# نمونه سوالات آمادگی میان‌ترم — هوش مصنوعی

## دکتر فدایی و یعقوب‌زاده — بهار ۱۴۰۳

---

## Agents

(1
جدول زیر را پر کنید.

| | سیستم تشخیص صدا | پهباد |
|---|---|---|
| Partially Observable/ Fully Observable | Fully Observable | Partially Observable |
| Deterministic / Stochastic(non-determinstic) | Deterministic | Stochastic |
| Episodic / Sequential | Episodic | Sequential |
| Static / Dynamic | Static | Dynamic |
| Discrete / Continuous | Discrete/Continuous | Continuous |
| Single Agent / Multi Agent | Single Agent | Multi Agent |

سیستم تشخیص صدا با گرفتن صدا به عنوان ورودی، مشخصاتی از گوینده مانند جنسیت و سن را تعیین میکند. صدا کاملا دریافت میشود و اطلاعات ورودی سیستم ناقص نیست.
پهباد یک هواپیما بدون سرنشین است که با گردش در مناطق وسیع عکسبرداری میکند. برای این کار چند دوربین دارد که منطقه به شعاع یک کیلومتری از زمین تصویربرداری میکند. این پهباد ممکن است مورد هدف سیستمهای هوشمند دیگری قرار بگیرد و عواملی مانند باد و باران هم طبیعتا روی آن تاثیرگذار است.
(2

بازی دوز (X-O) را در نظر بگیرید. برای هر کدام از ویژگی‌های زیر، گزینه درست را انتخاب کنید.

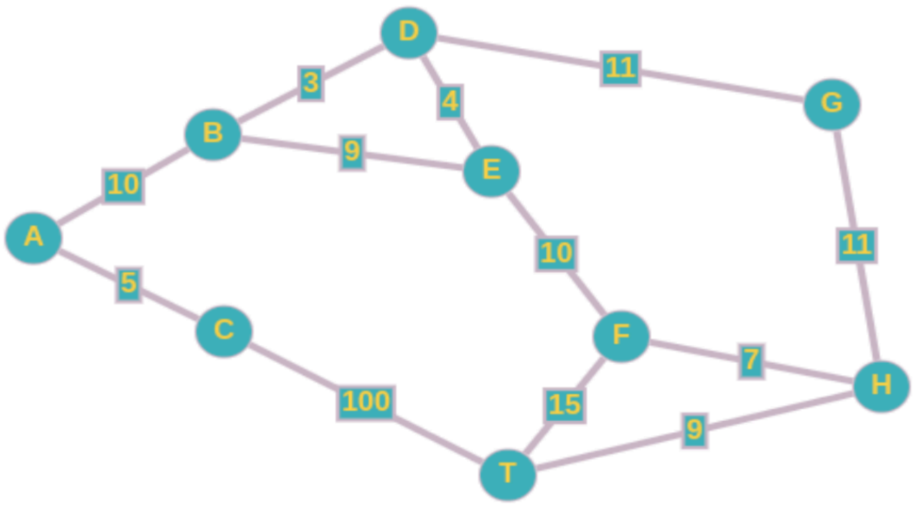
1. Observability: **Fully Observable**/Partially Observable
2. Temporality: Episodic/**Sequential**
3. Dynamism: Dynamic/Semidynamic/**Static**
4. Granularity: Continuous/**Discrete**
5. Information: **Known**/Unknown

## Search

1)

## Uninformed Search

با استفاده از الگوریتم uniform cost search حداقل هزینه برای رسیدن از راس A به T را در گراف زیر محاسبه کنید. اگر در یک مرحله چند انتخاب داشتید، راسی را انتخاب کنید که از لحاظ ترتیب الفبا کوچک‌تر است. همچنین به ازای تمام stateهای دیده شده مجموعه‌های explored، frontier، مسیر طی شده،زمان صرف شده و راسی که روی آن قرار دارید را بنویسید.




