به نام حضرت دوست

دانشکده مهندسی برق

درس ریاضی مهندسی

گزارش کار پروژه matlab

نام و نام خانوادگی:

طاها انتصاری 95101117

وحید احمدی 95109083

در ابتدای گزارش لازم است ذکر شود که تابع پله متلبheaviside به ازای ورودی صفر به جای مقدار 1 مقدار 0.5 را برمیگرداند.از آنجایی که تبدیل z متلب خود یکطرفه است عموما نیازی به نوشتن تابع پله نیست اما اگر آن را بخواهیم بنویسیم بایستی به جای heaviside(n) از heaviside(n+1) استفاده کنیم تا به ورودی صفر نیز مطابق خواست ما خروجی دهد.

قسمت اول: بررسی خواش Z

بخش اول:

با استفاده از تابع ztrans(x , n , z) تبدیل Z دنباله x[n] را محاسبه می کنیم:

```
syms a n;
% Since matlab itself calculates the one-sided Z-transform, there is no need
% for the heaviside function to be written.
x=@(a,n) a^n;
X=ztrans(x(a,n));
pretty(X);
fprintf('the Region of convergence is |z|>a\n');
```

```
    z
- -----
  a - z
```

همچنین برای همگرایی سری

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n}$$

می دانیم باید شرط زیر برقرار باشد:

$$1 > \left|\frac{a}{z}\right| \rightarrow |z| > |a|$$

یعنی تبدیل Z دنباله فوق برای نقاطی در صفحه مختلط با اندازه بزرگتر از $|a|$ همگراست.

بخش دوم:

با استفاده از متلب تبدیلZ دنباله‌های داده شده را به دست می‌آوریم.

```
syms k c;
y=@(a,n)n*x(a,n);
w=@(a,n,c)c^n*x(a,n);
t=@(a,n)symsum(x(a,k),k,0,n);
r=@(a,n)x(a,n+1);


Y=ztrans(y(a,n));
W=ztrans(w(a,n,c));
T=ztrans(t(a,n));
R=ztrans(r(a,n));
fprintf('y=nx(n) and its ztransform are:\n');
pretty(y(a,n));
pretty(Y);
fprintf('this transform is (-z) time X(z)''\n\n\n');
```

```
y=nx(n) and its ztransform are:
 n
a  n

   a z
--------
       2
(a - z)

this transform is (-z) time X(z)'

w=c^nx(n) and its ztransform are:
 n  n
a  c

       z
- -----------
    /     z \
  a | c - - |
    \     a /

this transform is X(z/c)
```

```
t=(sum(x(k))from zero to n) and its ztransform are:
{   n + 1   if  a == 1
{
{    n
{ a a  - 1
{ --------  if  a ~= 1
{   a - 1

{              z         z
{           ----- + --------           if  a == 1
{           z - 1          2
{                   (z - 1)
{
{          z                 a z
{ - --------------- - ---------------  if  a ~= 1
{   (a - 1) (z - 1)    (a - z) (a - 1)

the transform of the given serires is equal to:
X(z)/(z-1)+z/(z-a).
 had the summation been up to (n-1) terms,the second term
 i.e. z/(z-a) would have been omitted.
```

```
r=x(n+1) and its ztransform are:
 n + 1
a

   a z
- -----
  a - z

Had this transform been taken completely and two-sided,it would have been
 equal z times X(z).but matlab only calculates onesided Z transform
 thus in this case it results in z times (X(z)-a)
```

نکات تبدیل های بالا:

تبدیل حاصل جمع $\sum_{0}^{n} x[n]$

$$\sum_{0}^{n} x[n] = x[n] + \sum_{0}^{n-1} x[n] \xrightarrow{Z-trans} F(z) + \frac{F(z)}{z-1}$$

ضرب شدن دنباله در n

تاثیر ضرب شدن در n به شکل زیر دیده می‌شود.

