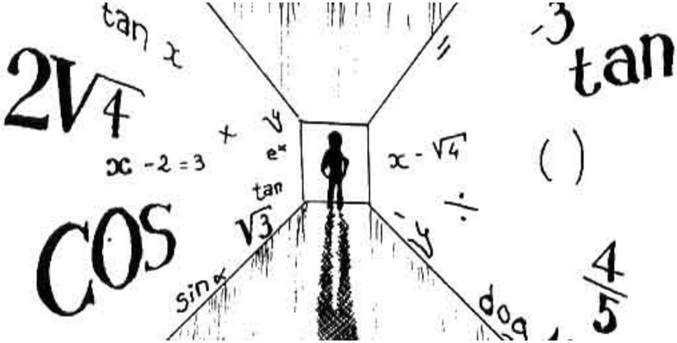
esprit
Se former autrement

FORMES BILINÉAIRES & FORMES QUADRATIQUES

AA8: Produit scalaire



Mathématiques de Base 3 - $2^{\text{ème}}$ année - **A.U.** 2023/2024

Exemples fondamentaux

Plus généralement, pour $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n (n \in \mathbb{N}^*)$, on définit le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$,

$$\begin{array}{rccl} < .,. > \; : & \mathbb{E} \times \mathbb{E} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \mapsto & < x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i \, y_i \end{array}$$

Exemples fondamentaux

Plus généralement, pour $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n (n \in \mathbb{N}^*)$, on définit le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$,

$$\begin{array}{rccl} <.,.> : & \mathbb{E} \times \mathbb{E} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \mapsto & <x, y> = \sum_{i=1}^{n} x_i \, y_i \end{array}$$

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{E}$, $x' = (x'_1, \ldots, x'_n) \in \mathbb{E}$ et $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{E}$

Exemples fondamentaux

Plus généralement, pour $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n (n \in \mathbb{N}^*)$, on définit le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$,

$$\begin{array}{rcccl} <.,.> & : & \mathbb{E} \times \mathbb{E} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x, y) & \mapsto & <x, y> = \sum_{i=1}^{n} x_i \, y_i \end{array}$$

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{E}$, $x' = (x'_1, \ldots, x'_n) \in \mathbb{E}$ et $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{E}$

✓ **Symétrie:**

$$<x, y> = \sum_{i=1}^{n} x_i \, y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \, x_i = <y, x>$$

Exemples fondamentaux

Plus généralement, pour $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n (n \in \mathbb{N}^*)$, on définit le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$,

$$\begin{array}{rcccl} <.,.> & : & \mathbb{E} \times \mathbb{E} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto & <x,y>=\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i \end{array}$$

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{E}$, $x' = (x'_1, \ldots, x'_n) \in \mathbb{E}$ et $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{E}$

✓ **Symétrie:**

$$<x,y>=\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i\, x_i =<y,x>$$

✓ **Linéarité par rapport à la première variable:**

$$<\lambda\, x + x', y>=\sum_{i=1}^{n} (\lambda\, x_i + x'_i)\, y_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda\, x_i\, y_i + \sum_{i=1}^{n} x'_i\, y_i = \lambda\ <x,y> + <x',y>$$

Exemples fondamentaux

$$\begin{array}{rcl} <.,.> \; : \; \mathbb{E}\times\mathbb{E} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & <x,y>=\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i \end{array}$$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$

Exemples fondamentaux

$$\begin{array}{rcl} <.,.> : \mathbb{E}\times\mathbb{E} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & <x,y>=\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i \end{array}$$ **est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$**

✓ **Définie:** $\forall\ x \in \mathbb{E}$

$$<x,x>=0 \iff \sum_{i=1}^{n} x_i x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 \iff x_i = 0\ \forall\ i \iff x = 0_{\mathbb{E}}$$

Exemples fondamentaux

$$\begin{array}{rcl} <.,.> \ : \ \mathbb{E}\times\mathbb{E} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & <x,y>=\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i \end{array}$$ **est un produit scalaire sur** $\mathbb{R}^n$

✓ **Définie:** $\forall\ x \in \mathbb{E}$

$$<x,x>=0 \iff \sum_{i=1}^{n} x_i x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 \iff x_i = 0\ \forall\ i \iff x = 0_{\mathbb{E}}$$

