به نام حضرت دوست

**دانشکده مهندسی برق**

**درس ریاضی مهندسی**

# گزارش کار 5 matlab


نام و نام خانوادگی:

طاها انتصاری 95101117

وحید احمدی 95109083

## قسمت اول: بسط تیلور

1. بسط تیلور هر یک از توابع را تا مرتبه 3 و 6 و 8 محاسبه می کنیم.

$$f(x,y) = sin(x)y^2 \quad (x_0, y_0) = (1,0)$$

$$g(x,y) = \frac{cos(y)}{1+x^2} \quad (x_0, y_0) = (0,1)$$

$$u(x,y) = y\ ln(x) + x\ sin(y) \quad (x_0, y_0) = (1,0)$$

$$v(x,y) = J_0(x,y) \quad (x_0, y_0) = (0,0)$$

به عنوان نمونه کد دستوری زیر را مشاهده می کنیم:

```
syms x y;
f=@(x,y)(sin(x)*y^2);

ft3=taylor(f,[x,y],[1,0],'order',3);
ft6=taylor(f,[x,y],[1,0],'order',6);
ft8=taylor(f,[x,y],[1,0],'order',8);
fprintf('f(x,y) taylor series expantion at [1,0]:\n');
fprintf('third order taylor:\n');
disp(ft3);
fprintf('sixth order taylor:\n');
disp(ft6);
fprintf('8''th order taylor:\n');
disp(ft8);
```

کد دستوری را اجرا نموده و نتایج مشاهده شده برای توابع را به ترتیب در زیر می آوریم:

f(x,y) taylor series expantion at [1,0]:

third order taylor:

y^2*sin(1)

sixth order taylor:

y^2*sin(1) + y^2*cos(1)*(x - 1) - (y^2*cos(1)*(x - 1)^3)/6 - (y^2*sin(1)*(x - 1)^2)/2

8'th order taylor:

y^2*sin(1) + y^2*cos(1)*(x - 1) - (y^2*cos(1)*(x - 1)^3)/6 + (y^2*cos(1)*(x - 1)^5)/120 - (y^2*sin(1)*(x - 1)^2)/2 + (y^2*sin(1)*(x - 1)^4)/24

---

u(x,y) taylor series expantion at [1,0]:

third order taylor:

y + 2*y*(x - 1)

sixth order taylor:

y - (y*(x - 1)^2)/2 + (y*(x - 1)^3)/3 - (y^3*(x - 1))/6 - (y*(x - 1)^4)/4 + 2*y*(x - 1) - y^6/3 + y^120/5

8'th order taylor:

y - (y*(x - 1)^2)/2 + (y*(x - 1)^3)/3 - (y^3*(x - 1))/6 - (y*(x - 1)^4)/4 + (y*(x - 1)^5)/5 + (y^5*(x - 1))/120 - (y*(x - 1)^6)/6 + 2*y*(x - 1) - y^6/3 + y^120/5 - y^5040/7

---

g(x,y) taylor series expantion at [1,0]:

third order taylor:

- cos(1)*x^2 + cos(1) - sin(1)*(y - 1) - (cos(1)*(y - 1)^2)/2

sixth order taylor:

cos(1) + (sin(1)*(y - 1)^3)/6 - (sin(1)*(y - 1)^5)/120 + (sin(1)*(y - 1)^7)/5040 - x^2*cos(1) + x^4*cos(1) - x^6*cos(1) - sin(1)*(y - 1) - (cos(1)*(y - 1)^2)/2 + (cos(1)*(y - 1)^4)/24 - (cos(1)*(y - 1)^6)/720 + x^2*sin(1)*(y - 1) - x^4*sin(1)*(y - 1) + x^6*sin(1)*(y - 1) + (x^2*cos(1)*(y - 1)^2)/2 - (x^2*cos(1)*(y - 1)^4)/24 - (x^4*cos(1)*(y - 1)^2)/2 - (x^2*sin(1)*(y - 1)^3)/6 + (x^2*sin(1)*(y - 1)^5)/120 + (x^4*sin(1)*(y - 1)^3)/6