$$y[n] = nx[n]$$

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} nx[n]z^{-n} = -z\sum_{n=0}^{\infty} x[n](-nz^{-n-1}) = -z\sum_{n=0}^{\infty} x[n]\frac{d}{dz}z^{-n} = -z\frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} = -z\frac{dX}{dz}$$

$$X(z) = \frac{z}{z-a} \rightarrow Y(z) = -z\frac{d}{dz}X(z) = \frac{az}{(z-a)^2}$$

شیفت واحد در زمان

در این بخش دیده شد که شیفت یک واحدی زمانی به رابطه زیر منجر می‌شود.

$$r[n] = x[n+1]$$

$$R(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n+1]\, z^{-n} \xrightarrow{m=n+1} Y(z) = z \sum_{m=1}^{\infty} x[m] z^{-m} = z(\sum_{m=0}^{\infty} x[m] \times z^{-m} - x[0] \times z^{0})$$

$$R(z) = zX(z) - zx[0]$$

$$R(z) = z\frac{z}{z-a} - z = \frac{az}{z-a}$$

ضرب در c^n

ضرب دنباله در c^n باعث scale شدن در حوزه Z می‌شود.

$$w[n] = c^n x[n]$$

$$W(z) = \sum c^n\, x[n] z^{-n} \longrightarrow W(z) = X\left(\frac{z}{c}\right) = \sum x[n] \left(\frac{z}{c}\right)^{-n}$$

$$X(z) = \frac{z}{z-a} \to W(z) = \frac{\frac{z}{c}}{\frac{z}{c} - a} = \frac{z}{z-ac}$$

قسمت دوم: بررسی تاثیر ROC

بخش اول

ابتدا با کمک تابع ztrans تبدیل Z دنباله داده شده را محاسبه می‌کنیم.

$$x_1[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] + 3^n\, u[n]$$

```
% matlab's Heaviside function has a slight difference with what we already
% know.the difference is the point n=0 where instead of 1,it returns 0.5
% by simple tests I found that instead of heaviside(n),it should be written
% heaviside(n+1),and it is obvious why.
clear
syms n
x1=@(n) (1/3^n+3^n)*heaviside(n+1);
X1=ztrans(x1(n));
pretty(X1);
fprintf('with ROC :|z|>3\n');
```

```
   /   1      3 \   5 z      /   1     1 \
z | ----- + - | - --- + z | ----- + - |
  |     1   2 |     3      \ z - 3   6 /
  | z - -     |
  \     3     /

with ROC :|z|>3
```

بخش دوم

$$x_2[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] - 3^n\, u[-n-1]$$

$$X_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n z^{-n} u[n] - \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} 3^n z^{-n} u[-1-n]$$

$$X_2(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \left(\frac{1}{3z}\right)^n - \sum_{n=-\infty}^{n=-1} \left(\frac{3}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{n=\infty} \left(\frac{1}{3z}\right)^n - \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{3z}} - \frac{\frac{z}{3}}{1-\frac{z}{3}}$$

$$X_2(z) = \frac{z}{z-\frac{1}{3}} + \frac{z}{z-3} \qquad ROC:\ \frac{1}{3} < |z| < 3$$

```
the transform is:
  z        z
----- + -----
z - 3       1
        z - -
            3

the transform is the same as X1(z) but with a different ROC
with ROC 1/3<|z|<3
```

بخش سوم

تبدیل Z داده شده دو قطب دارد. با توجه به نکاتی که در درس خوانیدم، سه دنباله وجود دارد که این تابع تبدیل Z آن هاست.

```
fprintf('we can make up the following series that would seem to give the \n
syms n
x3=@(n)3^n*heaviside(n)-1/3^n*heaviside(-n-1);
pretty(x3(n));
```

```
we can make up the following series that would seem to give the
 same Z transform but the ROC is obviusly diffenrent.
where as in the first series mentioned in the question
 the ROC is a disk, the latter has no region of convergence
 n              1
3  heaviside(n) - -- heaviside(- n - 1)
                 n
                3

or we can make this one:
  1                   n
- -- heaviside(- n - 1) - 3  heaviside(- n - 1)
  n
 3
```