✓ **Positivité:** $\forall\ x \in \mathbb{E}$

$$<x,x>=\sum_{i=1}^{n} x_i x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0$$

Exemples fondamentaux

$$\begin{array}{rcccl} <.,.> & : & \mathbb{E}\times\mathbb{E} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto & <x,y>=\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i \end{array}$$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$

✓ **Définie:** $\forall\ x \in \mathbb{E}$

$$<x,x>=0 \iff \sum_{i=1}^{n} x_i x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 \iff x_i = 0\ \forall\ i \iff x = 0_{\mathbb{E}}$$

✓ **Positivité:** $\forall\ x \in \mathbb{E}$

$$<x,x>=\sum_{i=1}^{n} x_i x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0$$

$<.,.>$ est
- ✔ bilinéaire
- ✔ symétrique
- ✔ définie
- ✔ positive

Exemples fondamentaux

$$\begin{array}{rcl} <.,.> \ : \ \mathbb{E}\times\mathbb{E} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & <x,y>=\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i \end{array}$$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$

✓ **Définie:** $\forall\ x \in \mathbb{E}$

$$<x,x>=0 \iff \sum_{i=1}^{n} x_i x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 \iff x_i = 0\ \forall\ i \iff x = 0_{\mathbb{E}}$$

✓ **Positivité:** $\forall\ x \in \mathbb{E}$

$$<x,x>=\sum_{i=1}^{n} x_i x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0$$

$<.,.>$ est
✔ bilinéaire
✔ symétrique
✔ définie
✔ positive

➡ $<.,.>$ est un produit scalaire sur $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$

Exemples fondamentaux

Exemple 2: Soit $\mathbb{E} = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$\begin{array}{rcccl} <.,.> & : & \mathbb{E}\times\mathbb{E} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (X,Y) & \mapsto & <X,Y>= {}^tX.Y \end{array}$$ est un produit scalaire

Exemples fondamentaux

Exemple 2: Soit $\mathbb{E} = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$\begin{array}{rcl} <.,.> \; : \; \mathbb{E}\times\mathbb{E} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (X,Y) & \mapsto & <X,Y> = {}^tX.Y \end{array} \quad \text{est un produit scalaire}$$

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{E}$, $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \in \mathbb{E}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{E}$

Exemples fondamentaux

Exemple 2: Soit $\mathbb{E} = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$\begin{array}{rcl} <.,.> \ : \ \mathbb{E}\times\mathbb{E} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (X,Y) & \mapsto & <X,Y>= {}^tX.Y \end{array}$$ est un produit scalaire

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{E}$, $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \in \mathbb{E}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{E}$

✓ **Symétrie:**

$$<X,Y> \quad = \quad {}^tX.Y = (x_1,\dots,x_n).\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Exemples fondamentaux

Exemple 2: Soit $\mathbb{E} = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$\begin{array}{rcl} <.,.> \; : \; \mathbb{E}\times\mathbb{E} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (X,Y) & \mapsto & <X,Y>= {}^tX.Y \end{array} \quad \text{est un produit scalaire}$$

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{E}$, $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \in \mathbb{E}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{E}$

✓ **Symétrie:**

$$\begin{aligned} <X,Y> &= {}^tX.Y = (x_1,\dots,x_n).\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ <Y,X> &= {}^tY.X = (y_1,\dots,y_n).\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i \end{aligned}$$

Exemples fondamentaux

Exemple 2: Soit $\mathbb{E} = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$\begin{array}{rcll} <.,.> : \mathbb{E}\times\mathbb{E} & \longrightarrow & \mathbb{R} & \\ (X,Y) & \mapsto & <X,Y>= {}^tX.Y & \end{array} \text{ est un produit scalaire}$$

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{E}$, $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \in \mathbb{E}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{E}$

✓ **Symétrie:**

$$\left.\begin{array}{rcl} <X,Y> & = & {}^tX.Y = (x_1,\dots,x_n).\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ <Y,X> & = & {}^tY.X = (y_1,\dots,y_n).\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n y_i x_i \end{array}\right\} \Longleftrightarrow <X,Y>=<Y,X>$$