8'th order taylor:

cos(1) + (sin(1)*(y - 1)^3)/6 - (sin(1)*(y - 1)^5)/120 + (sin(1)*(y - 1)^7)/5040 - x^2*cos(1) + x^4*cos(1) - x^6*cos(1) - sin(1)*(y - 1) - (cos(1)*(y - 1)^2)/2 + (cos(1)*(y - 1)^4)/24 - (cos(1)*(y - 1)^6)/720 + x^2*sin(1)*(y - 1) - x^4*sin(1)*(y - 1) + x^6*sin(1)*(y - 1) + (x^2*cos(1)*(y - 1)^2)/2 - (x^2*cos(1)*(y - 1)^4)/24 - (x^4*cos(1)*(y - 1)^2)/2 - (x^2*sin(1)*(y - 1)^3)/6 + (x^2*sin(1)*(y - 1)^5)/120 + (x^4*sin(1)*(y - 1)^3)/6

---

v(x,y) taylor series expantion at [1,0]:

third order taylor:

1

sixth order taylor:

1 - (x^2*y^2)/4

8'th order taylor:

– 1(x^2*y^2)/4

---

2. برای هر تابع شکل تابع اصلی و تقریب های بدست آمده را در بازه های خواسته شده بر روی یک نمودار رسم می کنیم.

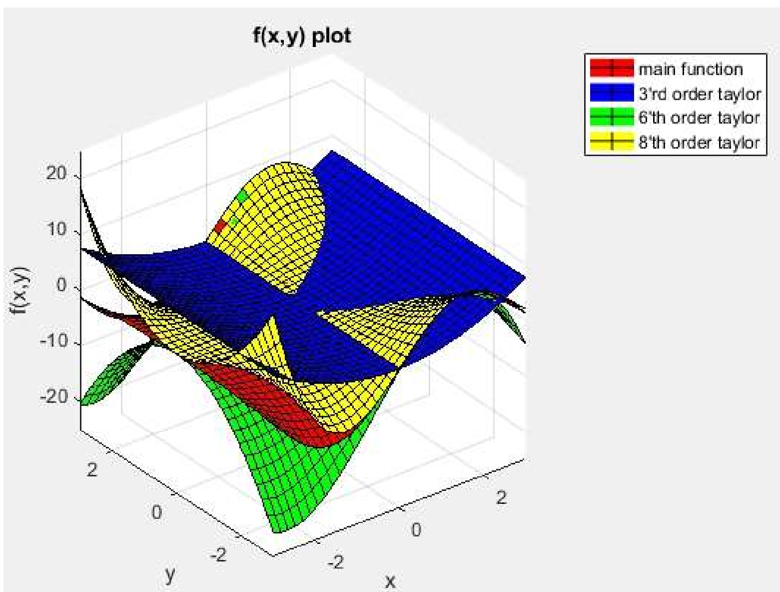
با استفاده از دستورات subplot و ezsurf نتایج زیر حاصل می شوند.

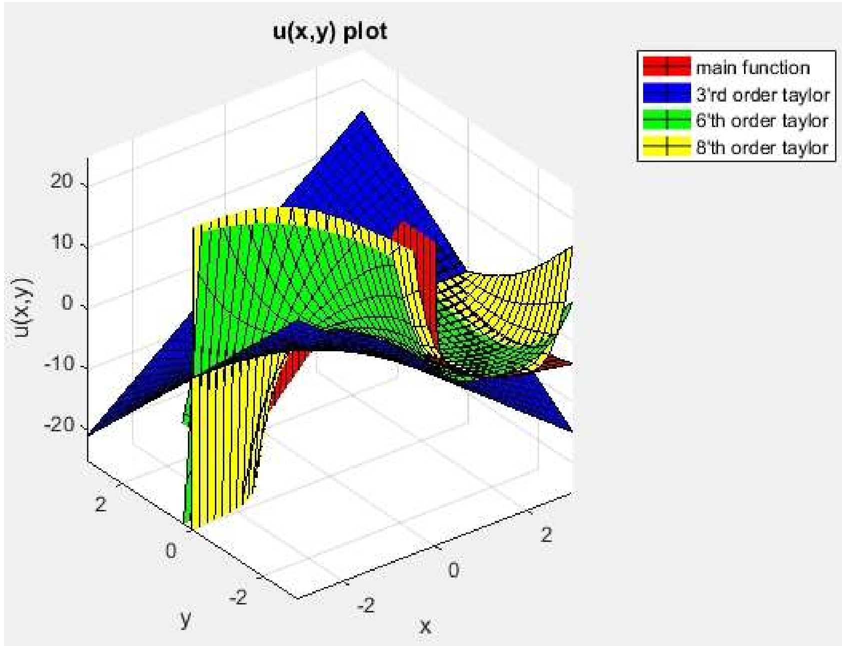
به عنوان نمونه کد دستوری زیر را مشاهده می کنیم:

```
figure(1);
fsurf(f,'r');
axis ([-3 3 -3 3 -25 25])
hold on
title('f(x,y) plot');
xlabel('x');
ylabel('y');
zlabel('f(x,y)');
fsurf(ft3,'b');
fsurf(ft6,'g');
fsurf(ft8,'y');
legend('main function ','3''rd order taylor','6''th order taylor','8''th order taylor')
```