پاسخ:

| frontier | explored | cost | path | current node |
|---|---|---|---|---|
| B, C | A | 0 | A | A |
| B, T | A, C | 5 | A, C | C |
| D, E, T | A, B, C | 10 | A, B | B |
| G, E, T | A, C, B, D | 13 | A, B, D | D |
| G, F, T | A, C, B, D, E | 17 | A, B, D, E | E |
| H, F, T | A, C, B, D, E, G | 24 | A, B, D, G | G |
| H, T | A, C, B, D, E, G, F | 27 | A, B, D, E, F | F |
| T | A, C, B, D, E, G, F, H | 34 | A, B, D, E, F, H | H |
| _ | A, C, B, D, E, G, F, H, T | 42 | A, B, D, E, F, T | T |

(2

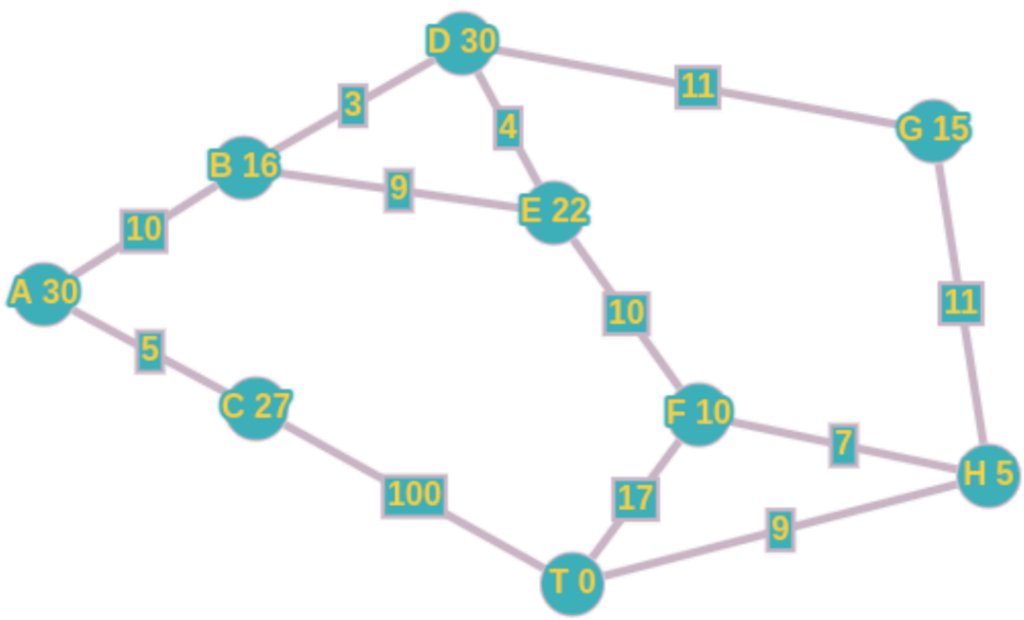
## Informed Search

حال در این مرحله به هر راس یک مقدار هیوریستیک نسبت داده شده است. این بار الگوریتم A* را روی گراف اجرا کنید و حداقل هزینه برای رسیدن از A به T را به دست آورید.

اگر در یک مرحله چند انتخاب داشتید، راسی را انتخاب کنید که از لحاظ ترتیب الفبا کوچک‌تر است. همچنین به ازای تمام stateهای دیده شده مجموعه‌های explored، frontier، مسیر طی شده، زمان صرف شده، مجموع هیوریستیک و زمان صرف شده و راسی که روی آن قرار دارید را بنویسید.

در انتها نیز مقادیر هیوریستیک را از لحاظ admissible و consistent بودن بررسی کنید.

توجه داشته باشید که هر state را فقط یک بار بررسی کنید، یعنی اگر یک راس در explored بود، حتی اگر مسیر کوتاه‌تری برای آن پیدا شد، دوباره این راس را بررسی نمی‌کنیم.



پاسخ:

| frontier | explored | cost + h | cost | path | current node |
|---|---|---|---|---|---|
| B, C | A | 30 | 0 | A | A |
| D, E, C | A, B | 26 | 10 | A, B | B |
| D, E, T | A, B, C | 32 | 5 | A, C | C |
| D, F, T | A, B, C, E | 41 | 19 | A, B, E | E |
| D, H, T | A, B, C, E, F | 39 | 29 | A, B, E, F | F |
| G, D, T | A, B, C, E, F, H | 41 | 36 | A, B, E, F, H | H |
| H, T | A, B, C, E, F, H, D | 43 | 13 | A, B, D | D |
| T | A, B, C, E, F, H, D, G | 39 | 24 | A, B, D, G | G |
| _ | A, B, C, E, F, H, D, G, T | 44 | 45 | A, B, D, G, H, T | T |