Exemples fondamentaux

✓ **Linéarité par rapport à la première variable:**

$$\begin{aligned} <\lambda X + X', Y> &= {}^t(\lambda X + X').Y \\ &= {}^t(\lambda X).Y + {}^tX'.Y \text{ on utilise } \left[{}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB \right] \\ &= \lambda <X, Y> + <X', Y> \end{aligned}$$

Exemples fondamentaux

✓ **Linéarité par rapport à la première variable:**

$$\begin{aligned} < \lambda X + X', Y > &= {}^t(\lambda X + X').Y \\ &= {}^t(\lambda X).Y + {}^tX'.Y \text{ on utilise } \left[{}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB\right] \\ &= \lambda < X, Y > + < X', Y > \end{aligned}$$

✓ **Définie:** $\forall\ X \in \mathbb{E}$

$$< X, X >= 0 \iff {}^tX.X = (x_1, \ldots, x_n).\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 \iff x_i = 0\ \forall\ i \iff x = 0_{\mathbb{E}}$$

Exemples fondamentaux

✓ **Positivité:** $\forall\ X \in \mathbb{E}$

$$< X, X >= {}^tX.X = (x_1, \ldots, x_n).\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0$$

Exemples fondamentaux

✓ **Positivité:** $\forall\ X \in \mathbb{E}$

$$< X, X >= {}^tX.X = (x_1, \ldots, x_n).\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0$$

$< ., . >$ est
- ✔ bilinéaire
- ✔ symétrique
- ✔ définie
- ✔ positive

Exemples fondamentaux

✓ **Positivité:** $\forall\ X \in \mathbb{E}$

$$< X, X >= {}^{t}X.X = (x_1, \ldots, x_n). \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0$$

$< ., . >$ est

- ✔ bilinéaire
- ✔ symétrique
- ✔ définie
- ✔ positive

➡ $< ., . >$ est un produit scalaire sur $\mathbb{E} = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Exemples fondamentaux

Exemple 3: Soit $\mathbb{E} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\begin{array}{rcccl} <.,.> & : & \mathbb{E}\times\mathbb{E} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (A,B) & \mapsto & <A,B>=Tr({}^tA.B) \end{array}$$ est un produit scalaire

Exemples fondamentaux

Exemple 3: Soit $\mathbb{E} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\begin{array}{rccl} <.,.> : & \mathbb{E}\times\mathbb{E} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (A,B) & \mapsto & <A,B>=Tr({}^tA.B) \end{array}$$ est un produit scalaire

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, A, A' et $B \in \mathbb{E}$,

✓ **Symétrie:**

$$<A,B> \;=\; Tr({}^tA.B) = Tr({}^t({}^tA.B)) \quad \text{on utilise } \left[Tr({}^tA) = Tr(A)\right]$$

$$= \; Tr({}^tB\,{}^t({}^tA)) \quad \text{on utilise } \left[{}^t(A.B) = {}^tB.{}^tA\right]$$

$$= \; Tr({}^tB.A) = <B,A>$$

Exemples fondamentaux

✓ **Linéarité par rapport à la première variable:**

$$
\begin{aligned}
<\lambda\, A + A', B> &= Tr({}^t(\lambda\, A + A').B) \\
&= Tr({}^t(\lambda\, A).B + {}^tA'.B) \quad \text{on utilise } \left[{}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB\right] \\
&= \lambda\, Tr({}^t(A.B) + Tr({}^tA'.B) = \lambda\, <A, B> + <A', B>
\end{aligned}
$$

Exemples fondamentaux

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} Tr({}^tA.A) &= Tr\left(\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}\right) \\ &= Tr\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{j1}^2 & \dots & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & \sum_{j=1}^{n} a_{jn}^2 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \end{aligned}$$

Exemples fondamentaux

✓ **Définie:**

$$< A, A >= 0 \iff Tr({}^{t}A.A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = 0 \iff a_{ij} = 0 \ \forall\ i, j \iff A = 0_{\mathbb{E}}$$

Exemples fondamentaux

✓ **Définie:**

$$< A, A >= 0 \iff Tr({}^tA.A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = 0 \iff a_{ij} = 0 \ \forall\ i, j \iff A = 0_{\mathbb{E}}$$

✓ **Positivité:**

$$< A, A >= Tr({}^tA.A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \geq 0$$