باید دنباله دیگری با این تبدیل Z و ناحیه همگرایی $z < \frac{1}{3}$ پیدا کنیم.

$$X_3(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{3z}} - \frac{\frac{z}{3}}{1-\frac{z}{3}} = z\left(\frac{-3}{1-3z} + \frac{-z}{3-z}\right)$$

پس از تعریف تبدیل Z داریم

$$x_3[n] = -3^n u[-1-n] - \left(\frac{1}{3}\right)^n u[-1-n] \quad ROC: |z| < \frac{1}{3}$$

بخش چهارم

تبدیل Z را به فرم کسری استاندارد می‌نویسیم.

$$X\,(z) = \frac{10z - 6z^2}{-3z^2 + 10z - 3} = \frac{-6+10z^{-1}}{-3+10z^{-1}-3z^{-2}}$$

```
b=[2 -10/3 0];
a=[1 -10/3 1];
Z=[1 1/z 1/z^2];
X2=@(z)sum(b.*Z)/sum(a.*Z);
y=iztrans(X2(z));
fprintf('the inverse z transform of X2(z) is:\n');
disp(y);
fprintf('the above series is equal to x1(n)\n');
```

the inverse z transform of X2(z) is:
3^n + (1/3)^n

the above series is equal to x1(n)

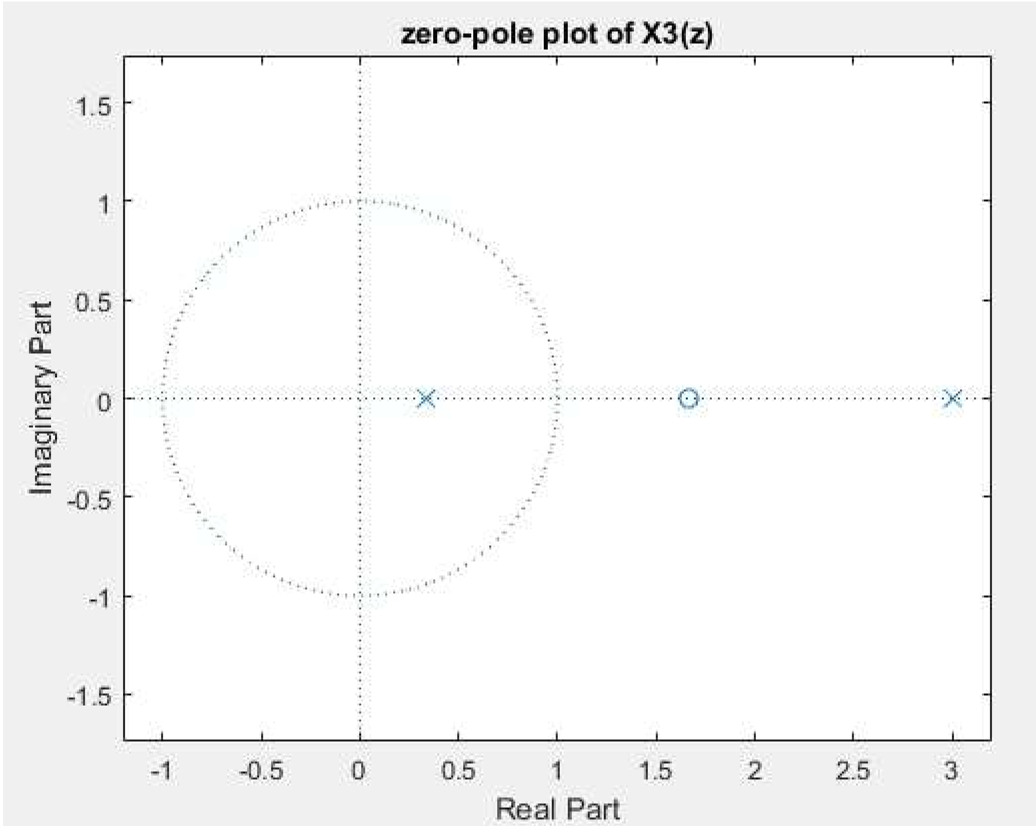
بخش پنجم

تابع دو قطب دارد.

