سید مصطفی احمدی

اثبات دو قضیه در سیستم های LTI

1) ثابت کنید اگر یک سیستم LTI وارون پذیر باشد آنگاه وارون آن نیز LTI است؟

برای ثابت کردن این مسئله، نیاز داریم تعریف‌ها و ویژگی‌های مهم سیستم LTI**را بررسی کنیم. یک سیستم** LTI **یا سیستم خطی تغییرناپذیربا زمان می‌تواند به صورت زیر تعریف شود:**

یک سیستم خطی تغییرناپذیربا زمان (LTI) **تأثیری را که یک سیگنال ورودی به آن اعمال می‌شود را تغییر می‌دهد و سیگنال خروجی را تولید می‌کند .یک سیستم** LTI **دارای دو ویژگی اصلی است :خطی بودن و تأخیر زمانی ثابت.**

اگر سیستم LTI **معکوس پذیر باشد، به این معنی است که ورودی و خروجی سیستم رابطه‌ای یک به یک دارند. یعنی برای هر سیگنال خروجی، تنها یک سیگنال ورودی متناظر**

وجود دارد و برای هر سیگنال ورودی نیز تنها یک سیگنال خروجی متناظر وجود دارد.

حالا برای اثبات این مسئله باید نشان دهیم که معکوس یک سیستم LTI نیز یک سیستم LTI است .برای این کار، باید نشان دهیم که سیستم LTI معکوس هم دو ویژگی خطی بودن و تغییر ناپذیری با زمان را هم داراست.

فرض کنید سیستم LTI را با نماد H نمایش دهیم .اگر یک سیگنال ورودی $x(t)$ را به سیستم H اعمال کنیم و سیگنال خروجی را با $y(t)$ نشان دهیم، آنگاه می‌توان نوشت:

$$y(t) = H[x(t)]$$

اگر سیستم H معکوس پذیر باشد، می‌توانیم عبارت بالا را به شکل زیر بازنویسی کنیم:

$$x(t) = H^{-1} [y(t)]$$

برای نمایش اینکه سیستم معکوس هم یک سیستم LTI است.

اول ویژگی خطی بودن را بررسی می کنیم.

1)**خطی بودن:برای اینکه نشان دهیم که سیستم** LTI **معکوس هم خطی است باید دو ویژگی** superposition **ومقیاس گذاری** scaling**را دارا باشد.**

Superposition: **فرض کنید** $x_1(t)$ **و** $x_2(t)$ **دو ورودی سیستم باشند و** $y_1(t)=H[x_1(t)]$ **و** $y_2(t)=H[x_2(t)]$ **خروجی های متناظر با این ورودی ها در سیستم اصلی** H **باشند اگر سیستم** H^{-1} **را به** superposition $y_1(t)$ **و** $y_2(t)$ **اعمال کنیم خواهیم داشت:**

$$H^{-1}[a_1*y_1(t) +a_2* y_2(t)]= H^{-1} [a_1 * H[x_1(t)] + a_2*H[x_2(t)]]= H^{-1}[H[a_1*x_1(t)] + H[a_2*H[x_2(t)]]= H^{-1} [H [a_1* x_1(t) +a_2 *x_2(t)]] =a_1*x_1(t)+a_2*x_2(t)$$

بنابراین وارون سیستم ویژگی superposition**را داراست.**

2)scaling: **فرض کنید** x (t) **ورودی سیستم باشند** y(t)=H[x(t)] **خروجی متناظر با این ورودی ها در سیستم اصلی** H **باشند اگر سیستم** H^{-1} **را به خروجی مقباس شده** a*y(t) **اعمال کنیم باید ورودی مقیاس شده** a*x(t)**را داشته باشیم.**

$$H^{-1}[a*y(t)]= H^{-1}[a*x(t)]]= H^{-}1[H[a*x(t)]]=a*x(t)$$

بنابراین سیستم معکوس خاصیت scalingرا داراست.

تغییرناپذیری با زمان : برای نمایش این ویژگی باید نشان دهیم که اعمال شیفت زمانی به ورودی منجر به همان شیفت زمانی در خروجی خواهد شد.

