p(i)$ – вероятность первого возвращения за i шагов. Для вероятности первого возвращения в состояние 0 имеем $p(2k+1) = 0$, и только для четных аргументов $p_{00}(2k) = C_{2k}^k p^k(1-p)^k$. Производящая функция будет иметь вид

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} t^{2k}\frac{(2k)!}{k!^2}p^k(1-p)^k$$