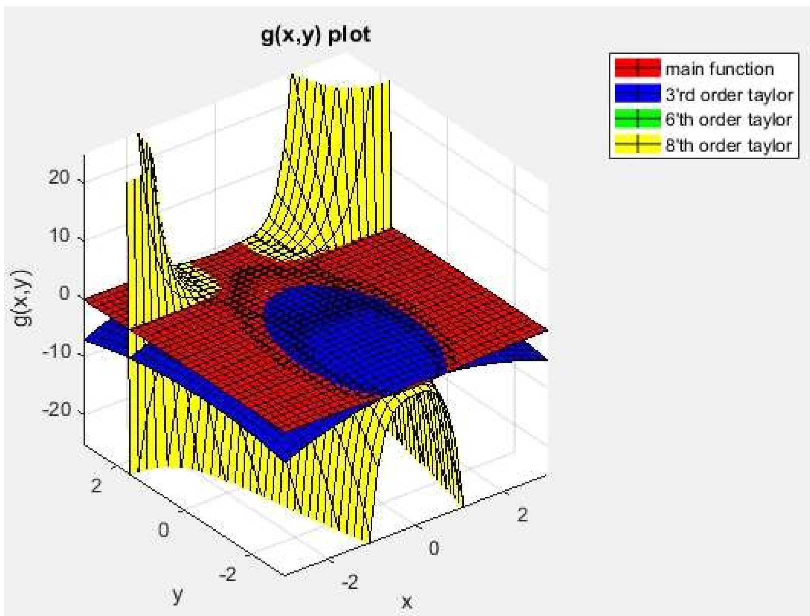
با زیاد شدن مرتبه ، سری ما به تابع اصلی همگرا می شود.

نتایج حاصل را به ترتیب در زیر می آوریم:

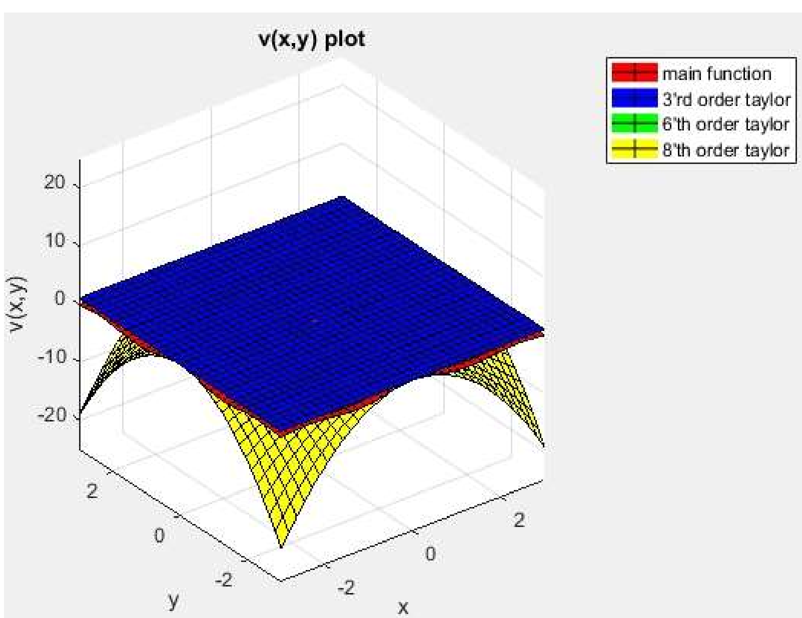




u(x,y) plot
main function
3'rd order taylor
6'th order taylor
8'th order taylor
20
10
0
-10
-20
u(x,y)
2
0
-2
y
-2
0
2
x

g(x,y) plot
main function
3'rd order taylor
6'th order taylor
8'th order taylor
20
10
0
-10
-20
g(x,y)
2
0
-2
y
-2
0
2
x

v(x,y) plot
main function
3'rd order taylor
6'th order taylor
8'th order taylor
20
10
0
-10
-20
v(x,y)
2
0
-2
y
-2
0
2
x

## قسمت دوم: انتگرال روی مسیر

برای هر یک از مسیر های داده شده انتگرال های توابع را محاسبه می کنیم. در هر مورد بررسی می کنیم مقادیر بدست آمده با هم برابرند یا نه.

