به نام حضرت دوست

دانشکده مهندسی برق

درس ریاضی مهندسی

گزارش کار **matlab** ۴

نام و نام خانوادگی:

طاها انتصاری ۹۵۱۰۱۱۱۷

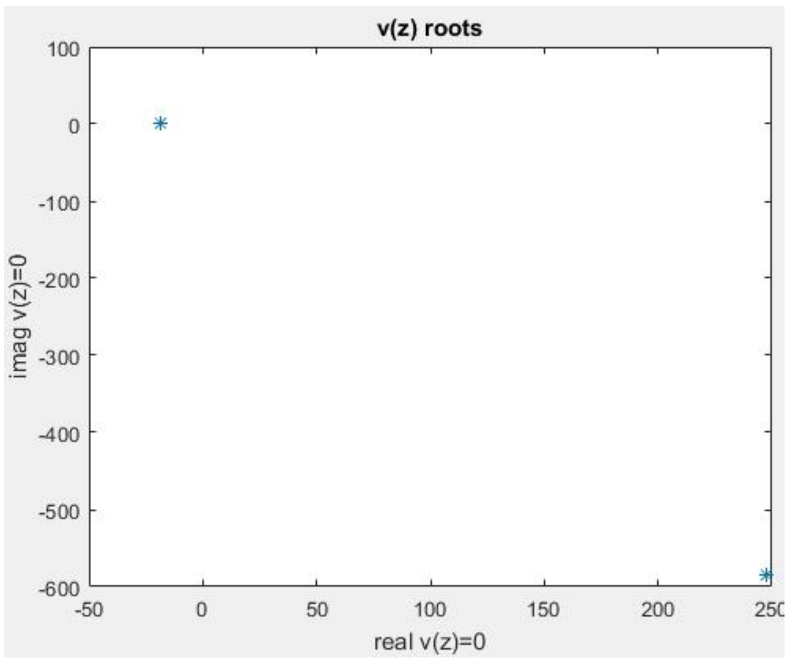
وحید احمدی ۹۵۱۰۹۰۸۳

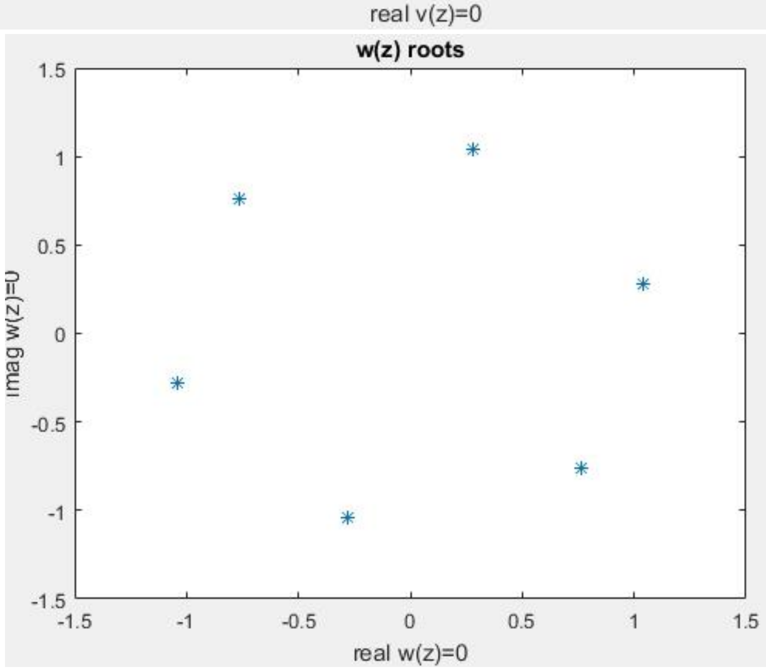