Exemples fondamentaux

✓ **Définie:**

$$< A, A >= 0 \iff Tr({}^t A.A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = 0 \iff a_{ij} = 0 \ \forall \ i, j \iff A = 0_{\mathbb{E}}$$

✓ **Positivité:**

$$< A, A >= Tr({}^t A.A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \geq 0$$

$< .,. >$ est
- ✔ bilinéaire
- ✔ symétrique
- ✔ définie
- ✔ positive

Exemples fondamentaux

✓ **Définie:**

$$< A, A >= 0 \iff Tr({}^tA.A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = 0 \iff a_{ij} = 0 \ \forall \ i, j \iff A = 0_{\mathbb{E}}$$

✓ **Positivité:**

$$< A, A >= Tr({}^tA.A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \geq 0$$

$$< ., . > \text{ est } \left.\begin{array}{l} ✔ \ \text{bilinéaire} \\ ✔ \ \text{symétrique} \\ ✔ \ \text{définie} \\ ✔ \ \text{positive} \end{array}\right\} \Rightarrow \ < ., . > \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{E} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

Exemples fondamentaux

Exemple 4: Soit $\mathbb{E} = \mathbb{R}[X]$,

$$\begin{array}{rcl} <.,.> \ : \ \mathbb{E}\times\mathbb{E} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (P,Q) & \mapsto & <P,Q>=\displaystyle\int_0^1 P(t).Q(t)\,dt \end{array}$$ est un produit scalaire

Exemples fondamentaux

Exemple 4: Soit $\mathbb{E} = \mathbb{R}[X]$,

$$\begin{array}{rcl} <.,.> \; : \; \mathbb{E}\times\mathbb{E} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (P,Q) & \mapsto & <P,Q>=\displaystyle\int_0^1 P(t).Q(t)\,dt \end{array}$$ est un produit scalaire

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, P, P' et $Q \in \mathbb{E}$,

✓ **Symétrie:**

$$<P,Q>=\int_0^1 P(t).Q(t)\,dt = \int_0^1 Q(t).P(t)\,dt =<Q,P>$$

Exemples fondamentaux

Exemple 4: Soit $\mathbb{E} = \mathbb{R}[X]$,

$$\begin{array}{rcccl} <.,.> & : & \mathbb{E}\times\mathbb{E} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (P,Q) & \mapsto & <P,Q>=\int_0^1 P(t).Q(t)\,dt \end{array}$$

est un produit scalaire

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, P, P' et $Q \in \mathbb{E}$,

✓ **Symétrie:**

$$<P,Q>=\int_0^1 P(t).Q(t)\,dt = \int_0^1 Q(t).P(t)\,dt =<Q,P>$$

✓ **Linéarité par rapport à la première variable:**

$$\begin{aligned} <\lambda\, P + P', Q> &= \int_0^1 (\lambda\, P(t) + P'(t)).Q(t)\,dt \\ &= \int_0^1 \lambda\, P(t).Q(t)\,dt + \int_0^1 P'(t).Q(t)\,dt \\ &= \lambda\ <P,Q> + <P',Q> \end{aligned}$$

Exemples fondamentaux

✓ **Définie:**

$$< P, P >= 0 \iff \int_0^1 P^2(t)\,dt = 0 \iff P^2(t) = 0 \;\forall\, t \in [0,1] \iff P \equiv 0$$

Exemples fondamentaux

✓ **Définie:**

$$< P, P >= 0 \iff \int_0^1 P^2(t)\,dt = 0 \iff P^2(t) = 0 \;\forall\, t \in [0,1] \iff P \equiv 0$$

✓ **Positivité:**

$$< P, P >= \int_0^1 P^2(t)\,dt \geq 0$$

Exemples fondamentaux

✓ **Définie:**

$$< P, P >= 0 \iff \int_0^1 P^2(t)\,dt = 0 \iff P^2(t) = 0 \ \forall\ t \in [0,1] \iff P \equiv 0$$

✓ **Positivité:**

$$< P, P >= \int_0^1 P^2(t)\,dt \geq 0$$

$< .,. >$ est ✔ bilinéaire
✔ symétrique
✔ définie
✔ positive

Exemples fondamentaux

✓ **Définie:**

$$< P, P >= 0 \iff \int_0^1 P^2(t)\,dt = 0 \iff P^2(t) = 0 \;\forall\, t \in [0,1] \iff P \equiv 0$$