به عنوان نمونه کد دستوری زیر به عنوان روش محاسبه را مشاهده می کنیم:

```
clear
format long
syms x y t;
assume (x,'real')
assume(y,'real')
assume(t,'real')
z=x+1i*y;
f=@(z)(3*z.^4+z)./((z.^2).*(z+1));
fprintf('F(z) is:\n');
pretty(f(z));
fzt1=@(t) 1+2*exp(1i*t);
fzt2=@(t) exp(1i*t);
fzt1p=@(t) 2i*exp(1i*t);
fzt2p=@(t) 1i*exp(1i*t);
foverc=integral(@(t)f(fzt1(t)).*fzt1p(t),0,2*pi);
fovercp=integral(@(t)f(fzt2(t)).*fzt2p(t),0,2*pi);
fprintf('The integral of f over C is:\n%.16f\t+%.16fi\n Over C''
is:\n%.16f\t+%.16fi\n',real(foverc),imag(foverc),real(fovercp),imag(fovercp))

% first let's calculate over C
gzt1=@(t).5*(1+1i+exp(1i*t));
gzt2=@(t)(t+1i);
gzt3=@(t).5*(-1+1i+exp(1i*t));
gzt4=@(t)t;
gzt1p=@(t)(1i/2*exp(1i*t));

goverc=integral(@(t)g(gzt1(t)).*gzt1p(t),-
pi/2,pi/2)+integral(@(t)g(gzt3(t)).*gzt1p(t),pi/2,3*pi/2)+integral(@(t)g(gzt2(t)),.5,-
.5)+integral(@(t)g(gzt4(t)),-.5,.5);
% now c'
gcpzt1=@(t).5*(1-1i+exp(1i*t));
gcpzt2=@(t)(t);
gcpzt3=@(t).5*(-1-1i+exp(1i*t));
gcpzt4=@(t)t-1i;
gcpzt1p=@(t)(1i/2*exp(1i*t));

govercp=integral(@(t)g(gcpzt1(t)).*gcpzt1p(t),-
pi/2,pi/2)+integral(@(t)g(gcpzt3(t)).*gcpzt1p(t),pi/2,3*pi/2)+integral(@(t)g(gcpzt2(t)),
.5,-.5)+integral(@(t)g(gcpzt4(t)),-.5,.5);

fprintf('The integral of g over C is:\n%.16f\t+%.16fi\n Over C''
is:\n%.16f\t+%.16fi\n',real(goverc),imag(goverc),real(govercp),imag(govercp))

assume (x,'clear')
assume (y,'clear')
assume (t,'clear')
```

نتایج حاصل محاسبه انتگرال را مشاهده می کنیم:

```
F(z) is:
                            4
 x + y 1i + 3 (x + y 1i)
---------------------------
              2
(x + y 1i)  (x + 1 + y 1i)
```

The integral of f over C is:

0.0007798155094819+12.5663706323729320i

Over C' is:

0.0007798155094556+12.5663706323729370i

```
G(z) is:
   /              2   16 \           3
exp| - (x + y 1i)  - -- | (x + y 1i)
   \                  25 /
------------------------------------
                 2             6
       (x + y 1i)  + (x + y 1i)
```

The integral of g over C is:

0.0000000000000000+-1.3939286670004836i

Over C' is:

0.0000000000000001+-1.3939286670004836i

قسمت حقیقی این دو انتگرال برابر صفر هستند و این خطای اندک به دلیل تقریب خم ها با قطعه خط است.

ابتدا نقاط تکین تابع g را به دست می‌آوریم. این نقاط عبارتند از

$$z^4 + 1 = 0$$
$$z^2 + 0.64 = 0$$

تابع f تابعی فرد است و نقاط تکینی که در دو خم C و C’ قرار می گیرند فقط در 1- فرق دارند پس مقدار تابع در نقاط تکین دو به دو با هم برابر است پس با توجه به قضیه انتگرال کوشی در می‌یابیم که مقدار انتگرال ها باید برابر باشد.