قسمت اول: ریشه معادلات در صفحه مختلط

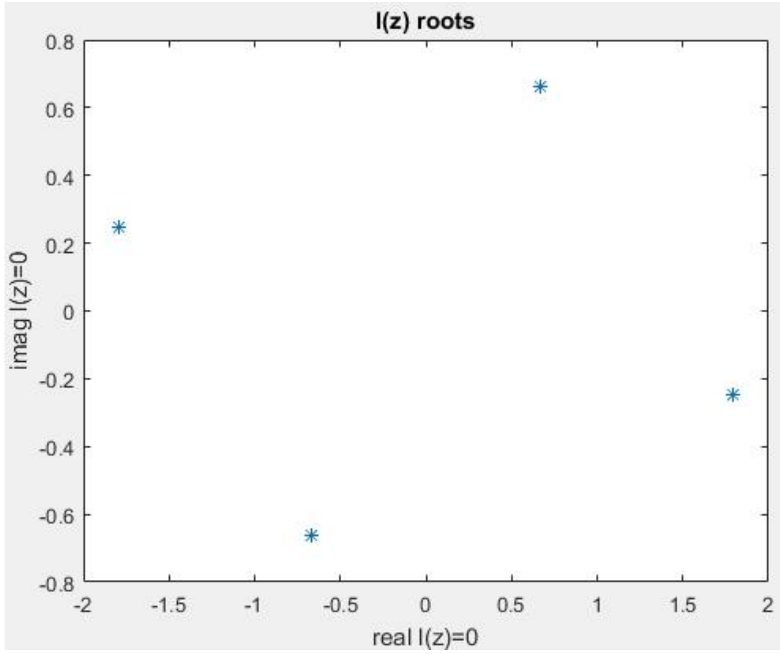
کد دستوری برای هر قسمت را اجرا می کنیم و ریشه های آن را می یابیم. سپس در صفحه مختلط آن را نمایش می دهیم.

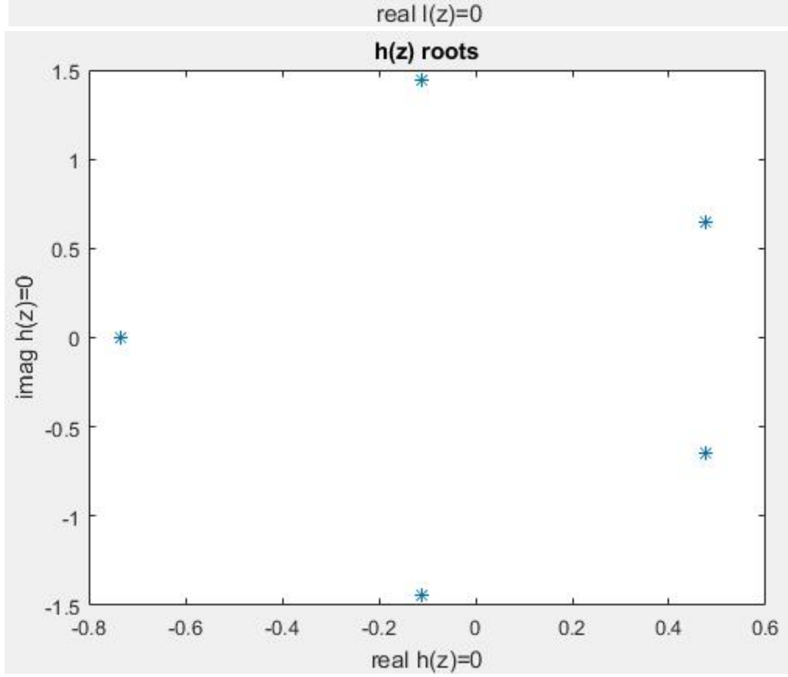
به عنوان مثال برای اولی:

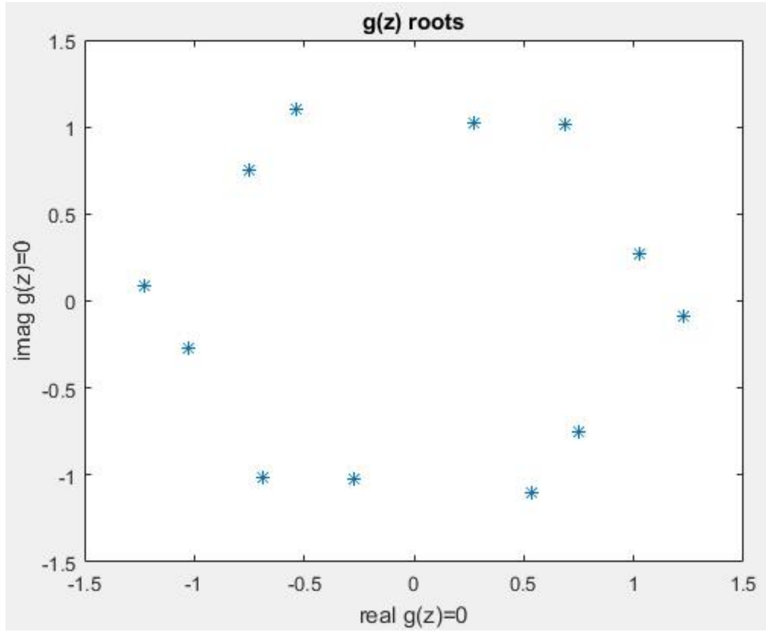
```
clear
syms z;

f=@(z)(sinh(z)-sqrt(2*i));
fans=solve(f(z)==0)
figure(1);
plot(real(fans),imag(fans),'*')
title('f(z) roots');
xlabel('real f(z)=0');
ylabel('imag f(z)=0');
```



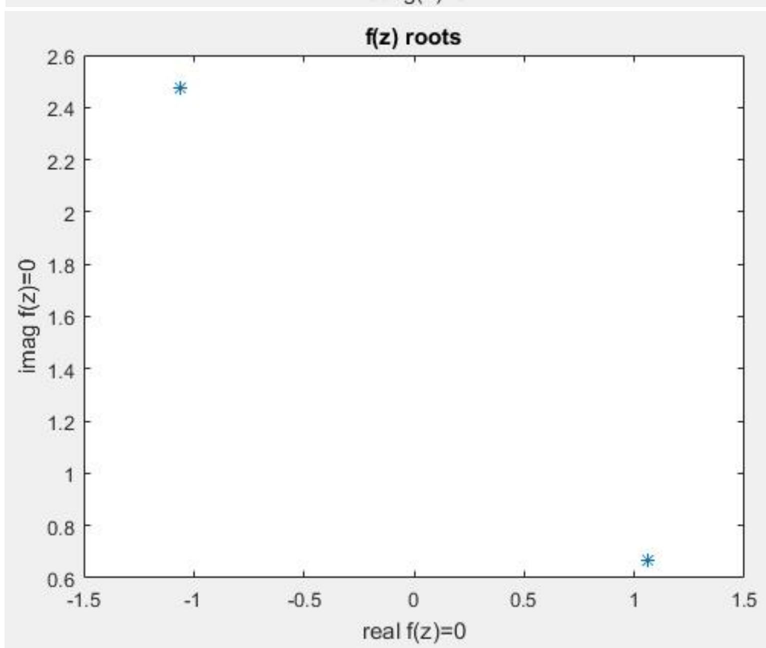



l(z) roots
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
imag l(z)=0
real l(z)=0


h(z) roots
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
imag h(z)=0
real h(z)=0



g(z) roots
imag g(z)=0
real g(z)=0
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5



f(z) roots
imag f(z)=0
real f(z)=0
2.6
2.4
2.2
2
1.8
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5