$$z = 3\,, z = \frac{1}{3}$$

نمودار صفر و قطب به صورت زیر است:

```
[r p k]=residuez(b,a);
figure();
clear r;
r=roots(b);
zplane(r,p);
title('zero-pole plot of X3(z)');
fprintf('the ROC of X1(z) is |z|>3\n');
fprintf('the ROC of X2(z) is 1/3<|z|<3\n');
fprintf('the transform of X3(z) does not converge\n\n\n\n');

fprintf('in two sided Z-transform given only the z transform without the ROC\n
```



$X_1(z)$ در بیرون دو قطب یعنی $|z|>3$ همگرا می‌شود.

$X_2(z)$ در بین دو قطب یعنی $\frac{1}{3} < |z| < 3$ همگرا می‌شود.

$X_3(z)$ در ناحیه داخلی یعنی $|z| < \frac{1}{3}$ همگرا می‌شود.

بخش شش

متلب از تبدیل Z دست راستی استفاده می‌کند پس می‌تواند هر تبدیل Z را به صورت یکتا معکوس کند. صرف دانستن تبدیل Z برای بازیابی دنباله کافی نیست. این می‌تواند به فرم دانستن علی بود یا پایدار بودن سیستم باشد.ROC حلقه یا دایره هایی است که شامل قطب نمی‌شود. برای تبدیل Z یک طرفه این موضوع برقرار نیست و با داشتن تبدیل می‌توان دنباله اول را بازیابی کرد.

قسمت سوم - تبدیل Z معکوس

بخش اول و دوم وسوم

ناحیه همگرایی(ROC) بیرون دایره مد نظر می باشد:

$$X(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\times\left(\frac{1}{1-\frac{2}{z}}-\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\right)$$

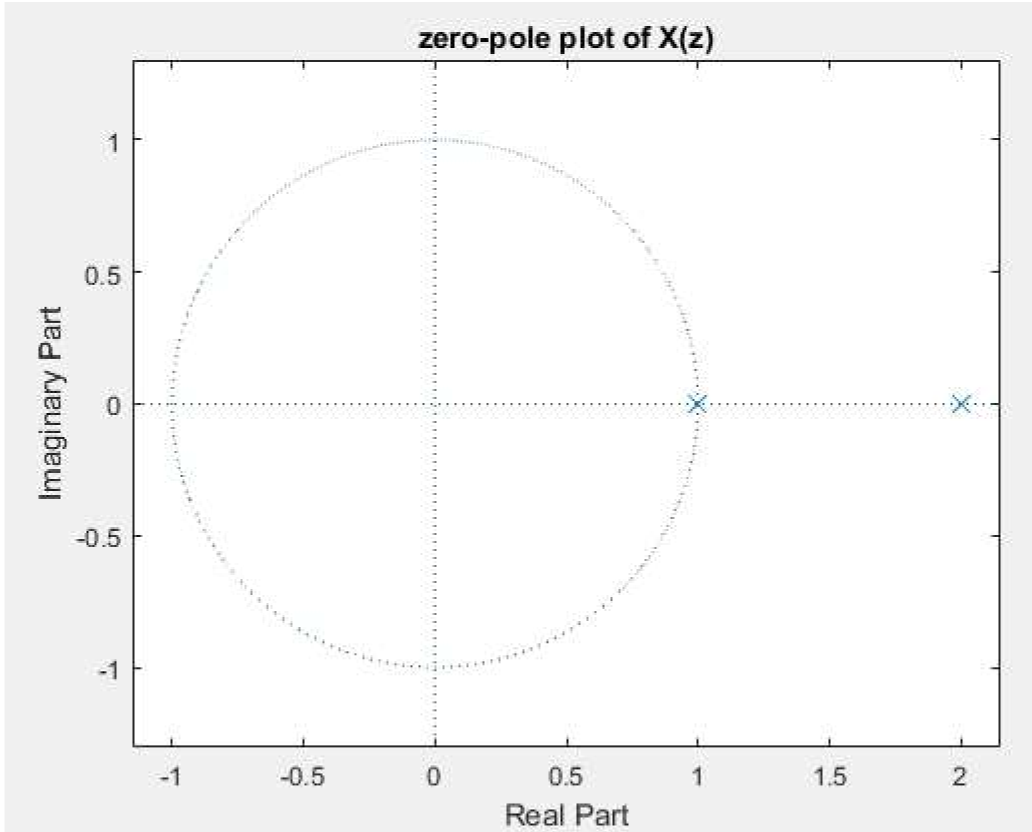
$$X(z)=\sum_{m=1}^{\infty}(2^{m-1}-1)\,z^{-m}=\sum_{m=0}^{\infty}x[m]z^{-m}\longrightarrow x[m]=\begin{cases}0 & , \quad m=0\\ 2^{m-1}-1 & , \quad m>0\end{cases}$$