فرض کنید$x(t-t_0)$ **ورودی شیفت داده شده ورودی باشدو** $y(t-t_0)=H[x(t-t_0)]$ **خروجی متناظر سیستم اصلی** H**باشد. سپس برای سیستم معکوس خواهیم داشت:**

$$X(t-t_0)= H^{-1}[y(t-t_0)]$$

حالا باید نشان دهیم که سیگنال خروجی هم t_0 **ثانیه شیفت پیدا کرده است. با جایگذاری عبارت خروجی**

$y(t-t_0)=H[x(t-t_0)]$ **در معادله بالا بدست می اوریم:**

$$X(t-t_0)= H^{-1}[H[x(t-t_0)]]=x(t-t_0)$$

این رابطه ی تساوی نشان میدهدکه سیگنال خروجی سیستم معکوس در واقعt_0 **ثانیه شیفت یافته است که این نشان می دهدکه سیستم معکوس نیز نامتغییر با زمان است.**

به این ترتیب نشان دادیم که معکوس یک سیستم LTI نیز یک سیستم LTI است.

2) ثابت کنید یک سیستم که با معادله دیفرانسیل تعریف شده به شرط آرامش اولیه یک سیستم LTI است؟

برای اثبات این مسئله، نیاز داریم تعریف‌ها و ویژگی‌های مهم یک سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان را بررسی کنیم.

یک سیستم خطی تغییر ناپذیر با زمان را می‌توان با یک معادله دیفرانسیل خطی نشان داد. فرض میکنیم سیستم خطی تغییر ناپذیر با زمان را با نماد H نمایش دهیم .این صورت، معادله دیفرانسیل مربوط به این سیستم به شکل زیر است:

$$a_N\frac{d^N y(t)}{dt^N}+\cdots+a_1\frac{dy(t)}{dt}+a_0 y(t)= b_M\frac{d^M x(t)}{dt^M}+\cdots+b_1\frac{dx(t)}{dt}+b_0 x(t)$$

در این معادله، x(t) ورودی سیستم و y(t) خروجی سیستم هستند. a_i و b_i ضرایب معادله هستند و N و M درجات بالاترین مشتقات در معادله هستند.

اگر شرط آرامش اولیه برقرار باشد، به این معنی است که در زمان t=0 ، تمام مشتقات y(t) برابر با صفر هستند:

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = \ldots = 0$$

حالا برای اثبات اینکه سیستم خطی تغییر ناپذیر با زمان با شرط آرامش اولیه یک سیستم خطی تغییر ناپذیر با زمان است، باید نشان دهیم که شرط آرامش اولیه حفظ می‌شود .برای این کار، معادله دیفرانسیل را در t=0 حل می‌کنیم و مشتقات y(t) را در t=0 محاسبه می‌کنیم.

اگر مشتقات y(t) در t=0 برابر با صفر باشند، می‌توانیم معادله دیفرانسیل را در t=0 حل کنیم و خواهیم داشت:

$$a_N \frac{d^N y(0)}{dt^N} + \cdots + a_1 \frac{dy(0)}{dt} + a_0 y(0) = b_M \frac{d^M x(0)}{dt^M} + \cdots + b_1 \frac{dx(0)}{dt} + b_0 x(0)$$

با توجه به شرط آرامش اولیه، همه مشتقات y(t) در t=0 برابر با صفر هستند .بنابراین، عبارت سمت چپ معادله بالا نیز برابر با صفر خواهد بود.

$$a_N \frac{d^N y(0)}{dt^N} + \cdots + a_1 \frac{dy(0)}{dt} + a_0 y(0) = 0$$

اگر عبارت سمت چپ معادله بالا برابر با صفر باشد، با توجه به خطی بودن معادله دیفرانسیل و ضرایب a_i ، می‌توان نتیجه گرفت که y(t) نیز در t=0 برابر با صفر خواهد بود. بنابراین، با اثبات حفظ شرط آرامش اولیه (مشتقات y(t) در t=0 برابر با صفر برای سیستم خطی تغییر ناپذیر با زمان)، نشان دادیم که یک سیستم که با معادله دیفرانسیل خطی تعریف شده و شرط آرامش اولیه ،یک سیستم خطی تغییر ناپذیر با زمان است.

اگر یک سیستم خاصیت(اصل جمع اثار) superposition داشته باشد، برای این که خروجی سیستم به ازای ورودی های پیچیده را بدست آوریم ، کافی است ، خروجی سیستم را به ازای تک تک ورودی ها بدست بیاوریم و سپس کل خروجی ها را با یکدیگر جمع کنیم .

فرض کنید دو سیستم مشابه را داریم که به آنها ورودی های مختلفی اعمال می کنیم و خروجی های متناسب با ورودی نیز دریافت میکنیم. یعنی :