به ترتیب ریشه های معادلات:

```
fans =

          asinh(1 + 1i)
 pi*1i - asinh(1 + 1i)


gans =

        ((3^(1/2)*1i)/2 - 1/2)*(asinh(2)*1i)^(1/6)
        ((3^(1/2)*1i)/2 + 1/2)*(asinh(2)*1i)^(1/6)
                            -(pi - asinh(2)*1i)^(1/6)
   ((3^(1/2)*1i)/2 - 1/2)*(pi - asinh(2)*1i)^(1/6)
   ((3^(1/2)*1i)/2 + 1/2)*(pi - asinh(2)*1i)^(1/6)
                                   (asinh(2)*1i)^(1/6)
                             (pi - asinh(2)*1i)^(1/6)
                                  -(asinh(2)*1i)^(1/6)
      -((3^(1/2)*1i)/2 - 1/2)*(asinh(2)*1i)^(1/6)
      -((3^(1/2)*1i)/2 + 1/2)*(asinh(2)*1i)^(1/6)
  -((3^(1/2)*1i)/2 - 1/2)*(pi - asinh(2)*1i)^(1/6)
  -((3^(1/2)*1i)/2 + 1/2)*(pi - asinh(2)*1i)^(1/6)


hans =

 root(z1^5 + 2*z1^3 + 1, z1, 1)
 root(z1^5 + 2*z1^3 + 1, z1, 2)
 root(z1^5 + 2*z1^3 + 1, z1, 3)
 root(z1^5 + 2*z1^3 + 1, z1, 4)
 root(z1^5 + 2*z1^3 + 1, z1, 5)


lans =

 -(pi - asinh(1)*1i)^(1/2)
        (asinh(1)*1i)^(1/2)
  (pi - asinh(1)*1i)^(1/2)
       -(asinh(1)*1i)^(1/2)


wans =

                          (1i/2)^(1/6)*pi^(1/6)
                         -(1i/2)^(1/6)*pi^(1/6)
  (1i/2)^(1/6)*pi^(1/6)*((3^(1/2)*1i)/2 - 1/2)
  (1i/2)^(1/6)*pi^(1/6)*((3^(1/2)*1i)/2 + 1/2)
 -(1i/2)^(1/6)*pi^(1/6)*((3^(1/2)*1i)/2 - 1/2)
 -(1i/2)^(1/6)*pi^(1/6)*((3^(1/2)*1i)/2 + 1/2)


vans =

 (2*pi - acos(234051595647807/1125899906842624 - 2i))^4
        acos(234051595647807/1125899906842624 - 2i)^4
```

قسمت دوم: جز موهومی و حقیقی توابع مختلط

کد دستوری برای هر تابع را اجرا می کنیم.

به عنوان مثال برای اولی:

```
clear
syms x y
assume(x,'real');
assume(y,'real');
z=x+1i*y

f=@(z)(sinc(z));
realf=real(f(z));
imagf=imag(f(z));
pretty(realf);
pretty(imagf);
```

به ترتیب در هر کدام ابتدا قسمت حقیقی و سپس موهومی را نمایش می دهیم:

۱)

$$\frac{x \cosh(\pi y) \sin(\pi x)}{\pi (x^2 + y^2)} + \frac{y \cos(\pi x) \sinh(\pi y)}{\pi (x^2 + y^2)}$$

$$\frac{x \cos(\pi x) \sinh(\pi y)}{\pi (x^2 + y^2)} - \frac{y \cosh(\pi y) \sin(\pi x)}{\pi (x^2 + y^2)}$$

۲)

$$x (x^2 - y^2) - 2 x y^2 + 3 x^2 - 3 y^2$$

$$y (x^2 - y^2) + 6 x y + 2 x^2 y$$

۳)

$$\cos\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right)^2 \cosh\left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right)^2 - \sin\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right)^2 \sinh\left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right)^2$$

$$\cos\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) \cosh\left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right) \sin\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) \sinh\left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right) 2$$

(۴

```
                       2     2
cos(2 x y) sinh(x   - y )

                       2     2
sin(2 x y) cosh(x   - y )
```

(۵

```
    2     2         2
y (x   - y ) + 2 x   y

0
```

(۶

```
   x
-------
 2    2
x   + y

    y
- -------
   2    2
  x   + y
```

برای همساز بودن کافیست در معادله لاپلاس صدق کند:

به عنوان مثال کد دستوری زیر برای اولی:

```
fulaplacian=diff(realf,x,2)+diff(realf,y,2);
fvlaplacian=diff(imagf,x,2)+diff(imagf,y,2);
ftest=isequal(fulaplacian,fvlaplacian);
if ftest ,fprintf('f(z) is analytic and it''s real and imaginary parts are harmonic conjugates\n');
else fprintf('f(z) is not analytic\n');
end
```