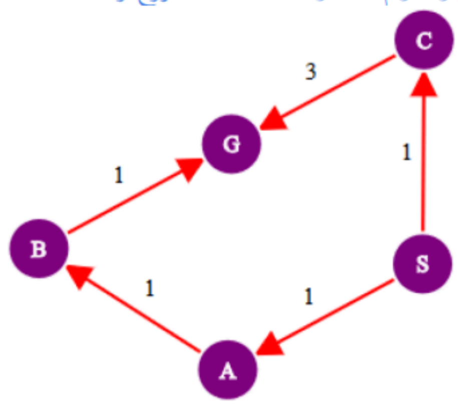
با توجه به مقادیر داده شده درمی‌یابیم که هیوریستیک داده شده addmissible است ولی consistent نیست چون :
H(A) - H(C) > cost(A -> C) = 5

3)

الف) Breadth-first search حالت خاصی از uniform-cost search است.
درست. چون در حالتی که تمام هزینه‌ها برابر 1 باشد، uniform-cost search همان کاری را انجام می‌دهد که BFS انجام خواهد داد.

ب) اگر در الگوریتم uniform-cost search یک عدد ثابت مثبت (c) به تمام هزینه‌ها اضافه کنیم، مسیر بازگردانده شده به هدف تغییری نمی‌کند.

نادرست. فرض کنید فضای حالت زیر را داریم که در آن S حالت شروع و G حالت هدف می‌باشد:




حال اگر $c = 4$ باشد، مسیر بهینه از SABG به SCG تغییر می‌کند.

ج) اگر g(s) و h(s) دو تابع consistent باشند، میانگین آنها نیز consistent می‌باشد.

درست.

$h(s) \leq h(s') + c(s,a)$ , (I)

$g(s) \leq g(s') + c(s,a)$ , (II)

از روابط (I) و (II) نتیجه می‌شود:

$$\frac{1}{2} \times (h(s) + g(s)) \leq c(s,a) + \frac{1}{2} \times (h(s') + g(s'))$$

د) اگر g(s) و h(s) دو تابع admissible باشند، مینیمم آن‌ها نیز admissible است.

درست. بر اساس تعریف admissiblity و فرض آن‌که $h^{*}(s)$ کمترین هزینه باقی‌مانده با شروع از s به سمت حالت نهایی است داریم:

$h(s) \leq h^{*}(s)$ , (I)

$g(s) \leq h^{*}(s)$ , (II)

از روابط (I) و (II) داریم:

$$\min(h(s), g(s)) < h^{*}(s)$$

(4

ثابت کنید که در الگوریتم A* اگر تابع هیوریستیک $h_n$ انتخاب شده consistent باشد، آنگاه مقدار $f_n$ همواره در هر مسیر دلخواه در درخت جست و جو، غیر نزولی خواهد بود.

پاسخ: مسیر دلخواه از نقطه N به نقطه M را در نظر میگیریم و داریم :

- $f_{(n)} = h_{(n)} + g_{(n)}$
- $g_{(n')} = cost(n, n') + g_{(n)}$

$cost(N, M) \geq h_{(N)} - h_{(M)} \Rightarrow cost(N, M) + g_{(N)} \geq h_{(N)} - h_{(M)} + g_N \Rightarrow g_M \geq h_{(N)} - h_{(M)} + g_N$

$g_M + h_{(M)} \geq h_{(N)} + g_N \Rightarrow f_M \geq f_N \Rightarrow$ اثبات شد

5) درست یا غلط بودن گزاره های زیر را اثبات کنید.

1) باقی مانده = 0 : اگر $x$ و $y$ دو تابع consistent باشند، میانگین آنها نیز consistent می باشد.

2) باقی مانده = 1: اگر $x$ و $y$ دو تابع admissible باشند، میانگین آنها نیز admissible می باشد.

3) باقی مانده = 2 : اگر $x$ یک تابع consistent و $y$ یک تابع admissible باشند، مینیمم آنها نیز consistent می باشد.

4) باقی مانده = 3 : اگر در الگوریتم uniform cost search، یک عدد ثابت مثبت C را به هزینه هر مرحله اضافه کنیم، مسیری که از نقطه شروع به هدف می رسد تغییر نمی کند.

5) باقی مانده = 4 : uniform cost search یک حالت خاص از A* search است.