✓ **Positivité:**

$$< P, P >= \int_0^1 P^2(t)\,dt \geq 0$$

$<.,.>$ est
✔ bilinéaire
✔ symétrique
✔ définie
✔ positive
➡ $<.,.>$ est un produit scalaire sur $\mathbb{E} = \mathbb{R}[X]$

Exercice 1

Exercice 1: Soit $\mathbb{E} = \mathbb{R}^2$, on pose

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathbb{E} \times \mathbb{E} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \Big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\Big) & \mapsto & \varphi\Big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\Big) = x_1x_2 + \dfrac{1}{2}(x_1y_2 + y_1x_2) + y_1y_2 \end{array}$$

Vérifier que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{E}$.

Exercice 1

Exercice 1: Soit $\mathbb{E} = \mathbb{R}^2$, on pose

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathbb{E}\times\mathbb{E} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \Big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\Big) & \mapsto & \varphi\Big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\Big) = x_1x_2 + \frac{1}{2}(x_1y_2 + y_1x_2) + y_1y_2 \end{array}$$

Vérifier que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{E}$.

Solution: Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, (x_1,y_1), (x_1',y_1') et $(x_2,y_2) \in \mathbb{E}$

✓ **Symétrie:**

$$\begin{aligned} \varphi\Big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\Big) &= x_1x_2 + \frac{1}{2}(x_1y_2 + y_1x_2) + y_1y_2 \\ &= x_2x_1 + \frac{1}{2}(x_2y_1 + y_2x_1) + y_2y_1 \\ &= \varphi\Big((x_2,y_2),(x_1,y_1)\Big) \end{aligned}$$

Exercice 1

✓ **Linéarité par rapport à la première variable:**

$$\varphi\Big(\lambda(x_1,y_1)+(x'_1,y'_1),(x_2,y_2)\Big)=\varphi\Big((\lambda\, x_1+x'_1,\lambda\, y_1+y'_1),(x_2,y_2)\Big)$$

$$= \quad (\lambda\, x_1+x'_1)x_2+\frac{1}{2}((\lambda\, x_1+x'_1)y_2+(\lambda\, y_1+y'_1)x_2)+(\lambda\, y_1+y'_1)y_2$$

$$= \quad \lambda\, x_1x_2+\lambda\,\frac{1}{2}(x_1y_2+y_1x_2)+\lambda\, y_1y_2+x'_1x_2+\frac{1}{2}(x'_1y_2+y'_1x_2)+y'_1y_2$$

$$= \quad \lambda\varphi\Big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\Big)+\varphi\Big((x'_1,y'_1),(x_2,y_2)\Big)$$

Exercice 1

Pour vérifier que φ est définie positive on passe à faire la décomposition de Gauss:

$$\begin{aligned}
\varphi\Big((x_1,y_1),(x_1,y_1)\Big) &= x_1^2 + x_1 y_1 + y_1^2 \\
&= \Big[x_1^2 + 2.x_1\frac{y_1}{2} + (\frac{y_1}{2})^2 - (\frac{y_1}{2})^2\Big] + y_1^2 \\
&= \Big[x_1 + \frac{y_1}{2}\Big]^2 - \frac{y_1^2}{4} + y_1^2 \\
&= \Big[x_1 + \frac{y_1}{2}\Big]^2 + \frac{3}{4}y_1^2
\end{aligned}$$

Exercice 1

✓ **Définie:**

$$\varphi\Big((x_1, y_1), (x_1, y_1)\Big) = 0 \implies \left[x_1 + \frac{y_1}{2}\right]^2 + \frac{3}{4}y_1^2 = 0 \implies \begin{cases} x_1 + \dfrac{y_1}{2} & = & 0 \\ \dfrac{3}{4}y_1^2 & = & 0 \end{cases}$$

$$\implies x_1 = y_1 = 0 \implies (x_1, y_1) = (0, 0) = 0_{\mathbb{E}}$$

Exercice 1

✓ **Définie:**

$$\varphi\Big((x_1,y_1),(x_1,y_1)\Big)=0 \implies \left[x_1+\frac{y_1}{2}\right]^2+\frac{3}{4}y_1^2=0 \implies \begin{cases} x_1+\dfrac{y_1}{2} & = & 0 \\ \dfrac{3}{4}y_1^2 & = & 0 \end{cases}$$

$$\implies x_1=y_1=0 \implies (x_1,y_1)=(0,0)=0_{\mathbb{E}}$$

✓ **Positivité:**

$$\varphi\Big((x_1,y_1),(x_1,y_1)\Big)=\left[x_1+\frac{y_1}{2}\right]^2+\frac{3}{4}y_1^2\geq 0$$

➡ φ est un produit scalaire.