برای تبدیل معکوس گرفتن به دو ناحیه همگرایی $ROC_1:|z|>1$ و $ROC_2:|z|>2$ میرسیم که ناحیه مورد نظر ما اشتراک این دو ناحیه است.

$$ROC\ :|z|>2$$

```
syms z n t;
X=@(z)1./(z-2)-1./(z-1);
pretty(X(z));
fprintf('Since it is assumed that all Z transform are one-sided\nthus the ROC is |z|>2\n');
fprintf('the inverse z transform by seperation of fractions:\n');
g=@(t) 5*exp(1i*t);
gp=@(t) 5i*exp(1i*t);
integrand=@(n,z)z.^(n-1)./((z-1).*(z-2));
I=@(n)integral(@(t)integrand(n,g(t)).*gp(t),0,2*pi)/(pi*2i);
%
%
x=iztrans(X(z));
pretty(x);
[r,p,k]=residuez([1 0 0],[1,-3,2]);
%zplane([],[1;2])
figure();
zplane([],p)
title('zero-pole plot of X(z)');
```

```
  1       1
----- - -----
z - 2   z - 1

Since it is assumed that all Z transform are one-sided
thus the ROC is |z|>2
the inverse z transform by seperation of fractions:
 n
2    kroneckerDelta(n, 0)
-- + -------------------- - 1
 2             2
```



بخش چهار و پنج

خم انتگرال‌گیری باید کاملا در ناحیه‌ای که می‌خواهیم تبدیل در آن همگرا باشد قرار بگیرد. خمی را در نظر می‌گیریم که شامل هر دو قطب می‌شود.

1. فرض می‌کنیم که n مخالف صفر

$$x[n] = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \ z^{n-1}\left(\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}\right)dz = \frac{1}{2\pi i}\left(2\pi i \times 2^{n-1} - 2\pi i \times 1\right)$$

اگر n مخالف صفر باشد تابع z^{n-1} تحلیلی است و می‌توان از فرمول انتگرال کشی برای محاسبه هر دو انتگرال بالا استفاده کرد.