1) $cost(N, M) \geq x(N) - x(M)$ , $cost(N, M) \geq y(N) - y(M) \Rightarrow$

$2 * cost(N, M) \geq x(N) - x(M) + y(N) - y(M) \Rightarrow$

$cost(N, M) \geq 1/2 * (x(N) + y(N)) - (x(M) - y(M)) \Rightarrow$ درست

2) $h^*(n)$ $is\ the\ true\ cost$ و $x(n) \leq h^*(n)$ , $y(n) \leq h^*(n) \Rightarrow$

$x(n) + y(n) \leq 2 * h^*(n) \Rightarrow 1/2 * (x(n) + y(n)) \leq h^*(n) \Rightarrow$ درست

3) نادرست. به عنوان مثال فرض کنید که $y$ یک تابع admissible اما inconsistent باشد و تابع $x$ تابع $y$ را هم شامل شود. حال مینیمم آن ها $y$ می شود که inconsistent است.

4) نادرست. فرض کنید دو مسیر از نقطه شروع S به نقطه هدف G وجود دارد. $S \rightarrow A \rightarrow G$ و $S \rightarrow G$ و هزینه رسیدن از S به A برابر یک، از A به G برابر یک و از S به G برابر با سه است. پس مسیر $S \rightarrow A \rightarrow G$ بهینه تر خواهد بود. حال اگر به هزینه تمام مسیر ها، دو واحد بیافزاییم، مسیر بهینه $S \rightarrow G$ خواهد شد.

5) درست. اگر $h(n) = 0$ باشد آنگاه uniform cost search یک حالت خاص از A* search خواهد بود.

6)

یک بازی به نام color puzzle داریم. در این بازی m جدول n*n داریم. در این m جدول، n*n کاشی به رنگ ۱، n*n کاشی به رنگ ۲، ... و n*n - 1 کاشی به رنگ n قرار گرفته است یک کاشی به رنگ n نیز خارج از جداول داریم. در نتیجه یک خانه خالی داریم. در این بازی دو نوع حرکت داریم:

1. در هر مرحله می‌توان یکی از کاشی‌های مجاور خانه خالی را به آن خانه منتقل کرد.
2. فرض کنید جدول A دارای خانه‌ی خالی است. در هر مرحله می‌توان یک جدول دیگر مانند B را انتخاب کرد و کاشی‌ای که در خانه‌ی متناظر خانه‌ی خالی در A است را به خانه‌ی خالی در A برد.
3. کاشی خارج از جدول را در جای خالی گذاشت. در این صورت دیگر اجازه‌ی انجام هیچ حرکتی را نداریم.

هدف این است که هر جدول تنها دارای یک رنگ کاشی باشد و همه‌ی جداول کامل باشند.

یک هیوریستیک غیر بدیهی (به عنوان مثال تعداد جدول هایی که بیش از یک رنگ دارند یک هیوریستیک بدیهی محسوب می‌شود) برای حل این مسئله ارائه دهید. همچنین admissible و consistent بودن هیوریستیک خود را اثبات کنید. توجه کنید محاسبه‌ی هیوریستیک شما باید از اردر یک چندجمله‌ای بر مبنای n و m باشد.

**پاسخ)**

هیوریستیک را به این صورت تعریف می‌کنیم: به ازای هر جدول می‌بینیم این جدول بیش‌از همه دارای چه رنگی است. فرض کنید بیشترین تعداد کاشی همرنگ در جدول iام برابر $t_i$ است. هیوریستیک را به این صورت تعریف می‌کنیم:

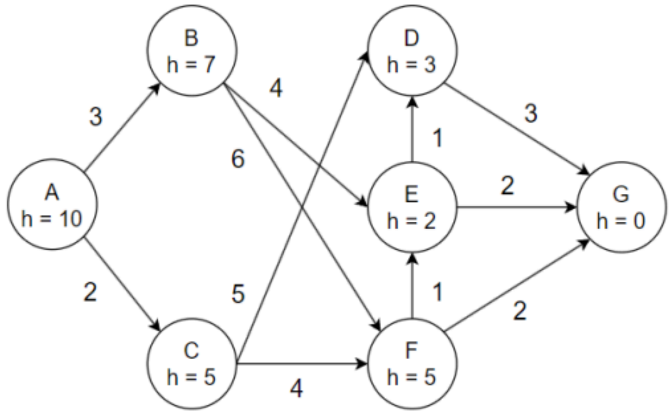
$$h = \Sigma_1^n n^2 - t_i$$

با هر حرکتی که ما انجام می‌دهیم حداکثر یک واحد از هیوریستیک کم می‌شود، در نتیجه هیوریستیک ما هم admissible است و هم consistent.

زمان مورد نیاز برای محاسبه هیوریستیک نیز از اردر $m \times n^2$ است.