Exercice 2

Exercice 2: Soit $\mathbb{E} = \mathbb{R}^2$, on pose

$$\begin{array}{rccl} \phi & : & \mathbb{E} \times \mathbb{E} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & \Big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\Big) & \mapsto & \phi\Big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\Big) = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_1y_2 + x_2y_1 \end{array}$$

Vérifier que ϕ est un produit scalaire sur $\mathbb{E}$.

Exercice 2

Exercice 2: Soit $\mathbb{E} = \mathbb{R}^2$, on pose

$$\begin{array}{cccl} \phi & : & \mathbb{E}\times\mathbb{E} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & \Big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\Big) & \mapsto & \phi\Big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\Big) = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_1y_2 + x_2y_1 \end{array}$$

Vérifier que ϕ est un produit scalaire sur $\mathbb{E}$.

Solution: Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, X, X' et $Y \in \mathbb{E}$,

✓ **Symétrie:**

$$\begin{aligned} \phi(Y,X) &= \phi\Big((y_1,y_2),(x_1,x_2)\Big) \\ &= 2y_1x_1 + 2y_2x_2 + y_1x_2 + y_2x_1 \\ &= \phi(X,Y) \end{aligned}$$

Exercice 2

✓ Linéarité par rapport à la première variable:

$$\begin{aligned}
\phi\Big(\lambda\, X + X', Y\Big) &= \phi\Big(\lambda\,(x_1, x_2) + (x_1', x_2'), (y_1, y_2)\Big) = \phi\Big((\lambda\, x_1 + x_1', \lambda\, x_2 + x_2'), (y_1, y_2)\Big)\\
&= 2(\lambda\, x_1 + x_1')y_1 + 2(\lambda\, x_2 + x_2')y_2 + (\lambda\, x_1 + x_1')y_2 + (\lambda\, x_2 + x_2')y_1\\
&= \lambda\,[2x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_1y_2 + x_2y_1] + 2x_1'y_1 + 2x_2'y_2 + x_1'y_2 + x_2'y_1\\
&= \lambda\,\phi\Big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\Big) + \phi\Big((x_1', x_2'), (y_1, y_2)\Big) = \lambda\,\phi\Big(X, Y\Big) + \phi\Big(X', Y\Big)
\end{aligned}$$

Exercice 2

$$\begin{aligned}\phi(X,X) &= \phi\Big((x_1,x_2),(x_1,x_2)\Big) = 2x_1^2+2x_2^2+2x_1x_2 \\ &= (x_1+x_2)^2+x_1^2+x_2^2\end{aligned}$$

Exercice 2

$$\begin{aligned}\phi(X,X) &= \phi\Big((x_1,x_2),(x_1,x_2)\Big) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 \\ &= (x_1+x_2)^2 + x_1^2 + x_2^2\end{aligned}$$

✓ **Définie:**

$$\phi(X,X) = 0 \Rightarrow (x_1+x_2)^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0 \Rightarrow X = 0_{\mathbb{E}}$$

Exercice 2

$$
\begin{aligned}
\phi(X,X) &= \phi\Big((x_1,x_2),(x_1,x_2)\Big) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 \\
&= (x_1+x_2)^2 + x_1^2 + x_2^2
\end{aligned}
$$

✓ **Définie:**

$$\phi(X,X) = 0 \Rightarrow (x_1+x_2)^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0 \Rightarrow X = 0_{\mathbb{E}}$$

✓ **Positivité:**

$$\phi(X,X) = (x_1+x_2)^2 + x_1^2 + x_2^2 \geq 0$$

➡ ϕ est un produit scalaire.

