TD4 : Fonctions à plusieurs variables

Module : Mathématiques de Base 3 **Classes :** 2$^{\text{ème}}$ année **AU : 2024/ 2025**

Exercice 1 1. *Étudier l'existence et la valeur éventuelle des limites suivantes lorsqu'elles existent :*

a) $f(x,y) = \dfrac{\sin\sqrt{xy} - \sqrt{xy}}{xy}$ *en* $(0,0)$, $xy > 0$ b) $g(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ *en* $(0,0)$.

c) $h(x,y,z) = \dfrac{x+y}{x^2-y^2+z^2}$ *en* $(0,0,0)$.

2. *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \rightarrowtail \mathbb{R}$ *définie par :*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & sinon \end{cases}$$

— *Est-elle continue dans* $\mathbb{R}^2$ *?*
— *Est-elle dérivable dans* $\mathbb{R}^2$ *?*
— *Est-elle de classe* C^1 *dans* $\mathbb{R}^2$ *?*

Exercice 2 *Soit* $f : \mathbb{R}^3 \rightarrowtail \mathbb{R}$ *la fonction de classe* $\mathcal{C}^2$ *définie par :*

$$f(x,y,z) = (2x+y)^2 + (2x+z)^2 - x^2.$$

1. *Calculer le gradient de* f *en tout point* (x,y,z) *de* $\mathbb{R}^3$.
2. *Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de la fonction* f.
3. *Déterminer la matrice Hissienne* $\mathcal{H}_f$ *en tout point* (x,y,z) *de* $\mathbb{R}^3$.
4. *Montrer que les restrictions de* f *aux sous espaces :*

$$C_1 = \{(x,y,0); (x,y) \in \mathbb{R}^2\}, \quad C_2 = \{(x,0,z)\,; (x,z) \in \mathbb{R}^2\}, \quad C_3 = \{(0,y,z)\,; (y,z) \in \mathbb{R}^2\}$$

sont strictements convexes.

5. *Calculer les valeurs propres de* $\mathcal{H}_f$.

6. $\mathcal{H}_f$ *est-elle définie positive ? la fonction* f *est -elle convexe sur* $\mathbb{R}^2$ *?*

Exercice 3 *On considère la fonction réelle de deux variables* f *définie par :*

$$f(x, y) = x^2 - 2x + y^4$$

sur le pavé $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, 0 \leq y \leq 2\}$

1. *Représenter* A. *Est-il convexe ? Justifier votre réponse.*

2. *On admet que* f *est* $\mathcal{C}^2$ *sur* A . *Calculer ses dérivées partielles d'ordre* 1 *et* 2 *de la fonction* f.

3. *Déterminer la matrice Hissienne de* f *en tout point* (x, y) *de* $\mathbb{R}^2$.

4. *Montrer que* f *est convexe sur* A.

Exercice 4

1. *On considére la fonction* f *définie sur* $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$ *par :*

$$f(x, y) = \frac{x^4}{12} + \frac{x^2 y^3}{12} + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + 4.$$

   a) *Calculer la matrice Hissiene* $\mathcal{H}_f$ *en tout point de* $\mathbb{R}^2$.
   b) *En déduire que la fonction* f *est strictement convexe sur* D.

2. *Lesquelles parmi les fonctions suivantes sont convexes sur* $\mathbb{R}^2$.

$$g(x, y) = xy, \quad h(x, y) = \exp{(x + y)}.$$