(7

گراف زیر را در نظر بگیرید:




الف) با شروع از گره A و حرکت به گره مقصد G، ترتیب دیده شدن (Explore) گره‌ها را برای هر کدام از الگوریتم‌های BFS و DFS و A* مشخص کنید. در صورتی که در یک مرحله می‌توانستید بیش از یک گره را انتخاب کنید، ترتیب حروف الفبا، گره انتخاب شده را مشخص می‌کند (برای مثال A نسبت به B اولویت دارد).

پاسخ:

**BFS: A, B, C, E, F, D, G**

**DFS: A, B, E, G**

**A*: A, C, B, E, G**

ب) کدام یک از الگوریتم‌های مشخص شده در مورد (الف) Optimal هستند؟

**هیچ کدام Optimal نیستند. بدیهی‌ست که مسیر بهینه ACFG است که در هیچ کدام از الگوریتم‌ها به درستی یافت نشده است.**

**الگوریتم A* تنها در حالتی Optimal است که هیوریستیک استفاده شده Admissible باشد.**

ج) کدام یک از الگوریتم‌های مشخص شده در مورد (الف) Complete هستند؟

**الگوریتم BFS یک الگوریتم Complete است.**

**الگوریتم DFS یک الگوریتم Complete نیست زیرا ممکن است در حلقه گیر کند.**

**الگوریتم A* هم یک الگوریتم Complete است مگر اینکه تعداد بی‌شماری گره با مقدار $f(n) \leq C^*$ وجود داشته باشد.**

(8

فرض کنید که یک درخت binary و n راسی داریم که در هر راس آن یک عدد از میان 1 تا n نوشته شده است. می‌خواهیم اعداد بر روی این درخت را به گونه‌ای جابه‌جا کنیم که درخت نهایی یک binary search tree باشد(اعداد واقع در زیر درخت سمت راست و چپ هر راس به ترتیب از عدد آن راس بزرگتر و کوچکتر باشند). در هر مرحله می‌توانیم اعداد دو راس مجاور را با یکدیگر جابه‌جا کنیم. برای حل این مساله یک heuristic ارائه دهید و admissible و consistent بودن آن را اثبات کنید.

## پاسخ

اگر پس از تعدادی حرکت، درخت به درخت binary search تبدیل شود، هر عدد در جای مشخصی قرار خواهد گرفت. فرض کنیم برای هر عدد $i$ دو راس $s_i$ و $t_i$ به ترتیب مکان آن عدد در درخت کنونی و درخت binary search نهایی باشند و همچنین $d(u, v)$ برابر فاصله دو راس $u$ و $v$ بر روی درخت باشد. آن‌گاه heuristic خود را برای این مساله به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$H(T) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} d(s_i, t_i)$$

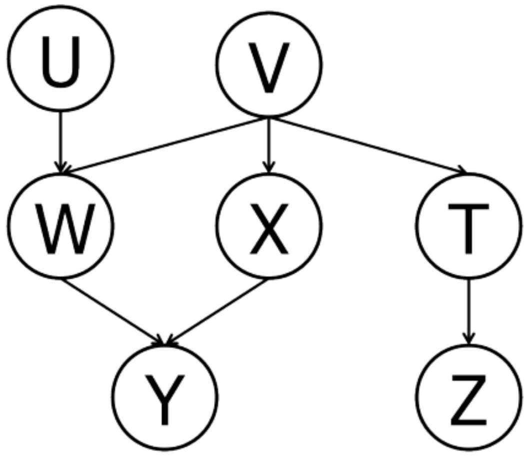
حال دو ویژگی consistency و admissiblity را برای این heuristic اثبات می‌کنیم.

می‌دانیم برای آن که درخت T به binary search tree تبدیل شود، باید عدد $i$ حداقل به اندازه $d(s_i, t_i)$ بر روی درخت جابه‌جا شود و زمانی به درخت binary search رسیده‌ایم که مقدار عبارت $\sum_{i=1}^{n} d(s_i, t_i)$ برابر ۰ شود. همچنین در هر حرکت دو عدد مجاور بر روی درخت با یکدیگر جابه‌جا می‌شوند که به این معنی است که مقدار $\sum_{i=1}^{n} d(s_i, t_i)$ حداکثر دو واحد تغییر خواهد کرد. بنابراین برای ۰ کردن مقدار عبارت گفته شده به حداقل $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} d(s_i, t_i)$ حرکت نیاز می‌باشد. بنابراین heuristic داده شده admissible می‌باشد.