Exercice 3

Exercice 3: Soit $\mathbb{E} = \mathbb{R}^3$, on pose $\psi : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par:
pour $X = (x_1, x_2, x_3)$ et $Y = (y_1, y_2, y_3)$

$$\psi\Big(X, Y\Big) = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_3 + x_3y_2 + x_3y_1 + x_1y_3$$

Vérifier que ψ est un produit scalaire sur $\mathbb{E}$.

Exercice 3

Exercice 3: Soit $\mathbb{E} = \mathbb{R}^3$, on pose $\psi : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par:
pour $X = (x_1, x_2, x_3)$ et $Y = (y_1, y_2, y_3)$

$$\psi\Big(X, Y\Big) = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_3 + x_3y_2 + x_3y_1 + x_1y_3$$

Vérifier que ψ est un produit scalaire sur $\mathbb{E}$.

Solution: Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, X, X' et $Y \in \mathbb{E}$,

✓ **Symétrie:**

$$\begin{aligned} \psi\Big(Y, X\Big) &= 2y_1x_1 + 2y_2x_2 + 2y_3x_3 + y_1x_2 + y_2x_1 + y_2x_3 + y_3x_2 + y_3x_1 + y_1x_3 \\ &= 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_3 + x_3y_2 + x_3y_1 + x_1y_3 \\ &= \psi\Big(X, Y\Big) \end{aligned}$$

Exercice 3

✓ **Linéarité par rapport à la première variable:**

$$\begin{aligned}
\psi\Big(\lambda\, X + X', Y\Big) &= \psi\Big(\lambda\,(x_1, x_2, x_3) + (x_1', x_2', x_3'), (y_1, y_2, y_3)\Big) \\
&= \psi\Big((\lambda\, x_1 + x_1', \lambda\, x_2 + x_2', \lambda\, x_3 + x_3'), (y_1, y_2, y_3)\Big) \\
&= 2(\lambda\, x_1 + x_1')y_1 + 2(\lambda\, x_2 + x_2')y_2 + 2(\lambda\, x_3 + x_3')y_3 \\
&\quad +(\lambda\, x_1 + x_1')y_2 + (\lambda\, x_2 + x_2')y_1 + (\lambda\, x_2 + x_2')y_3 \\
&\quad +(\lambda\, x_3 + x_3')y_2 + (\lambda\, x_3 + x_3')y_1 + (\lambda\, x_1 + x_1')y_3 \\
&= \lambda(2x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_3 + x_3y_2 + x_3y_1 + x_1y_3) \\
&\quad +2x_1'y_1 + 2x_2'y_2 + 2x_3'y_3 + x_1'y_2 + x_2'y_1 + x_2'y_3 + x_3'y_2 + x_3'y_1 + x_1'y_3 \\
&= \lambda\,\psi\Big((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\Big) + \psi\Big((x_1', x_2', x_3'), (y_1, y_2, y_3)\Big) \\
&= \lambda\,\psi\Big(X, Y\Big) + \psi\Big(X', Y\Big)
\end{aligned}$$

Exercice 3

$$
\begin{aligned}
\psi(X,X) &= \psi\Big((x_1,x_2,x_3),(x_1,x_2,x_3)\Big) \\
&= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^3 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3 \\
&= (x_1+x_2)^2 + (x_2+x_3)^2 + (x_1+x_3)^2
\end{aligned}
$$

Exercice 3

$$
\begin{aligned}
\psi(X,X) &= \psi\Big((x_1,x_2,x_3),(x_1,x_2,x_3)\Big) \\
&= 2x_1^2+2x_2^2+2x_3^3+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3 \\
&= (x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+x_3)^2
\end{aligned}
$$

✓ **Définie:**

$$
\begin{aligned}
\psi(X,X)=0 \quad &\Rightarrow \quad (x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+x_3)^2=0 \\
&\Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x_1+x_2 &=& 0 \\ x_2+x_3 &=& 0 \\ x_1+x_3 &=& 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x_1 &=& -x_2 \\ x_2 &=& x_3 \\ x_1 &=& x_3 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x_1 &=& -x_2=x_3=-x_2 \\ x_1 &=& x_2=x_3=0 \end{array}\right. \\
&\Rightarrow X=(0,0,0)=0_{\mathbb{E}}
\end{aligned}
$$