حال با اجرای برنامه نتایج را مشاهده می کنیم:

```
f(z) is not analytic
g(z) is analytic and it's real and imaginary parts are harmonic conjugates
h(z) is not analytic
l(z) is analytic and it's real and imaginary parts are harmonic conjugates
w(z) is analytic and it's real and imaginary parts are harmonic conjugates
v(z) is not analytic
```

قسمت سوم: توابع همساز و معادلات کوشی ریمان

شرط کوشی ریمان را برای تک تک توابع چک می کنیم.

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$$

شرط تحلیلی بودن در کل صفحه: برقراری معادلات کوشی ریمان و پیوسته بودن مشتقات جزئی u و v.

در صورت تحلیلی بودن مشتق آن را محاسبه می کنیم.

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \rightarrow f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$$

به عنوان مثال کد دستوری اولی:

```
clear
syms x y
assume(x,'real');
assume(y,'real');
z=x+1i*y;

f=@(z)(z^4+z^2);

fu=real(f(z));
fv=imag(f(z));
f1stCR=isequal(diff(fu,x),diff(fv,y));
f2ndCR=isequal(diff(fu,y),-diff(fv,x));
if(f1stCR&&f2ndCR)
    fprintf('f(z) is analytic\nthe derivative is:\n');
    disp(diff(f(z),x));
else fprintf('f(z) is not analytic\n');
end
```

حال نتایج را برای همه موارد بررسی می کنیم:

۱)

```
f(z) is analytic
the derivative is:
2*x + y*2i + 4*(x + y*1i)^3
```

۲)

```
g(z) is not analytic
```

۳)

```
h(z) is not analytic
```

(۴

```
l(z) is analytic
the derivative is:
sinh(3*x + y*3i + (x + y*1i)^3)*(3*(x + y*1i)^2 + 3)
```

(۵

```
w(z) is analytic
the derivative is:
exp(x + y*1i + (x + y*1i)^2)*(2*x + y*2i + 1)
```

(۶

```
v(z) is not analytic
```

قسمت چهارم: پتانسیل مختلط

بخش اول: توابع همساز مزدوج را محاسبه می کنیم.

۱)

$$u(x,y) = x + e^{y}\cos(x)$$
$$v(x,y) = y - e^{y}\sin(x)$$

۲)

$$u(x,y) = e^{-2xy}\sin(x^2 - y^2)$$
$$v(x,y) = e^{-2xy}\cos(x^2 - y^2)$$

۳)

$$u(x,y) = xe^{x}\cos(y) - ye^{x}\sin(y)$$
$$v(x,y) = e^{x}(y\,cos(y) + x\sin(y))$$

۴)

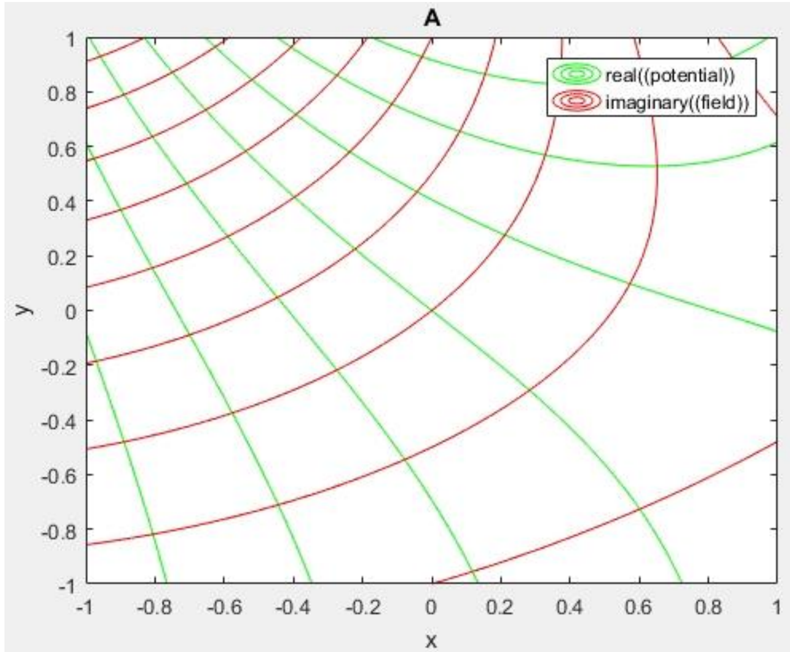
$$u(x,y) = e^{-x}(xsin(y) - ycos(y))$$
$$v(x,y) = e^{-x}(xcos(y) + ysin(y))$$