همچنین اگر پس از $k$ حرکت از درخت $S$ به $T$ برسیم، مقدار $\sum_{i=1}^{n} d(s_i, t_i)$ حداکثر $2k$ واحد تغییر می کند که به این معنی است که $H(T) - H(S) \le k$. نتیجه می‌گیریم که heuristic داده شده consistent نیز می‌باشد.

شبکه بیزی

**(a)** [10 pts] For the Bayes' net below, we are given the query $P(Z \mid +y)$. All variables have binary domains. Assume we run variable elimination to compute the answer to this query, with the following variable elimination ordering: $U$, $V$, $W$, $T$, $X$.




Complete the following description of the factors generated in this process:

After inserting evidence, we have the following factors to start out with:

$$P(U), P(V), P(W|U,V), P(X|V), P(T|V), P(+y|W,X), P(Z|T).$$

When eliminating $U$ we generate a new factor $f_1$ as follows:

$$f_1(V,W) = \sum_u P(u)P(W|u,V).$$

This leaves us with the factors:

$$P(V), P(X|V), P(T|V), P(+y|W,X), P(Z|T), f_1(V,W).$$

When eliminating $V$ we generate a new factor $f_2$ as follows:

$$f_2(T,W,X) = \sum_v P(v)P(X|v)P(T|v)f_1(v,W).$$

This leaves us with the factors:

$$P(+y|W,X), P(Z|T), f_2(T,W,X).$$

When eliminating $W$ we generate a new factor $f_3$ as follows:

$$f_3(T, X, +y) = \sum_w P(+y|w, X) f_2(T, w, X).$$

This leaves us with the factors:

$$P(Z|T), f_3(T, X, +y).$$

When eliminating $T$ we generate a new factor $f_4$ as follows:

$$f_4(X, +y, Z) = \sum_t P(Z|t) f_3(t, X, +y).$$

This leaves us with the factor:

$$f_4(X, +y, Z).$$

When eliminating $X$ we generate a new factor $f_5$ as follows:

$$f_5(+y, Z) = \sum_x f_4(x, +y, Z).$$

This leaves us with the factor:

$$f_5(+y, Z)$$

.

**(b)** [2 pts] Briefly explain how $P(Z \mid +y)$ can be computed from $f_5$.

Simply renormalize $f_5$ to obtain $P(Z \mid +y)$. Concretely, $P(z \mid +y) = \frac{f_5(z,+y)}{\sum_{z'} f_5(z',y)}$.

**(c)** [2 pts] Amongst $f_1, f_2, \ldots, f_5$, which is the largest factor generated? (Assume all variables have binary domains.) How large is this factor?

$f_2(T, W, X)$ is the largest factor generated. It has 3 variables, hence $2^3 = 8$ entries.

**(d)** [8 pts] Find a variable elimination ordering for the same query, i.e., for $P(Z \mid y)$, for which the maximum size factor generated along the way is smallest. Hint: the maximum size factor generated in your solution should have only 2 variables, for a size of $2^2 = 4$ table. Fill in the variable elimination ordering and the factors generated into the table below.

Note: in the naive ordering we used earlier, the first line in this table would have had the following two entries: $U$, $f_1(V, W)$.

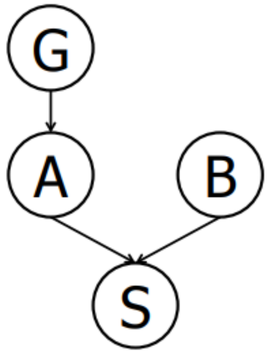
Note: multiple orderings are possible.

| Variable Eliminated | Factor Generated |
|---|---|
| $T$ | $f_1(Z, V)$ |
| $X$ | $f_2(+y, W, V)$ |
| $W$ | $f_3(+y, U, V)$ |
| $U$ | $f_4(+y, V)$ |
| $V$ | $f_5(+y, Z)$ |

Suppose that a patient can have a symptom ($S$) that can be caused by two different diseases ($A$ and $B$). It is known that the variation of gene $G$ plays a big role in the manifestation of disease $A$. The Bayes' Net and corresponding conditional probability tables for this situation are shown below. For each part, you may leave your answer as an arithmetic expression.