## قسمت سوم: انتگرال کوشی

1. با استفاده از قضیه کوشی، حاصل انتگرال تابع داده شده روی مسیر مذکور را بدست می آوریم:

بخش 1:

```
f(z) is :
   /              1 \            2
exp| - x - y 1i - - | ((x + y 1i)  + 1) (x + y 1i + exp(x + y 1i))
   \              2 /
-------------------------------------------------------------------
                                          1
                           x + y 1i - -i
                                          2
```

the integral by parameterizing or cauchy's integral formula is:

-1.2541569237697217          3.5433574472054965+i

بخش 2 و3:

we take g(z) to be f(z)*(z-0.5j),that is g(z):

```
   /              1 \            2
exp| - x - y 1i - - | ((x + y 1i)  + 1) (x + y 1i + exp(x + y 1i))
   \              2 /
|
```

by cauchy's integral formula we know that g(0.5j)*2pi*i

is the integral that we want to calculate.

thus by dividing the calculated integral by (g(0.5j)*2i) we will get pi

the calculated integral by taking delta to be 0.000014 is :

-1.2541575057075429          +3.5433584911323570i

the calculated pi is:3.1415936383963596

the error is :0000067662623922

the delta is 0.00001

so for intervals smaller that this we will get a better result

## قسمت چهارم: بررسی انتگرال و سری

می‌خواهیم از تابع $f(z)=\exp(z+\frac{1}{z})$ روی دایره واحد در خلاف جهت عقربه‌های ساعت انتگرال بگیریم.

کد دستوری زیر را اجرا می کنیم: ( هر سه بخش پشت سر هم آورده شده است. توضیحات در پایان آورده شده)

```
format long
syms x y t;
assume(x,'real');
assume(y,'real');
assume(t,'real');
z=x+1i*y;
f=@(z)exp(z+1./z);
fz1=@(t)exp(1i*t);
fz1p=@(t)1i*exp(1i*t);
I=integral(@(t)f(fz1(t)).*fz1p(t),0,2*pi);

% by testing I found that n=50 is an appropriate form of infinity.
n=1:50;
an=1./(factorial(n).*factorial(n-1));
sn=cumsum(an);
```

```
f(z) is :
   /               1 \            2
exp| - x - y 1i - - | ((x + y 1i)  + 1) (x + y 1i + exp(x + y 1i))
   \               2 /
-------------------------------------------------------------------
                                        1
                           x + y 1i - -i
                                        2
```

the integral by parameterizing or cauchy's integral formula is:

-1.2541569237697217 3.5433574472054965+i

we take g(z) to be f(z)*(z-0.5j),that is g(z):=

```
   /               1 \            2
exp| - x - y 1i - - | ((x + y 1i)  + 1) (x + y 1i + exp(x + y 1i))
   \               2 /
```

by cauchy's integral formula we know that g(0.5j)*2pi*i

is the integral that we want to calculate.

thus by dividing the calculated integral by (g(0.5j)*2i) we will get pi

the calculated integral by taking delta to be 0.000014 is :

-1.2541575057075429 +3.5433584911323570i

the calculated pi is:3.1415936383963596

the error is :0.0000009989305071

the delta is 0.000014

so for intervals smaller that this we will get a better result

The an's approach zero and thus the essential condition that an is convergent holds.

an for n=50 is as follows:

5.405305683169163e-128

To show that the series is convergent we must show that a(n+1)/a(n) is smaller than unity:

Columns 1 through 12

0.5000 0.1667 0.0833 0.0500 0.0333 0.0238 0.0179 0.0139 0.0111 0.0091 0.0076 0.0064

Columns 13 through 24

0.0055 0.0048 0.0042 0.0037 0.0033 0.0029 0.0026 0.0024 0.0022 0.0020 0.0018 0.0017

Columns 25 through 36

0.0015 0.0014 0.0013 0.0012 0.0011 0.0011 0.0010 0.0009 0.0009 0.0008 0.0008 0.0008

Columns 37 through 48

0.0007 0.0007 0.0006 0.0006 0.0006 0.0006 0.0005 0.0005 0.0005 0.0005 0.0004 0.0004