بخش دوم: با کنار هم قرار دادن قسمت های موهومی و حقیقی توابع مختلط را می سازیم. نمودار های خواسته شده را ترسیم می کنیم.

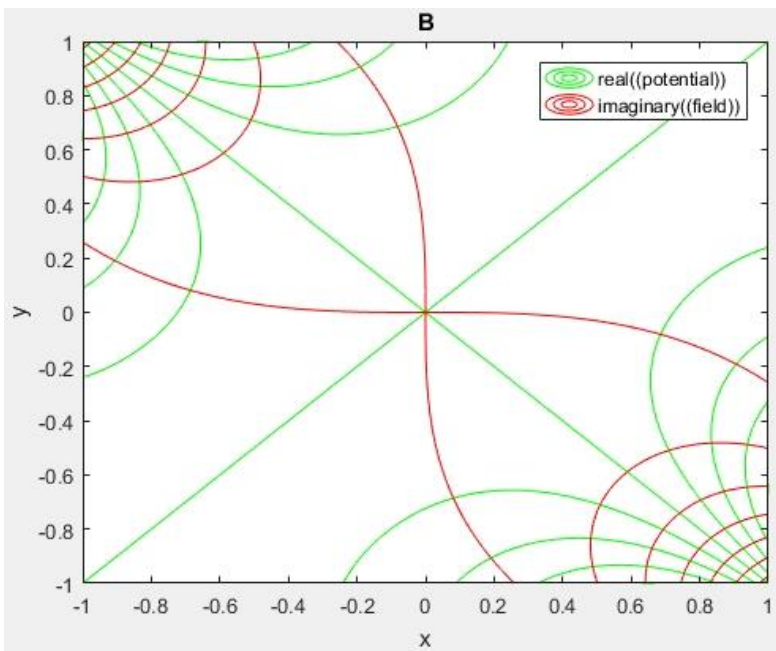
به عنوان مثال کد دستوری اولی:

```
clear
[x y] = meshgrid(-1:0.002:1,-1:0.002:1);

au=(x+exp(y).*cos(x));
bu=(exp(-2*x.*y).*sin(x.^2-y.^2));
cu=(x.*exp(x).*cos(y)-y.*exp(x).*sin(y));
du=(exp(-x).*(x.*sin(y)-y.*cos(y)));

av=y-exp(y).*sin(x);
bv=-exp(-2*x.*y).*cos(x.^2-y.^2);
cv=exp(x).*(y.*cos(y)+x.*sin(y));
dv=exp(-x).*(x.*cos(y)+y.*sin(y));


figure(7)
contour(x,y,au,'g')
hold on
contour(x,y,av,'r')
legend('real((potential))','imaginary((field))');
title('A');
xlabel('x');
ylabel('y');
```