| $\mathbb{P}(G)$ | |
|---|---|
| $+g$ | 0.1 |
| $-g$ | 0.9 |

| $\mathbb{P}(A\|G)$ | | |
|---|---|---|
| $+g$ | $+a$ | 1.0 |
| $+g$ | $-a$ | 0.0 |
| $-g$ | $+a$ | 0.1 |
| $-g$ | $-a$ | 0.9 |




| $\mathbb{P}(B)$ | |
|---|---|
| $+b$ | 0.4 |
| $-b$ | 0.6 |

| $\mathbb{P}(S\|A,B)$ | | | |
|---|---|---|---|
| $+a$ | $+b$ | $+s$ | 1.0 |
| $+a$ | $+b$ | $-s$ | 0.0 |
| $+a$ | $-b$ | $+s$ | 0.9 |
| $+a$ | $-b$ | $-s$ | 0.1 |
| $-a$ | $+b$ | $+s$ | 0.8 |
| $-a$ | $+b$ | $-s$ | 0.2 |
| $-a$ | $-b$ | $+s$ | 0.1 |
| $-a$ | $-b$ | $-s$ | 0.9 |

**(a)** [2 pts] Compute the following entry from the joint distribution:

$\mathbb{P}(+g, +a, +b, +s) =$

$\mathbb{P}(+g)\mathbb{P}(+a| + g)\mathbb{P}(+b)\mathbb{P}(+s| + b, +a) = (0.1)(1.0)(0.4)(1.0) = 0.04$

**(b)** [2 pts] What is the probability that a patient has disease $A$?

$\mathbb{P}(+a) =$ $\mathbb{P}(+a| + g)\mathbb{P}(+g) + \mathbb{P}(+a| - g)\mathbb{P}(-g) = (1.0)(0.1) + (0.1)(0.9) = 0.19$

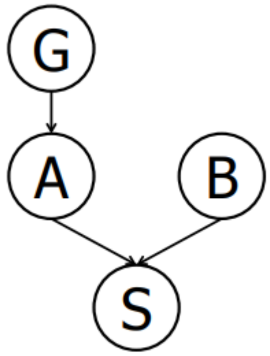
**(c)** [2 pts] What is the probability that a patient has disease $A$ given that they have disease $B$?

$\mathbb{P}(+a| + b) =$ $\mathbb{P}(+a) = 0.19$ The first equality holds true as we have $A \perp\!\!\!\perp B$, which can be inferred from the graph of the Bayes' net.

The figures and table below are identical to the ones on the previous page and are repeated here for your convenience.

| $\mathbb{P}(G)$ | |
|---|---|
| $+g$ | 0.1 |
| $-g$ | 0.9 |

| $\mathbb{P}(A\|G)$ | | |
|---|---|---|
| $+g$ | $+a$ | 1.0 |
| $+g$ | $-a$ | 0.0 |
| $-g$ | $+a$ | 0.1 |
| $-g$ | $-a$ | 0.9 |




| $\mathbb{P}(B)$ | |
|---|---|
| $+b$ | 0.4 |
| $-b$ | 0.6 |

| $\mathbb{P}(S\|A,B)$ | | | |
|---|---|---|---|
| $+a$ | $+b$ | $+s$ | 1.0 |
| $+a$ | $+b$ | $-s$ | 0.0 |
| $+a$ | $-b$ | $+s$ | 0.9 |
| $+a$ | $-b$ | $-s$ | 0.1 |
| $-a$ | $+b$ | $+s$ | 0.8 |
| $-a$ | $+b$ | $-s$ | 0.2 |
| $-a$ | $-b$ | $+s$ | 0.1 |
| $-a$ | $-b$ | $-s$ | 0.9 |

**(d)** [4 pts] What is the probability that a patient has disease $A$ given that they have symptom $S$ and disease $B$?

$$\mathbb{P}(+a|+s,+b) = \frac{\mathbb{P}(+a,+b,+s)}{\mathbb{P}(+a,+b,+s)+\mathbb{P}(-a,+b,+s)} = \frac{\mathbb{P}(+a)\mathbb{P}(+b)\mathbb{P}(+s|+a,+b)}{\mathbb{P}(+a)\mathbb{P}(+b)\mathbb{P}(+s|+a,+b)+\mathbb{P}(-a)\mathbb{P}(+b)\mathbb{P}(+s|-a,+b)}$$
$$= \frac{(0.19)(0.4)(1.0)}{(0.19)(0.4)(1.0)+(0.81)(0.4)(0.8)} = \frac{0.076}{0.076+0.2592} \approx 0.2267$$

**(e)** [2 pts] What is the probability that a patient has the disease carrying gene variation $G$ given that they have disease $A$?