$$x[n] = \ 2^{n-1} - 1 \quad n \neq 0$$

2. حل برای حالت n=0

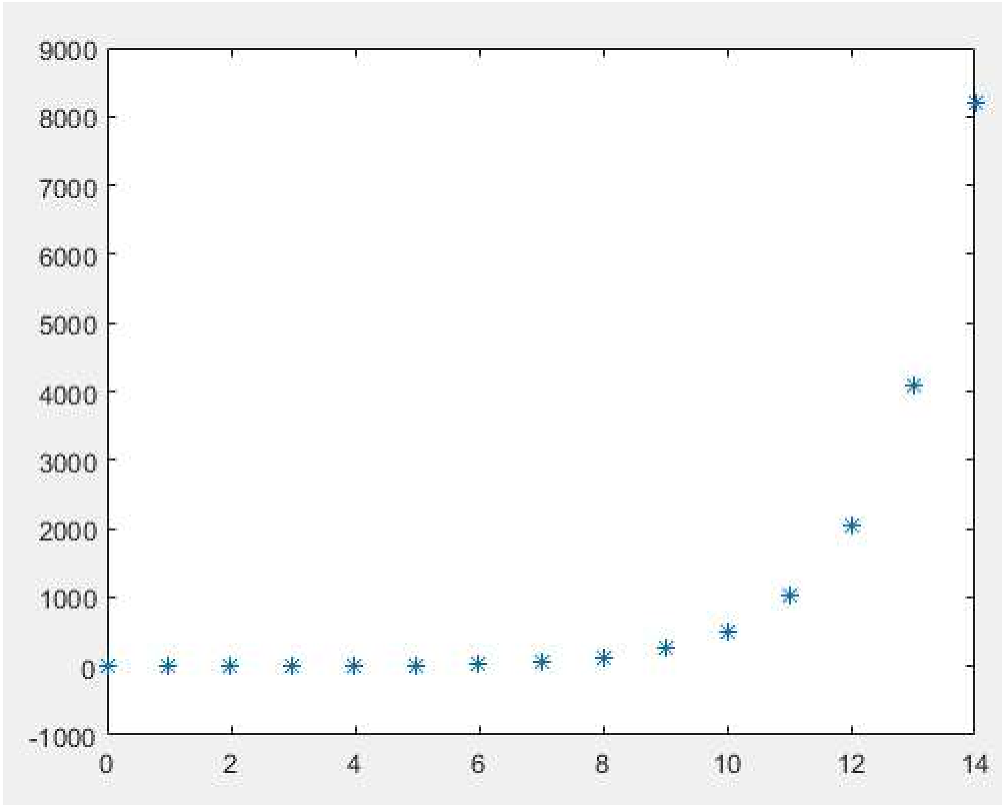
$$x[0] = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \ z^{-1}\left(\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}\right)dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint \ \frac{1}{2z} + \frac{1}{2z-2} + \frac{-1}{z-1}dz = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = 0$$

```
fprintf('since the evaluating contour must be inside the ROC\nthus
xns=zeros(1,15);
for k=0:14
fprintf('x(%d)=',k);
    xns(k+1)=I(k);
    disp(xns(k+1));
end
n=0:14;
xns=real(xns);
plot(n,xns,'*');
```

```
since the evaluating contour must be inside the ROC
thus any circle of radius higher than 2 is sufficient
x(0)=  -9.6631e-18 - 4.6245e-18i

x(1)=  -1.7670e-17 - 5.7979e-18i

x(2)=   1.0000 - 0.0000i

x(3)=   3.0000 - 0.0000i

x(4)=   7.0000 - 0.0000i

x(5)=  15.0000 + 0.0000i

x(6)=  31.0000 + 0.0000i

x(7)=  63.0000 - 0.0000i

x(8)=   1.2700e+02 + 8.6850e-13i

x(9)=   2.5500e+02 + 2.0265e-12i

x(10)=   5.1100e+02 - 5.0952e-11i

x(11)=   1.0230e+03 - 1.7602e-10i

x(12)=   2.0470e+03 - 2.9182e-10i

x(13)=   4.0950e+03 + 1.0450e-08i

x(14)=   8.1910e+ 03+ 1.1221e-07i
```

نمودار داده های فوق را رسم می‌کنیم



9000
8000
7000
6000
5000
4000
3000
2000
1000
0
-1000
0
2
4
6
8
10
12
14