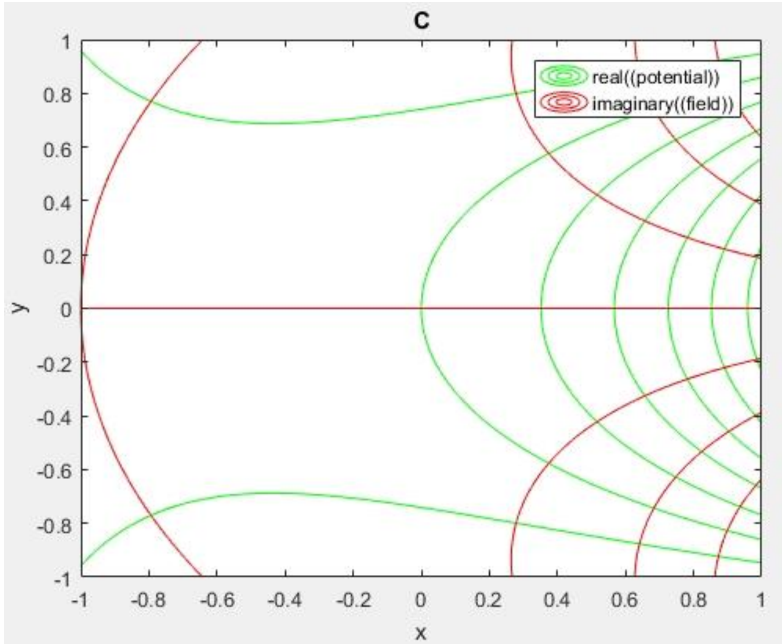
(۱


A
real((potential))
imaginary((field))
y
x
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-1 -0.8 -0.6 -0.4 -0.2 0 0.2 0.4 0.6 0.8 1

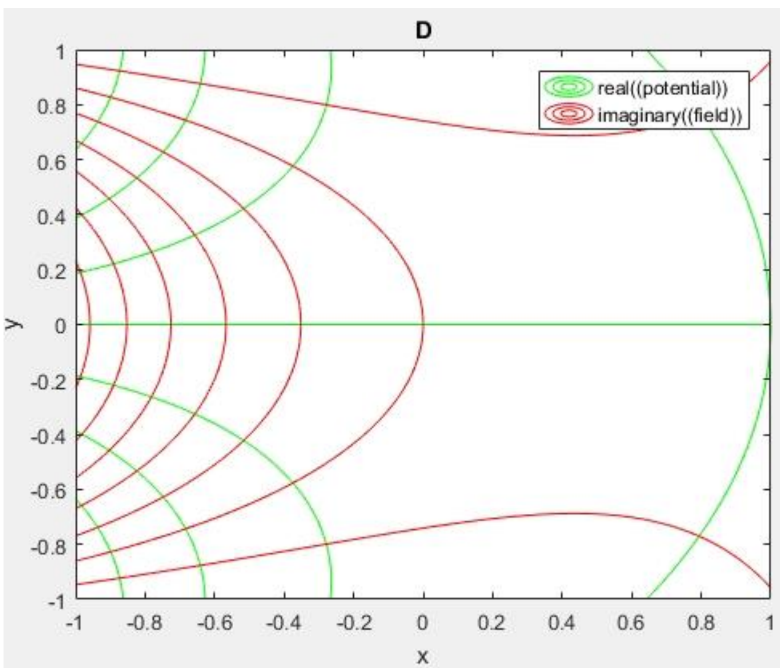
(۲


B
real((potential))
imaginary((field))
y
x
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-1 -0.8 -0.6 -0.4 -0.2 0 0.2 0.4 0.6 0.8 1

۳)



۴)



بخش سوم: نتیجه نمودار های رسم شده:

همانطور که در نمودار ها مشاهده می کنیم، خطوط میدان و پتانسیل بر هم عمودند.

داریم ادعا می کنیم خطوط هم u بر خطوط هم v عمود است.

$$f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$$

به عنوان مثال برای یک خم f ثابت خواهیم داشت:

$$f\big(c(t)\big) = const.$$

$$\frac{df}{dt} = \nabla F . c'(t) = 0$$

$c'(t)$ بردار مماس بر خم است.

اکنون باید اثبات کنیم گرادیان u و v یک تابع تحلیلی عمودند بر هم:

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$
$$\nabla v = \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

می دانستیم تابع تحلیلی است پس روابط کوشی ریمان صادق است:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

با ضرب کردن گرادیان ها نتیجه می گیریم گرادیان ها بر هم عمودند. پس خطوط هم u و هم v نیز بر هم عمودند.

همانند اثبات بالا برای خطوط هم میدان و هم پتانسیل نیز صادق است.