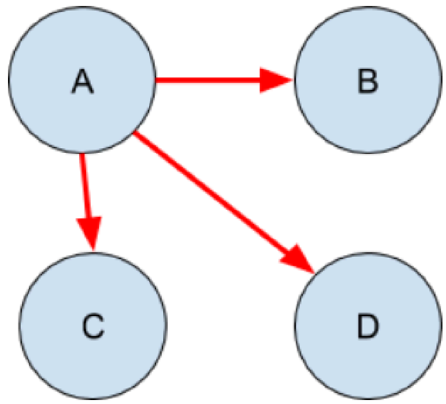
$$\mathbb{P}(+g|+a) = \frac{\mathbb{P}(+g)\mathbb{P}(+a|+g)}{\mathbb{P}(+g)\mathbb{P}(+a|+g)+\mathbb{P}(-g)\mathbb{P}(+a|-g)} = \frac{(0.1)(1.0)}{(0.1)(1.0)+(0.9)(0.1)} = \frac{0.1}{0.1+0.09} = 0.5263$$

**(f)** [2 pts] What is the probability that a patient has the disease carrying gene variation $G$ given that they have disease $B$?

$\mathbb{P}(+g|+b) = \mathbb{P}(+g) = 0.1$ The first equality holds true as we have $G \perp\!\!\!\perp B$, which can be inferred from the graph of the Bayes' net.

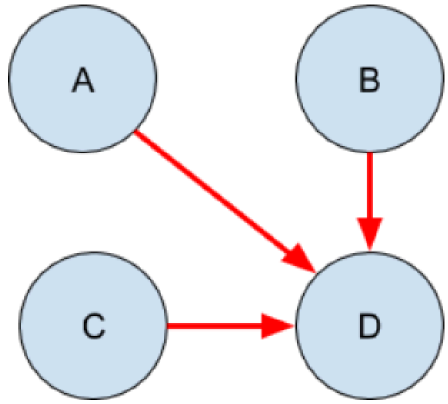
iv. (3 pts) You are given a Bayes Net with the four nodes below. The "number of rows" in a Bayes Net is the total number of rows in all CPTs (including the two-row tables for variables with no incoming edges). Assume all variables are binary.

Draw **3** edges such that the Bayes Net is valid, and the number of rows in the Bayes Net is **smaller** than the number of rows in the full joint table for all four variables.




**Solution:** (The above is an example solution: any solution where no variable has multiple parents would work.)
**Explanation:** The number of rows in the full joint table is $2^4=16$. We are thus looking for a Bayes net with fewer than 16 total rows.
We note that if each edge points to a different variable, then the number of total rows is 14 (2 for the sole unconditioned variable, and 4 for each of the other CPTs).
To see that this is the necessary condition (when $n = 4$), we prove that any solution with a variable with two parents must have at least 16 rows. Specifically, a variable with three parents will have 16 rows, which is too many. If there is a variable with two parents, it will have 8 rows, but there will be another variable with one parent and thus 4 rows; combined with the two variables with no parents and thus 2 rows each, we have a total of 16 rows.

Draw **3** edges such that the Bayes Net is valid, and the number of rows in the Bayes Net is **larger** than the full joint table.




**Solution:** (The above is an example solution: any solution where all three edges are pointing to the same variable would work.)
**Explanation:** The solution for this part continues from the same reasoning as the prior: the only way to get the total number of rows to be more than 16 is if a variable has three parents.

**Common Mistakes (for both parts):**

- Drawing something that isn't a Bayes net. This includes having undirected edges as well as having cycles in the graph (self-loops included).
- Using more or less than three edges.

# Clustering

## سوال اول

با استفاده از الگوریتم k-means نقاط زیر را در سه cluster قرار دهید و به سوالات پاسخ دهید (فرض کنید مرکز اولیه ی cluster ها به ترتیب نقاط A1 و A4 و A7 هستند. الگوریتم را فقط یک epoch اجرا کنید):

A1=(2,10), A2=(2,5), A3=(8,4), A4=(5,8), A5=(7,5), A6=(6,4), A7=(1,2), A8=(4,9)

الف) بعد از یک epoch برای هر نقطه cluster آن را مشخص کنید.

ب) مرکز های جدید را محاسبه کنید.

ج) نقاط را رسم کنید و در شکل cluster های آن ها را مشخص کنید.

د) چند iteration دیگر نیاز است تا الگوریتم همگرا شود؟ (دیگر cluster های نقاط تغییر نکند) برای هر iteration صرفا نقاط و cluster های آن ها را رسم کنید.