Column 49

0.0004

by the calculation done above it is clear that the series is convergent limit of the series is as follows:

1.5906

I is 9.9942661141156126        2*pi*j*I is 9.9942661141156162

the error of the two mentioned is 0.0000000000000036

The an's approach zero and thus the essential condition that an is convergent holds.

an for n=50 is as follows:

5.405305683169163e-128

To show that the series is convergent we must show that a(n+1)/a(n) is smaller than unity:

Columns 1 through 12

0.5000 0.1667 0.0833 0.0500 0.0333 0.0238 0.0179 0.0139 0.0111 0.0091 0.0076
0.0064

Columns 13 through 24

0.0055 0.0048 0.0042 0.0037 0.0033 0.0029 0.0026 0.0024 0.0022 0.0020 0.0018
0.0017

Columns 25 through 36

0.0015 0.0014 0.0013 0.0012 0.0011 0.0011 0.0010 0.0009 0.0009 0.0008 0.0008
0.0008

Columns 37 through 48

0.0007 0.0007 0.0006 0.0006 0.0006 0.0006 0.0005 0.0005 0.0005 0.0005 0.0004
0.0004

Column 49

0.0004

by the calculation done above it is clear that the series is convergent

limit of the series is as follows:

1.5906

l is 9.9942661141156126        2*pi*j*l is 9.9942661141156162

the error of the two mentioned is 0.0000000000000036

توضیح بخش الف:

ابتدا خم را پرمایش می‌کنیم

$$z = e^{jt} \quad 0 < t < 2\pi$$

فرض کنید f(z) تابعی مختلط بوده و C خمی جهت دار باشد که به صورت

$$C: [a, b] \to \mathbb{C} \quad z = \zeta(t)$$

پرمایش هموار شده باشد. آنگاه داریم

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f\big(\zeta(t)\big)\frac{d\zeta}{dt}dt \quad \square$$

با توجه به این قضیه و پرمایش انجام شده به رابطهٔ زیر می‌رسیم.

$$I = \oint \exp\left(z + \frac{1}{z}\right)dz = \int_0^{2\pi} \exp\left(e^{jt} + e^{-jt}\right) je^{jt}dt$$

توضیح بخش ب:

باید اثبات کنیم

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!\,(n+1)!}$$

همگراست. برای این کار از آزمون نسبت  دالامبر استفاده می‌کنیم.

$$a_n = \frac{1}{n!\,(n+1)!}: \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 0$$

پس سری داده شده همگراست.

فرض کنید این سری به L همگرا بیاشد. می‌خواهیم با کمک متلب مقدار L را تا 5 رقم اعشار محاسبه کنیم. برای این کار جملات سری را تا جمله N ام جمع می‌کنیم. مقدار N از رابطه زیر تعیین می‌شود.

$$\sum_{n=1}^{N+1} a_n - \sum_{n=1}^{N} a_n < 10^{-5}$$

توضیح بخش ج:

در انتگرال داده شده، به جای $\exp(z)$ سری آن را قرار می‌دهیم. تابع نمایی تحلیلی است پس سری تیلور آن در تمام نقاط به مقدار تابع همگراست.

$$\oint e^z\, e^{1/z} dz = \sum_{m=0}^{\infty} \oint e^{1/z} \frac{z^m}{m!} dz$$

برای تابع $\exp(\frac{1}{z})$ حول نقطه صفر سری لوران می‌نویسیم. تابع در تمام نقاط به جز صفر تحلیلی است پس سری لوران در تمام نقاط جز صفر به تابع همگراست.

$$\oint e^z\, e^{1/z} dz = \sum_{m=0}^{\infty} \oint e^{1/z} \frac{z^m}{m!} dz = \sum_{m=0}^{\infty} \oint \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\, z^n} \frac{z^m}{m!} dz = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \oint \frac{1}{n!\, m!} z^{m-n} dz$$

میدانیم انتگرال سمت راست، تنها وقتی ناصفر است که توان z برابر 1- باشد یعنی

$$\oint e^z\, e^{1/z} dz = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \oint \frac{1}{n!\, m!} z^{m-n} dz = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!\,(n-1)!} \oint \frac{dz}{z} = 2\pi j \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!\,(n-1)!}$$

و این همان چیزی است که از محاسبهٔ عددی انتظار داشتیم.