Exercice 3

$$\begin{array}{rcl} \psi(X,X) & = & \psi\Big((x_1,x_2,x_3),(x_1,x_2,x_3)\Big) \\ & = & 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^3 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3 \\ & = & (x_1+x_2)^2 + (x_2+x_3)^2 + (x_1+x_3)^2 \end{array}$$

✓ Définie:

$$\psi(X,X) = 0 \quad \Rightarrow \quad (x_1+x_2)^2 + (x_2+x_3)^2 + (x_1+x_3)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 & = & 0 \\ x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_1 + x_3 & = & 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 & = & -x_2 \\ x_2 & = & x_3 \\ x_1 & = & x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 & = & -x_2 = x_3 = -x_2 \\ x_1 & = & x_2 = x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad X = (0,0,0) = 0_{\mathbb{E}}$$

✓ Positivité:

$$\psi(X,X) = (x_1+x_2)^2 + (x_2+x_3)^2 + (x_1+x_3)^2 \geq 0$$

➡ ψ est un produit scalaire.

Innégalité de Cauchy-Schwartz

Innégalité de Cauchy-Schwartz

Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{R}-$espace vectoriel et $< .,. >$ un **produit scalaire** sur $\mathbb{E}$, alors,

$$\left| < x, y > \right|^2 \leq < x, x > . < y, y > \quad \forall\ x, y \in \mathbb{E}$$

Innégalité de Cauchy-Schwartz

Innégalité de Cauchy-Schwartz

Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{R}-$espace vectoriel et $< ., . >$ un **produit scalaire** sur $\mathbb{E}$, alors,

$$\mid < x, y > \mid^2 \leq < x, x > . < y, y > \quad \forall\ x, y \in \mathbb{E}$$

Exemple 1: Soit $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$, pour $X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{E}$ et $Y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{E}$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{E}$ est

$$< X, Y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

L'innégalité de Cauchy-Schwartz est donnée par

$$|< X, Y >|^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$$

Innégalité de Cauchy-Schwartz

Exemple 2: Soit $\mathbb{E} = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, l'espace des fonction continue sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, pour $f,g \in \mathbb{E}$, on définit le produit scalaire sur $\mathbb{E}$:

$$(f,g) = \int_a^b f(t).g(t)\,dt$$

L'innégalité de Cauchy-Schwartz est donnée par

$$|\,(f,g)\,|^2 = \left|\int_a^b f(t).g(t)\,dt\right|^2 \leq \left(\int_a^b f^2(t)\,dt\right).\left(\int_a^b g^2(t)\,dt\right)$$

Exercice

Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

1. **Démontrer que**

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Exercice

Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

1. **Démontrer que**

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)^2 \leq n \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

On applique l'innégalité de Cauchy-Schwartz pour le produit scalaire canonique pour les deux vecteurs $X = (x_1, , x_n)$ et $Y = (1, \ldots, 1)$

$$\begin{aligned}
|< X, Y >|^2 = \Big|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\Big|^2 = \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)^2 &\leq \; < X, X > . < Y, Y > = \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big).\Big(\sum_{i=1}^{n} 1^2\Big) \\
&\leq \; \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big).\Big(n\Big) = n \sum_{i=1}^{n} x_i^2
\end{aligned}$$

Exercice

Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on suppose que $x_i > 0 \ \forall\ 1 \leq i \leq n$ et que $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$

1. **Démontrer que**

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \geq n^2$$

Exercice

Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on suppose que $x_i > 0 \ \forall\ 1 \le i \le n$ et que $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$

1. **Démontrer que**

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \ge n^2$$

On applique l'innégalité de Cauchy-Schwartz pour le produit scalaire canonique pour les deux vecteurs $X = (\sqrt{x_1}, , \sqrt{x_n})$ et $Y = (\frac{1}{\sqrt{x_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{x_n}})$

$$\begin{aligned}
|< X, Y >|^2 &= \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\Big)^2 = \Big(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i}.\frac{1}{\sqrt{x_i}}\Big)^2 = n^2 \\
&\le < X, X > . < Y, Y >= \Big(\sum_{i=1}^{n} (\sqrt{x_i})^2\Big).\Big(\sum_{i=1}^{n} (\frac{1}{\sqrt{x_i}})^2\Big) \\
&\le \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big).\Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\Big) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}
\end{aligned}$$